

Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Наталя Мазуренко

Фрактальна геометрія

Івано-Франківськ

2010

УДК 515.12

Фрактальна геометрія : навчальний посібник / Н. І. Мазуренко - Івано-Франківськ, 2010. — 65 с.

Введено поняття фрактала, фрактального виміру. Розглянуто різні приклади фракталів та їх застосування. Кожен розділ супроводжується завданнями для самостійного розв'язування.

Для студентів університетів спеціальності “Математика”.

Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики як навчальний посібник (протокол №6 від 25 лютого 2010 року).

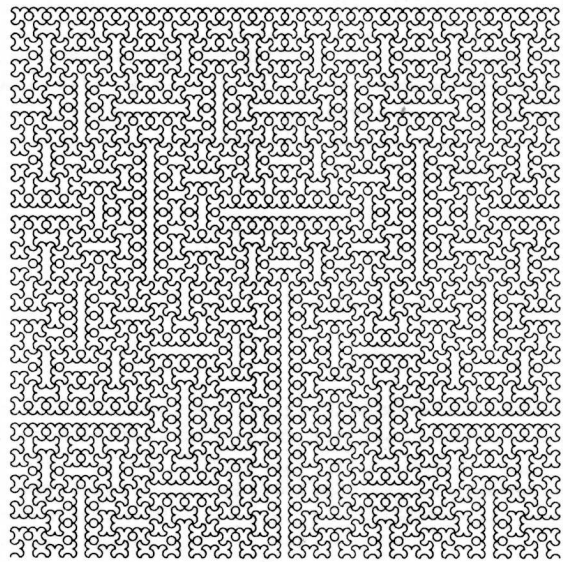
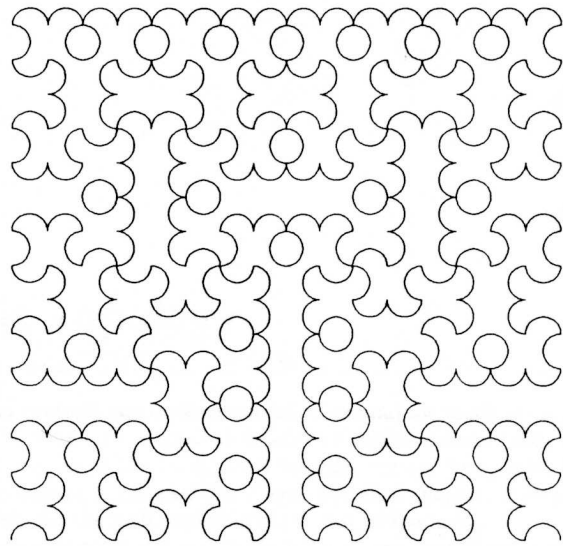
Рецензенти : **Банах Т. О.**, професор кафедри геометрії і топології Львівського національного університету імені Івана Франка, доктор фіз.-мат. наук;

Никифорчин О.Р., зав. кафедрою алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, доцент, канд. фіз.-мат. наук.

© Наталя Мазуренко, 2010.

Зміст

Вступ	5
Розділ 1. Приклади фракталів	7
1.1. Канторова множина	7
1.2. Трикутник Серпінського	11
1.3. Крива Коха	14
1.4. Дракони	15
1.5. Деревовидні структури	19
1.6. Комплексні числові системи	22
Розділ 2. Гіперпростір	27
2.1. Метрика Гаусдорфа	27
2.2. Властивості повноти і компактності	28
Розділ 3. Міра і вимір Гаусдорфа	31
3.1. Міра Гаусдорфа	31
3.2. Обчислення міри і виміру Гаусдорфа	35
Розділ 4. Самоподібність	39
4.1. Система ітерованих відображень	39
4.2. Вимір подібності, зв'язок з виміром Гаусдорфа	41
Розділ 5. Інші фрактальні виміри	45
5.1. Вимір пакування	45
5.2. Вимір Мінковського	47
Розділ 6. Інші приклади і застосування	51
Додаток	57
Рекомендована література	65



Life is a fractal in Hilbert space.
— Rudy Rucker, *Mind Tools*

В минулому математики концентрували увагу на множинах і функціях, до яких можуть бути застосовані методи класичних обчислень. Функції, які недостатньо гладкі чи регулярні, часто ігнорувались як “патологічні” і не варті вивчення. Згодом, відношення до негладких функцій (чи нерегулярних множин) змінилося, бо нерегулярні функції (множини) забезпечують значно краще представлення багатьох природних явищ, ніж те, що дають об’єкти класичної геометрії.

Фрактальна геометрія пов’язана з вивченням таких нерегулярних множин. Можна провести аналогію між об’єктами її досліджень, фракталами, і деякими класами дійсних чисел. Відомо, що серед дійсних чисел вирізняються цілі, раціональні, ірраціональні, алгебраїчні, обчислювальні. У множині геометричних об’єктів також можна виділити деякі підкласи: ті, якими займається елементарна геометрія, аналітична геометрія, диференціальна геометрія. Якщо геометричні фігури, котрими займається елементарна геометрія, порівнювати з цілими числами, тоді фрактали можна порівняти з обчислювальними числами (тими, для яких існує алгоритм їх обчислення). Питання, чи є дане число обчислювальним, як правило, складне, і так само складно сказати, чи є даний геометричний об’єкт фракталом (чи існує алгоритм його побудови).

За останні 30 років фрактали стали дуже популярними. Велику роль у цьому зіграла книжка франко-американського математика Бенуа Мандельброта “Фрактальна геометрія природи” [11]. Що ж таке фрактал? Дотепер немає його однозначного визначення, але ми можемо виокремити кілька рис, що притаманні фрактальним множинам. Отже, фрактал - це геометрична фігура, яка:

(1) має нетривіальну структуру на всіх шкалах. В цьому відмінність від регулярних фігур (таких як еліпс, коло, графік гладкої функції): якщо ми розглянемо невеликий фрагмент регулярної фігури у дуже великому масштабі, то він буде схожий на фрагмент прямої. Збільшення масштабу фрагменту фрактала не зумовлює спрощення його структури - на всіх шкалах ми побачимо однаково складну картину.

(2) має деяку форму самоподібності, допускаючи наближену або статистичну.

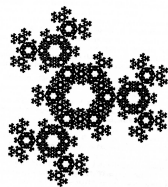
(3) може бути побудована дуже просто, наприклад за допомогою рекурсивної процедури.

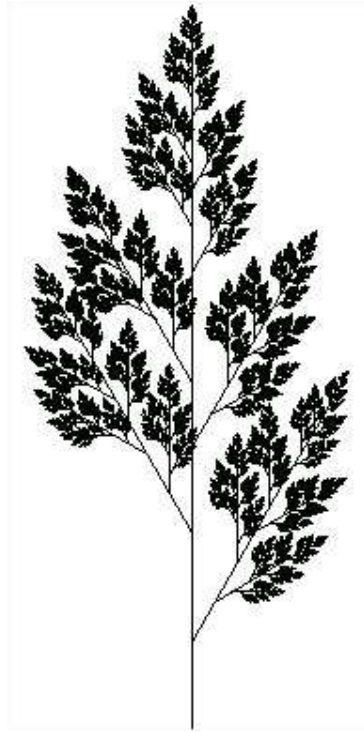
Багато природних об'єктів мають фрактальні властивості, наприклад берегові лінії, хмари, крони дерев, кровоносна система і система альвеол людини або тварин.

Фрактали, особливо на площині, популярні завдяки поєднанню краси з простотою побудови за допомогою комп'ютера.

Саме слово “фрактал” походить від латинського слова *fractus*, що означає подрібнений, розібраний. Об'єкти, які тепер називаються фракталами, досліджувались задовго до того, як їм було дано таку назву. Багато прикладів та ідей фрактальної геометрії відомі вже впродовж століття, деякі з них ми розглянемо у цьому посібнику.

Посібник містить методичні вказівки до спеціального курсу “Геометрія фрактальних множин”. У першому розділі розглядаються класичні приклади фракталів та досліджуються їх властивості. Другий розділ містить необхідні поняття та факти метричної топології. У третьому - вводиться поняття міри та виміру Гаусдорфа, розглядаються способи їх обчислення. Четвертий розділ присвячений важливому поняттю самоподібності множин. Розглядається поняття системи ітерованих відображень, умова відкритої множини для такої системи, вводиться поняття виміру подібності та вивчається його зв'язок з виміром Гаусдорфа. У п'ятому розділі здійснено огляд фрактальних вимірів відмінних від виміру Гаусдорфа. Останній розділ присвячено різним варіаціям фрактальних множин, що зустрічались раніше. Тут розглянуто інваріантні множини для системи ітерованих відображень, складніших, ніж просто гомотетії; розглянуто неперервні функції, графіки яких мають дробовий вимір, а також деякі приклади з теорії чисел. У додатку зроблено огляд основних алгоритмів побудови фракталів на площині, описаних у термінах системи ітерованих відображень. На початку кожного розділу вказано літературу, що використовувалась при написанні і яка може бути рекомендована читечаві для детальнішого ознайомлення з предметом. Посібник має здебільшого оглядовий характер. За рідким винятком, твердження та теореми наводяться без доведень з тієї простої причини, що доведення їх, як правило, нескладні і можуть бути вправами для студентів старших курсів.





Рекомендована література

1. Банах Т.О., Ардан Р.В., Радул Т.М. Детерміністичні фрактали. – Львів: ВЦ ЛНУ ім. І. Франка, 1997. – 20с.
2. Федорчук В. В., Филипов В. В. Общая топология. Основные конструкции. – Изд. Моск. унив., 1988. – 251с.
3. Bandt C., Hung N. V., Rao H. On the open set condition for self-similar fractals // Univ. of Greifswald, Germany, 2004. – P. 1-12.
4. Barnsley M.F. Lecture Notes on Iterated Function Systems // Proc. of Symposia in Applied Mathematics, 1989. – Vol. 39. – P. 127-143.
5. Besicovitch A. S. On the fundamental geometric properties of linearly measurable plane sets of points // Mathematische Annalen, 1938. – Vol. 115. – P. 296-329.
6. Dekking F. M. Recurrent sets // Advances in Mathematics, 1982. – Vol. 44. – P. 78-104.
7. Edgar Gerald A. Measure, Topology and Fractal Geometry. – New York: Springer-Verlag, 1995. – 221 p.
8. Falconer K.J. The Geometry of Fractal Sets. – Cambridge University Press, 1985. – 162 p.
9. Falconer K.J. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. – Wiley, UK, 2003. – 337p.
10. Hutchinson J. E. Fractals and self-similarity // Indiana University Mathematics Journal, 1981. – Vol. 30. – P. 713-747.
11. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. – New York: W. H. Freeman & Co., 2000. – 468 p.
12. Moran P. A. P. Additive functions of intervals and Hausdorff measure // Proc. Cambridge Philos. Soc., 1946. – Vol. 42. – P. 15-23.
13. Schief A. Separation properties for self-similar sets // Proc. Amer. Math. Soc., 1994. – Vol. 122. – P. 111-115.
14. Schief A. Self-similar sets in complete metric spaces // Proc. Amer. Math. Soc., 1996. – Vol. 124. – P. 481-490.
15. Tricot Jr. Claude Two definitions of fractional dimension // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1982. – Vol. 91 (1). – P. 57-74.