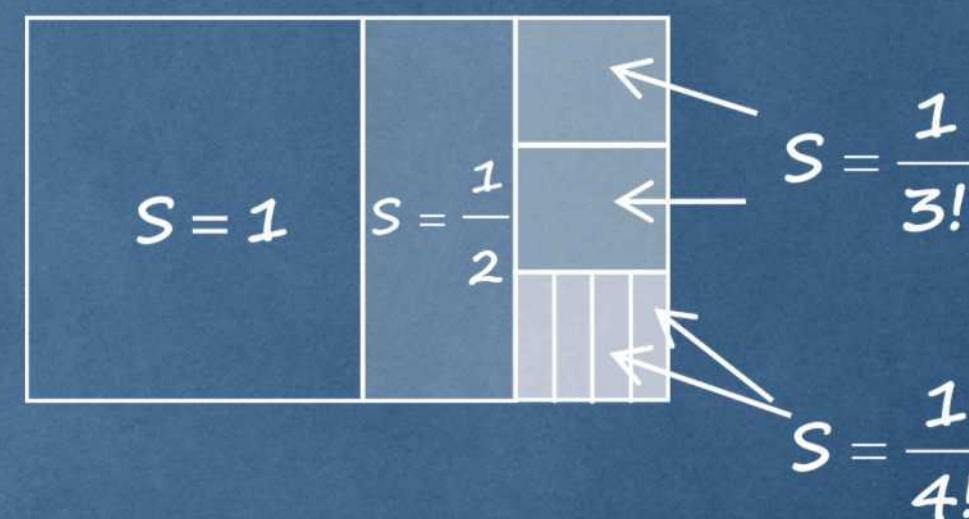


Собкович Р. І.
Мазуренко Н. І.

ШКІЛЬНА АЛГЕБРА В ЗАДАЧАХ

ЧАСТИНА ПЕРША



$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} < 2$$

УДК 512

ББК 22.14

Собкович Р. І., Мазуренко Н. І. Шкільна алгебра в задачах: навчальний посібник. Частина 1./ Р. І. Собкович, Н. І. Мазуренко. – Івано-Франківськ: Голіней О. М., 2019 - 315с.

Посібник розрахований на читання частини курсу зі шкільної алгебри для студентів спеціальності «Середня освіта» (математика). Матеріал, представлений у посібнику надає можливість випускникам і завтрашнім викладачам шкільної математики отримати додаткові систематизовані знання, які є передумовою для ефективної праці у напрямку математичної підготовки учнів різнопрофільних класів.

Для студентів математичних факультетів університетів.

Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету як навчальний посібник для студентів спеціальності «Середня освіта» (математика) (протокол № 3 від 24 жовтня 2019 р.)

РЕЦЕНЗЕНТИ:

проф., д. ф.-м. н. **О. Р. Никифорчин**, завідувач кафедри алгебри та геометрії;

проф., д. ф.-м. н. **Р. А. Заторський**, завідувач кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики.

© Роман Собкович, 2019

© Наталя Мазуренко, 2019

ЗМІСТ

Вступ.....	7
Розділ 1. ОСНОВНІ АЛГЕБРАЇЧНІ ТОТОЖНОСТІ ТА СПІВВІДНОШЕННЯ.....	8
1. Базові теоретичні відомості.....	8
1.1. Тотожності. Формули скороченого множення. Біном Ньютона. Трикутник Паскаля.....	8
1.2. Степені з натуральним, цілим та раціональним показником.....	9
1.3. Модуль числа.....	10
2. Тотожні перетворення алгебраїчних виразів	11
2.1. Розкладання виразів на множники. Перетворення дробів.....	11
2.2. Задачі на дослідження подільності виразів.....	16
2.3. Тотожна рівність многочленів.....	19
3. Перетворення виразів, що містять ірраціональності.....	25
3.1. Спрощення складних радикалів.....	25
3.2. Ірраціональність у знаменнику дробу.....	28
3.3. Перетворення ірраціональних виразів, що містять змінні величини...32	
4. Вирази з модулями.....	34
4.1. Розкриття модулів шляхом розгляду проміжків знакосталості.....	34
4.2. Деякі властивості модулів із двома змінними.....	36
4.3. Застосування модулів для аналітичного задання геометричних фігур.....	38
5. Завдання для самостійного розв'язання.....	40
Розділ 2. АЛГЕБРАЇЧНІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ СИСТЕМИ.....	44
1. Базові теоретичні відомості.....	44
2. Алгебраїчні рівняння вищих степенів.....	49
2.1. Найпростіші випадки	50
2.2. Метод заміни	52
2.3. Рівняння виду $f(f(x)) = x$	64
2.4. Метод виділення повних квадратів.....	64
2.5. Використання біному $(x - a)^n$	67
2.6. Про один підхід до розв'язування кубічних рівнянь	68
2.7. Зведення до квадратних рівнянь відносно нової змінної.....	70
3. Алгебраїчні нерівності.....	73
4. Системи алгебраїчних рівнянь та нерівностей.....	77
4.1. Метод послідовного виключення змінних.....	77
4.2. Системи, що зводяться до однорідних рівнянь.....	78
4.3. Застосування теореми Вієта.....	80
4.4. Симетричні системи. Використання різних заміन.....	80

4.5. Колові системи.....	83
4.6. Використання функціональних особливостей рівнянь.....	85
4.7. Графічні методи.....	86
4.8. Системи нерівностей. Мішані системи.....	88
4.9. Різні прийоми.....	90
5. Завдання для самостійного розв'язання.....	92
Розділ 3. Рівняння та нерівності з модулями.....	98
1. Рівняння та нерівності з одним модулем.....	98
1.1. Рівняння та нерівності виду $ f(x) > a$, $ f(x) < a$, $ f(x) = a$	98
1.2. Рівняння та нерівності виду $ f(x) > g(x)$, $ f(x) < g(x)$, $ f(x) = g(x)$	98
2. Наявність декількох модулів.....	101
3. Застосування геометричного змісту модуля.....	103
4. Деякі інші методи.....	104
5. Завдання для самостійного розв'язання.....	108
Розділ 4. Ірраціональні рівняння та нерівності.....	111
1. Базові теоретичні відомості.....	111
2. Методи розв'язування ірраціональних рівнянь.....	112
2.1. Досліджуємо область визначення та множину значень.....	112
2.2. Позбуваємося ірраціональності шляхом піднесення до степеня.....	114
2.3. Виконуємо тотожні перетворення.....	116
2.4. Вводимо нову змінну та зводимо до алгебраїчних систем.....	118
2.5. Використовуємо спряжені вирази.....	121
2.6. Однорідні рівняння.....	122
2.7. Тригонометричні заміни.....	123
2.8. Використання функціональних особливостей виразів.....	125
2.9. Деякі штучні методи.....	127
3. Ірраціональні нерівності.....	130
4. Завдання для самостійного розв'язання.....	135
Розділ 5. Рівняння і нерівності з показниковими та логарифмічними виразами.....	138
1. Базові теоретичні відомості.....	138
2. Показникові рівняння та нерівності.....	140
2.1. Зведення до розв'язування найпростіших рівнянь чи нерівностей.....	140
2.2. Використання заміन.....	143
2.3. Зведення до однорідних виразів.....	144
2.4. Деякі спеціальні методи.....	145
3. Логарифмічні рівняння та нерівності.....	149
3.1. Використання рівносильних перетворень.....	149
3.2. Введення замін.....	153
3.3. Застосування різних методів.....	156

4. Показниково-степеневі рівняння та нерівності.....	158
5. Завдання для самостійного розв'язання.....	161
Розділ 6. Тотожні перетворення тригонометричних виразів.....	165
1. Базові теоретичні відомості.....	165
2. Значення тригонометричних функцій деяких кутів.....	170
3. Різні задачі на спрощення тригонометричних виразів.....	173
4. Тригонометричні підстановки в різних задачах.....	182
5. Перетворення виразів із аркфункціями.....	186
5.1. Знаходження значень тригонометричних функцій від аркфункцій....	187
5.2. Вираження аркфункції через певну аркфункцію.....	190
5.3. Обчислення значень аркфункції від відповідної тригонометричної функції.....	194
6. Завдання для самостійного розв'язання.....	197
Розділ 7. Тригонометричні рівняння, нерівності та їх системи.....	201
1. Різні способи розв'язування тригонометричних рівнянь.....	201
1.1. Найпростіші тригонометричні рівняння.....	201
1.2. Метод заміни.....	203
1.3. Однорідні рівняння.....	204
1.4. Пониження степеня рівняння.....	205
1.5. Застосування універсальної підстановки.....	205
1.6. Рівняння виду $a \sin x + b \cos x = c$	206
1.7. Застосування формул перетворення суми та різниці тригонометричних функцій у добуток.....	207
1.8. Застосування формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму та різницю.....	208
1.9. Розв'язування рівнянь, які містять вирази $\sin x \pm \cos x$ та $\sin x \cdot \cos x$	209
1.10. Розв'язування рівнянь зі врахуванням області визначення та множини значень тригонометричних функцій.....	209
2. Тригонометричні нерівності.....	211
2.1. Найпростіші тригонометричні нерівності.....	211
2.2. Метод інтервалів на тригонометричному колі.....	213
3. Системи тригонометричних рівнянь та нерівностей.....	215
3.1. Деякі методи розв'язування тригонометричних систем.....	215
3.2. Тригонометричні системи з параметрами.....	218
4. Рівняння та нерівності з аркфункціями.....	219
4.1. Найпростіші рівняння з аркфункціями.....	219
4.2. Найпростіші нерівності з аркфункціями.....	220
4.3. Різні прийоми розв'язування рівнянь, нерівностей та систем з аркфункціями.....	222
5. Завдання для самостійного розв'язання.....	225

Розділ 8. ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ	230
1. Загальні зауваження.....	231
2. Параметри та квадратний тричлен.....	233
3. Застосування властивостей функцій.....	237
4. Необхідні та достатні умови у задачах з параметрами.....	241
5. Графічні методи.....	251
6. Параметр у ролі рівноправної змінної.....	256
7. Завдання для самостійного розв'язання.....	259
Розділ 9. ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ	264
1. Доведення нерівностей за допомогою означення.....	265
2. Синтетичний метод доведення нерівностей.....	267
3. Аналітичний метод доведення нерівностей.....	270
4. Доведення нерівностей методом від супротивного.....	273
5. Доведення нерівностей методом математичної індукції.....	274
6. Класичні нерівності між середніми.....	278
7. Метод підсилення при доведенні нерівностей.....	284
8. Різні способи доведення однієї нерівності.....	289
9. Застосування властивостей квадратного тричлена.....	291
10. Застосування похідної.....	295
11. Геометричні методи.....	301
11.1. Методи аналітичної геометрії.....	301
11.2. Застосування векторів.....	302
11.3. Застосування деяких геометричних співвідношень.....	306
12. Завдання для самостійного розв'язання.....	312
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	315

ВСТУП

Мабуть основними факторами, що спричинили написання даного посібника, були два. Перший з них – це введення у навчальні плани студентів, які навчаються на старших курсах факультету математики та інформатики Прикарпатського університету за спрямуванням «середня освіта» (математика), спецкурсу під назвою «Шкільна алгебра в задачах». Оволодіння програми курсу передбачає надання можливості випускникам і завтрашнім викладачам шкільної математики отримати додаткові систематизовані знання, які є передумовою, при відповідній додатковій методичній підготовці, для ефективної праці у напрямку математичної підготовки учнів різнопрофільних класів.

Другий фактор – це поява у розпорядженні вчителя та учнів значної кількості різнорівневих підручників з алгебри, оволодіння матеріалом яких в умовах обмеженої кількості навчальних занять є достатньо складною задачею. Природно, що створення умов для цілеспрямованої роботи студента у цьому напрямку із виділенням акцентів на оволодіння основними методами та прийомами розв’язування різноманітних алгебраїчних задач для нас було актуальним питанням.

До Вашої уваги перша частина із серії навчальних посібників зі шкільної математики в задачах. Ми розділили посібник на дев’ять розділів, які в основному вичерпують теми тотожних перетворень виразів, розв’язання рівнянь, нерівностей та їх систем, а також доведення нерівностей зі шкільного курсу алгебри. Структура всіх розділів однакова. На початку кожного розділу, для полегшення роботи з посібником, ми пропонуємо основні теоретичні факти: означення, формулювання теорем та відповідні формули. Наше подальше завдання – це демонстрація на ряді задач основних прийомів та методів, якими повинен володіти той, хто навчає алгебрі. Більшість задач, розглянутих у посібнику та пропонованих для самостійного розв’язання, запозичені із діючих підручників з алгебри, зокрема із [1-3]. Також використано посібники [4-8], [10], [11] і матеріали учнівських математичних олімпіад. Окремі задачі є авторськими.

Будемо вдячні за критичні зауваження та побажання читачів, спрямовані на покращення змісту та викладення матеріалу посібника.

Автори

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2017. – 416с.
2. Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2016. – 384с.
3. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2018. – 400с.
4. Никифорчин О.Р., Собкович Р.І., Казмерчук А.І. та ін. Збірник тестових завдань з математики. – Івано-Франківськ.: Прикарпатський національний університет, 2011. -268 с.
5. Собкович Р.І., Кульчицька Н.В. Деякі методи розв'язування задач з параметрами: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет, 2011. – 114 с.
6. Собкович Р.І., Кульчицька Н.В. Доведення нерівностей. Методичний посібник для вчителів. – Івано-Франківськ: ОІППО, 2014. – 116 с.
7. Собкович Р.І., Кульчицька Н.В. Рівняння, нерівності та їх системи (задачник-тренажер із елементарної математики з необмеженою кількістю вправ): Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Супрун В.П., 2017. – 216 с.
8. Федак І.В. Методи розв'язування олімпіадних завдань з математики(і не тільки їх): Посібник для підготовки до математичних олімпіад. – Чернівці: Зелена Буковина, 2002. – 340 с.
9. Вікіпедія. https://uk.wikipedia.org/wiki/Многочлен_Лагранжа.
10. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. – К.: Євроіндекс Лтд, 1995. – 336 с.
11. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач. – К.: Агрофирма "Александрия", 1993. – 59 с.