

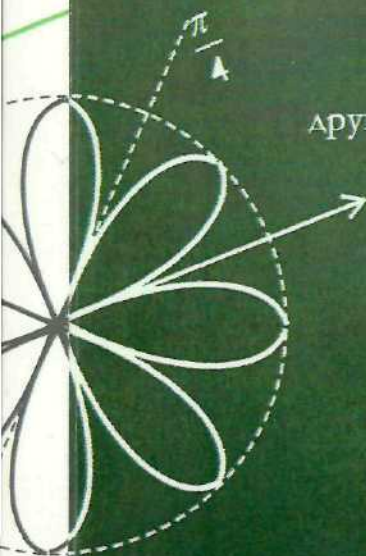
Собкович Р. І.

КОНСПЕКТИ ЛЕКЦІЙ З АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Частина 1

Векторна алгебра.

Геометричні образи рівнянь першого та
другого степеня з двома та трьома змінними



Собкович Р. І. Конспекти лекцій з аналітичної геометрії (у двох частинах). Частина 1. Векторна алгебра. Геометричні образи рівнянь першого та другого степеня з двома та трьома змінними: навчальний посібник / Р. І. Собкович. — Івано-Франківськ: Голіней О. М., 2016. — 236 с.

Посібник складається з двох частин та розрахований на читання лекційного курсу об'ємом 60 годин. Матеріал першої частини дає можливість ознайомити студентів з основними положеннями векторної алгебри та їхнього застосуванню при дослідженні геометричних образів рівнянь першого та другого степеня з двома та трьома змінними. Наведено розв'язки базових задач.

Друга частина курсу є безпосереднім продовженням першої. В ній розглядаються основні питання, що стосуються теорії геометричних перетворень.

Для студентів математичних факультетів університетів.

Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету як навчальний посібник для студентів напрямків підготовки «математика», «прикладна математика» (протокол № 3 від 18 жовтня 2016 р.).

Рецензенти:

проф., д.ф.-м.н. **О.Р. Никифорчин**, завідувач кафедри алгебри та геометрії;

проф., д.ф.-м.н. **Р.А.Заторський**, завідувач кафедри диференціальних рівнянь та прикладної математики.

© Роман Собкович, 2016

Передмова.....6

Лекція 1. Вектори. Лінійні операції над векторами. 1. Поняття вектора. Основні означення. Колінеарні та компланарні вектори. 2. Додавання та віднімання векторів. Властивості даних операцій. 3. Множення вектора на скаляр. Властивості. 4. Приклади розв'язання задач.....7

Лекція 2. Лінійна залежність та незалежність векторів. 1. Поняття лінійної залежності та незалежності векторів. Основні теореми. 2. Базис системи векторів. 3. Координати вектора. Дії над векторами в координатній формі. 4. Ортонормовані базиси. Довжина вектора. 5. Приклади розв'язання задач.....18

Лекція 3. Загальна афінна та прямокутна декартова системи координат. Координати точки. Поділ відрізка у даному відношенні. 1. Поняття загальної афінної системи координат. Координати точки. 2. Прямокутна декартова система координат. Відстань між двома точками. 3. Поділ відрізка у даному відношенні. 4. Теорема Чеві. 5. Приклади.....29

Лекції 4, 5. Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів. Їх властивості та застосування. 1. Скалярний добуток двох векторів. Властивості. Застосування. 2. Означення векторного добутку. Основні властивості даної операції та її застосування до розв'язування задач. 3. Поняття мішаного добутку трьох векторів. Властивості. Застосування до розв'язування задач.....36

Лекція 6. Зв'язок між координатами точки в різних системах координат. Поняття порядку лінії та поверхні. 1. Зв'язок між координатами точки у різних системах координат на площині. 2. Зв'язок між координатами точки в різних системах координат у тривимірному просторі. 3. Поняття порядку лінії. 4. Поняття порядку поверхні. 5. Приклади.....53

Лекція 7. Пряма на площині. Різні способи задання прямої на площині. 1. Геометричні образи рівнянь першого степеня з двома змінними. 2. Різні способи задання прямої на площині. 3. Частинні випадки загального рівняння прямої. 4. Приклади.....61

Лекція 8. Взаємне розташування прямої та деяких геометричних фігур. 1. Відстань від точки до прямої. 2. Взаємне розташування кола та прямої. 3. Взаємне розташування двох прямих на площині. Умова паралельності. Кут

між двома прямими. Умова перпендикулярності. 4. Відстань між двома паралельними прямими. 5. Геометричний зміст знаку виразу $ax+by+c$. 6. Пучок прямих. 7. Задачі.....70

Лекція 9. Різні способи задання прямої та площини у просторі.

1. Геометричні образи рівнянь першого степеня з трьома змінними. 2. Різні способи задання площини. 3. Загальне рівняння площини та його частинні випадки. 4. Різні способи задання прямої у просторі. 5. Задачі.....82

Лекція 10. Відстань від точки до площини. Взаємне розташування площин.

1. Відстань від точки до площини. 2. Геометричний зміст знаку виразу $ax+by+cz+d$. 3. Взаємне розташування двох площин. Умова паралельності. Кут між двома площинами. Умова перпендикулярності. 4. Відстань між двома паралельними площинами. 5. Взаємне розташування трьох площин. 6. Приклади.....92

Лекція 11. Взаємне розташування прямої та площини. Дві прямі у просторі.

1. Пряма і площина в просторі. Кут між прямою та площиною. 2. Взаємне розташування двох прямих в просторі. 3. Рівняння спільного перпендикуляра. Відстань між двома мимобіжними прямими. 4. Задачі.....99

Лекція 12. Канонічні рівняння еліпса, гіперболи та параболи.

1. Поняття загального рівняння другого порядку. 2. Означення еліпса. Канонічне рівняння. Вирази для фокальних радіусів. 3. Означення гіперболи та її канонічне рівняння. Вирази для фокальних радіусів. 4. Означення параболи та її канонічне рівняння. 5. Приклади107

Лекції 13, 14. Вивчення властивостей еліпса, гіперболи та параболи за канонічними рівняннями.

1. Найпростіші властивості еліпса та його зображення. 2. Найпростіші властивості гіперболи та її зображення. 3. Властивості та зображення параболи. 4. Поняття ексцентриситету. 5. Поняття директриси. Директоріальна властивість ліній другого порядку. 6. Дотична до лінії другого порядку. 7. Оптичні властивості ліній другого порядку.....116

Лекція 15. Поняття полярних координат. Рівняння конічних перерізів у полярних координатах.

1. Поняття полярних координат. 2. Зв'язок між полярними та прямокутними декартовими координатами. 3. Відстань між двома точками та площа трикутника у полярних координатах. 4. Рівняння деяких ліній у полярних координатах. 5. Рівняння конічних перерізів. 6. Історія виникнення назви конічних перерізів.....129

Лекція 16. Деякі поверхні другого порядку. Їхні канонічні рівняння, властивості та зображення.

1. Загальне рівняння поверхні другого порядку. Сфера та її рівняння. 2. Дослідження поверхні другого порядку за допомогою плоских перерізів. 3. Еліпсоїд. Властивості. Зображення. 4. Однопорожнинний гіперboloїд. Властивості. Зображення. 5. Двопорожнинний гіперboloїд. Властивості. Зображення. 6. Еліптичний параболоїд. Властивості. Зображення. 7. Гіперболічний параболоїд. Властивості. Зображення.....140

Лекція 17. Циліндричні та конічні поверхні. Поверхні обертання.

Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку. 1. Поняття циліндричної поверхні. Рівняння циліндричних поверхонь. Приклади. 2. Поняття конічної поверхні. Рівняння конічних поверхонь. 3. Поверхні обертання. 4. Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку. 5. Приклади розв'язання задач.....152

Лекція 18. Загальне рівняння ліній другого порядку.

1. Поняття загального рівняння ліній другого порядку. 2. Перетин ліній з прямою. Частинні випадки. 3. Центр лінії. 4. Рівняння дотичної та нормалі.....164

Лекції 19 – 20. Деякі властивості ліній другого порядку та їх застосування до зображення ліній.

1. Теорема про середини паралельних хорд ліній другого порядку. 2. Спряжені напрямки та спряжені діаметри. 3. Спряжені напрямки нецентральної лінії. 4. Головні напрямки та головні діаметри. Рівняння осей симетрії. 5. Рівняння асимптот ліній другого порядку. 6. Орієнтовна схема вивчення властивостей ліній другого порядку. 7. Приклади побудови ліній за їхніми рівняннями.....174

Лекція 21. Спрощення рівняння ліній другого порядку за допомогою геометричних перетворень.

1. Спрощення рівняння ліній за допомогою паралельного перенесення системи координат. 2. Спрощення рівняння ліній за допомогою повороту системи координат. 3. Застосування геометричних перетворень для побудови ліній другого порядку.....190

Лекція 22. Інваріанти рівняння кривої другого порядку. Застосування інваріантів для побудови ліній та їх класифікації.

1. Інваріанти рівняння ліній. 2. Характеристичне рівняння. 3. Класифікація ліній другого порядку. 4. Застосування інваріантів для побудови ліній другого порядку.....199

Лекція 23. Загальне рівняння поверхні другого порядку.

1. Поняття загального рівняння поверхні другого порядку. 2. Перетин поверхні з прямою. Частинні випадки. 3. Центр поверхні. 4. Рівняння дотичної площини та нормалі.....210

Лекція 24. Головні напрямки поверхні другого порядку. 1. Геометричне місце хорд, які в заданій точці діляться навпіл. 2. Геометричне місце середин хорд, які паралельні сталому напрямку. 3. Спряжені діаметральні площини та діаметри. 4. Конус асимптотичних напрямків. Асимптотичний конус. 5. Головні напрямки та головні діаметри поверхні. Характеристичне рівняння.....218

Лекція 25. Спрощення рівняння поверхонь другого порядку та їхня класифікація. 1. Спрощення рівняння поверхні другого порядку за допомогою паралельного перенесення. 2. Спрощення рівняння поверхні другого порядку за допомогою повороту системи координат. 3. Класифікація поверхонь другого порядку.....226

Список використаної та рекомендованої літератури.....235

Передмова

Курс аналітичної геометрії читається для студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів протягом першого року навчання. Враховуючи певні складнощі, які виникають перед вчорашніми випускниками загальноосвітніх шкіл при вивченні університетських математичних курсів, ми, по перше, ставили мету в максимально доступній формі запропонувати їм необхідний програмовий матеріал. Останній систематизовано по окремих лекціях, плани яких складають тематику підсумкового іспиту. Другою причиною, що привела до написання даного посібника, було бажання надати студентам можливість, користуючись даними конспектами, вивільняти при прослуховуванні лекцій більше часу для повнішого і глибшого засвоєння матеріалу. Вважаємо, що даний посібник можна використати при організації дистанційної форми навчання, а також, що він буде корисним для студентів заочної форми навчання.

Лекція 1. Вектори. Лінійні операції над векторами

План

1. **Поняття вектора. Основні означення. Колінеарні та компланарні вектори.**
2. **Додавання та віднімання векторів. Властивості даних операцій.**
3. **Множення вектора на скаляр. Властивості.**
4. **Приклади розв'язання задач.**

1. Поняття вектора. Основні означення. Колінеарні та компланарні вектори.

Із шкільного курсу фізики відомо, що деякі фізичні величини, зокрема такі, як довжина, площа, об'єм, температура, маса, густина, відстань виражаються певним числом, яке характеризує відношення цієї величини до відповідної одиниці вимірювання. Такі величини називають скалярними. Для характеристики деяких інших величин (сили, переміщення, швидкості, прискорення та ін.) одного числа недостатньо. Крім кількісної оцінки вони визначаються також напрямленістю у просторі. Такі величини називають векторними. Абстрагуючись від конкретних фізичних величин, введемо математичне поняття геометричного вектора або просто вектора.

Означення 1. **Вектором** називається напрямлений відрізок.

Вектор визначається впорядкованою парою точок. Перша з них називається початком, друга – кінцем вектора. Якщо початком вектора є точка A , а кінцем точка B , то його позначають символом $\overrightarrow{AB}$. Іноді використовують позначення у вигляді малої букви латинського алфавіту (наприклад, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$). На рисунку вектор зображають відрізком із стрілкою, поставленою у кінці вектора.

