Заняття 35

Об’єм куба, паралелепіпеда, призми.
Розв’язування вправ

Кожне геометричне тіло займає частину простору.

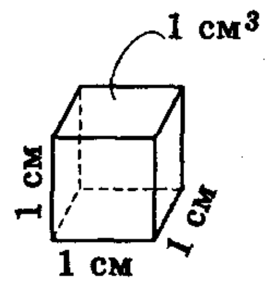
Об'ємом геометричного тіла будемо називати додатне число, яке характеризує частину простору, що займає геометричне тіло, і задовольняє таким умовам:

1. Рівні тіла мають рівні об'єми.

2. Якщо тіло розбите на кілька частин, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів усіх цих частин.

3. Об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці.

Куб, довжина ребра якого дорівнює одиниці довжини, називають ***одиничним***.



Об'єм одиничного куба приймають за одиницю об'єму, називаючи таку одиницю *кубічною*.

Наприклад: *кубічний сантиметр* – це об'єм куба, ребро якого дорівнює *1 см*.

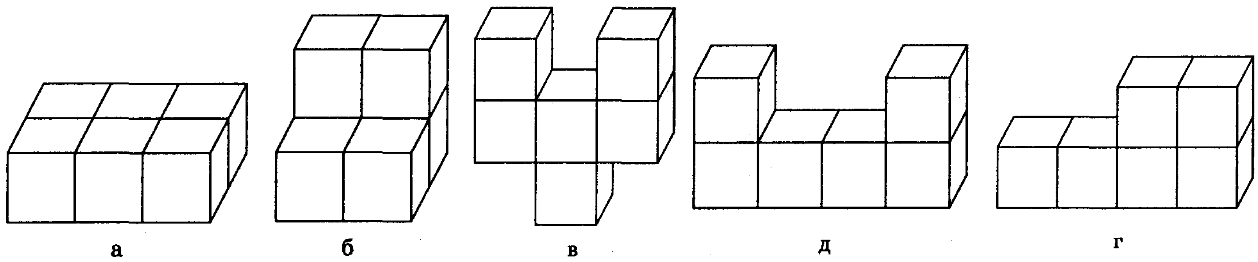
Одиниця об'єму *1 дм³* має й іншу назву – *1 літр*. Співвідношення між величинами подано нижче:

$$1\ \begin{matrix}\text{см}^3\\ \text{дм}^3\\ \text{м}^3\end{matrix} = 10^3\ \begin{matrix}\text{мм}^3\\ \text{см}^3\\ \text{дм}^3\end{matrix}$$

$$1\ \text{км}^3 = (10^3)^3\ \text{м}^3$$

Виміряти об'єм геометричного тіла значить знайти число, яке показує, скільки одиничних кубів міститься в даному тілі.

На рисунку показано тіла, складені з кубів із ребром ***1 см***, їх об'єми дорівнюють по ***6 см³***.



Тіла, які мають рівні об'єми, називаються <u>рівновеликими</u>.

На рисунку ці тіла є рівновеликими.

Ми будемо далі розглядати лише прості тіла – тіла, які можна розбити на скінчене число трикутних пірамід. Вивчені многогранники: призми, піраміди, зрізані піраміди – є простими тілами.

Слід зазначити, що в «Началах» Евкліда і у творах Архімеда були виведені точні формули для знаходження об'ємів многогранників і деяких тіл обертання (циліндра, конуса, кулі та їх частин).

К. Ж. Жордан (1838 − 1922) − французький математик, один із засновників сучасної математики, розробив в 1892 році теорію площ і об'ємів.

У минулому одиницями вимірювання об'єму були міри посудин, які використовувались для зберігання сипких і рідких тіл. Наприклад, в Англії: 36,4 дм^3 − бушель; 4,5 дм^3 − галон; 159 дм^3 − барель; від 470 см^3 до 568 см^3 − пінта; на Русі: 12 дм^3 − відро; 1,2 дм^3 − штоф; 490 дм^3 − діжка.

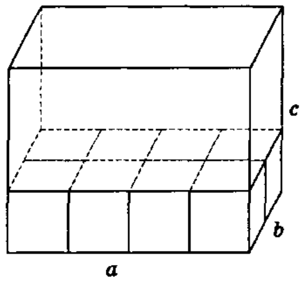
У давнину міра маси, а отже і об'єму, часто збігалась із мірою вартості товару − грошовою одиницею.

На Русі основна одиниця маси − гривня − була водночас грошовою одиницею. Гривня − злиток срібла, маса якого наближено дорівнювала 1 фунту ≈ 96 золотникам, 1 золотник ≈ 4,3 г.

У другій половині XIII ст. гривню почали рубати пополам і назвали рублем, який із XV ст. став основною грошовою одиницею.
Зараз в Україні гривня − грошова одиниця.

Теорема:

Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів, тобто якщо a, b, c – лінійні виміри прямокутного паралелепіпеда, то його об'єм V обчислюється за формулою $V = abc$.



Іншими словами, лінійні виміри прямокутного паралелепіпеда a, b, c є відповідно сторонами основи і висотою паралелепіпеда, тому об’єм можна обчислити за формулою:

$$\boxed{V = S_{осн.} \cdot h}$$

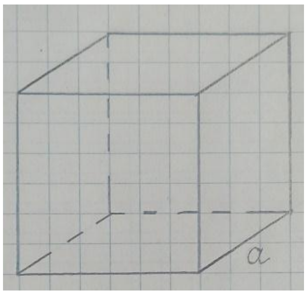
де $S_{осн.} = ab$,
$h = c$ – висота паралелепіпеда.

Об’єм куба з ребром a:

$$\boxed{V = a^3}$$

Задача 1

Знайдіть об'єм куба, ребро якого дорівнює *5 см*.



Розв’язання:

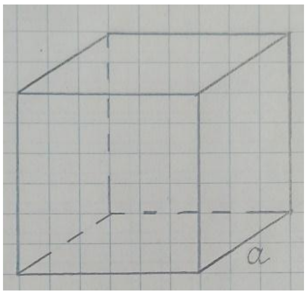
$V_{куба} = a^3$
$a = 5$ *см*
$V = 5^3 = 125$ *(см^3)*

Відповідь: 125 *см^3*

Задача 2

Знайдіть об'єм куба, якщо площа повної поверхні дорівнює *150 см²*

<u>*Розв'язання:*</u>



Поверхня куба складається з шести граней (квадратів).
Знайдемо площу однієї грані: $S_{грані}=150:6=25$ *(см²)*
Знайдемо ребро куба: $a=\sqrt{25}=5(см)$
Об'єм куба: $V=5^3=125$ *(см³)*

<u>*Відповідь:*</u> *125 см³*

Задача 3

Якщо кожне ребро куба збільшити на *2 см*, то його об'єм збільшиться на *98 см³*. Чому дорівнює ребро куба?

<u>*Розв'язання:*</u>

Позначимо ребро куба через ***x***, тоді $V_1=x^3$ - об'єм куба, а $V_2=(x+2)^3$- об'єм куба після збільшення ребра.
За умовою, $V_2 – V_1= 98$, тобто
$(x+2)^3 – x^3=98$
$x^3+3x^2\cdot 2+3x\cdot 2^2+2^3 – x^3 =98$
$6x^2+12x+8=98$
$6x^2+12x – 90=0$
$x^2+2x – 15=0$
$D=2^2–4\cdot 1\cdot(–15)=4+60=64$

$x_1=\frac{-2+\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\frac{-2+8}{2}=3$ $\qquad$ $x_2=\frac{-2-\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\frac{-2-8}{2}=-5$

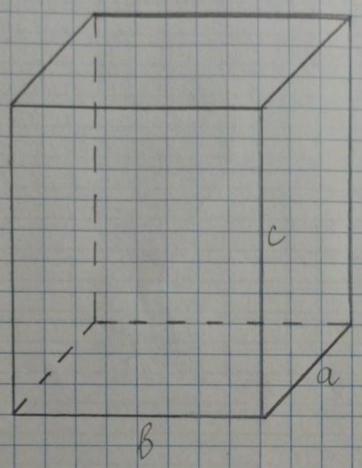
Геометричний зміст має тільки додатний корінь.
Отже, ребро куба дорівнює *3 см.*

<u>*Відповідь*</u>: *3 см*

Задача 4

Виміри прямокутного бруска *3 см*, *4 см*, *5 см*. Якщо збільшити кожне ребро на *x* сантиметрів, то поверхня збільшиться на *54 см*^{2}. Як збільшиться його об'єм?

Розв'язання:



Нехай $a = 3$ см; $b = 4$ см; $c = 5$ см – виміри прямокутного бруска.

Обчислимо площу поверхні даного бруска:

$$S_1 = 2(ab + bc + ac) = 2(12 + 20 + 15) = 94\ (см^2)$$

Обчислимо площу поверхні нового бруска:

$$S_2 = 2\left((x+3)(x+4) + (x+4)(x+5) + (x+3)(x+5)\right) =$$
$$= 2(x^2 + 7x + 12 + x^2 + 9x + 20 + x^2 + 8x + 15) =$$
$$= 2(3x^2 + 24x + 47) = 6x^2 + 48x + 94$$

За умовою задачі: $S_2 = S_1 + 54$

$$S_2 = 94 + 54 = 148\ (см^2)$$

Отримали рівняння:

$$6x^2 + 48x + 94 = 148$$
$$6x^2 + 48x - 54 = 0 \quad |:6$$
$$x^2 + 8x - 9 = 0$$
$$D = 64 + 36 = 100$$
$$x_1 = \frac{-8+10}{2} = 1 \quad ; \quad x_2 = \frac{-8-10}{2} = -9 \text{ – не має змісту}$$

Отже, $x = 1$

Новий брусок має розміри: $a_1 = 4$ см, $b_1 = 5$ см, $c_1 = 6$ см

Знайдемо об'єми брусків: $V_1 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60\ (см^3)$

$V_2 = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120\ (см^3)$

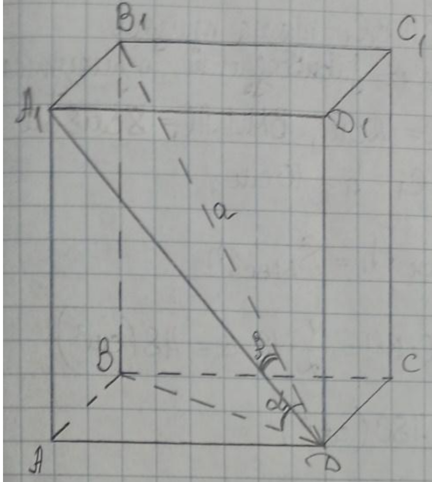
Отже, об'єм нового бруска збільшиться на $\Delta V = V_2 - V_1 = 120 - 60 = 60\ (см^3)$

Оскільки $\frac{V_2}{V_1} = \frac{120}{60} = 2$, то об'єм нового бруска збільшиться у 2 рази.

Задача 5

Чому дорівнює об'єм прямокутного паралелепіпеда, діагональ якого $\boldsymbol{a}$ утворює з площиною основи кут $\boldsymbol{\alpha}$, а з бічною гранню – кут $\boldsymbol{\beta}$?

<u>Розв'язання:</u>



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед,
a – діагональ паралелепіпеда
$AC_1 = BD_1 = CA_1 = DB_1 = a$
BD – проекція DB_1 на площину основи.
$\angle B_1DB = \alpha$
Проведемо діагональ бічної грані AA_1D_1D
A_1D.
$\angle B_1DA_1 = \beta$

$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = AA_1 \cdot AB \cdot AD$

$AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = h$

З $\triangle BDB_1$ ($\angle B_1BD = 90^\circ$) знайдемо BB_1:

$$\sin\angle B_1DB = \frac{BB_1}{DB_1} \Rightarrow BB_1 = B_1D \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\alpha$$

аналогічно $BD = B_1D \cos\alpha = a \cos\alpha$

За властивістю протилежних ребер паралелепіпеда: $AB = A_1B_1$

З $\triangle A_1B_1D$ ($\angle B_1A_1D = 90^\circ$) знайдемо A_1B_1:

$$\sin\angle B_1DA_1 = \frac{A_1B_1}{B_1D} \Rightarrow A_1B_1 = B_1D \cdot \sin\beta = a\sin\beta$$

$AB = a\sin\beta$

З $\triangle ABD$ ($\angle BAD = 90^\circ$, $AB = a\sin\beta$, $BD = a\cos\alpha$) за теоремою Піфагора:

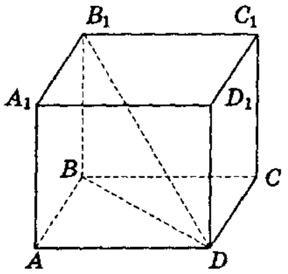
$$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{a^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\beta} = a\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$$

$$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = a \cdot \sin\alpha \cdot a\sin\beta \cdot a\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} = a^3 \sin\alpha \sin\beta \sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$$

<u>Відповідь</u>: $a^3 \sin\alpha \sin\beta \sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$

Задача 6

У прямому паралелепіпеді сторони основи $2\sqrt{2}см$ і *5 см* утворюють кут 45°. Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює *7 см*. Знайдіть його об'єм.



<u>Розв'язання:</u>

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямий паралелепіпед, у якого $AB = 2\sqrt{2}$ *см*, $AD = 5$ *см*, $\angle BAD = 45^\circ$, тобто основами паралелепіпеда є паралелограми $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$.

Оскільки в основі $AC > BD$, то в паралелепіпеді $AC_1 > DB_1$, тому $DB_1 = 7$ *см*.

$\boldsymbol{V = S \cdot h}$, де S – площа основи, h – висота паралелепіпеда.

$S_{осн.} = S_{паралелограма} = ab \cdot \sin\alpha$

$h = AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$

$$S_{осн.} = AB \cdot AD \sin \angle BAD = 2\sqrt{2} \cdot 5 \sin 45^\circ = 2\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10 (см^2).$$

Із ΔABD знайдемо BD теоремою косинусів:

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cos \angle BAD} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 5^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 5 \cos 45^o} = \sqrt{33 - 20\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{33 - 20} = \sqrt{13}\ (см).$$

Із ΔBDB_1 ($\angle B_1BD = 90^\circ$) теоремою Піфагора:

$$BB_1 = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = \sqrt{49 - 13} = = \sqrt{36} = 6\ (см).$$

Отже,

$V = 10 \cdot 6 = 60\ (см^3)$.

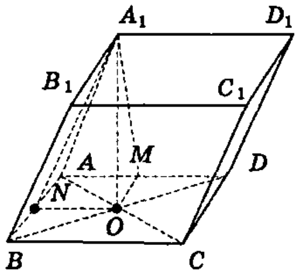
<u>Відповідь</u>: 60 см^3.

<u>Теорема:</u>

Об'єм похилого паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи на висоту. $\boldsymbol{V = S_{осн.} \cdot h}$

Задача 7

Основа похилого паралелепіпеда – квадрат, сторона якого дорівнює *1 м*. Одне з бічних ребер дорівнює *2 м* і утворює з кожною з прилеглих сторін основи кут 60°. Знайдіть об’єм паралелепіпеда.



<u>Розв’язання:</u>

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – похилий паралелепіпед , $ABCD$ – квадрат; $AB = 1$ *м*, $AA_1 = 2$ *м*, $\angle A_1AD = \angle B_1BC = 60^\circ$.

$\mathbf{V = S_{осн.} H}$

За умовою задачі, основою є квадрат, тому $V = 1^2 \cdot h = h$

Знайдемо висоту паралелепіпеда.

Проведемо $A_1O \perp (ABC)$, $OM \perp AD$, $ON \perp AB$, тоді за теоремою про три перпендикуляри, маємо: $A_1M \perp AD$, $A_1N \perp AB$.

$\Delta A_1AM = \Delta A_1AN$ (за гіпотенузою і катетом), отже, $A_1M = A_1N$.

Із ΔA_1AM: $AM = AA_1 \cdot \cos \angle A_1AM = 2\cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ *(м)*.

$\Delta AOM = \Delta AON$ (за рівними катетами $AM = AN$ і спільною гіпотенузою AO), тоді $\angle OAM = \angle OAN = 45^\circ$.

Із ΔAOM: $AO = \dfrac{AM}{\cos\angle OAM} = \dfrac{1}{\cos 45^\circ} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ *(м)*.

Із ΔAA_1O ($\angle A_1OA = 90^\circ$) за теоремою Піфагора:

$A_1O = \sqrt{AA_1^2 - AO^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$ *(м)*.

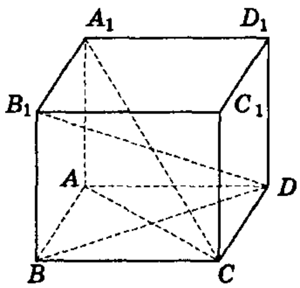
Отже, $V = \sqrt{2}$ $м^3$.

<u>Відповідь</u>: $\sqrt{2}$ $м^3$.

Задача 8

В основі прямого паралелепіпеда лежить ромб із більшою діагоналлю d. Більша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут β, а менша – кут α. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

Розв'язання:



Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед, $AA_1 \perp (ABC)$, $ABCD$ – ромб, $BD > AC$, $BD = d$.

Ортогональними проекціями діагоналей A_1C і B_1D на площину основи є відповідно діагоналі AC і BD ромба.

Оскільки в прямокутних трикутниках AA_1C ($\angle A = 90°$) і B_1BD ($\angle B = 90°$) катети A_1A і B_1B рівні, а $BD > AC$, то діагональ B_1D більша, а A_1C – менша.

Отже, $\angle B_1DB = \beta$, $\angle A_1CA = \alpha$.

V = S$_{\text{осн.}}$ H.

Із ΔB_1BD: $BB_1 = H = BD\ tg\ \angle D = d\ tg\ \beta$.

Із ΔA_1AC: $AC = AA_1\ ctg\ \angle C = H\ ctg\ \alpha = d\ tg\ \beta\ ctg\ \alpha$.

Тоді $S_{осн.} = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} d \cdot d\ tg\ \beta\ ctg\ \alpha = \frac{1}{2} d^2\ ctg\ \alpha\ tg\ \beta$.

Отже,

$V = \frac{1}{2} d^2\ ctg\ \alpha\ tg\ \beta \cdot d\ tg\ \beta = \frac{1}{2} d^3\ ctg\alpha\ tg^2\beta$.

Відповідь: $\frac{1}{2} d^3\ ctg\alpha\ tg^2\beta$.

<u>Теорема:</u>

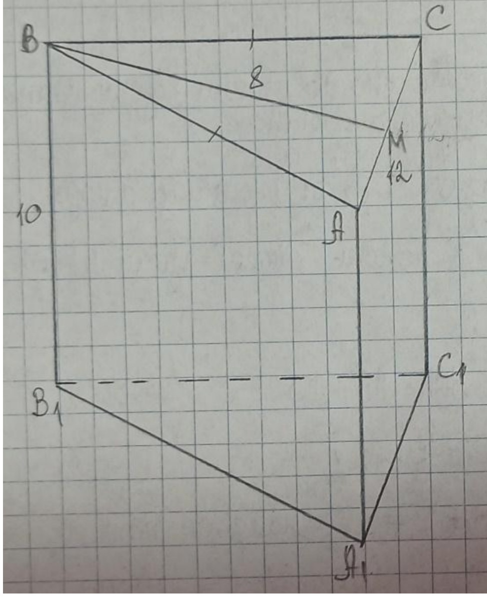
Об'єм будь-якої призми (*прямої чи похилої*) ***дорівнює добутку площі її основи на висоту***.

$\boxed{V = S_{осн.} \cdot H}$

Задача 9

В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює *12 см*, а висота, проведена до неї - *8 см*. Знайдіть об'єм призми, якщо її висота дорівнює *10 см*.

<u>Розв'язання:</u>



Нехай $ABCA_1B_1C_1$ – пряма призма

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ – рівнобедрені трикутники

$AB = BC$, $AC = 12$ см, $BM \perp AC$, $BM = 8$ см

$AA_1 = BB_1 = CC_1 = h = 10$ см

$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{осн.} \cdot h = S_{\triangle ABC} \cdot h$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$ (см^2)

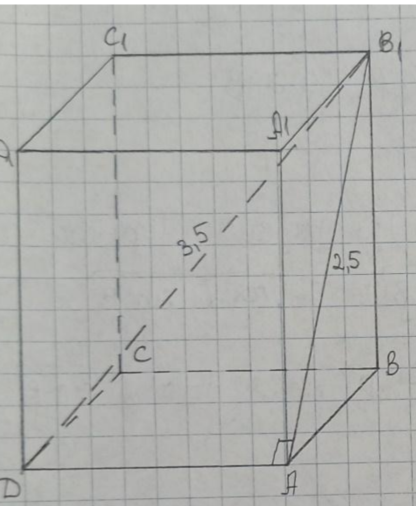
$V = 48 \cdot 10 = 480$ (см^3)

<u>Відповідь:</u> 480 см^3

Задача 10

Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює *3,5 см*, а діагональ бічної грані *2,5 см*. Знайдіть об'єм призми.

Розв'язання:



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильна чотирикутна призма.

$B_1D = 3{,}5$ см – діагональ призми

$AB_1 = 2{,}5$ см – діагональ бічної грані AA_1B_1B

$V_{призми} = S_{осн.} \cdot H$

$H = AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$

В основі призми лежить квадрат, тому

$S_{осн.} = AD^2$

Розглянемо $\triangle ADB_1$: за умовою задачі $BB_1 \perp AB$ і $AB \perp AD$, то за теоремою про три перпендикуляри $AB_1 \perp AD$

$\triangle ADB_1$ – прямокутний.

Тоді за т-ю Піфагора:

$AD = \sqrt{DB_1^2 - AB_1^2} = \sqrt{3{,}5^2 - 2{,}5^2} =$

$= \sqrt{(3{,}5-2{,}5)(3{,}5+2{,}5)} = \sqrt{1 \cdot 6} = \sqrt{6}$ (см)

$AD = AB = \sqrt{6}$ см

З $\triangle ABB_1$ ($\angle ABB_1 = 90°$) за т-ю Піфагора: $BB_1 = \sqrt{AB_1^2 - AB^2} = \sqrt{2{,}5^2 - (\sqrt{6})^2} = 0{,}5$ (см)

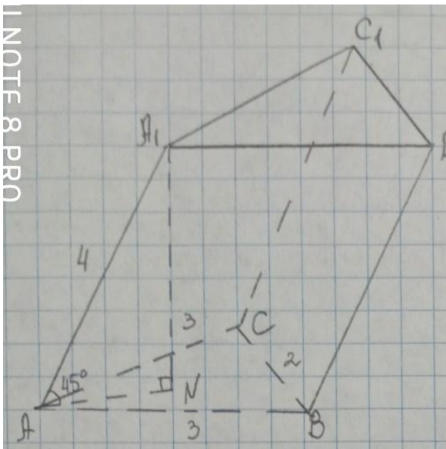
Обчислимо об'єм призми: $V = (\sqrt{6})^2 \cdot 0{,}5 = 6 \cdot 0{,}5 = 3$ (см^3)

Відповідь: 3 см^3

Задача 11

Основа призми – трикутник, в якому одна сторона дорівнює *2 см*, а дві інші по *3 см*. Бічне ребро дорівнює *4 см* і утворює з площиною основи кут *45˚*. Знайдіть ребро рівновеликого куба.

<u>Розв’язання:</u>



$ABCA_1B_1C_1$ – похила призма

$AB = AC = 3$ см, $BC = 2$ см

$AA_1 = BB_1 = CC_1 = 4$ см

Опустимо з вершини A_1 перпендикуляр на площину основи A_1N.

$\angle A_1AN = 45°$

ΔAA_1N – прямокутний і рівнобедрений

$A_1N = H$ – висота призми

$A_1N = AA_1 \cdot \sin \angle A_1AN = 4 \sin 45° = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ (см)

Знайдемо площу основи за формулою Герона:

$$S_{осн} = S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{AC + AB + BC}{2} = \frac{3+3+2}{2} = 4$$

$$S_{ABC} = \sqrt{4(4-3)(4-3)(4-2)} = \sqrt{4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \ (см^2)$$

$$V_{призми} = S_{осн} \cdot H = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 8 \ (см^3)$$

За умовою задачі, треба знайти ребро рівновеликого куба:

$$V_{призми} = V_{куба} = 8 \ см^3$$

$$V_{куба} = a^3$$

$$a^3 = 8$$

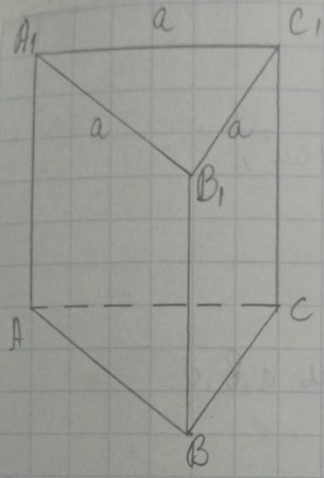
$$a = \sqrt[3]{8} = 2 \ (см)$$

Відповідь: 2 см.

Задача 12

Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює *a*, бічна поверхня рівновелика сумі площ основ. Знайдіть її об'єм.

<u>Розв'язання:</u>



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильна призма,
$AB = a$,
бічна поверхня рівновелика сумі основ.

Знайти: V

Розв'язання:

$V = S_{осн.} \cdot H$

$S_{осн.} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

За умовою $S_{біч.} = 2S_{осн.}$

З іншого боку $S_{біч.} = 3a \cdot H$ тобто $p \cdot H$

Тоді можна записати

$3aH = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$3aH = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} : 3a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3a} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Отже, $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3 3}{24} = \frac{a^3}{8}$ (куб. од.)