

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ДВНЗ «ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНІКА»**

Факультет/інститут математики та інформатики

Кафедра математичного і функціонального аналізу

**СИЛАБУС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**Теорія міри та інтеграла Лебега**

Освітня програма Математика

Освітній рівень бакалавр

Спеціальність 111 Математика

Галузь знань 11 Математика та статистика

Затверджено на засіданні кафедри  
Протокол № 1 від “28” серпня 2020 р.

## **ЗМІСТ**

1. Загальна інформація
2. Анотація до курсу
3. Мета та цілі курсу
4. Результати навчання (компетентності)
5. Організація навчання курсу
6. Система оцінювання курсу
7. Політика курсу
8. Рекомендована література

<b>1. Загальна інформація</b>	
<b>Назва дисципліни</b>	Теорія міри та інтеграла Лебега
<b>Викладач (-і)</b>	Федак Іван Васильович
<b>Контактний телефон викладача</b>	0973577603
<b>Е-mail викладача</b>	<a href="mailto:ivan.fedak@pnu.edu.ua">ivan.fedak@pnu.edu.ua</a>
<b>Формат дисципліни</b>	Лекції, практичні заняття, індивідуальні завдання у формі домашньої контрольної роботи, аудиторна контрольна робота
<b>Обсяг дисципліни</b>	90 год. - 3 кредити ECTS
<b>Посилання на сайт дистанційного навчання</b>	
<b>Консультації</b>	Консультації проводяться в індивідуальному порядку щодо розв'язування окремих конкретних задач домашньої контрольної роботи або ж за вказаними контактним телефоном чи електронною поштою.
<b>2. Анотація до курсу</b>	
<p>З поняттям міри людству доводилося стикатися ще зі стародавніх часів, вимірюючи відстані, площі, об'єми тощо. У процесі вивчення дисципліни «Теорія міри та інтеграла Лебега» студенти матимуть змогу ознайомитися з основними математичними підходами до теорії вимірних множин та вимірних функцій. З цими поняттями також тісно пов'язане поняття інтеграла Лебега, який є природним узагальненням інтеграла Рімана, з яким студенти вже мали справу як в курсі математичного аналізу, так і шкільному курсі математики.</p>	
<b>3. Мета та цілі курсу</b>	
<p><b>Мета курсу:</b> Ознайомити студентів з поняттями міри Лебега, вимірних за Лебегом функцій, інтеграла Лебега та деякими узагальненнями поняття інтеграла і їх основними властивостями.</p> <p><b>Завдання курсу:</b> Навчити студентів застосовувати властивості міри, вимірних функцій та інтеграла Лебега до розв'язування конкретних задач як теоретичного, так практичного характеру.</p> <p>У результаті проходження курсу студент повинен</p> <p><b>знати:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• поняття множини, потужності множини, міри множини, основні властивості міри Лебега;</li> <li>• властивості вимірних за Лебегом функцій та функцій з обмеженою зміною;</li> <li>• поняття інтеграла Лебега, його властивості, зв'язок з інтегралом Рімана, властивості невизначеного інтеграла Лебега, інтегралів Лебега-Стільтьєса.</li> </ul> <p><b>вміти:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• обґрунтовувати основні властивості перерахованих вище понять;</li> <li>• знаходити потужності та міри множин;</li> <li>• досліджувати функції на їх вимірність за Лебегом;</li> <li>• досліджувати функції на інтегрованість за Лебегом та обчислювати інтеграли Лебега по заданій множині;</li> <li>• знаходити варіацію та варіаційну функцію для функцій з обмеженою зміною;</li> <li>• обчислювати інтеграли Лебега-Стільтьєса.</li> </ul>	

#### 4. Компетентності та результати навчання

Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу; здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях; знання й розуміння предметної області та професійної діяльності; здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями; здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел; здатність працювати автономно; визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків; здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання; здатність до кількісного мислення; здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів.

Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці; розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми; розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями; розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей; знати теоретичні основи і застосовувати методи математичного аналізу для дослідження функцій однієї та багатьох дійсних змінних.

#### 5. Організація навчання курсу

##### Обсяг курсу

Вид заняття	Загальна кількість годин
Лекції	денна форма – 18
<u>практичні</u> лабораторні	денна форма – 18
самостійна робота	денна форма – 54

##### Ознаки курсу

Семестр	Спеціальність	Курс (рік навчання)	Нормативний / вибірковий
5	Математика	3	нормативний

##### Тематика курсу

Тема, план	Форма заняття	Література	Завдання самостійної роботи, год	Вага оцінки	Термін виконання
<b>1. Множини та їх властивості:</b> Множини та операції над ними. Зліченні та незліченні множини. Потужність множини. Відкриті і замкнені множини. Канторова множина.	Лекція (2 год.)	[5] ст. 7 – 25	Аналіз матеріалів теми (2 год.)	1	Тиждень 1
	+ Пр. зан. (2 год)	[2] ст. 11 – 25	Індивідуальне завдання (2 год.)	4	
		[3] ст. 9 – 50			
<b>2. Міра множини. Лебегове продовження міри:</b> Поняття міри. Міра елементарних множин. Лебегове продовження	Лекція (2 год.)	[5] ст. 26 – 39	Аналіз матеріалів теми (3 год.)	2	Тиждень 2
	+ Пр. зан. (2 год)	[2] ст. 215 – 226	Індивідуальне завдання (3 год.)	5	Тиждень 3

плоскої міри. Адитивність, $\sigma$ - адитивність та неперервність міри Лебега.		[3] ст. 56 – 71			
<b>3. Загальне означення міри:</b> Системи множин. Загальне означення міри. Загальні властивості міри.	Лекція (2 год.) + Пр. зан. (2 год)	[5] ст. 39 – 50  [2] ст. 227 – 240	Аналіз матеріалів теми (3 год.)  Індивідуальне завдання (3 год.)	1  5	Тиждень 3  Тиждень 4
<b>4. Вимірні функції та їх властивості:</b> Вимірні функції. Дії над вимірними функціями. Послідовності вимірних функцій.	Лекція (2 год.) + Пр. зан. (2 год)	[5] ст. 50 – 63  [2] ст. 241 – 250  [3] ст. 86 – 97	Аналіз матеріалів теми (3 год. )  Індивідуальне завдання (3 год.)	1  5	Тиждень 5
<b>5. Інтеграл Лебега та його властивості:</b> Прості функції та їх інтегрування за Лебегом. Загальне означення інтеграла Лебега. $\sigma$ - адитивність та абсолютна неперервність інтеграла Лебега.	Лекція (2 год.) + Пр. зан. (2 год)	[5] ст. 64 – 77  [2] ст. 251 – 259  [3] ст. 109 – 118	Аналіз матеріалів теми (3 год.)  Індивідуальне завдання (3 год.)	1  5	Тиждень 6  Тиждень 7
<b>6. Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега:</b> Теорема Лебега. Теорема Леві. Теорема Фату.	Лекція (2 год.) + Пр. зан. (2 год)	[5] ст. 78 – 82  [2] ст. 259 – 263	Аналіз матеріалів теми (3 год.)  Індивідуальне завдання (3 год.)	1  5	Тиждень 8  Тиждень 9
<b>7. Методи обчислення інтеграла Лебега:</b> Зв'язок між інтегралами Лебега та Рімана. Інтеграл Лебега по множині нескінченної міри. Інтеграл Лебега як границя інтегральної суми. Теорема Фубіні.	Лекція (2 год.) + Пр. зан. (2 год)	[5] ст. 82 – 99  [2] ст. 263 – 275  [3] ст. 121 – 126	Аналіз матеріалів теми (3 год.)  Індивідуальне завдання (3 год.)	1  5	Тиждень 10
<b>8. Невизначений інтеграл Лебега:</b> Монотонні функції та їх властивості. Функції з обмеженою	Лекція (4 год.) + Пр. зан.	[5] ст. 100 – 130,  [2]	Аналіз матеріалів теми (4 год.)  Індивідуальне	1  5	Тиждень 11  Тиждень 12

змінюю. Варіаційна функція. Абсолютно неперервні функції та їх зв'язок з невизначеним інтегралом Лебега.	(2 год)	ст. 277 – 292  [3] ст. 191 – 202	завдання (3 год.)		
<b>9. Аудиторна контрольна робота</b>	Контр. робота		(2 год.)	40	Тиждень 13
<b>10. Узагальнення поняття інтеграла:</b> Міри та інтеграл Лебега- Стільтьєса. Теорема Хеллі.	Лекція (2 год.) + Пр. зан. (2 год)	[5] ст. 131 – 142  [2] ст. 306 – 320	Аналіз матеріалів теми (3 год.)	1	Тиждень 14  Тиждень 15

### 6. Система оцінювання курсу

Загальна система оцінювання курсу	Залік (100 балів). З них: 10 балів – поточне оцінювання на практичних заняттях, 40 балів – за домашню контрольну роботу, 40 балів – за аудиторну контрольну роботу, 10 балів – за здачу теоретичного модуля.  <b>Шкала оцінювання: національна та ECTS</b>																				
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Сума балів за всі види навчальної діяльності</th> <th>Оцінка ECTS</th> <th>Оцінка за національною шкалою для заліку</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>90 – 100</td> <td><b>A</b></td> <td rowspan="5">зараховано</td> </tr> <tr> <td>80 – 89</td> <td><b>B</b></td> </tr> <tr> <td>70 – 79</td> <td><b>C</b></td> </tr> <tr> <td>60 – 69</td> <td><b>D</b></td> </tr> <tr> <td>50 – 59</td> <td><b>E</b></td> </tr> <tr> <td>26 – 49</td> <td><b>FX</b></td> <td>не зараховано з можливістю повторного складання</td> </tr> <tr> <td>0-25</td> <td><b>F</b></td> <td>не зараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни</td> </tr> </tbody> </table>	Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою для заліку	90 – 100	<b>A</b>	зараховано	80 – 89	<b>B</b>	70 – 79	<b>C</b>	60 – 69	<b>D</b>	50 – 59	<b>E</b>	26 – 49	<b>FX</b>	не зараховано з можливістю повторного складання	0-25	<b>F</b>	не зараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни
Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою для заліку																			
90 – 100	<b>A</b>	зараховано																			
80 – 89	<b>B</b>																				
70 – 79	<b>C</b>																				
60 – 69	<b>D</b>																				
50 – 59	<b>E</b>																				
26 – 49	<b>FX</b>	не зараховано з можливістю повторного складання																			
0-25	<b>F</b>	не зараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни																			
Вимоги до письмової роботи	Написати розв'язання запропонованих задач з поясненнями (10 балів за кожну задачу аудиторної контрольної роботи та 4 бали – домашньої контрольної роботи).																				
Семінарські заняття	1 бал за кожну пару (кожну годину для заочної форми навчання) активної роботи на практичному занятті																				
Умови допуску до підсумкового контролю	Набрати не менше половини балів за кожну з форм оцінювання.																				

### 7. Політика курсу

Лекції читаються лектором із залученням студентів до обговорення окремих питань. На практичних заняттях студенти виконують запропоновані викладачем завдання з його допомогою. Самостійна робота студента передбачає вивчення теоретичних положень дисципліни та виконання завдань, заданих викладачем на лекціях та практичних заняттях.

Кожна контрольна робота робота виконуються студентом самостійно без використання друкованих та електронних засобів доступу до інформації.

## 8. Рекомендована література

### Базова

1. *Дороговцев А.Я., Константинов О.Ю., Курченко О.О., Івасишен С.Д.* Завдання для практичних і лабораторних занять з курсу «Теорія міри та інтеграла» для студентів спеціальності «математика». – К.: КДУ, 1991. – 76с.
2. *Колмогоров А.М., Фомін С.В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 456с.
3. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480с.
4. *Очан Ю.С.* Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций: Учебное пособие. – М.: Просвещение, 1981. – 271с.
5. *Федак І.В.* Елементи теорії міри та інтеграла Лебега: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Сімик, 2011. – 168 с.

### Допоміжна

1. *Антоневич А.Б., Радыно Я.В.* Функциональный анализ и интегральные уравнения: Учебник. – Минск: БГУ, 2006. – 430с.
2. *Антоневич А.Б., Ваткина Е.И., Мазель М.Х. и др.* Функциональный анализ и интегральные уравнения: Лаб. практикум: Учеб. пособие. / Под редакцией А.Б. Антоневича и Я.В. Радыно. – Минск: БГУ, 2006. – 179с.
3. *Гелбаум И.М., Олмстед Дж. Т.* Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967. – 251с.
4. *Кириллов А.А., Гвишиани А.Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1979. – 384с.
5. *Маслюченко В.К.* Елементи теорії множин: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2002. – 132с.
6. *Маслюченко В.К., Маслюченко О.В., Філіпчук О.І.* Задачі та теореми загальної теорії функцій: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2006. – 80с.
7. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 588с.
8. *Соболев В.И.* Лекции по дополнительным главам математического анализа. – М.: Наука, 1968. – 288с.
9. *Теляковский С.А.* Сборник задач по теории функций действительного переменного. – М.: Наука, 1980. – 112с.
10. *Халмош П.* Теория меры. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 290с.
11. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Специальный курс. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 436с.
12. *Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л.* Интеграл, мера, производная. – М.: Наука, 1967. – 220с.

Викладач



Федак Іван Васильович