

Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Університет Казимира Великого в Бидгощі

Олег Никифорчин

Лінійна алгебра та елементи геометрії

Івано-Франківськ

2022

Лінійна алгебра та елементи геометрії. / О. Никифорчин. — Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника. Університет Казимира Великого в Бидгощі. — 2022. — 346 с.

© Олег Никифорчин, 2022.

Зміст

Przedmowa do polskiego wydania	10
Передмова до українського видання	12
Частина 1. Числа і вектори. Системи лінійних рівнянь і матриці.	
Прямі і площини	14
Розділ I. Числа. Алгебраїчні структури	15
Лекція 1. Натуральні, цілі, раціональні, дійсні числа. Групи, кільця, тіла	15
А. Множини та відображення	15
Б. Операції	17
В. Групи та кільця	19
Г. Тіла і поля	20
Лекція 2. Комплексні числа	22
А. Розширення тіла. Алгебраїчно замкнене поле	22
Б. Конструкція поля $\mathbb{C}$	24
В. Дійсна пряма і комплексна площина	25
Г. Число, спряжене до комплексного числа. Множення і ділення чисел у алгебраїчній формі	27
Д. Модуль, аргумент і тригонометрична форма комплексного числа	28
Е. Знаходження оберненого, множення, ділення, піднесення до степеня та добування кореня з чисел у тригонометричній формі	30
Ж. “Переваги” та “недоліки” поля $\mathbb{C}$. Основна теорема алгебри	32
І. Показникова форма комплексного числа	33
Розділ II. Векторні простори	36
Лекція 1. Поняття векторного простору. Підпростори	36
А. Геометричні вектори	36

Б. Властивості додавання	38
В. Множення геометричних векторів на дійсні числа	40
Г. Координатний простір	41
Д. Поняття векторного простору над полем	42
Е. Підпростори	44
Лекція 2. Лінійні оболонки. Системи векторів. База та координати щодо бази	47
А. Оболонки та лінійні комбінації	47
Б. Лінійна незалежність	50
В. Лема про заміну	53
Г. Бази	54
Д. Координати	56
Розділ III. Матриці і системи лінійних рівнянь	61
Лекція 1. Матриці та операції над матрицями	61
А. Поняття матриці	61
Б. Типи числових матриць	62
В. Додавання матриць та множення їх на числа. Транспонування	64
Г. Множення матриць між собою	66
Лекція 2. Системи лінійних рівнянь	72
А. Означення лінійної системи та її матрична форма	72
Б. Типи систем лінійних рівнянь	73
В. Множина розв'язків однорідної лінійної системи	74
Г. Загальний розв'язок неоднорідної системи	76
Д. Лінійні системи зі східчастою розширеною матрицею	77
Е. Метод Гаусса розв'язування лінійних систем	79
Ж. Метод Гаусса-Йордана	83
Розділ IV. Визначники та їх застосування	88
Лекція 1. Група перестановок	88
А. Композиція відображень	88
Б. Перестановки та симетрична група	90
В. Цикли та транспозиції. Парні та непарні перестановки	93
Г. Інверсії	96
Лекція 2. Означення визначника та його властивості	99

А. Визначник як сума добутків	99
Б. Альтернативне означення визначника і визначник транспонованої матриці	101
В. Визначники спеціальних типів матриць	102
Г. Властивості визначників	107
Д. Розклад Лапласа	111
Лекція 3. Ранги матриць, елементарні перетворення та визначники	116
А. Ранг матриці за рядками або стовпцями	116
Б. Теорема Кронекера-Капеллі	118
В. Ранг матриці за мінорами	118
Г. Елементарні матриці	120
Д. Визначник добутку матриць	123
Е. Аксиоматичне означення визначника	124
Лекція 4. Формули Крамера. Обернена матриця та її застосування	128
А. Метод Крамера	128
Б. Обернена матриця	134
В. Матричний метод розв'язування лінійних систем	139
Г. Лінійні групи	140
 Розділ V. Афінні простори. Елементарна геометрія площини і тривимірного простору	 142
Лекція 1. Афінні простори. Системи координат	142
А. Поняття афінного простору	142
Б. Прямі і відрізки. Афінні та опуклі комбінації двох точок	143
В. Афінні підпростори та опуклі множини	146
Г. Афінний координатний простір	150
Д. Афінна система координат	151
Е. Барицентричні координати	154
Лекція 2. Скалярний добуток. Прямі на площині	159
А. Скалярний добуток геометричних векторів	159
Б. Формула скалярного добутку. Декартова прямокутна система координат	161
В. Рівняння прямої на площині	162
Г. Орієнтована площа	165

Д.	Нормальний вектор і загальне рівняння	170
Е.	Спеціальні типи загального рівняння	171
Ж.	Взаємне розташування прямих і кути між ними	173
Лекція 3.	Векторний та мішаний добуток	178
А.	Векторний добуток	178
Б.	Мішаний добуток	181
В.	Формули для векторних і мішаних добутків	185
Лекція 4.	Прямі та площини в тривимірному просторі	188
А.	Параметричні рівняння прямої та площини	188
Б.	Рівняння площини та прямої через нормальні вектори	189
В.	Використання мішаних та векторних добутків	192
Г.	Взаємне розташування площин	196
Д.	Взаємне розташування прямих	198
Е.	Взаємне розташування прямої та площини	199
Частина 2. Лінійні оператори. Білінійні і квадратичні форми. Квадрики		205
Розділ VI.	Лінійні відображення	206
Лекція 1.	Лінійні оператори	206
А.	Означення і приклади лінійного оператора	206
Б.	Операції над операторами	207
В.	Образ та ядро оператора	208
Г.	Ізоморфізм. Обернений оператор	209
Д.	Ранг і дефект оператора	211
Лекція 2.	Матриці операторів і лінійних форм. Власні вектори та власні значення	213
А.	Матриця лінійного оператора	213
Б.	Лінійні форми та їх матриці	215
В.	Матриця композиції операторів. Матриця оберненого оператора	216
Г.	Означення власного вектора та власного значення. Характеристичне рівняння	217
Д.	Власний підпростір	218
Е.	Пряма сума власних підпросторів	218

Лекція 3. Матриці лінійних операторів у різних базах.	
Діагоналізація матриці лінійного оператора	225
А. Матриця переходу	225
Б. Перетворення матриць операторів і форм під час зміни бази	226
В. Детермінант, слід і характеристичне рівняння як інваріанти	227
Г. Діагоналізація матриці оператора	228
Д. Спектр, кратності коренів характеристичного рівняння та виміри власних підпросторів	230
Лекція 4. Жорданова форма матриці лінійного оператора.	
Фактор-простори	233
А. Многочлени від операторів та матриць	233
Б. Кореневі підпростори	235
В. Пряма сума кореневих підпросторів	238
Г. Фактор-простір	238
Д. Блочно-діагональна матриця лінійного оператора	241
Е. Дія лінійного оператора на окремому кореневому підпросторі	241
Ж. Вимір кореневого підпростору	245
І. Жорданова форма матриці лінійного оператора	247
Розділ VII. Евклідові простори	252
Лекція 1. Скалярний добуток	252
А. Поняття скалярного добутку	252
Б. Приклади скалярних добутків та нерівність Коші	253
В. Скалярний добуток і норма	255
Г. Кути та ортогональність	256
Д. Процес ортогоналізації Грама-Шмідта	257
Лекція 2. Базис та підпростори в евклідових просторах	261
А. Ортонормовані системи та базис	261
Б. Ортогональна сума. Ортогональне доповнення. Ортогональна проекція	262
Розділ VIII. Лінійні оператори в евклідових просторах	266
Лекція 1. Спряжений оператор	266

А.	Означення та існування спряженого оператора	266
Б.	Спряженість та операції над операторами	268
В.	Ядра та образи спряжених операторів	268
Лекція 2.	Самоспряжені оператори	270
А.	Поняття та найпростіші властивості самоспряженого оператора	270
Б.	Існування ортонормованої бази з власних векторів	271
В.	Додатні оператори та їх квадратні корені	273
Лекція 3.	Ортогональні оператори. Полярний розклад	275
А.	Рівносильні означення ортогонального оператора	275
Б.	Оператори, що зберігають ортогональність векторів	278
В.	Полярний розклад	278
Г.	Вигляд лінійних операторів у просторі геометричних векторів на площині	280
Розділ IX.	Функції другого степеня	284
Лекція 1.	Білінійні форми	284
А.	Білінійна форма та її матриця	284
Б.	Перетворення матриці білінійної форми	286
В.	Властивості білінійних форм	287
Г.	Простір білінійних форм	288
Лекція 2.	Квадратичні форми	290
А.	Поняття квадратичної форми та її зв'язок з білінійними формами	290
Б.	Тотожність паралелограма і безпосереднє означення квадратичної форми	292
Лекція 3.	Канонічний вигляд квадратичної форми	296
А.	Квадратичні форми та самоспряжені оператори	296
Б.	Діагоналізація квадратичної форми	297
В.	Сигнатура і закон інерції квадратичних форм	298
Г.	Додатно та від'ємно визначені квадратичні форми	301
Д.	Метод Якобі зведення квадратичної форми до канонічного вигляду	301
Е.	Критерій Сильвестра	304
Розділ X.	Криві і поверхні другого степеня	307

Лекція 1. Еліпс	307
А. Означення та канонічне рівняння еліпса	307
Б. Ексцентриситет еліпса, його полярне рівняння та параметрична форма	309
В. Директриси еліпса	311
Лекція 2. Гіпербола. Парабола	312
А. Означення та канонічне рівняння гіперболи	312
Б. Похилі асимптоти	313
В. Ексцентриситет гіперболи, її полярне рівняння та параметрична форма	315
Г. Директриси гіперболи	316
Д. Означення, канонічне рівняння та полярне рівняння параболи	317
Лекція 3. Квадрики	320
А. Означення квадрики	320
Б. Зміна системи координат	321
В. Спрощення рівняння квадрики	322
Г. Центральна точка функції другого степеня	323
Лекція 4. Класифікація кривих і поверхонь другого степеня	327
А. Криві степеня 2	327
Б. Поверхні степеня 2	329
Предметний показник	337
Література	346