Івано-Франківське математичне товариство
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Всеукраїнська наукова конференція

Тези доповідей

Ворохта
25 лютого – 3 березня 2013

Івано-Франківськ, 2013

Івано-Франківське математичне товариство
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Всеукраїнська наукова конференція

Тези доповідей

Ворохта
25 лютого – 3 березня 2013 року

Івано-Франківськ, 2013

Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, тези доповідей. Ворохта, 25 лютого – 3 березня 2013 р. – Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2013. – 92 с.

Організаційний комітет:

Загороднюк Андрій Васильович

Осипчук Михайло Михайлович

Шарин Сергій Володимирович

Слободян Світлана Ярославівна

Кравців Вікторія Василівна

У збірнику представлено стислий виклад доповідей і повідомлень, поданих на Всеукраїнську наукову конференцію “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”. Тези доповідей і повідомлень подані в авторському варіанті.

1 Секція теорії ймовірностей

ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ЗА ПОЧАТКОВИМИ ДАНИМИ РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ШУМОМ ЛЕВІ ТА РОЗРИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Арясова Ольга Вікторівна

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України

oaryasova@mail.ru

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$\varphi_t(x) = x + \int_0^t a(\varphi_s(x))ds + Z(t), t \geq 0, \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}$, a - обмежена вимірна функція на $\mathbb{R}$, $\{Z(t), t \geq 0\}$ є процесом Леві з характеристичною функцією

$$E \exp\{i\lambda Z(t)\} = \exp\{-ct|\lambda|^\alpha\}, \lambda \in \mathbb{R},$$

де $c > 0$ - деяка константа.

Як було доведено в [2], при кожному $x \in \mathbb{R}$ рівняння (1) має єдиний сильний розв'язок.

Ми будуємо модифікацію розв'язку $\{\varphi_t(x)\}$, яка є cádlág по t і монотонною по x. Доведено, що для функції a, яка має локально обмежену варіацію, розв'язок $\{\varphi_t(x)\}$ є диференційовним в сенсі Соболєва по x м.н. При цьому похідна має вигляд

$$\nabla\varphi_t(x) = \exp\left\{\int_{\mathbb{R}} L_t^{\varphi(x)}(y)da(y)\right\},$$

де $L_t^{\varphi(x)}(y)$ - це локальний час процесу $\{\varphi_s(x), s \in [0,t]\}$ в точці y.

Наслідком одержаних результатів є твердження про те, що два розв'язки, які стартують з різних точок, не зустрічаються з ймовірністю одиниця.

Аналогічні результати у випадку вінерового шуму було одержано в [1]. Слід зазначити, що методи роботи [1] (перетворення Звонкіна, формула Танака, формула Гірсанова та ін.) не можуть бути застосовані у випадку рівняння з шумом Леві.

[1] O. V. Aryasova and A. Yu. Pilipenko. On properties of a flow generated by an sde with discontinuous drift. *Electron. J. Probab.*, 17:no. 106, 1–20, 2012.

[2] A. Yu. Pilipenko. On existence and properties of strong solutions of one-dimensional stochastic equations with an additive noise. *Theory of Stochastic Processes*, 19(35)(2), 2012.

ДИФУЗІЇ ПОРОДЖЕНІ ВІНЕРОВИМ ПРОЦЕСОМ

Бігун Галина Степанівна

Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України

FreischunHaluna@yandex.ru

Осипчук Михайло Михайлович

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

myosyp@gmail.com

Нехай $(\xi(t))_{t\geq 0}$ деякий дифузійний процес в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Цей процес будемо називати породженим вінеровим процесом, якщо існує такий вінерів процес $(w(t))_{t\geq 0}$ в $\mathbb{R}^d$, що $\xi(t)$ може бути одержаний з $w(t)$ послідовним застосуванням до останнього перетворень простору та часу. Ми розглядаємо перетворення простору $\mathbb{R}^d$ з допомогою деякої взаємно однозначної двічі диференційовної функції $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Перетворення часу в одержаному однорідному марківському процесі $\eta(t) = f(\xi(t))$ здійснюємо шляхом випадкової заміни часу: $\eta(\tau_t)$, де $\tau_t = \inf\left\{ s \geq 0 : \int\limits_0^s v^2(\eta(u))\,du \geq t \right\}$ з деякою скалярною невід'ємною функцією $(v(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$.

Система диференціальних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta f = 2a(f)v^2(f), \\ \nabla f = \sigma(f)v(f) \end{array} \right.$$

задає зв'язок між невідомими функціями f і v та локальними характеристиками породженого вінеровим дифузійного процесу: вектором переносу $a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ і матрицею дифузії $b = \sigma^T\sigma$ з матричною функцією $\sigma : \mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d)$.

У випадку $d = 1$ кожен однорідний дифузійний процес з досить хорошими локальними характеристиками є породженим вінеровим процесом. В доповіді обговорюються можливості розповсюдження цього факту на випадки $d \geq 2$.

АНАЛОГ ФОРМУЛИ ТРОТТЕРА ДЛЯ ПОТОКУ АРРАТЬЯ

Вовчанський Микола Богданович

Інститут математики НАН України

vovchansky.m@gmail.com

Нехай $\{e_t \mid t \geq 0\}$ – потік відображень $\mathbb{R}$ в себе, котрий відповідає диференціальному рівнянню

$$d\xi(t) = a(\xi(t))dt,$$

де a – обмежена функція, що задовольняє умову Ліпшиця на всій осі.

Нехай $\{\varphi_{s,t}(u) \mid u \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq s \leq t\}$ – броунівська сітка[4, 5] на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Відображення $\{\varphi_{s,t} \mid 0 \leq s \leq t\}$ можна розглядати як стохастичний потік на $\mathbb{R}$. Для $n \in \mathbb{N}$ побудуємо

$$x^n_{0,t}(u) = e_t(\varphi_{\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}} \circ e_{\frac{1}{n}} \circ \varphi_{\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}} \circ \ldots \circ \varphi_{0,\frac{1}{n}}(u)), \quad t \in [\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Теорема 1. *Для $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}$ $\left(x^n_{0,\cdot}(u_1), \ldots, x^n_{0,\cdot}(u_m,)\right)$ слабко збігаютьcя при $n \to \infty$ до $(Y^a_\cdot(u_1), \ldots, Y^a_\cdot(u_m))$ в $(D([0;1]))^m$, де $D([0;1])$ – простір Скорохода.*

Тут $\{Y^a_t(u) \mid u \in \mathbb{R},\ t \geq 0\}$ – потік Арратья із дрейфом[1], тобто стохастичний потік такий, що

1. $Y^a_\cdot(u)$ є дифузією із коефіцієнтом дифузії 1 та коефіцієнтом дрейфу a;
2. при $u_1 \leq u_2$ $Y^a_t(u_1) \leq Y^a_t(u_2),\ t \in \mathbb{R}^+$;
3. сумісна характеристика мартингальних частин $Y^a_\cdot(u_1)$ та $Y^a_\cdot$ рівна

$$\int_0^t 1_{\{Y^a_s(u_1)=Y^a_s(u_2)\}} \mathrm{d}s,\ t \in \mathbb{R}^+.$$

[1] *Дороговцев А. А.* Мерозначные процессы и стохастические потоки.// Праці Інституту математики Національної Академії наук України. Математика та її застосування, 66. Національна Академія наук України, Інститут математики, Київ, 2007. 290 pp.

[2] *Arratia R.* Ph.D.Thesis// University of Wisconsin, Madison, (1979).

[3] *Goncharuk, N. Yu., Kotelenez, P.* Fractional step method for stochastic evolution equations // Stochastic Process. Appl. 73 (1998), no. 1, 1–45.

[4] *Fontes L. R. G., Isopi M., Newman C. M., Ravishankar K.* The Brownian web: characterization and convergence // Ann. Probab. 32(4):2857–2883, 2004.

[5] *Toth B., Werner W.* The true self-repelling motion // Probab. Theory Related Fields 111(3):375–452, 1998.

ПРО РОЗПОДІЛ АБСОЛЮТНОГО МІНІМУМУ ДЛЯ НАПІВНЕПЕРЕРВНОГО ЗВЕРХУ ГРАТЧАСТОГО ПРОЦЕСУ НА ЛАНЦЮГУ МАРКОВА

Герич Мирослава Сергіївна

Ужгородський національний університет

miroslava.gerich@yandex.ru

Розглядається гратчастий пуассонівський процес на ланцюгу Маркова (ЛМ)

$$\mathbf{Z}(t) = \{\xi(t), x(t)\} \ (t \geq 0, \ \xi(0) = 0),$$

де $x(t)$ – регулярний однорідний ЛМ з обмеженою множиною станів $\mathbb{E} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$; $\xi(t) = \{\xi_1(t), \ldots, \xi_k(t)\}$, де кожному стану ЛМ $x(t) = k$ відповідає $\xi_k(t)$. Повне означення процесу $\mathbf{Z}(t)$ в негратчастому і гратчастому випадках див. в [1, 2].

Вводяться позначення:

$$\xi^-(t) = \inf_{0 \leq t' \leq t} \xi(t'), \ \xi^- = \inf_{0 \leq t \leq \infty} \xi(t), \ \overline{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^+(t);$$

$$\mathbf{g}_-(s, z) = \mathbf{E} z^{\xi^-(\theta_s)} = \| E[z^{\xi^-(\theta_s)}, \ x(\theta_s) = r | x(0) = k] \|, \ k, r = \overline{1, m},$$

$$\mathbf{g}^+(s, z) = \mathbf{E} z^{\overline{\xi}(\theta_s)}, \ \mathbf{K}(z) = ln \mathbf{E}[z^{\xi(t)}].$$

В доповіді наводяться основні твердження для генератриси розподілу мінімуму $\xi^-(\theta_s)$ в термінах обернень $(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))$. Кумулянта

$$\mathbf{K}(z) = (z-1)[\mathbf{\Lambda}_1 - z^{-1}(\mathbf{\Lambda}_2 \widetilde{\mathbf{F}}_2(z) + \mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}(z))] + \mathbf{Q}$$

процесу записується через твірні перетворення функцій розподілу від'ємних стрибків. $\mathbf{\Lambda_{1,2}}$ - діагональні матриці інтенсивностей відповідно додатних та від'ємних стрибків, $\mathbf{N} = \|\delta_{kr} n_k\|$, $\{n_k > 0, k \in \mathbb{E}\}$ -параметри показниково розподілених випадкових величин ζ_k - часів перебування $x(t)$ в стані k , $\mathbf{Q}$ -твірна матриця ЛМ $x(t)$.

У випадку напівнеперервності зверху розглядуваного процесу (коли його додатні стрибки одиничні, а від'ємні стрибки приймають цілі значення і мають довільний гратчастий розподіл) при $s \to 0$ з співвідношень для $\mathbf{g}_-(s, z)$ визначається розподіл абсолютного мінімуму ξ^-.

[1] *Гусак Д.В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на скінченних ЛМ та для напівмарковських процесів. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 320 с.

[2] *Гусак Д.В., Герич М.С.* Уточнення компонент основної факторизаційної тотожності для гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова// Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.матем. і інформ. – 2011. – Вип. 22, №2. – С.54-63

О КОЛИЧЕСТВЕ БЕСПОРЯДКА В ПРИБЛИЖЕНИЯХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОТОКОВ СО СКЛЕИВАНИЕМ

Глиняная Екатерина Валериевна

Институт математики НАН Украины

glinkate@gmail.com

Пусть $\{\xi_k^n, k=0,\ldots,n\}_{n\geq 1}$ последовательность серий независимых стационарных гауссовских процессов с ковариационной функцией Γ_n,

$$x_{k+1}^n(u) = x_k^n + \xi_{k+1}^n(x_k^n(u)),$$
$$x_0^n(u) = u,\ u\in\mathbb{R}.$$

Случайный процесс $\big(x_n(u,t),\ t\in[0,1]\big)$ получен при помощи линейной интерполяции по точкам $x_n(u,\frac{k}{n}) = x_k^n(u)$.

В [1] было доказано, что l-точечные движения потока $\big(x_n(u,t)\big)$ слабо сходятся к l-точечному движению потока Арратья [2]. Особенностью потока Арратья является упорядоченность частиц: $x(u_1,t)\leq x(u_2,t),\ u_1<u_2$. Однако это свойство не верно для потока с дискретным временем. В работе исследуется время, которое проводит под нулем процесс

$$y_n(t) = x_n(u_2,t) - x_n(u_1,t),\ u_1<u_2,$$

а именно, для функционала

$$\Phi(y_n;[t_1,t_2]) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{I}_{\{y_n(t)<0\}}dt$$

получены асимптотические оценки при $n\to\infty$:

Теорема 1. *Для произвольного* $\varepsilon>0$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\mathbb{P}\{\Phi(y_n;[0,1])>\varepsilon\}}{a_n\cdot n} \leq 1;$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\mathbb{P}\{\Phi(y_n;[0,1])>\varepsilon\}}{a_n\cdot b_n\cdot n} \geq 1-\varepsilon,$$

где

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\frac{n}{c_n}}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{e^{2n}}{\sqrt{nc_n}}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

$$c_n = \sup_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{2 - 2\Gamma_n(x)}}{x^2}.$$

[1] *I.I. Nishchenko* Discrete time approximation of coalescing stochastic flows on the real line // Theory of Stochastic Processes 17(33) no.1, 2011, pp. 70-78.

[2] *R. Arratia* Brownian motion on the line // PhD dissertation, Univ. Wisconsin, Madison, 1979

ТЕСТУВАННЯ КРИТЕРІЮ ПРО ПЕРЕВІРКУ ГІПОТЕЗИ ПРО ВИГЛЯД КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ГАУССОВОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Гудивок Т.В.

Ужгородський національний університет

Погоріляк О.О.

Ужгородський національний університет

alex_pogorilyak@ukr.net

Побудова математичних моделей випадкових процесів та оцінювання їх спектральних та кореляційних характеристик залишаються актуальними задачами в теорії випадкових процесів, що широко застосовуються в різних областях природничих та соціальних наук.

В доповіді буде розглянуто дві задачі: побудова моделі гауссового стаціонарного випадкового процесу з заданою точністю та надійністю та перевірка гіпотези про вигляд кореляційної функції даного стаціонарного гауссового процесу за спостереженнями траєкторії моделі. За наближення кореляційної функції вибрано корелограму, а для перевірки гіпотези використовуються оцінки для розподілу відхилення корелограми від кореляційної функції в метриці простору L_2.

При побудові моделі гауссового стаціонарного випадкового процесу буде використано його спектральне зображення[3].

Для перевірки гіпотези про вигляд кореляційної функції буде використано наступний критерій: нехай H – гіпотеза, яка полягає в тому, що при

$0 \leq \tau \leq B$, $B \in \mathbf{R}^+$, кореляційна функція сепарабельного дійсного стаціонарного центрованого гауссового процесу $\xi = \{\xi(t), t \in [0, T + B]\}$ дорівнює $\rho(\tau)$. За оцінку $\rho(\tau)$ виберемо корелограму $\hat{\rho}_T \tau$. Для заданого рівня довіри α знайдемо такі додатні x_α та y_α, що

$$s(x_\alpha, u) + f(y_\alpha) = \alpha,$$

де

$$s(x, u) = g(u) \exp\left\{\frac{u^2 x}{2}\right\}, u > 0,$$

$$f(x) = \frac{2^{1/4} x^{1/4}}{\cosh\left(\sqrt{x/2} - 1/2\right)},$$

$g(u)$ визначена в [1]. Гіпотеза H приймається, якщо

$$x_\alpha < \frac{\int_0^B \left(\hat{\rho}_T(\tau) - \rho(\tau)\right)^2 d\tau}{\mathrm{E} \int_0^B \left(\hat{\rho}_T(\tau) - \rho(\tau)\right)^2 d\tau} < y_\alpha$$

і відкидається в протилежному випадку.

Проведено аналіз залежності між точністю побудованої моделі та істинністю критерію при заданому рівні значущості α та обгрунтовано отримані результати.

[1] *Козаченко Ю.В., Федорянич Т.В.* Критерій перевірки гіпотез про коваріаційну функцію гауссового стаціонарного процесу. // Теорія ймовірностей та математична статистика. – Вип. 69 – 2003. – С.63-78.

[2] *Козаченко Ю.В., Федорянич Т.В.* Оцінки для розподілу супремума квадратично гауссових випадкових процесів заданих на некомпактних множинах. // Теорія ймовірностей та математична статистика. – Вип. 73 – 2005. – С.72-87.

[3] *Козаченко Ю.В., Погоріляк О.О., Тегза А.М.* Моделювання гауссових випадкових процесів та процесів Кокса: Монографія – Уж.: Карпати, 2012. – 194с.

[4] *Погоріляк О.О.* Моделювання логарифмічно строго субгауссових процесів Кокса.// Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика. – 2011. – Випуск 22. № 2. – С. 109-116.

[5] *Федорянич Т.В.* Одна оцінка кореляційної функції для гауссового випадкового процесу. // Вісник Київського університету ім. Тараса Шевченка. – Вип. 2 – 2004. – С.72-76.

ХАРАКТЕРИЗАЦІЙНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ШВЕЙЦАРСЬКОГО ПРИНЦИПУ ПІДРАХУНКУ ВАРТОСТІ СТРАХОВИХ КОНТРАКТІВ

Дрозденко Віталій Олександрович

Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова

drozdenko@yandex.ru

Нехай X це випадкова величина (не обов'язково невід'ємна) яка відображає розмір страхової компенсації пов'язаної з певною страховою угодою. Премію, яку слід заплатити при укладанні угоди за покриття ризику X, позначатимемо $\pi[X]$.

Нетто премія означається, як математичне сподівання розміру страхової компенсації асоційованої з ризиком X, тобто

$$\pi_{\text{нетто}}[X] \ := \ \mathsf{E}[X].$$

Експоненційна премія, залежна від параметра $\beta > 0$ для ризику X означається наступним чином

$$\pi_{\text{експ.}(\beta)}[X] \ := \ \frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{\beta X}]).$$

Премія середнього значення для ризику X, задана за допомогою функції $v(x)$, такої, що $v'(x) > 0$ та $v''(x) \geq 0$ для $x \in \mathbb{R}$, означається як розв'язок рівняння

$$v(\pi_{\text{с.з.}}[X]) = \mathsf{E}[v(X)].$$

Премія нульової корисності страховика для ризику X означається як розв'язок рівняння

$$U(0) \ = \ \mathsf{E}[U(\pi_{\text{н.к.с.}}[X] - X)],$$

де $U(x) \in C_2(\mathbb{R})$ — це функція корисності капіталу страховика, яка є такою, що $U'(x) > 0$ та $U''(x) \leq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Швейцарська премія для ризику X, залежна від параметра $\Delta \in [0, 1]$, основана на функції $V(x) \in C_2(\mathbb{R})$, такій, що $V'(x) > 0$ та $V''(x) \geq 0$ для $x \in \mathbb{R}$, означається як розв'язок рівняння

$$V((1-\Delta)\pi_{\text{швейц.}}[X]) = \mathsf{E}[V(X - \Delta\pi_{\text{швейц.}}[X])].$$

Зауважимо, що у випадку $\Delta = 0$, швейцарська премія співпадає з премією середнього значення, в якій $v(x) := V(x)$. З іншого боку, у випадку $\Delta = 1$, швейцарська премія співпадає з премією нульової корисності страховика з функцією корисності $U(x) := -V(-x)$.

Говоритимемо, що метод підрахунку вартості страхових контрактів $\pi[X]$ володіє властивістю: *адитивності*, якщо для будь-яких двох незалежних ризиків X_1 та X_2 виконується рівність $\pi[X_1 + X_2] = \pi[X_1] + \pi[X_2]$; *консистентності*, якщо для будь-якого ризику X та довільної дійсної константи c виконується рівність $\pi[X + c] = \pi[X] + c$; *ітеративності*, якщо для будь-яких двох ризиків X та Y виконується рівність $\pi[\pi[X|Y]] = \pi[X]$; *мультиплікативної інваріантності*, якщо для довільного ризику X та довільної позитивної дійсної сталої Θ виконується рівність $\pi[\Theta X] = \Theta\,\pi[X]$.

Теорема 1. *Для будь-якого значення параметра $\Delta \in [0, 1]$, швейцарський принцип підрахунку вартості страхових контрактів володіє властивістю адитивності тоді й лише тоді, коли $V(x) = ax + b$, при $a > 0$, чи $V(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, при $\min[\alpha, \beta] > 0$, тобто, лише у випадках, коли він співпадає або з нетто принципом, або з експоненційним принципом.*

Теорема 2. *Якщо $\Delta = 1$, то швейцарський принцип підрахунку вартості страхових контрактів володіє властивістю консистентності при довільному виборі функції $V(x) \in C_2(\mathbb{R})$ такої, що $V'(x) > 0$ та $V''(x) \geq 0$ для $x \in \mathbb{R}$; якщо $\Delta \in [0, 1)$ то швейцарський принцип підрахунку вартості страхових контрактів володіє властивістю консистентності тоді й лише тоді, коли $V(x) = ax + b$, при $a > 0$, чи $V(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, при $\min[\alpha, \beta] > 0$, тобто, лише у випадках, коли він співпадає або з нетто принципом, або з експоненційним принципом.*

Теорема 3. *Якщо $\Delta = 0$ то швейцарський принцип підрахунку вартості страхових контрактів володіє властивістю ітеративності при довільному виборі функції $V(x) \in C_2(\mathbb{R})$ такої, що $V'(x) > 0$ та $V''(x) \geq 0$ для $x \in \mathbb{R}$; якщо $\Delta \in (0, 1]$ то швейцарський принцип підрахунку вартості страхових контрактів володіє властивістю ітеративності тоді й лише тоді, коли $V(x) = ax + b$, при $a > 0$, чи $V(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, при $\min[\alpha, \beta] > 0$, тобто, лише у випадках, коли він співпадає або з нетто принципом, або з експоненційним принципом.*

Теорема 4. *Для будь-якого значення параметра $\Delta \in [0, 1]$, швейцарський принцип підрахунку вартості страхових контрактів володіє властивістю мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли $V(x) = ax + b$, при $a > 0$, тобто, лише у випадку його співпадання з нетто принципом.*

Теорема 5. *У випадку $\Delta = 0$, швейцарський принцип підрахунку вартості страхових контрактів звужений до оцінювання лише строго позитивних ризиків володіє властивістю мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли $V(x) = ax^{\kappa} + b$, при $a > 0$ та $\kappa \geq 1$, для $x \in (0, +\infty)$.*

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОЦЕСІВ РИЗИКУ У ВИПАДКОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Єлейко Ярослав Іванович

Львівський національний університет імені Івана Франка

Звізло Максим Романович

Львівський національний університет імені Івана Франка

zvmax@i.ua

У сучасному суспільстві стахування дає можливість компенсувати збитки спичинені тими чи іншими факторами. Тому для покращення роботи страхових компаній розглянуто чотири динамічні моделі процесів ризику страхових компаній. У моделі видозмінений класичний процес ризику який вивчали Ф. Лундберг та Г. Крамер. Пошук оцінки ймовірності небанкрутства страхової компанії полягає в розв'язання системи інтегрально-диференціальних рівнянь. Знайдено оцінку ймовіртості небанкрутства, а також в деякому випадку розв'язки інтегрально-диференціальних рівнянь.

Використовуючи теорію відновлення та властивості отриманих процесів знаходиться оцінка моменту банкрутства та розміру збитків страхової компанії.

СИСТЕМА $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ З ЧАСОМ ОБСЛУГОВУВАННЯ, ЗАЛЕЖНИМ ВІД ДОВЖИНИ ЧЕРГИ

Жерновий Костянтин Юрійович

Львівський національний університет імені Івана Франка

k_zhernovyi@yahoo.com

Моделі систем обслуговування, в яких замовлення надходять групами, а інтенсивність обслуговування цілеспрямовано змінюється разом з довжиною черги, часто використовуються для вивчення телекомунікаційних процесів, зокрема процесів передавання даних у мережах ATM з використанням технологій мультиплексування.

Ми вивчаємо систему $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, в якій час обслуговування кожного замовлення визначається за правилом: якщо в момент початку обслуговування цього замовлення у системі перебуває n замовлень, то його часу обслуговування відповідає функція розподілу $F_n(x)$.

Спираючись на метод потенціалу В. С. Королюка [1] для неперервних знизу випадкових блукань, визначено середню тривалість періоду зайнятості, отримано зручні для числової реалізації формули для стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі та стаціонарних характеристик. Отримані результати перевірено за допомогою імітаційних моделей, побудованих за допомогою інструментальних засобів GPSS World.

[1] *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – Киев: Наук. думка, 1975. – 139 с.

ГРАВІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГРОШОВИХ ПОТОКІВ

Кінаш Орест Михайлович

Львівський національний університет імені Івана Франка

okinasch@yahoo.com

До аналізу грошових потоків застосовано так звану гравітаційну модель. Систему в якій переміщаються кошти будемо розглядати як комунікаційну систему. Грошові одиниці інтерпритуються, як частинки, які розподілені за "пунктами"в яких вони "зароблені"(початковий стан системи). Комунікаціями будемо вважадати шляхи переміщення коштів. Кінцевим станом системи будемо називати розподіл коштів за "пунктами споживання". Як характеристика розглядається вартість переводу грошових одиниць.

В залежності від даних, які є відомими, отримано чотири різних моделі.

МЕТОД ПАРАМЕТРИКСА ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕЯКИХ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ

Кнопова Вікторія Павлівна

Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України

vicknopova@googlemail.com

Доповідь присвячено побудові методом параметриксу фундаментального розв'язку рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = L(x,D)u(t,x), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

де $u\in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$L(x,D)v(x) := \int_{\mathbb{R}}(u(x+y)-u(x)-\frac{\partial}{\partial x}u(x)y1_{|y|\leq 1})m(x,y)\mu(dy),$$

μ є мірою Леві, та функція $m(x,y)$ задовольняє деяким досить слабким умовам регулярності. Показано, що такий розв'язок є перехідною щільністю феллерівського процесу, пов'язаного з опрератором $L(x,D)$. Знайдено верхню та нижню оцінки на фундаментальний розв'язок, та наведено деякі приклади їх застосування.

Доповідь базується та сумісній роботі з О. Куліком.

[1] *Knopova V., Kulik A.* Parametrix construction for certain Lévy-type processes and applications. Part I. // Препрінт 2012.

[2] *Knopova V., Kulik A.* Intrinsic small time estimates for distribution densities of Lévy processes // Препрінт 2012.

[3] *Knopova V.* Parametrix construction for certain Lévy-type processes and applications. Part II.// У роботі.

ПРО БАГАТОВИМІРНИЙ ПРОЦЕС БРОУНІВСЬКОГО РУХУ З КУСКОВО-СТАЛОЮ МАТРИЦЕЮ ДИФУЗІЇ ТА З МЕМБРАНОЮ, ЩО РОЗТАШОВАНА НА ДАНІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ І ДІЄ В НАХИЛЕНОМУ НАПРЯМКУ

Кончук Павло Петрович

Львівський національний університет імені Івана Франка

Мильо Ольга Ярославівна

Львівський національний університет імені Івана Франка

Цаповська Жаннета Ярославівна

Львівський національний університет імені Івана Франка

tzhannet@yahoo.com

Нехай у півпросторах скінченновимірного евклідового простору $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, задані два різні процеси броунівського руху зі сталими матрицями дифузії та нульовими векторами переносу.

Припускається також, що на спільній межі областей $S = \mathbb{R}^{d-1}$ розташована мембрана, властивості якої описуються заданою на S умовою спряження типу Вентцеля [1], до якої входять лише члени, що відповідають за часткове відбиття процесу в напрямку нормалі до S та перенос вздовж межі. Використовуючи звичайні теплові та параболічні потенціали, побудовано напівгрупу Феллера, якій відповідає дифузійний процес в $\mathbb{R}^d$ з кусково-сталою матрицею дифузії та узагальненим вектором переносу у розумінні М.І. Портенка.

[1] *Вентцель А.Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теория вероятн. и ее применения. 1959. 4, №2. С. 172–185.

[2] *Портенко М.І.* Процеси дифузії в середовищах з мембранами. // Інститут математики НАН України. Київ, 1995. — 199 с.

ПРО СКЛЕЮВАННЯ ДВОХ БАГАТОВИМІРНИХ ПРОЦЕСІВ БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

Копитко Богдан Іванович

Львівський національний університет імені Івана Франка

Новосядло Андрій Федорович

Львівський національний університет імені Івана Франка

nandrew183@gmail.com

Розглянемо в евклідовому просторі $\mathbb{R}^d,\ d \geq 2$, дві області: $\mathcal{D}_1 = \{x : x = (x_1, \ldots, x_d),\ x_d < 0\}$ і $\mathcal{D}_2 = \{x : x = (x_1, \ldots, x_d),\ x_d > 0\}$. Через $S = \mathbb{R}^{d-1}$ будемо позначати спільну межу цих областей. Нехай в $\mathcal{D}_1$ і $\mathcal{D}_2$ задані твірні оператори L_1 і L_2 відповідно деяких процесів броунівського руху зі сталими матрицями дифузії та нульовими векторами переносу. Припустимо також, що в точках S заданий диференціальний оператор другого порядку за просторовими змінними L_0 типу Вентцеля [1].

Досліджується питання про існування напівгрупи Феллера, якій відповідає неперервний марковський процес в $\mathbb{R}^d$ такий, що його частини в областях $\mathcal{D}_1$ і $\mathcal{D}_2$ збігаються з процесами броунівського руху, керованими відповідно операторами L_1 і L_2, а поведінка процесу в точках межі S визначається умовою спряження, породженою оператором L_0. Шукану напівгрупу знайдемо як розв'язок відповідної модельної задачі спряження для параболічного рівняння другого порядку з використанням звичайних теплових та параболічних потенціалів. Доводиться, крім цього, що процес можна трактувати як узагальнену дифузію в розумінні М. І. Портенка [2].

[1] *Вентцель А. Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теория вероятн. и ее примен. – 1959. – 4, №2. – с. 172-185.

[2] *Портенко М. І.* Процеси дифузії в середовищах з мембранами, // Інститут математики НАН України, Київ, (1995).

ПРО ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ ОПТИМАЛЬНИХ СТРАТЕГІЙ В ОДНІЙ МОДЕЛІ ОЛІГОПОЛІЇ З ВИПАДКОВИМИ ВИПУСКАМИ ВИРОБНИКІВ

Косаревич Катерина Вікторівна

Львівський національний університет імені Івана Франка

katia_kosarevych@mail.ru

Нехай галузь економіки формують n фірм-виробників однорідної продукції з об'ємами випусків q_i, $i = 1, ..., n$. Рішення про обсяг випуску приймається до того, як стане відомою ринкова ціна. Розглядається модель кількісної конкуренції у випадку, коли випуски виробників є незалежними випадковими величинами, причому вплив випадкового середовища на прийняття рішення фірмами не є однорідним.

Значення випуску q_1 фірми 1 вважається випадковою величиною з абсолютно неперервним розподілом на відрізку з нефіксованою верхньою межею. Поведінка фірми 1 орієнтована на пошук стратегії, котра максимізує сподіване значення її прибутку на компактній множині можливих рішень. Обсяги випусків q_i решти виробників є випадковими величинами такими, що $q_i = \eta_i q_i^0$, $i = 2, ..., n$, q_i^0 - визначений цільовий обсяг випуску, η_i – випадкові величини зі сталими середніми (η_i відображають випадковий характер середовища, в якому приймають рішення фірми $2,\ldots,n$). Водночас метою виробників $2,\ldots,n$ є максимізація сподіваного значення їх прибутку.

В межах описаної взаємодії виробників побудовано відповідну модель. Виділено клас розподілів випадкового випуску фірми 1, який задовольняє для побудованої моделі умови існування та єдиності рівноваги в термінах концепції за Нешом [1].

[1] *фон Нейман Дж., Моргенштерн Э.* Теория игр и экономическое поведение.– М.: Наука - 1970 - 708с.

ІНТЕГРАЛЬНІ ІНВАРИАНТИ КОНЦЕВИЧА ДЛЯ ТРАЄКТОРІЙ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Кузнецов Василь Олексійович

Інститут математики НАН України

vasylkuz@mail.ru

У зв'язку з вивченням топологічних властивостей стохастичних потоків виникає задача опису сукупностей траєкторій випадкових процесів як елементів групи кіс. Коса - це неперервна траєкторія в топологічному просторі $\mathbb{C}^n \setminus \{\exists i, j : z_i = z_j\}$. Коси розрізняються з точністю до гомотопії. Для кіс відома система інвариантів Васильєва, яка є повною в тому сенсі, що дві коси є гомотопними тоді й тільки тоді, коли всі їхні інваріанти Васильєва співпадають. Для инвариантів Васильєва існує інтегральне подання, дане М. Л. Концевичем. У доповіді розглядається ця система інваріантів для траєкторій незалежних вінерових процесів.

Інтегралом Концевича порядку m для гладкої коси $Z(t) = (Z_1(t), \ldots, Z_n(t))$ називається [1] такий елемент простору діаграмм порядку m:
$K_m = \sum\limits_{P \in \mathbb{P}_{mn}} \int\limits_{\Delta_m} \omega_{P_{11}P_{12}}(t_1) \ldots \omega_{P_{m1}P_{m2}}(t_m) D(P)$,
де $\Delta_m = \Delta_m(T) = \{(t_1, \ldots, t_m) \mid 0 \le t_1 \le \cdots \le t_m \le T\}$,
$\omega_{ij}(t) = \omega_{ji}(t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{dZ_i(t) - dZ_j(t)}{Z_i(t) - Z_j(t)}$.

Інтегральні інваріанти Концевича можна визначити не лише для гладких, а й для неперервних кіс. Має місце такий результат.

Теорема 1. *Будь-який інтегральний інваріант Концевича для неперервної траєкторії є границею відповідних інваріантів для послідовності вписаних до цієї траєкторії ламаних, коли щільність розбиття прямує до нуля.*

Основним результатом роботи є такий.

Теорема 2. *Для незалежних вінерових процесів $W_i(t), t \in [0, T], i = 0 \ldots k$ інтегральні інваріанти Концевича обчислюються як відповідні кратні інтеграли Стратоновича.*

[1] *Mitchell A Berger* Topological invariants in braid theory // Letters in Mathematical Physics, 2001 vol. 55, number 3

[2] *Fabrice Baudoin* An Introduction to the Geometry of Stochastic Flow // World Scientific Publishing Company (March 2005)

ТЕОРЕМИ ЛЕВІ-БАКСТЕРА ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ У СТАТИСТИЦІ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ І ПОЛІВ

Курченко Олександр Олексійович

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

olkurchenko@ukr.net

Граничні теореми бакстерівського типу для випадкових процесів та полів започаткував Поль Леві [2], який у 1940 році встановив, що для стандартного броунівського руху $w(t)$, $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{2^n} \left(w\left(\frac{k}{2^n}\right) - w\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \right)^2 \to 1$$

з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$. У п'ятидесятих роках минулого століття Г.Бакстер [1] узагальнив цей результат на більш широкий клас гауссових випадкових процесів. У подальшому граничні теореми такого типу досліджувалися багатьма математиками.

Останнім часом теореми бакстерівського типу знайшли застосування у статистиці випадкових процесів та полів для оцінювання параметрів коваріаційних функцій. Такий підхід, на відміну від інших методів оцінювання, дозволяє будувати неасимптотичні довірчі області. Зокрема, таким способом отримана сильно консистентна оцінка і неасимптотичні довірчі інтервали для параметра Хюрста дробового броунівського руху [3].

У доповіді буде зроблений короткий огляд теорем бакстерівського типу та наведені приклади їх застосування для оцінювання параметрів випадкових процесів та полів.

[1] *Baxter G.* A strong limit theorem for Gaussian processes // Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), No 3, 522–527.

[2] *Levy P.* Le mouvement Brownian plan // Amer. J. Math. 62 (1940), 487–550.

[3] *Курченко О. О.* Одна сильно консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху // Теорія ймовірностей і математична статистика 67 (2002), 45–54.

АСИМПТОТИЧНА СТОХАСТИЧНА СТІЙКІСТЬ В ЦІЛОМУ СТОХАСТИЧНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ З ПОСТІЙНИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Лукашів Тарас Олегович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

lukashiv@rambler.ru

На ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathbf{F} \equiv \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, t \geq 0\})$, розглядається рівняння збуреного руху, яке будемо трактувати як динамічну систему випадкової структури з постійним запізненням

$$dx(t) = a(t, \xi(t), x(t), x(t-r))dt + b(t, \xi(t), x(t), x(t-r))dw(t), \qquad (1)$$

із зовнішніми марковськими перемиканнями

$$\Delta x(t)|_{t=t_k} = g(t_k-, \xi(t_k-), \eta_k, x(t_k-)), \quad t_k \in S \equiv \{t_n \uparrow, n \in N\}, \qquad (2)$$

із початковими умовами

$$x(t)|_{t_0-r \leq t \leq t_0} = \varphi(\theta) \in \mathbf{D} \equiv \mathbf{D}\left([t_0 - r, t_0], \mathbf{R}^m\right),$$

$$\xi(t_0) = y \in \mathbf{Y}, \ \eta_{k_0} = h \in \mathbf{H}. \qquad (3)$$

Тут $\xi(t)$ – марковський процес із значеннями в метричному просторі $\mathbf{Y}$ з перехідною ймовірністю $\mathbf{P}(s, y, t)$; $(\eta_k, k \geq 0)$ – ланцюг Маркова із значеннями в метричному просторі $\mathbf{H}$ з перехідною ймовірністю на k-ому кроці $\mathbf{P}_k(h, G)$; $\theta \in [t_0 - r, t_0], r > 0$; $w(t)$ – одновимірний стандартний вінерів процес; $\mathbf{D}$ – простір Скорохода неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі з нормою $\|\varphi\| = \sup\limits_{t_0 - r \leq \theta \leq t_0} |\varphi(\theta)|$.

Для стохастичної динамічної системи випадкової структури (1)-(3) встановлено достатні умови асимптотичної стохастичної стійкості в цілому.

[1] *Кац И.Я.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры / И.Я. Кац. – Екатеринбург: УГАПС, 1998. – 222 с.

[2] *Свердан М.Л.* Устойчивость стохастических импульсных систем / М.Л. Свердан, Е.Ф. Царьков. – Рига: РТУ, 1994. – 300 с.

[3] *Ясинський В.К.* Стабілізація у динамічних системах випадкової структури / В.К. Ясинський, Є.В. Ясинський, І.В. Юрченко. – Чернівці: Золоті литаври, 2011. – 738 с.

НОРМАЛЬНИЙ ГРАНИЧНИЙ РОЗПОДІЛ НОРМОВАНОГО ЧИСЛА СТОРОННІХ РОЗВ'ЯЗКІВ СУМІСНОЇ СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ РІВНЯНЬ У ПОЛІ GF(2)

Масол Володимир Іванович

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

vimasol@ukr.net

Слободян Світлана Ярославівна

Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника

slobodian_s@ukr.net

Розглянемо систему рівнянь

$$\sum_{k=1}^{g_q(n)} \sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le n} a^{(q)}_{j_1\ldots j_k} x_{j_1}\ldots\ x_{j_k} = b_q,\ \ q=1,\ldots,N, \tag{1}$$

у полі $GF(2)$, що складається з двох елементів, за умови (A):

коефіцієнти $a^{(q)}_{j_1\ldots j_k}$, $1\le j_1<...<j_k\le n$, $k=1,...,g_q(n)$, $q=1,...,N$, – незалежні випадкові величини, $P\left\{a^{(q)}_{j_1\ldots j_k}=1\right\}=1-\ P\left\{a^{(q)}_{j_1\ldots j_k}=0\right\}=p_{qk}$;

елементи b_q, $q=1,...,N$, – результат підстановки в ліву частину системи (1) фіксованого n-вимірного $(0,1)$-вектора $\bar{x}^0$, який має $\rho\,(n)$ ненульових компонент, $\rho(n)=|\bar{x}^0|$;

функція $g_q(n)$, $q=1,...,N$, – невипадкова, $g_q(n)\in\{1,2,...,n\}$, $q=1,...,N$.

Позначимо через $M(\bar{x}^0,f(n))$ сукупність усіх n-вимірних $(0,1)$-векторів $\overline{x}$, які не співпадають з $\overline{x}^0$ та мають кількість $|\bar{x}|$ ненульових компонент, яка задовольняє нерівності $|\bar{x}|\ge f(n)$, $f(n)\in\{0,1,2,...,n\}$.

Число усіх розв'язків системи (1), які належать множині $M(\bar{x}^0,f(n))$, позначимо через ν_n і будемо називати їх сторонніми. Нас цікавлять умови, за яких відповідним чином нормована випадкова величина ν_n має граничний $(n\to\infty)$ нормальний розподіл і при цьому $f(n)\ge 1$. Зазначимо, що в роботі [1] розглянуто випадок, коли $f(n)=0$ та $\rho(n)\to\infty$ $(n\to\infty)$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (A), при* $n\to\infty$

$$2^{n-N}=[\lambda],$$

де

$$\lambda=\frac{1}{\upsilon(1+\alpha+\omega)}\log_2\frac{n}{\beta f(n)\log_2 n},$$

$\upsilon = \upsilon(n)$, $\upsilon \geq 2$, $\alpha = \alpha(n)$, $\omega = \omega(n)$, $\beta = \beta(n)$, $\beta \geq c_0 > 2\ln 2$, $[\cdot]$ – *знак цілої частини*, $c_0 = const$,

$$\lambda \to \infty,$$

$$\omega\sqrt{\lambda} \to \infty;$$

для довільного q, $q = 1, ..., N$, *існує непорожня множина* T_q *така, що при всіх достатньо великих* n

$$T_q \subseteq \{1, 2, ..., g_q(n)\} \cap \{1, 2, ..., f(n)\}, \ \ T_q \neq \varnothing,$$

$$\frac{1}{2} - \delta_{qt} \leq p_{q\,t} \leq \frac{1}{2} + \delta_{qt}, \ \ \delta_{qt} = \delta_{qt}(n), \ \ t \in T_q, \ \ q = 1, ..., N,$$

$$(2 + (1 + \alpha + \omega)\ln 2)\lambda - \frac{\ln\lambda}{2} + \ln\left(\sum_{q=1}^{N} \prod_{t \in T_q} 2\delta_{qt}\right) \to -\infty,$$

$$(\alpha - 1)\,\lambda\, u(\alpha) \geq c_1 > -\infty,$$

де $c_1 = const$, $u(\alpha) = (\alpha - 1)^{-1}(\alpha\ln\alpha - \alpha - 1)$ *для* $2 > \ln\alpha > 0$ *та* $u(\alpha) = \ln\alpha - 1$ *для* $\ln\alpha \geq 2$.

Тоді функція розподілу випадкової величини $\frac{\nu_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ *прямує* $(n \to \infty)$ *до стандартної нормальної функції розподілу.*

Приклад 2. *Нехай* $\alpha = 5$, $\beta = \frac{3}{2}$, $\omega = 1$, $\upsilon = 2$, $T_q = \{2\}$, $0 \leq \delta_{qt} \leq \frac{1}{2n^2}$, $t \in T_q$, $q = 1, ..., N$, $f(n) = n^{\varepsilon}$, $\varepsilon = const$, $o \leq \varepsilon < 1$.

Тоді виконуються умови теореми і, отже, випадкова величина $\frac{\nu_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$, *де* $\lambda = \frac{1}{14}\log_2 \frac{2n^{1-\varepsilon}}{3\log_2 n}$, *має при* $n \to \infty$ *стандартний нормальний розподіл.*

Приклад 3. *Нехай* $\alpha = 5$, $\beta = \frac{3}{2}$, $\omega = 1$, $\upsilon = 2$, $T_1 = T_2 = ... = T_N$, $|T_q| = \log_2 n$, $0 \leq \delta_{qt} \leq \frac{1}{8}$, $t \in T_q$, $q = 1, ..., N$, $f(n) = n^{\varepsilon}$, $\varepsilon = const$, $o < \varepsilon < 1$.

Тоді виконуються умови теореми і, отже, випадкова величина $\frac{\nu_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$, *де* $\lambda = \frac{1}{14}\log_2 \frac{2n^{1-\varepsilon}}{3\log_2 n}$, *має при* $n \to \infty$ *стандартний нормальний розподіл.*

[1] *Masol V.I., Slobodyan S.Y.*On the asymptotic normality of the number of false solutions of a system of nonlinear random Boolean equations // Theory of Stochastic Processes, 13(29), № 1-2, 2007, P.144–151.

ДОВІРЧІ ІНТЕРВАЛИ ДЛЯ ПАРАМЕТРА КОВАРІАЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ІЗ СІМЕЙСТВА ДЕГУМА

Орловський Роман Ярославович

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

r_orlovskiy@mail.ru

Нехай $(X(t), t \in [0,1])$ стаціонарний гауссовий випадковий процес з $EX(t) = 0,\ t \in [0,1]$ і коваріаційною функцією із сімейства Дегума [1]

$$EX(t)X(s) = 1 - \left(\frac{|t-s|}{1+|t-s|}\right)^{\gamma},\ t,s \in [0,1],$$

де параметр $\gamma \in (0,1)$.

Для оцінювання параметра $\gamma \in (0,1)$ використаємо статистики вигляду

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(X\left(\frac{k+1}{n}\right) - X\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2 \quad n \geq 1.$$

Тоді за допомогою нерівності Чебишева знайдено оцінку

$$\hat{\gamma}_n = 1 - \frac{\log S_n}{\log(n+1)}, \quad n \geq 1.$$

Теорема 1. *Нехай $(X(t), t \in [0,1])$- гауссовий процес наведений вище і*

$$\gamma \in [\gamma_*, \gamma^*],\ 0 < \gamma_* < \gamma^* < 1.$$

Для довільного $z \in (1,2)$ позначимо $I_n(z) := [\hat{\gamma}_n + m(-z); \hat{\gamma}_n + m(z)]$, де

$$m(z) := \frac{\ln\left((2+z)\frac{n}{n+1}\right)}{\ln(n+1)}.$$

Позначимо $C = 12 + 3\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2-\gamma^*}}$. Тоді γ належить $I_n(z) \cap [0,1]$ з ймовірністю

$$p \geq \left(1 - 2\exp\left(-\frac{n^{\gamma_*} z^2}{4Cc_n(\gamma^*)(z+2)}\right)\right)_+, \text{ де } c_n(\gamma^*) := \frac{(n+1)^{\gamma^*}}{n}$$

Для доведення цієї теореми використано результат роботи [2].

[1] *Berg C., Mateu J., Porcu E.* The Dagum class of isotropic corelation functions. // Bernouli journal. -Vol 14(4). -2008. P. 1134-1149.

[2] *Nourdin I., Peccati G.* Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion // Electronic Journal of Statistics, Vol.3(2009) 416-425.

ПЕРЕНОС АБСОЛЮТНО НЕПЕРЕРВНИХ МІР ПОТОКАМИ, ПОРОДЖЕНИМИ СТОХАСТИЧНИМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ З РОЗРИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Пилипенко А.Ю.

Інститут математики НАН України; НТУУ "КПІ"

pilipenko.ay@yandex.ua

Розглянемо потік, породжений стохастичним диференціальним рівнянням в R^d :

$$\begin{cases} dX_t(x) = a(X_t(x))dt + dW(t), \ t \geq 0, \\ X_0(x) = x, \end{cases} \tag{1}$$

де $a : R^d \to R^d$ – обмежена вимірна функція, $W(t), t \geq 0$ – вінеровський процес зі значеннями в R^d.

За теоремою Вєрєтєннікова [1] існує єдиний сильний розв'язок стохастичного диференціального рівняння (1).

Нехай γ – скінченна, абсолютно неперервна міра в R^d. Позначимо через $\gamma_t := \gamma \circ X_t^{-1}$ образ міри γ при випадковому відображенні $X_t : R^d \to R^d$.

Відмітимо, що якщо функція a неперервно диференційована, а міра γ така, що $\gamma(dx) = \exp\{\rho(x)\}dx$, де $\rho \in C^1$, то має місце наступний варіант формули Ліувілля:

$\frac{d\gamma_t}{d\gamma}(x) =$

$$= \exp\{\int_0^t \left(-\mathrm{div} a(X_s(X_t^{-1}(x)) + \langle \rho(X_s(X_t^{-1}(x))), a(X_s(X_t^{-1}(x)))\rangle\right) ds\}, \tag{2}$$

де X_t^{-1} – обернене відображення.

Припустимо тепер, що відображення a необов'язково є диференційовною функцією, але дивергенція $\mathrm{div} a$ існує в сенсі узагальнених функцій і є мірою. За певних природніх умов на міру $\mathrm{div} a$ доведено, що міри γ_t абсолютно неперервні з ймовірністю 1. Також надано сенс виразу (2) для щільності Радона-Нікодима в цьому випадку. Даний результат істотно узагальнює результати робіт [2, 3, 4], де коефіцієнт переноса припускався більш регулярним.

[1] *Веретенников А. Ю.* О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений// ТВиП, 24:2 (1979), с. 348–360.

[2] *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations// Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 24. Cambridge University Press, Cambridge, 1990, 346 pp.

[3] *Fang S., Luo D., Thalmaier A.* Stochastic differential equations with coefficients in Sobolev spaces// J. Funct. Anal. 259 (2010), no. 5, 1129–1168.

[4] *Li H., Luo D.* Quasi-invariant flow generated by Stratonovich SDE with BV drift coefficient// Stoch. Anal. Appl. 30 (2012), no. 2, 258–284.

ГРАНИЧНИЙ РОЗПОДІЛ РАНГУ ВИПАДКОВОЇ СИЛЬНОЗАПОВНЕНОЇ МАТРИЦІ У ПОЛІ $GF(2)$.

Поперешняк Світлана Володимирівна

Національний авіаційний університет

Popereshnyak_sv@mail.ru

В доповіді розглядається система рівнянь у полі $GF(2)$ виду

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_{tj} = 0, \ \ t = \overline{1,T}, \tag{1}$$

де a_{tj}, $t = \overline{1,T}$, $j = \overline{1,n}$ - випадкові величини, які набувають значення 0 та 1. $(x_1, ..., x_n)$ $-$ $n-$вимірний вектор невідомих величин, $x_j \in \{0,1\}$ для $j = \overline{1,n}$.

Покладемо ν_{nm_0} - кількість нетривіальних розв'язків системи (1), $m_0 = n - T$, m_0 - фіксоване число.

Позначимо L подію, яка полягає у тому, що матриця коефіцієнтів $A = (a_{tj})$ не містить одиничних рядків та одиничних стовпців.

Теорема 1. *Нехай a_{tj}, $t = \overline{1,T}, j = \overline{1,n}$, $-$ незалежні випадкові величини з розподілом*

$$P\{a_{tj} = 1\} = 1 - P\{a_{tj} = 0\} = 1 - q_{tj}, \tag{2}$$

де $q_{tj} = \frac{\ln n - \omega_{tj}}{n}$,

$$-c \ln n \le \omega_{tj} \le \mu \ln n;$$

$$-\infty < \mu \le \frac{1}{3} - \varepsilon(n), \ \ \varepsilon(n) \to 0, \ \ \varepsilon(n) \ln n \to \infty, \ \ n \to \infty;$$

$$\sum_{t=1}^{T} \exp\left\{-n \min_{1\le j\le n} q_{tj}\right\} - \exp\left\{-n \max_{1\le j\le n} q_{tj}\right\} \to 0, \quad n\to\infty;$$

$$\max_{1\le t\le T} \frac{\sqrt{n}}{\ln n} \frac{\exp\left\{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\omega_{tj}}{n}\right\}}{\sum\limits_{t=1}^{T} \exp\left\{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\omega_{tj}}{n}\right\}} \to 0, \quad n\to\infty;$$

$$\max_{1\le j\le n} \frac{\sqrt{n}}{\ln n} \frac{\exp\left\{\sum\limits_{t=1}^{T} \frac{\omega_{tj}}{n}\right\}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \exp\left\{\sum\limits_{t=1}^{T} \frac{\omega_{tj}}{n}\right\}} \to 0, \quad n\to\infty.$$

Тоді має місце співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\nu_{nm_0} = 2^k - 1/L\right\} =$$
$$= 2^{-k(k-r)} \left\{\prod_{t=1}^{k-r} \left(1-2^{-t}\right)\right\}^{-1} \prod_{t=k+1}^{\infty} \left(1-2^{-t}\right), \; k\ge r.$$

Зауваження 2. *Матриця розподіл елементів якої задовольняє (2) називається сильнозаповненою.*

Зауваження 3. *Доведення теореми 1 можна виконати шляхом перевірки умов теореми про граничний ($n\to\infty$) розподіл рангу матриці, рядки якої є незалежними випадковими n-вимірними (0, 1)-векторами роботи [1].*

[1] *Масол В. І.* Расширение области инвариантности для случайных булевых матриц // Кибернетика. – 1980. – № 3. – С. 125–128.

ПРО ЩІЛЬНІСТЬ СПІЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ ЗНАЧЕННЯ ПРОЦЕСУ МАРКОВА І ЙОГО ЛОКАЛЬНОГО ЧАСУ

Осипчук Михайло Михайлович

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

myosyp@gmail.com

Портенко Микола Іванович

Інститут математики НАН України

portenko@imath.kiev.ua

Нехай $(x(t), \mathcal{M}_t, \mathbf{P}_x)$ — вимірний однорідний процес Маркова на дійсній прямій $\mathbb{R}$ із щільністю ймовірності переходу $g(t,x,y)$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$. Припустимо, що функція g неперервна за сукупністю аргументів, і нехай при кожному фіксованому $y\in\mathbb{R}$ виконується умова

$$\lim_{t\to 0+}\sup_{x\in\mathbb{R}}\int\limits_0^t g(s,x,y)\,ds = 0.$$

Тоді в кожній точці $y\in\mathbb{R}$ існує W-функціонал $(\eta_t(y))_{t\geq 0}$ від процесу $(x(t), \mathcal{M}_t, \mathbf{P}_x)$, такий, що

$$\mathbb{E}_x\eta_t(y) = \int\limits_0^t g(s,x,y)\,ds, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Цей функціонал зветься локальним часом процесу в точці y.

Для фіксованого $y\in\mathbb{R}$ позначимо через $G_y(t,x,z,\theta)$ функцію, для якої має місце рівність

$$\mathbf{P}_x((x(t),\eta_t(y))\in\Gamma) = \int_\Gamma G_y(t,x,z,\theta)\,dz\,d\theta,$$

для кожних $t>0$, $x\in\mathbb{R}$ та борелевої в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ множини Γ.

Для $p>0$ покладемо

$$\tilde{G}_y(p,x,z,\theta) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}G_y(t,x,z,\theta)\,dt, \quad \tilde{g}(p,x,z) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}g(t,x,z)\,dt.$$

Доводиться, що при $p > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$ та $\theta \geq 0$ виконується рівність

$$\tilde{G}_y(p,x,z,\theta) = \left[\tilde{g}(p,x,z) - \frac{\tilde{g}(p,x,y)\tilde{g}(p,y,z)}{\tilde{g}(p,y,y)}\right]\delta(\theta) + \\ + \frac{\tilde{g}(p,x,y)\tilde{g}(p,y,z)}{[\tilde{g}(p,y,y)]^2}\exp\left\{-\frac{\theta}{\tilde{g}(p,y,y)}\right\},$$

де $\delta(\cdot)$ — Діракова δ-функція.

В цій доповіді обговорюються деякі факти, що є наслідками останньої формули.

ГРАНИЧНА ПОВЕДІНКА ЗБУРЕНИХ ВИПАДКОВИХ БЛУКАНЬ З НЕІНТЕГРОВНИМ ЗБУРЕННЯМ

Приходько Юрій Євгенович

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"

npuxodbko@gmail.com

Розглядається гранична поведінка послідовності процесів

$$X_n = \Big(X_n(t) = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\big(X([nt])\big),\ t \geqslant 0\Big),\ n \geqslant 1,$$

де $\big(X(k),\ k \in \mathbb{Z}_+\big)$ це однорідний ланцюг Маркова на $\mathbb{Z}_+$ із перехідними імовірностями

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2 \quad \text{при} \quad i \geqslant 1$$
$$\text{та} \quad p_{0,j} = \mathrm{P}(\xi = j),\ j \geqslant 0,$$

де ξ — невід'ємна цілозначна випадкова величина.

Припустимо, що розподіл ξ належить до області притяжіння деякого α-стійкого розподілу, $\alpha \in (0,1)$.

Теорема 1. *Послідовність процесів $\{X_n\}$ слабко збігається при $n \to \infty$ в $D([0,T])$ до процесу вигляду*

$$X_\infty(t) = W(t) + U_\alpha\big(U_\alpha^{(-1)}(M(t))\big),\ t \geqslant 0,$$

де $U_\alpha(\cdot)$ — невід'ємний α-стійкий процес, $W(\cdot)$ — вінерів процес, $M(t) = -\min_{s\in[0,t]}\big(W(s) \wedge 0\big)$, $t \geqslant 0$, і процеси $\big(U_\alpha(t)\big)$ та $\big(W(t)\big)$ незалежні.

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРА КОВАРІАЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ОДНОГО ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ

Синявська Ольга Олександрівна

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

olja_sunjavska@ua.fm

Нехай $\left\{X_\beta(t),\, t \in [0,1]^d\right\}$, $d \geq 2$ — випадкове поле з нульовим середнім та коваріаційною функцією $r(t,s) = \frac{1}{2}\left(\|t\|^\beta + \|s\|^\beta - \|t-s\|^\beta\right)$, $\beta \in (0,2)$. Розглянемо задачу оцінювання параметра β за спостереженнями $X_\beta(t)$ в точках $\left\{\frac{k}{a_n}, \frac{k+1/2}{a_n} \mid 0 \leq k \leq a_n - 1, n \geq 1\right\}$ першої координатної осі та $\left\{\left(\frac{k}{a_n}, \ldots, \frac{k}{a_n}\right), \left(\frac{k+1/2}{a_n}, \ldots, \frac{k+1/2}{a_n}\right) \mid 0 \leq k \leq a_n - 1, n \geq 1\right\}$ на діагоналі $[0,1]^d$, $a_n \in \mathbf{N}, n \geq 1$. Покладемо $Y_{k,n} = X_\beta\left(\frac{k+1}{a_n}, 0, \ldots, 0\right) - 2X_\beta\left(\frac{k+1/2}{a_n}, 0, \ldots, 0\right) + X_\beta\left(\frac{k}{a_n}, 0, \ldots, 0\right)$, $Z_{k,n} = X_\beta\left(\frac{k+1}{a_n}, \ldots, \frac{k+1}{a_n}\right) - 2X_\beta\left(\frac{k+1/2}{a_n}, \ldots, \frac{k+1/2}{a_n}\right) + X_\beta\left(\frac{k}{a_n}, \ldots, \frac{k}{a_n}\right)$, $S_n^{(1)} = a_n^{\beta-1}\sum_{k=0}^{a_n-1} Y_{k,n}^2$, $S_n^{(2)} = a_n^{\beta-1}\sum_{k=0}^{a_n-1} Z_{k,n}^2$. Надалі припускаємо, що $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1} < +\infty$, а випадкові вектори $(Y_{k,n}, Y_{j,n})$, $(Z_{k,n}, Z_{j,n})$, $0 \leq k,j \leq a_n - 1$, $n \geq 1$ належать класу K_1 [1]. Остання вимога виконується для гауссового випадкового поля $X_\beta(\cdot)$.

Теорема 1. *Статистика* $\hat{\beta}_n = 2\log_d \theta_n$, $n \geq 1$, *де* $\theta_n = S_n^{(2)}/S_n^{(1)}$, *є сильно консистентною оцінкою параметра* β.

Теорема 2. *Нехай* $\beta \in (0,\beta^*]$, *де* $\beta^* \in (0,2)$, *— фіксовано,* $p/2 - \lambda_n > 0$. *Тоді інтервал* $(\beta_{n,l}, \beta_{n,r})$, *де* $\beta_{n,l} = \beta\left(\min\left(\theta_n + \gamma_n(p), \theta(\beta^*)\right)\right)$, $\beta_{n,r} = \beta\left(\max\left(0, \theta_n - \gamma_n(p)\right)\right)$, *де* $\theta_n = S_n^{(2)}/S_n^{(1)}$; $\beta(\theta) = 2\log_d(\theta), \theta \in (1,d)$, $\theta(\beta) = \sqrt{d^\beta}$; $\gamma_n(p) = \frac{d\lambda_n + \sqrt{(p/2-\lambda_n)\mu_n + pd^2\lambda_n/2}}{p/2-\lambda_n}$, $\lambda_n = \frac{4}{a_n}\left(9 + \frac{c}{2} + \frac{c_*^2}{2}\zeta(4)\right)$, $\mu_n = \sqrt{d^{\beta^*}}\lambda_n$, $c = \sup_{\beta\in(0,2)}\left(\frac{6\cdot 2^\beta - 4 - 4\cdot 3^\beta + 2^{2\beta}}{2^\beta}\right)^2$, $c_* = \sup_{\beta\in(0,2)}\left|\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)}{2^4}\right|$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, *є довірчим інтервалом для параметра* β *з рівнем довіри* $1 - p$, $p \in (0,1)$.

[1] *Kozachenko Y. V., Kurchenko O. O.* Levy-Baxter theorems for one class of non-Gaussian stochastic processes // Random Oper. Stoch. Equ. 4 (2011), 313–326.

РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ НА ПРЯМІЙ З ВИПАДКОВИМИ ФАКТОРАМИ

Сливка-Тилищак Ганна Іванівна

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

aslyvka@tn.uz.ua

Розглянемо неоднорідне рівняння теплопровідності, яке задане на прямій [2]

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \xi(x,t),\ -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{2}$$

Нехай $\xi(x,t) = \{\xi(x,t), \quad x \in R,\ t > 0\}$ — строго орлічевий випадковий процес.

Теорема 1. *Нехай* $G(y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} \tilde{\xi}(y,\tau) d\tau$,

$$\tilde{\xi}(y,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos yx \xi(x,\tau) dx,\ u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos yx G(y,t) dy.$$

Якщо існують наступні інтеграли

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos yx \tilde{\xi}(y,\ t) dy,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \sin yx G(y,t) dy,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^s \cos yx G(y,t) dy,\ s = 0,\ 2$$

і послідовність a_n, $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$, така, що для довільного $A > 0$ і $T > 0$ послідовності інтегралів

$$\int\limits_{-a_n}^{+a_n} \cos yx \tilde{\xi}(y,t) dy,\ \int\limits_{-a_n}^{+a_n} y \sin yx G(y,t) dy,\ \int\limits_{-a_n}^{+a_n} y^s \cos yx G(y,t) dy, \quad s = 0,\ 2,$$

збігаються рівномірно за ймовірністю для $|x| \le A$, $0 \le t \le T$, тоді функція $u(x,\ t)$ буде класичним розв'язком задачі (1)–(2).

[1] *V.V. Buldygin and Yu.V. Kozachenko Metric* Characterization of Random Variables and Random processes, American Mathematical Society, Providence, Rhode (2000).

[2] *Б.М. Маркович* Рівняння математичної фізики. – Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка 2010. – 384с.

ПРО РІВНЯННЯ РУХУ ЗІ ВЗАЄМОДІЄЮ ДЛЯ СИСТЕМИ ЧАСТИНОК З НЕСКІНЧЕННОЮ СУКУПНОЮ МАСОЮ

Танцюра М. В.

Інститут математики НАН України

mtan@meta.ua

Нехай, $\{w_i(t), i \in \mathbb{Z}\}$ – вінерівські процеси, $\mu = \sum_k \delta_{u_k}$ – пуасонівська точкова міра з інтенсивністю m. Розглянемо нескінченну систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} dX_i(t) = a(X_i(t), \mu(t))dt + dw_i(t), \ i \in \mathbb{Z} \\ \mu(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{X_k(t)} \\ X_i(0) = u_i, \ i \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{1}$$

Систему рівнянь (1) можна розглядати як рівняння, що задає рух у випадковому середовищі нескінченної системи частинок зі взаємодією. При цьому $\mu = \sum_k \delta_{u_k}$ можна трактувати як початковий розподіл мас, випадкову величину $X_i(t)$ – як положення в момент часу t частинки що стартувала з u_i, міру $\mu(t)$ – як розподіл мас частинок в момент часу t. Функція a відповідає за взаємодію між частинками.

Для системи (1) доведено слабке існування розв'язку у випадку, коли інтенсивність пуасонівської точкової міри m в наступному сенсі мажорується мірою Лебега:

$$\exists C_\mu > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} : \quad \mu([-n, n]) \leq nC_\mu,$$

а функція a є неперервною та обмеженою.

АНАЛОГ ТЕОРЕМИ ЛЕВІ ДЛЯ ПОТОКУ АРРАТЬЯ

Чернега Павло Петрович

Інститут Математики НАНУ

В доповіді розглядається *сумарне число перетинів зверху вниз* фіксованої полоси траєкторіями континуальної системи частинок потоку Арратья. Доводиться збіжість добутку ширини полоси на *сумарне число перетинів зверху вниз* полоси до *сумарного локального часу* для потоку Арратья. Цей результат є узагальненням відомої теореми Леві про число перетинів зверху вниз полоси для одновимірного вінерівського процесу.

Теорема 1. Для кожного числа $m \in \mathbb{N}$ справедливе наступне співвідношення:

$$\lim_{\delta \searrow 0+} \delta \nu^{Arr}_{m,[s;t\wedge\tau]} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_{s}^{t\wedge\tau(u_k^m)} \delta_0(x(u_k^m, r))dr.$$

Теорема 2. З ймовірністю одиниця існує границя:

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{\nu}^{u_k^m}_{[s_0;t\wedge\tau(u_k^m)]} := \nu^{Arr}_{[s_0;\tau]},$$

де $\widetilde{\nu}^{u_k^m}_{[s_0;t\wedge\tau(u_k^m)]]}$ - число перетинів зверху вних полоси $[0;\delta]$ процесом $\mid x(u_k^m, \cdot) \mid$. Випадкова величина $\nu^{Arr}_{[s_0;\tau]}$ з ймовірністю одиниця є скінченною.

Теорема 3. Для довільного числа $0 < \delta \leq 1$ з ймовірністю одиниця послідовніть

$$\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{\nu}^{u_k^m}_{[s_0;t\wedge\tau(u_k^m)]}\}_{m\geq 1}$$

має скінченне число значень.

Теорема 4. Виберемо числа $0 < s < t \leq 1$. Має місце наступне граничне співвідношення:

$$\lim_{\delta \searrow 0+} \delta \nu^{Arr}_{[s;t\wedge\tau]} = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{s}^{t\wedge\tau(u)} \delta_0(x(u, r))dr$$

Використано результати робіт [1-5].

[1] А.А. Дороговцев. Мерозначные процессы и стохастические потоки.-Киев.: Ин-т математики НАН Украины, 2007.-289с.

[2] Y. Kasahara. On Levy′s Downcrossing Theorem. Proc. Japan Acad, 56, Ser. A, 1980.

[3] K. Ito, H. McKean. Diffusion processes and their sample paths. Springer-Verlag, Berlin· Heidelberg· New York.-1965 - 321 p.

[4] П. П. Чернега. Локальное время в нуле для потока Арратья. УМЖ, 2012, т.64, №4, с.542-557

[5] R. Arratia, Coalescing Brownian motions on the line, Ph.D. thesis, University of Wisconsis, Madison (1979).

ПРО СКЛЕЮВАННЯ ДВОХ НЕОДНОРІДНИХ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ НА ВІДРІЗКУ

Шевчук Роман Володимирович

Львівський національний університет імені Івана Франка

r.v.shevchuk@gmail.com

Нехай $C(\overline{D})$ — банахів простір неперервних функцій на відрізку $\overline{D} = [r_1, r_2]$. Позначимо через $D_i,\ i = 1,2$, два інтервали (r_1, r) і (r, r_2) відповідно, де $-\infty < r_1 < r < r_2 < \infty$, а через φ_i — звуження будь-якої функції $\varphi \in C(\overline{D})$ на замикання $\overline{D}_i$.

Припустимо, що в D_i задано неоднорідний дифузійний процес, який визначається диференціальним оператором другого порядку $A_s^{(i)},\ s \in [0,T]$ ($T > 0$ — фіксоване), що діє на множині $C^2(\overline{D}_i)$:

$$A_s^{(i)}\varphi_i(x) = \tfrac{1}{2} b_i(s,x)\tfrac{d^2\varphi_i(x)}{dx^2} + a_i(s,x)\tfrac{d\varphi_i(x)}{dx}, \quad i = 1,2,$$

де коефіцієнт дифузії $b_i(s,x)$ і коефіцієнт переносу $a_i(s,x)$ є неперервними функціями для $(s,x) \in [0,T] \times \overline{D}_i$, до того ж $b_i(s,x) > 0$.

Розглянемо диференціальний оператор $\widetilde{A}_s,\ s \in [0,T]$, який діє на множині

$$\vartheta(\widetilde{A}_s) = \left\{\varphi \in C(\overline{D}):\ \varphi_i \in \vartheta(A_s^{(i)}),\ i = 1,2, \quad A_s^{(1)}\varphi(r) = A_s^{(2)}\varphi(r)\right\}$$

за таким правилом:

$$\widetilde{A}_s\varphi(x) = \begin{cases} A_s^{(1)}\varphi_1(x), & x \in \overline{D}_1, \\ A_s^{(1)}\varphi_1(x), & x \in \overline{D}_2. \end{cases}$$

В точках $r,\ r_1,\ r_2$ запишемо три крайові умови типу Феллера-Вентцеля ([1]), які звужують оператор $\widetilde{A}_s$ до генератора деякої феллерівської напівгрупи в просторі $C(\overline{D})$:

$$q_1(s)\varphi'(r-) - q_2(s)\varphi'(r+) + \gamma(s)\varphi(r) + \int\limits_{D_1\cup D_2} [\varphi(r) - \varphi(y)]\mu(s, dy) = 0, \quad (1)$$

$$(-1)^i p_i(s)\varphi'(r_i) + \sigma_i(s)\varphi(r_i) + \int\limits_{D_i} [\varphi(r_i) - \varphi(y)]\pi_i(s, dy) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

де

а) функції $q_1(s),\ q_2(s),\ \gamma(s),\ p_i(s),\ \sigma_i(s)$ невід'ємні та неперервні на відрізку $[0, T]$;

б) $\mu(s, \cdot),\ \pi_i(s, \cdot)$ — невід'ємні міри на $D_1 \cup D_2$ і D_i відповідно, такі, що інтеграли

$$\int\limits_{D_1\cup D_2} |y - r| f(y)\mu(s, dy), \quad \int\limits_{D_i} |y - r_i| f_i(y)\pi_i(s, dy)$$

існують і є неперервними на відрізку $[0, T]$ як функції змінної s;

в) для всіх $s \in [0, T] \quad q_1(s) + q_2(s) > 0 \quad$ і $\quad p_i(s) > 0$.

Наша задача полягає в тому, щоб знайти інтегральне зображення двопараметричної феллерівської напівгрупи T_{st}, $0 \le s < t \le T$, генератор A_s якої є звуженням оператора $\widetilde{A}_s$ на множину всіх функцій $\varphi \in \vartheta(\widetilde{A}_s)$ для яких виконуються співвідношення (1), (2).

Таку задачу називають задачею про склеювання двох дифузійних процесів на відрізку ([2]). При її дослідженні ми використовуємо аналітичні методи. За такого підходу шукана напівгрупа операторів визначається за допомогою розв'язку відповідної задачі спряження для лінійного параболічного рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами. Класичну розв'язність задачі спряження встановлено нами методом граничних інтегральних рівнянь з використанням параболічних потенціалів.

[1] *Вентцель А. Д.* Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка // Докл. АН СССР **111** (1956), no. 2, 269–272.

[2] *Kopytko B. I., Shevchuk R. V.* On pasting together two inhomogeneous diffusion processes on a line with the general Feller-Wentzell conjugation condition // Theory of Stochastic Processes, **17 (33)** (2011), no. 2, 55–70.

2 Секція математичного аналізу

НУЛІ І КОЕФІЦІЄНТИ СТЕПЕНЕВОГО РОЗВИНЕННЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Андрусяк І.В.

Національний університет "Львівська політехніка"

andrusyak.ivanna@gmail.com

Філевич П.В.

Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника

filevych@mail.ru

Для цілої функції f через $\mu(r)$, $\nu(r)$, $n(r)$ і $N(r)$ позначимо її максимальний член, центральний індекс, лічильну функцію нулів і усереднену лічильну функцію нулів відповідно. Покладемо $\delta_1 = \underline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{\ln\mu(r)}{\nu(r)}$, $\delta_2 = \underline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{N(r)}{n(r)}$. Нехай $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ — послідовність коефіцієнтів степеневого розвинення функції f ($a_n = f^{(n)}(0)/n!$ для $n \in \mathbb{N}_0$). Через $\mathcal{E}_0$ позначимо клас цілих функцій, що мають безліч нулів. Якщо $f \in \mathcal{E}_0$, то нехай $(\zeta_n)_{n=0}^{\infty}$ — послідовність усіх нулів функції f, занумерована з урахуванням їх кратностей у порядку неспадання модулів. Правильна наступна теорема [1].

Теорема 1. *(i) Якщо $f \in \mathcal{E}_0$, то $\overline{\lim}_{n\to\infty} |\zeta_n| \sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$. (ii) Існує $f \in \mathcal{E}_0$ така, що $\overline{\lim}_{n\to\infty} |\zeta_n| \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.*

Твердження (i) теореми 1 уточнює така теорема [2].

Теорема 2. *Якщо $f \in \mathcal{E}_0$, то $\overline{\lim}_{n\to\infty} |\zeta_{n-1}| \sqrt[n]{|a_n|} \ge e^{\delta_1}$.*

Нами доведено наступні дві теореми, перша з яких є твердження типу теореми 3, а друга вказує на точність оцінок з теорем 3 і 3.

Теорема 3. *Якщо $f \in \mathcal{E}_0$, то $\overline{\lim}_{n\to\infty} |\zeta_{n-1}| \sqrt[n]{|a_n|} \ge e^{\delta_2}$.*

Теорема 4. *Для довільного $\delta \in [0; +\infty]$ існує $f \in \mathcal{E}_0$ така, що $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ і $\overline{\lim}_{n\to\infty} |\zeta_n| \sqrt[n]{|a_n|} = e^{\delta}$.*

Зазначимо, що доведення теореми 4 ґрунтується на ідеях з роботи [3].

[1] *Пельчарська І. В., Шеремета М.М.* Про розподіл значень і коефіцієнти степеневого розвинення цілої функції // Доп. НАН України. – 2005. – № 5. – С. 21-25.

[2] *Андрусяк І.В.* Нулі і коефіцієнти аналітичних функцій // Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2008. – № 625. – С. 43–47.

[3] *Mahola M.P., Filevych P.V.* The value distribution of a random entire function // Mat. Stud. – 2010. – V. 34, № 2. – P. 120–128.

ПРИКЛАДИ ПРОСТОРІВ, ЯКІ НЕ Є СПЕКТРАЛЬНО РУХОМІ

Атаманюк Богдан Васильович

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

bogdanatamaniuk@ukr.net

Нехай означення спектральної рухомості подається через гомотопічну рівність. Тоді соленоїди ван Данціга, що є границями зворотніх спектрів скінченних витків спіралі не є спектрально рухомі. Так само не є спектрально рухомими границі вкладених тороїдальних ланцюгів (контрприклад Дрошнікова).

A IMPROVEMENT OF SOME CRITERION OF BOUNDEDNESS L-INDEX IN DIRECTION

Bandura Andriy

Ivano-Frankivs'k national technical university of oil and gas

andriykopanytsia@gmail.com

Definition (see [1]). An entire function of $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, is called function of bounded L-index in the direction of $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, if there exists $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ such that for $m \in \mathbb{Z}_+$ and every $z \in \mathbb{C}^n$ performs inequality:

$$\frac{1}{m!L^m(z)}\left|\frac{\partial^m F(z)}{\partial \mathbf{b}^m}\right| \leq \max\left\{\frac{1}{k!L^k(z)}\left|\frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k}\right| : 0 \leq k \leq m_0\right\},$$

where $\frac{\partial^0 F(z)}{\partial \mathbf{b}^0} = F(z)$, $\frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}} = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j$, $\frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}}(\frac{\partial^{k-1} F(z)}{\partial \mathbf{b}^{k-1}}), k \geq 2$. The least such integer m_0 is called the L-index in direction of $F(z)$ and is denoted by $N_{\mathbf{b}}(F, L)$.

We proved a next criterion of boundedness L-index in direction [1].

Теорема 1. *[1]. Let $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$. An entire function $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, is function of bounded L-index in direction $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ if and only if for each $\eta > 0$ there exist numbers $n_0 = n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+$ and $P_1 = P_1(\eta) \geq 1$ such that for every $t_0 \in \mathbb{C}$ and every $z \in \mathbb{C}^n$ exists $k_0 = k_0(t_0, z) \in \mathbb{Z}_+$, with $0 \leq k_0 \leq n_0$ and the inequality $\max\left\{\left|\frac{\partial^{k_0} F(z+t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{k_0}}\right| : |t - t_0| \leq \frac{\eta}{L(z+t_0\mathbf{b})}\right\} \leq P_1 \left|\frac{\partial^{k_0} F(z+t_0\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{k_0}}\right|$ is holds.*

Using Fricke's idea from [2] we give a some improvement of this theorem.

Теорема 2. *Let $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$. An entire function $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, is function of bounded L-index in direction $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ if and only if there exist constants $\eta > 0$, $n_0 = n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+$ and $P_1 = P_1(\eta) \geq 1$ such that for every $t_0 \in \mathbb{C}$ and every $z \in \mathbb{C}^n$ exists $k_0 = k_0(t_0, z) \in \mathbb{Z}_+$, with $0 \leq k_0 \leq n_0$ and the inequality $\max\left\{\left|\frac{\partial^{k_0} F(z+t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{k_0}}\right| : |t - t_0| \leq \frac{\eta}{L(z+t_0\mathbf{b})}\right\} \leq P_1 \left|\frac{\partial^{k_0} F(z+t_0\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{k_0}}\right|$ is holds.*

[1] Bandura A. I., Skaskiv O. B. *Entire function of bounded L-index in direction* // Matem. Stud. – Vol. 27 (1), 2007. – P.30–52 (in Ukrainian).

[2] Fricke G. H. Entire functions of locally slow growth // Journal d'Analyse Mathematique. – Vol. 28 (1), 1975. – P. 101–122.

ДЕЯКІ СПАРЕНІ ОБЛАСТІ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Баран Оксана Євгеніївна

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ

boe13@ukr.net

Боднар ДмитроІлькович

Тернопільський національний економічний університет

dmytro_bodnar@hotmail.com

Розглянемо гіллястий ланцюговий дріб вигляду

$$1 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}, \tag{1}$$

де $i(k) \in I = \left\{i(k) : i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k,\, 1 \leq i_s \leq i_{s-1},\, s = \overline{1,k},\, k \geq 1, i_0 = N\right\}$, N – максимальна кількість гілок розгалужень, $a_{i(k)}$ – комплексні числа.

Нехай $l = l(i(k)) = \sum_{s=1}^{k} \delta_{i_k}^{i_s}$ – кількість повторів індекса i_k в мультиіндексі $i(k)$, $\delta_{i_k}^{i_s}$ – символ Кронекера. Розіб'ємо множину I на підмножини, які попарно не перетинаються:

$$I_1^p = \{i(k) \in I, i_k = p, l = 1, k \geq 1\},$$

$$I_2^p = \{i(k) \in I, i_k = p, l - \text{парне}, k \geq 2\},$$

$$I_3^p = \{i(k) \in I, i_k = p, l - \text{непарне},\ l > 1,\ k \geq 3\},$$

де $p = \overline{1, N}$.

Теорема 1. *ГЛД (1) збігається, якщо елементи дробу $a_{i(k)} = r_{i(k)} e^{i\theta_{i(k)}}$ – комплексні числа, які задовольняють умови*

$$r_{i(k)} \leq \frac{\rho_1 - \varepsilon_1}{i_{k-1} - 1},\ i(k) \in I_1^{i_k},$$

$$r_{i(k)} \leq \rho - \varepsilon_3,\ i(k) \in I_3^{i_k},$$

$$r_{i(k)} \geq (2 + \rho_1)\left(\rho_1 + \rho + \varepsilon_2 - \cos\theta_{i(k)}\right),\ i(k) \in I_2^{i_k},$$

де $0 \leq \theta_{i(k)} \leq 2\pi$, $\rho_1 > 1$, $\rho > 1$ – довільні дійсні числа, $0 < \varepsilon_1 < \rho_1$, $0 < \varepsilon_2 < \rho_1 + \rho$, $0 < \varepsilon_3 < \rho$.

ПРО l-ІНДЕКС ФУНКЦІЇ МІТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

Бордуляк Марта Тимофіївна

Львівський національний університет імені Івана Франка

mbordulyak@yahoo.com

Нехай l – додатна неперервна на $[0, +\infty]$ функція. Ціла функція f називається [1] функцією обмеженого l-індексу, якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n! l^n(|z|)} \leq \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k! l^k(|z|)} : 0 \leq k \leq N\right\}. \tag{1}$$

Найменше з таких N називається l-індексом функції f. При $l \equiv 1$ ми отримуємо введене Б.Лепсоном означення цілої функції обмеженого індексу. Якщо нерівність (1) виконується при всіх $|z| > R$, то найменше з таких N називатимемо l-індексом функції f при $|z| > R$.

Нехай $0 < \rho < +\infty$. Функцією Міттаг-Леффлера називається ціла функція

$$E_\rho(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 + k/\rho)}.$$

С.Шах висловив гіпотезу, що якщо $0 < \rho \leq 1$, то функція E_ρ є обмеженого індексу, і довів її для випадку $\rho = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. М.М.Шеремета довів [1], що E_ρ є обмеженого l_ρ-індексу з $l_\rho(x) = 1$ при $0 \leq x \leq 1$ і $l_\rho(x) = x^{\rho-1}$ при $x \geq 1$ для раціональних ρ. А.А. Гольдберг [2] показав обмеженість l_ρ-індексу функції E_ρ для всіх $\rho \in (o; +\infty)$. Зазначимо, що функція типу Міттаг-Леффлера $E(\rho, \mu)$ теж має обмежений l_ρ-індекс [3].

При раціональних ρ, як показав М.М.Шеремета, функція E_ρ задовольняє деяке лінійне диференціальне рівняння з поліноміальними коефіцієнтами. Це дозволяє оцінити величину l_ρ-індексу зовні деякого круга.

Теорема 1. *Нехай* $\rho = \frac{n}{m} < 1$, $n, m \in \mathbb{N}$, $l_\rho(x) = x^{\rho-1}$ *при* $x \geq 1$. *Існує таке* $R > 0$, *що* l_ρ*-індекс функції Міттаг-Леффлера* E_ρ *при* $|z| > R$ *не перевищує* $n + m - 1$.

[1] *M.M.Sheremeta.* Analytic functions of bounded l-index// Monograph Series. V.6. - VNTL Publishers. - 1999, 141 p.

[2] *Гольдберг А.А.* Оцінка модуля логарифмічної похідної функції Міттаг-Леффлера та її застосування // Матем. студії. – 1996. – Вип.5. – с.21-30.

[3] *Бордуляк М.Т.* Обмеженість розподілу значень функції Міттаг-Леффлера// Матем. студії. – 1998. – Вип.9, №2. – с.177-186.

ОЦІНКА ШВИДКОСТІ РІВНОМІРНОЇ ЗБІЖНОСТІ 1-ПЕРІОДИЧНОГО ГІЛЛЯСТОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Бубняк М.М.

Тернопільський національний економічний університет

mbubniak@list.ru, olvoz@ukr.net

Возняк О.Г.

Тернопільський національний економічний університет

mbubniak@list.ru, olvoz@ukr.net

Михальчук Р.І.

Луцький національний технічний університет

mbubniak@list.ru, olvoz@ukr.net

Розглянемо 1-періодичний гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) вигляду

$$\left(1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1}, \tag{1}$$

де $c_j\in\mathbb{C}$ $\left(j=\overline{1,N}\right)$, $i_0=N$ – фіксоване натуральне число.

Лема. Нехай елемент c неперервного дробу $1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{c}{1}$ належить області

$$D_1=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|\arg\left(z+\frac{1}{4}\right)\right|\le\pi-\varepsilon,\delta\le\left|z+\frac{1}{4}\right|\le\Delta\right\}.$$

Тоді справджується оцінка швидкості збіжності

$$|f_n-x|\le L\cdot\rho^{n+1}\quad(n\ge 0),$$

де f_n – n-ий підхідний дріб, $x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4c})$, $L=\frac{2\sqrt{\Delta}}{1-\rho}$, $\varepsilon\in(0;\pi)$, $\delta\in(0;\Delta)$ $\rho=\sqrt{\dfrac{1-4\sqrt{d}\sin\varepsilon/2+4d}{1+4\sqrt{d}\sin\varepsilon/2+4d}}$, де $d=\delta$, якщо $\delta\cdot\Delta\le\frac{1}{16}$; $d=\Delta$, якщо $\delta\cdot\Delta>\frac{1}{16}$.

Теорема. Нехай елементи c_j ГЛД (1) належать областям D_j $(j=\overline{1,N})$, де

$$D_j=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|<\frac{\mu^2}{4^{j-1}}\right\}\quad(j=\overline{2,N}),$$

$\mu=(1-\rho)\sqrt{\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\delta}\right)\sin\varepsilon/2+\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\delta}\right)^2}$. Тоді

1) дріб (1) рівномірно збігається в $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_N$;

2) справджується оцінка швидкості збіжності

$$|F_{n+m} - F_n| \leq C_{n+N-1}^{N-1} \cdot L \cdot q^{n+1} \quad (n \geq 0, m \geq 1),$$

де $q = \max\{\rho, 1/3\}$, $L = \frac{12^{N-1}M}{\mu^2}$, $M = \frac{(1/2+\sqrt{\Delta})(1+\mu)}{(1-\rho_1)^2}$, F_n – n-ий підхідний дріб ГЛД (1).

СИСТЕМИ РІВНЯНЬ КОЛМОГОРОВА З ОДНОВИМІРНИМИ ГРУПАМИ ВИРОДЖЕННЯ

Буртняк Іван Володимирович

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника

bvanya@meta.ua

Малицька Ганна Петрівна

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника

Розглядаємо систему рівнянь

$$\partial_t u_\nu(t,x) - \sum_{j=1}^{n_0-1} x_j \partial_{x_{j+1}} u_\nu(t,x) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=0}^{2b} a_k^{r\nu}(t) \partial_{x_1}^k u_r(t,x), \tag{1}$$

$\nu = 1, ..., n, n_0 > 1, n \in N, 0 \leq \tau < t \leq T, b \in N,$

$$u_\nu(t,x)|_{t=\tau} = u_{\nu_0}(x), x \in R^{n_0}, \tag{2}$$

де $\partial_t w_\nu(t,x) = \sum\limits_{k=0}^{2b} \sum\limits_{r=1}^{n} a_k^{r\nu}(t) \partial_{x_1}^k w_r(t,x)$, рівномірно параболічна система в сенсі Петровського для $\forall t \in [0,T]$, $a_k^{r\nu}(t)$- комплекснозначні функції, неперервні для $\forall t \in [0,T]$, $u_{\nu 0}(x)$- достатньо гладкі фінітні функції.

Теорема. Існує матриця Гріна задачі (1),(2).

$G(t,x;\tau,\xi) = (t-\tau)^{-k_0} \Omega(t,\tau; (x_1 - \xi_1)(t-\tau)^{-1/2b}, (x_2 - \xi_2 + x_1(t-\tau))$ $(t-\tau)^{-(2b+1)/2b}, ..., (x_{n_0} - \xi_{n_0} + x_{n_0-1}(t-\tau) + ... + x_1(t-\tau)^{n_0-1}((n_0-1)!)^{-1})$ $(t-\tau)^{-\frac{2b(n_0-1)+1}{2b}}),$

$\Omega(t,\tau; z_1, ..., z_{n_0})$- ціла функція аргументів $z_1, ..., z_{n_0}$, порядку росту q при комплексних значеннях аргументів і такого ж порядку спадання при дійсних значеннях. Для її похідних правильні оцінки

$|D_x^m G(t,\tau; x+iy; \tau,\xi)| \leq C_m (t-\tau)^{-k_m} \exp\{-c_0 \sum\limits_{j=1}^{n_0} [|x_j - \xi_j + \sum\limits_{l=1}^{j-1} x_{j-l}(t-$

$\tau)^l(l!)^{-1}|^q(t-\tau)^{-\frac{2b(j-1)+1}{2b-1}} + c_j|y_j|^q(t-\tau)^{-\frac{2b(j-1)+1}{2b-1}}]\}, y \in R^{n_0}$, $|m| = |m_1| + ... + |m_{n_0}|. c_0 > 0, C_m > 0, c_j > 0, t > \tau, k_0 = \frac{bn_0^2+n_0(b-1)}{2b}, k_m = k_0 + \sum_{j=1}^{n_0} m_j((j-1)+\frac{1}{2b})$, де сталі C_m, c_0, c_j залежать від $\sup|a_k^{r\nu}(t)|$, характеру неперервності $a_{2b}^{r\nu}(t)$, сталої параболічності δ.

[1] *Малицька Г.П.* Про структуру фундаментального розв'язку задачі Коші для еліптично-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією// Вісн.нац.у-ту "Львівська політехніка.2000. №411-С 221-228.

ПРО СУМИ ВУЗЬКИХ ОПЕРАТОРІВ НА ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРАХ КЕТЕ

Вацек Діана Орестівна

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
diana1232208@ukr.net

Михайлюк Володимир Васильович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
vmykhaylyuk@ukr.net

Попов Михайло Михайлович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
mismam.popov@gmail.com

Поняття вузького оператора узагальнює компактні оператори на функціональних просторах Кете (необхідні означення можна знайти в [2], [4]). Проте лінійні властивості вузьких операторів, на відміну від компактних, значно складніші і не до кінця вивчені. Так, якщо E – переставляльно-інваріантний простір на $[0,1]$ з безумовним базисом, то тотожний оператор на E є сумою двох вузьких операторів та, як наслідок, довільний лінійний неперервний оператор на E подається у вигляді суми двох вузьких операторів [2]. З іншого боку, на просторі L_1 сума двох вузьких операторів є вузьким оператором [1]. Пояснюючи цей феномен, в роботі [3] було доведено, що якщо E та F – банахові ґратки з певними необтяжливими обмеженнями (зокрема, E та F можуть бути довільними просторами Кете на $[0,1]$ з абсолютно неперервною нормою), то сума двох регулярних вузьких операторів є вузьким оператором. Оскільки на L_1 всі лінійні неперервні оператори регулярні, звідси, як наслідок, отримуємо згаданий вище факт, а на довільному переставляльно-інваріантному просторі з безумовним базисом всі приклади пар вузьких операторів з невузькою сумою містять нерегулярні оператори. У зв'язку з цим виникає багато задач. Наприклад, чи для довільного банахового простору X сума двох вузьких операторів з L_1 в X є вузькою [1]? Чи зобов'язана бути вузькою сума двох вузьких регулярних операторів на L_∞ [3]? Чи існує банахів простір Кете на $[0,1]$ з абсолютно неперервною нормою без безумовного базису, у якому тотожний оператор є сумою двох вузьких операторів? Нами отримано наступні три теореми, які дають відповіді на ці питання.

Теорема 1. *Нехай E – банахів простір Кете на $[0,1]$. Тоді існує банахів простір X та вузькі оператори T_1, T_2 з E в X з невузькою сумою $T = T_1 + T_2$.*

Теорема 2. *Нехай E – банахів простір Кете на $[0,1]$ такий, що його дуальний простір Кете E' містить деякий банахів простір Кете F на $[0,1]$, у якому система Гаара є безумовною. Тоді існують вузькі регулярні оператори T_1, T_2 з E в L_∞ з невузькою сумою $T = T_1 + T_2$.*

Теорема 3. *Існує банахів простір Кете E на $[0,1]$ з абсолютно неперервною нормою без безумовного базису, у якому множина невузьких операторів, які можна подати як суму двох вузьких операторів, щільна в просторі всіх операторів у розумінні сильної (поточкової) топології.*

[1] *Kadets V. M.,Popov M. M.* Some stability theorems on narrow operators acting in L_1 and $C(K)$ // Математическая Физика, Анализ, Геометрия. – 2003. – 10, N1. – С. 49–60.

[2] *Plichko A. M., Popov M. M.* Symmetric function spaces on atomless probability spaces// Diss. Math. (Rozpr. mat.) – 1990. – 306. – P. 1–85.

[3] *Maslyuchenko O. V., Mykhaylyuk V.V., Popov M.M.* A lattice approach to narrow operators // Positivity – 2009. – 13. – P. 459–495.

[4] *Popov M., Randrianantoanina B.* Narrow Operators on Function Spaces and Vector Lattices. – Berlin–Boston: De Gruyter Studies in Mathematics 45, De Gruyter, 2013. – XIII, 319 p.

УЗАГАЛЬНЕНІ ПОРЯДКИ ЗРОСТАННЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Глова Т.Я.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

hlova_taras@ukr.net

Філевич П.В.

Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника

filevych@mail.ru

Нехай L — клас неперервних, зростаючих до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функцій. Скажемо, що $\gamma \in L_0$, якщо $\gamma \in L$ і $\gamma((1+\varepsilon(x))x) \sim \gamma(x)$, $x \to +\infty$, для кожної функції $\varepsilon(x)$ такої, що $\varepsilon(x) \to 0$, $x \to +\infty$. Через $\mathcal{H}$ позначимо клас трансцендентних цілих функцій. Для $f \in \mathcal{H}$ нехай $a_n(f) = f^{(n)}(0)/n!$ — n-ний коефіцієнт степеневого розвинення, $M(r,f)$ і $\mu(r,f)$ — максимум модуля і максимальний член відповідно, $G(r,f) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(f)|r^n$. Для $\alpha, \beta \in L$ і $f \in \mathcal{H}$ приймемо

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\alpha(\ln M(r,f))}{\beta(\ln r)}, \quad A_{\alpha,\beta}(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\alpha(\ln \mu(r,f))}{\beta(\ln r)},$$

$$B_{\alpha,\beta}(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\alpha(\ln G(r,f))}{\beta(\ln r)}, \quad c_{\alpha,\beta} = \inf_{\gamma\in L} \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\alpha(\gamma(x)x)}{\beta(x)}.$$

Оскільки $\mu(r,f) \le M(r,f) \le G(r,f)$, то $A_{\alpha,\beta}(f) \le \rho_{\alpha,\beta}(f) \le B_{\alpha,\beta}(f)$.

Через $\mathcal{F}$ позначимо клас відображень $F : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ таких, що $F(f) = F(g)$ для довільних цілих функцій $f, g \in \mathcal{H}$, послідовності модулів коефіцієнтів степеневих розвинень яких співпадають, тобто $|a_n(f)| = |a_n(g)|$, $n \in \mathbb{N}_0$. Зазначимо, що $A_{\alpha,\beta}$ і $B_{\alpha,\beta}$ є відображеннями з класу $\mathcal{F}$, а $\rho_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}$ тоді і лише тоді, коли $\rho_{\alpha,\beta}(f) = B_{\alpha,\beta}(f)$ для кожної $f \in \mathcal{H}$.

Класичною задачею теорії цілих функцій є така: описати зростання функції $f \in \mathcal{H}$ (тобто, зростання $\ln M(r,f)$) через послідовність $(|a_n(f)|)$. Один з підходів до розв'язання цієї задачі може полягати в отриманні відповіді на наступне запитання: *якими є необхідні і достатні умови на функції $\alpha, \beta \in L$, за яких $\rho_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}$?*

У випадку $\alpha, \beta \in L_0$ достатні умови виконання рівності $\rho_{\alpha,\beta}(f) = A_{\alpha,\beta}(f)$ для кожної $f \in \mathcal{H}$ (а тому й включення $\rho_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}$) отримано М. М. Шереметою в роботі [1], в якій, власне, і введено величину $\rho_{\alpha,\beta}(f)$ (α, β-порядок) як узагальнення класичного поняття порядку (див. також [2]). З іншого боку, простим наслідком з результатів роботи [3] є наступна теорема.

Теорема 1. *Для довільної $\alpha \in L$ існує $\beta \in L$ така, що $\rho_{\alpha,\beta} \notin \mathcal{F}$.*

Теорема 1 вказує на те, що сформульоване вище запитання не є тривіальним. Повна відповідь на нього у випадку $\alpha \in L_0$, $\beta \in L$ міститься в наведеній нижче теоремі 3.

Далі розглядатимемо лише випадок $c_{\alpha,\beta} < +\infty$ (якщо $c_{\alpha,\beta} = +\infty$, то, як легко довести, $\rho_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}$). Для довільного $c > c_{\alpha,\beta}$ через $\Phi_c(x)$ позначатимемо найбільшу опуклу нижню мажоранту функції $\alpha^{-1}(c\beta(x))$ (тобто, $\Phi_c(x)$ — друга спряжена за Юнгом з $\alpha^{-1}(c\beta(x))$), а через $\Phi'_c(x)$ — правобічну похідну функції $\Phi_c(x)$.

Теорема 2. *Нехай $\alpha, \beta \in L$. Тоді умова*

$$\forall c > c_{\alpha,\beta} : \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha(\Phi_c(x) + \ln \Phi'_c(x))}{\alpha(\Phi_c(x))} = 1 \tag{1}$$

є достатньою для того, щоб $\rho_{\alpha,\beta}(f) = A_{\alpha,\beta}(f)$ для кожної $f \in \mathcal{H}$, а умова

$$\forall \delta \in (0;1)\ \forall c > c_{\alpha,\beta} : \quad \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\alpha(\delta\Phi_c(x) + \ln \Phi'_c(x))}{\alpha(\Phi_c(x))} \le 1 \tag{2}$$

є необхідною для того, щоб $\rho_{\alpha,\beta}(f) = B_{\alpha,\beta}(f)$ для кожної $f \in \mathcal{H}$.

Якщо $\alpha \in L_0$, то умови (1) і (2) рівносильні. З огляду на це, з теореми 3 випливає таке твердження.

Теорема 3. *Нехай $\alpha \in L_0$, $\beta \in L$. Тоді $\rho_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}$, якщо і лише якщо виконується умова (1).*

[1] *Шеремета М.Н.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения // Изв. вузов. Мат. – 1967. – № 2 (57). – С. 100-108.

[2] *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле. – К.: ІСДО, 1993. – 168 с.

[3] *Филевич П.В.* О влиянии аргументов коэффициентов степенного разложения целой функции на рост ее максимума модуля // Сиб. мат. журн. – 2003. – Т. 44, № 3. – С. 674-685.

ON CONVERGENCE OF REMNANT OF NÖRLUND BRANCHED CONTINUED FRACTION FOR APPELL FUNCTIONS F_1

Hoyenko Natalya

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics

hoyenko@gmail.com

Manzij Lesya

National University "Lvivska Politechnika", Lviv, Ukraine

lesly@ukr.net

The ratio of Appell functions $\dfrac{F_1(\alpha,\beta,\beta';\gamma;z_1,z_2)}{F_1(\alpha+1,\beta+1,\beta';\gamma+1;z_1,z_2)}$ has been expanded into Nörlund branched continued fraction $b_0(z_1,z_2)+\underset{n=1}{\overset{\infty}{D}}\sum\limits_{i_n=1}^{2}\dfrac{a_{i(n)}(z_1,z_2)}{b_{i(n)}(z_1,z_2)}$ with the coefficients

$$b_0(z_1,z_2)=1-\frac{\alpha+\beta+1}{\gamma}z_1-\frac{\beta'}{\gamma}z_2,$$

$$a_{i(n)}(z_1,z_2)=\begin{cases}\dfrac{(\alpha+n)(\beta+p)}{(\gamma+n-1)(\gamma+n)}z_1(1-z_1), & \text{if } i_n=1,\\ \dfrac{(\alpha+n)(\beta'+q-1)}{(\gamma+n-1)(\gamma+n)}z_2(1-z_2), & \text{if } i_n=2;\end{cases}$$

$$b_{i(n)}(z_1,z_2)=\begin{cases}1-\dfrac{\alpha+\beta+n+p+1}{\gamma+n}z_1-\dfrac{\beta'+q}{\gamma+n}z_2, & \text{if } i_n=1,\\ 1-\dfrac{\beta+p+1}{\gamma+n}z_1-\dfrac{\alpha+\beta'+n+q}{\gamma+n}z_2, & \text{if } i_n=2;\end{cases}$$

where $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$, $i(n)\in\mathcal{I}=\{i(k)=i_1i_2...i_k:\ i_s=1,2;\ s=\overline{1,k},\ k\in\mathbb{N}\}$, $p=\sum\limits_{j=1}^{k}\delta_{i_k}^1$, $q=\sum\limits_{j=1}^{k}\delta_{i_k}^2$, $n=p+q$, $n\geq 1$, δ_j^i is Kronecker symbol.

A remnant of Nörlund branched continued fraction

$$Q_{i(l)}^{\infty}(z_1,z_2)=b_{i(l)}(z_1,z_2)+\underset{k=l+1}{\overset{\infty}{D}}\sum_{i_k=1}^{2}\frac{a_{i(k)}(z_1,z_2)}{b_{i(k)}(z_1,z_2)},\qquad l=l(\alpha,\beta,\beta',\gamma),$$

converges uniformly to a holomorphic function

$$\frac{F_1(\alpha+l,\beta+p,\beta'+q;\gamma+l;z_1,z_2)}{F_1(\alpha+l+1,\beta+p+\delta_{i_l}^1,\beta'+q+\delta_{i_l}^2;\gamma+l+1;z_1,z_2)}$$

on every compact subset of the domain $G := \big\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_j| < 1/8, j = 1, 2\big\}$ for arbitrary complex parameters $\alpha, \beta, \beta', \gamma$ ($\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$) of Appell functions F_1.

ON BIDUAL BASES IN THE SPACE OF SYMMETRIC ANALYTIC FUNCTIONS ON ℓ_1

Holubchak Oleh

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics

oleggol@ukr.net

The algebra of all continuous symmetric polynomials on ℓ_1 will be denoted by $P_s(\ell_1)$. S It is known that $P_s(\ell_1)$ admits algebraic bases. We need to use several standard bases which also are well known in the combinatorics.

The basis of power sums consists of polynomials

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n, x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_1.$$

The elementary symmetric polynomials $G_n(x) = \sum x_{i_1} \ldots x_{i_n}$ form an another basis in $P_s(\ell_1)$ and the Newton equality holds

$$nG_n = G_{n-1}P_1 - G_{n-2}P_2 + \ldots + (-1)^n P_n.$$

Also, there is a basis of complex symmetric functions H_n which can be defined by

$$nH_n = H_{n-1}P_1 + H_{n-2}P_2 + \ldots + H_1 P_{n-1} + P_n.$$

Let $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ be a partition of a positive integer n, that is all $\lambda_k \in \mathbb{N}$ and $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = n$. We denote by $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}, x \in \ell_1$ and by M_λ the symmetric polynomial in $P_s(\ell_1)$

$$M_\lambda(x) = \sum_{\sigma \in S} x_{\sigma(1)}^{\lambda_1} \ldots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n},$$

where S is the group of permutations of $\mathbb{N}$. It is known from the Combinatorics that

$$H_n = \sum_{|\lambda|=n} M_\lambda.$$

For a given partition λ let $z_\lambda = \prod_{k\geq 1} k^{m_k} m_k!$, where m_k is the number of entries of k into λ. It is known that

$$H_n = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} P_\lambda = \sum_{\nu_1+2\nu_2+\ldots+n\nu_n=n} \frac{1}{\nu_1! 1^{\nu_1} \ldots \nu_n! n^{\nu_n}} P_1^{\nu_1} \ldots P_n^{\nu_n},$$

where $P_\lambda = P_{\lambda_1} \dots P_{\lambda_n}$. We will use also notations $G_\lambda = G_{\lambda_1} \dots G_{\lambda_n}$, $H_\lambda = G_{\lambda_1} \dots G_{\lambda_n}$. It is easy to see that each of system $\{P_\lambda\}$, $\{G_\lambda\}$, $\{H_\lambda\}$, and $\{M_\lambda\}$ form a linear basis in $P_s(\ell_1)$, where λ goes over all partitions of all positive integers.

Next we introduce an inner product on $P_s(\ell_1)$ so that $\{P_\lambda\}$ form an orthogonal basis. In this talk we consider the case when $\langle P_\lambda, P_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda$, where $\delta_{\lambda\mu}$ is the Kronecker delta. Let $H_s = H_s^{z_\lambda}(\ell_1)$ be the completion of $P_s(\ell_1)$ with respect to the inner product. The main result of the talk is that $\{H_\lambda\}$ and $\{M_\lambda\}$ are bidual bases in H_s.

ЖЮЛІА-ВИНЯТКОВІСТЬ ЛОКСОДРОМНИХ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ

Гущак Ольга Богданівна

Львівський національний університет ім. І.Франка

olya_khyl@ukr.net

В роботі розглядаються локсодромні функції.

Нехай $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Відображення $f : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}$ називається локсодромною функцією з мультиплікатором q $(0 < |q| < 1)$, якщо f є мероморфною і $\forall z \in \mathbf{C}^*$ виконується рівність $f(qz) = f(z)$.

Мероморфна в $\mathbf{C}^*$ функція f називається Жюліа-винятковою, якщо для довільної послідовності комплексних чисел $\{\sigma_n\}$, $\sigma_n \to \infty$, $n \to \infty$ існує підпослідовність $\{\sigma_{n_k}\}$ така, що послідовність $\{f(\sigma_{n_k} z)\}$ збігається рівномірно в $\mathbf{C}^*$ в сенсі Каратеодорі-Ландау при $k \to \infty$.

Основним результатом є наступна теорема.

Теорема. Кожна локсодромна функція f є Жюліа-винятковою.

[1] *Hellegouarch Y.* Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles // Academic Press, 2002, P.92-93.

[2] *Montel P.* Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications // Paris: Gauthier-Villars, 1927. (*Монтель П.* Нормальные семейства аналитических функций // Москва-Ленинград: ОНТИ НКТП СССР, 1936.)

[3] *Ostrowski A.* Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen satzes // Mathematische Zeitschrift, Vol. 24, №1 (1926), P. 215-258.

[4] *Kondratyuk A.A.* Meromorphic functions with several essential singularities. I // Matematychni Studii, Vol. 30, №1 (2008), P. 125-131.

[5] *Eremenko A.* Normal holomorphic curves from parabolic regions to projective spaces. // Preprint. Purdue University. - 1999.

ТЕНЗОРНІ ДОБУТКИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ПРОСТОРІВ ТИПУ БЄСОВА

Дмитришин Мар'ян Іванович

Прикарпатський національний університет ім. В.Стефаника

m_dmytryshyn@hotmail.com

Однією з найбільш важливих областей застосування методів дійсної інтерполяції є теорія апроксимації в банахових просторах. Використовуючи такі методи можна отримати класичні теореми Джексона і Бернштейна про найкраще наближення функцій із $L_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p \le \infty)$ цілими функціями експоненціального типу.

В доповіді розглядається поширення деяких методів дійсної інтерполяції на випадок проективних тензорних добутків банахових просторів. Використано результати робіт [1], [2].

Зокрема, визначено інтерполяційні простори тензорних добутків векторів експоненціального типу замкнених операторів над банаховими просторами, а також досліджено інтерполяційні властивості таких просторів. Показано, що тензорний добуток абстрактних просторів Бєсова є проміжним інтерполяційним простором між тензорним добутком просторів векторів експоненціального типу замкнених операторів і тензорним добутком банахових просторів, на яких визначено відповідні оператори. Встановлено нерівності, які оцінюють відстань від заданого елемента тензорного добутку банахових просторів до підпростору, що визначається тензорним добутком просторів векторів експоненціального типу.

[1] *Дмитришин М. І.* Інтерполяція тензорних добутків векторів експоненціального типу замкнених операторів // Математичний вісник НТШ. -2012. - Т.9. - С. 89-96.

[2] *Дмитришин М. І.* Тензорні добутки абстрактних просторів Бєсова // Карпатські математичні публікації. Науковий журнал. - 2012. - Т.2. - № 2. - С. 241-246.

АПРОКСИМАТИВНІ ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛІВ ТИПУ ПУАССОНА

Жернова Тетяна Миколаївна

Східноевропейський національний університет імені Лесі Українки

tanya_zhernova@ukr.net

В доповіді буде розглянуто апроксимативні властивості інтегралів типу Пуассона на класі $Lip1$ в рівномірній метриці. Зокрема буде знайдено повний асимптотичний розклад точної верхньої межі наближення функцій з класу $Lip1$ їх інтегралами типу Пуассона. Відмітимо, що в частинних випадках інтеграл типу Пуассона співпадає з відомим інтегралом Пуассона і бігармонійним інтегралом Пуассона, для яких аналогічні повні асимптотичні розклади були знайдені в роботах [1], [2].

[1] *K. M. Zhyhallo, Yu. I. Kharkevych.* Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals// Ukr. Math. Journal. — 2002. — **54**, №9. — P. 1462–1470.

[2] *K. M. Zhyhallo, Yu. I. Kharkevych.* Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals // Ukr. Math. Journal. — 2002. — **54**, №1. — P. 51–63.

АНАЛОГИ ДЕЯКИХ КЛАСИЧНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ДЛЯ БЛОЧНО-СИМЕТРИЧНИХ ПОЛІНОМІВ

Загороднюк Андрій Васильович

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

andriyzag@yahoo.com

Кравців Вікторія Василівна

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

maksymivvika@gmail.com

Розглянемо простір $\mathcal{X}_\infty^s = \oplus_1 \mathbb{C}^s$ – нескінченна ℓ_1-сума копій простору $\mathbb{C}^s$ з нормою $\|\overline{x}\| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$, де вектор $\overline{x} \in \mathcal{X}_\infty^s$ і $x_i \in \mathbb{C}^s$. Будемо казати, що поліном P на просторі $\mathcal{X}_\infty^s$ називається *блочно-симетричним (векторно-симетричним)*, якщо:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m)}, \ldots),$$

де $x_i \in \mathbb{C}^s$ і σ – довільна підстановка на множині $\mathbb{N}$. Позначимо через $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}^s_\infty)$ — алгебру блочно-симетричних поліномів на просторі $\mathcal{X}^s_\infty$.

У доповіді буде розглянуто аналоги деяких класичних результатів для блочно-симетричних поліномів.

ПРО УЗАГАЛЬНЕННЯ ПРОДОВЖЕННЯ АРЕНСА ОПЕРАЦІЇ ДОБУТКУ У БАНАХОВИХ АЛГЕБРАХ

Загороднюк Андрій Васильович

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

andriyzag@yahoo.com

Тарас Олена Генадіївна

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Нехай A — комплексна банахова з одиницею. Позначимо $H_b(A)$ алгебру аналітичних функцій обмеженого типу на A. У роботі [1] показано, що операцію множення алгебри A можна продовжити до деякої асоціативної операції на спектрі (множині характерів) M_b алгебри $H_b(A)$. Це продовження збігається з відомим продовженням Аренса при звуженні на підпростір A'', який природно вкладається в M_b.

У доповіді будуть досліджені властивості побудованого продовження та отримано застосування до опису аналітичної структури на групі оборотних елементів M_b.

[1] *Тарас О.Г.*, Узагальнення продовження Аренса на спектр аналітичних функцій на банаховій алгебрі // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2010. – 8 – С. 78–83.

ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ З ВИПАДКОВИМИ НУЛЯМИ

Захарко Ю. Б.

Львівський національний університет ветеринарної медицини та біотехнологій ім. С. З. Гжицького

yulia.zaharko@gmail.com

Філевич П. В.

Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника

filevych@mail.ru

Нехай $\mathcal{E}$ — клас трансцендентних цілих функцій, а $\mathcal{Z}_0$ — клас комплексних послідовностей $\zeta = (\zeta_n)$ таких, що $0 \le |\zeta_0| \le |\zeta_1| \le \ldots$ і $\zeta_n \to \infty$, $n \to \infty$. Через $\mathcal{E}(\zeta)$, де $\zeta \in \mathcal{Z}_0$, позначимо клас функцій $f \in \mathcal{E}$, послідовність нулів яких, занумерована з урахуванням їх кратностей у порядку неспадання модулів, співпадає з послідовністю ζ.

Використовуємо стандартні позначення і термінологію теорії мероморфних функцій [1]. Зокрема, для функції $f \in \mathcal{E}$ через $N(r, 0, f)$ позначимо усереднену лічильну функцію її нулів і покладемо

$$m_2(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\ln|f(re^{i\theta}||^2 d\theta\right)^{1/2}, \quad C_f = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{N(r,0,f)}{m_2(r,f)}.$$

Для кожного $\rho \in (0; +\infty)$ нехай

$$C(\rho) = \frac{|\sin \pi\rho|}{\pi\rho}\left(\frac{4\pi\rho}{2\pi\rho + \sin 2\pi\rho}\right)^{1/2}, \quad D(\rho) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\rho^4}{(\rho^2 - k^2)^2}\right)^{1/2}.$$

Відомо, що $C(\rho)D(\rho) = 1$ для $\rho \in (0; +\infty)\backslash\mathbb{N}$.

Дж. Майлз і Д. Ф. Шіа [2] довели наступну теорему.

Теорема 1. *(i) Для довільної функції $f \in \mathcal{E}$ порядку $\rho \in (0; +\infty)$ правильна нерівність $C_f \ge C(\rho)$. (ii) Для кожного $\rho \in (0; +\infty)$ існує функція $f \in \mathcal{E}$ порядку ρ така, що $C_f = C(\rho)$.*

Теорема 1 у випадку $\rho \in \mathbb{N}$ є тривіальною. Якщо $f \in \mathcal{E}$ — функція порядку $\rho \in (0; +\infty)\backslash\mathbb{N}$, то, як відомо, $f \in \mathcal{E}(\zeta)$ для деякої $\zeta \in \mathcal{Z}_0$, причому ρ збігається з показником збіжності послідовності ζ. З огляду на це, теорема 1 у своїй нетривіальній частині рівносильна наступній.

Теорема 2. *(i) Нехай $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ — послідовність з показником збіжності $\tau \in (0;+\infty)\backslash\mathbb{N}$. Тоді для довільної функції $f \in \mathcal{E}(\zeta)$ порядку τ правильна нерівність $C_f \geq C(\tau)$. (ii) Для кожного $\tau \in (0;+\infty)\backslash\mathbb{N}$ існує послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ з показником збіжності τ така, що $C_f = C(\tau)$ для деякої $f \in \mathcal{E}(\zeta)$.*

Згідно з пунктом (ii) теореми 3 нерівність $C_f \geq C(\tau)$ є точною. Але, як виявляється, для "більшості"послідовностей $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ з показником збіжності $\tau \in (0;+\infty)\backslash\mathbb{N}$ цю нерівність можна істотно уточнити.

Нехай $p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ — усі корені степеня p з 1. Поряд з послідовністю $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ розглянемо випадкову послідовність $\zeta_\omega = (\zeta_n \varepsilon_n(\omega))$, де $(\varepsilon_n(\omega))$ — послідовність незалежних випадкових величин, кожна з яких приймає значення $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ з однаковою ймовірністю $\frac{1}{p}$.

Теорема 3. *(i) Нехай $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ — послідовність з показником збіжності $\tau \in (0;+\infty)\backslash\mathbb{N}$. Тоді випадкова послідовність ζ_ω майже напевно володіє наступною властивістю: для довільної функції $f \in \mathcal{E}(\zeta_\omega)$ порядку τ правильна нерівність $C_f \geq C(\tau/p)$. (ii) Для кожного $\tau \in (0;+\infty)\backslash\mathbb{N}$ існує послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ з показником збіжності τ така, що випадкова послідовність ζ_ω майже напевно володіє такою властивістю: $C_f = C(\tau/p)$ для деякої $f \in \mathcal{E}(\zeta_\omega)$.*

Подібні результати отримано також для інших послідовностей випадкових величин ζ_ω.

[1] *Гольдберг А.А., Островский И.В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 590 с.

[2] *Miles J., Shea D.F.* An extremal problem in value distribution theory // Quart. J. Math. – 1973. – V. 24. – P. 377-383.

ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

Зелинский Ю.Б.

Институт математики НАН Украины

zel@imath.kiev.ua

Будут рассмотрены, полученные совместно с учениками, варианты теорем о существовании решений многозначных включений в евклидовых пространствах, в том числе теорем о неподвижной точке для многозначных отображений, основанных на обобщении “условия острого угла”. Рассматриваемые отображения могут быть разрывными.

Пусть E^n — n-мерное евклидово (вещественное или комплексное) пространство,

$\langle *, * \rangle$ — скалярное произведение в E^n, $convA$ — выпуклая оболочка множества A.

Теорема 1. *Пусть D — область евклидова пространства E^n, которая содержит начало координат. Пусть $K \subset \overline{D}$ — подмножество в замыкании этой области, обладающее следующим свойством (α): на каждом луче, выходящем из начала координат, лежит хотя бы одна точка принадлежащая K. Пусть сужение многозначного отображения $F : \overline{D} \to E^n$ на подмножество удовлетворяет "условию острого угла" и $convF(K)$ компакт. Тогда, если $F(\overline{D}) \supset F(K)$, то $0 \in F(\overline{D})$.*

Теорема 2. *Пусть D — область евклидова пространства E^n, которая содержит начало координат. Пусть $K \subset \overline{D}$ — подмножество в замыкании этой области, обладающее свойством (α). Пусть сужение многозначного отображения $F : \overline{D} \to E^1$ на подмножество K удовлетворяет "условию строгого острого угла". Тогда, если $F(\overline{D}) \supset convF(K)$, то $0 \in F(\overline{D})$.*

[1] *Зелинский Ю.Б.* Многозначные отображения в анализе // Киев: Наукова думка. — 1993. — 264 с.

ФРАКТАЛИ У ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ФІБОНАЧЧІ

Карвацький Д. М.

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

dinaris-mail@mail.ru

Означення. Послідовність дійсних чисел (u_n), $n \in N$, яка має властивість

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n,$$

називатимемо *узагальненою послідовністю Фібоначчі.*

Множина

$$F = \{(u_n) : \ u_1, u_2 \in R, \ u_n = pu_{n-1} + su_{n-2}, \ n \geq 3\}$$

узагальнених послідовностей Фібоначчі з фіксованими параметрами p та s утворює лінійний простір на якому можна природнім чином ввести скалярний добуток, норму, метрику.

Розглянемо наступний спосіб метризації простору F. Зафіксуємо деяке дійсне число s для якого виконується нерівність $s > max\{|\Phi|, |\Psi|\}$, де

$\Phi = \frac{p+\sqrt{p^2+4s}}{2}$ та $\Psi = \frac{p-\sqrt{p^2+4s}}{2}$. Визначимо скалярний добуток між двома елементами $\overline{x}$, $\overline{y} \in F$ наступним чином

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x} \cdot \overline{y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n y_n}{s^{2n}}.$$

Відповідно *s-норму* в евклідовому просторі $(F, +, \lambda(\cdot), \circ)$ визначимо як функціонал

$$\|\overline{x}\|_s = \sqrt{\overline{x} \circ \overline{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n^2}{s^{2n}}.$$

Метрику в евклідовому нормованому просторі F з s-нормою означимо за допомогою рівності

$$\rho_s(\overline{x}, \overline{y}) = \rho_s = \|\overline{x} - \overline{y}\|_s = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x_n - y_n)^2}{s^{2n}}},$$

де $\overline{x} = (x_n)$, $\overline{y} = (y_n) \in F$. Отже, (F, ρ_s) – метричний простір. Метрику, яка визначається останньою рівністю будемо називати *s-метрикою.*

Теорема 1. *Якщо* $\overline{0} \neq \overline{\alpha} = (\alpha_n)$ *– фіксований елемент простору* F*,* r *і* m *– натуральні числа, причому* $1 < m < r$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$, $v_i < v_{i+1}$, $i = \overline{1, m-1}$,

$$C[r, V] = \left\{\lambda : \lambda = \frac{\alpha_1}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{r^n} + \ldots, \alpha_n \in V\right\},$$

то множина

$$H = \{\overline{x} \; : \overline{x} = \lambda\overline{\alpha}, \; \lambda \in C[r, V]\}$$

в метричному просторі (F, ρ_s) *є самоподібною і її самоподібна розмірність*

$$\alpha_0 = \log_r |V|$$

співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_{\rho_s}(H)$.

Теорема 2. *Якщо* $\overline{\alpha} = (\alpha_n)$, $\overline{b} = (b_n) \in F$, *причому* $\overline{\alpha}$ *і* $\overline{b}$ *неколінеарні, то множина*

$$H = \left\{\overline{x} : \overline{x} = \lambda_1\overline{\alpha} + \lambda_2\overline{b}, \quad \lambda_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k}, \lambda_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k}, \alpha_k + \beta_k \leq 1\right\}$$

є самоподібною досконалою множиною, самоподібна розмірність якої співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича і дорівнює $\log_2 3$.

[1] *Василенко Н.М.* Математичні структури в просторі послідовностей Фібоначчі / Н.М. Василенко, М. В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – Київ.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2008. – 9. С. 129-150.

[2] *Воеводин В. В.* Линейная алгебра / В. В. Воеводин. – М.: Наука, 1980. – 400 с.

[3] *Волков Ю.І.*, Войналович Н.М. Елементи дискретної математики: Навчальний посібник. - Кіровоград: РВГ ІЦ КДПУ ім. В.Винниченка, 2000. – 190 с.

[4] *Воробьев Н. Н.* Числа Фибоначчи / Н. Н. Воробьев. – М.: Наука, 1969. – 112 с.

[5] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженні сингулярних розподілів. – Київ: Видавництво НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В ЗВ'ЯЗНИХ ПРОСТОРАХ

Карлова Олена Олексіївна

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
Maslenizza.ua@gmail.com

Михайлюк Володимир Васильович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
vmykhaylyuk@ukr.net

Нехай X, Y, Z – топологічні простори. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *нарізно неперервним*, якщо кожне відображення $f^x : Y \to Z$ і $f_y : X \to Z$ неперервне для всіх $x \in X$ та $y \in Y$, де $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Якщо відображення $f : X \to Y$ є поточковою границею послідовності неперервних відображень $f_n : X \to Y$, то f називається *відображенням першого класу Бера*.

У 1898 році А. Лебеґ [1] встановив, що при $X = Y = \mathbb{R}$ кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to Z$ належить до першого класу Бера. Набір топологічних просторів (X, Y, Z) з такою властивістю ми будемо називати *трійкою Лебеґа*. В. Маслюченком було поставлене питання: чи існує топологічний простір Z, такий, що $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, Z)$ не є трійкою Лебеґа?

Позначимо через γ сукупність усіх таких підмножин A з $\mathbb{R}^2$, що для кожної точки (x, y) з A існують такі околи U та V точок x і y в $\mathbb{R}$, що

$$(\{x\} \times V) \bigcup (U \times \{y\}) \subseteq A.$$

Система γ утворює топологію на $\mathbb{R}^2$, яку ми називаємо *хрест-топологією*. Простір $\mathbb{R}^2$ з такою топологією ми позначаємо $(\mathbb{R}^2, \gamma)$.

Теорема 1. *Набір* $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, (\mathbb{R}^2, \gamma))$ *не є трійкою Лебеґа.*

[1] *H. Lebesgue* Sur l'approximation des fonctions, Bull. Sci. Math. **22** (1898), 278–287.

A STEP TO NONLINEAR ANALYSIS AND BACK

Kondratyuk A. A.

Ivan Franko national university of Lviv, Universytetska str.,1, 79000 Lviv, Ukraine

kond@franko.lviv.ua

The following topics will be exposed.

1. Multiplicatively periodic mappings of homogeneous spaces.
2. Loxodromic meromorphic functions. Geometric and topological aspects.
3. Linearisation of a homogeneous space.
4. Connections with elliptic functions of Abel, Jacobi Weierstrass.
5. Multiplicatively periodic measures and distributions.
6. Multiplicatively periodic differences of subharmonic functions.

[1] Hellegouarch Y. Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles, Academic Press, 2002, 381 pp.

[2] Rausenberger O. Lehrbuch der Theorie der Periodischen Functionen Einer Variabeln, Leipzig, Druck und Ferlag von B.G.Teubner, 1884, 470 p.

[3] Valiron G. Cours d'Analyse Mathematique, Theorie des fonctions, 2nd Edition, Masson et.Cie., Paris, 1947, 522 pp.

[4] Khrystiyanyn A.Ya., Kondratyuk A.A. *Meromorphic mappings of torus onto the Riemann sphere* Carpathian Mathematical Publications –2012. – V.4, №1. – P. 155-159.

ЗРОСТАННЯ ТА РОЗПОДІЛ НУЛІВ І ПОЛЮСІВ МЕРОМОРФНОЇ ФУНКЦІЇ В ОКОЛІ ІСТОТНО ОСОБЛИВОЇ ТОЧКИ

Кондратюк А. А.

Львівський національний університет імені Івана Франка

kond@franko.lviv.ua

Сокульська Н.Б.

Львівський національний університет імені Івана Франка

natalia_sokulska@yahoo.com

В класичній теорії Неванлінни вивчається розподіл значень мероморфних функцій у всій площині. Ми будуємо аналог цієї теорії для функцій мероморфних лише в деякому проколеному околі фіксованої точки. Без втрати загальності вважаємо цю точку ∞, а її околом - зовнішність деякого круга.

Характетристику Неванлінни вводимо наступним чином

$$T_0(r,F) = m_0(r,F) - \frac{\log r}{\log r_0} m_0(r_0,F) + \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right) m_0(1,F) + N_0(r,F), \quad 1 < r_0 \le r$$

де $m_0(r,F) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+ |F(re^{i\theta})| d\theta, N_0(r,F) = \int\limits_1^r \frac{n(t,F)}{t} dt$, $n(t,F)$ - кількість полюсів функції F в кільці $1 < r_0 \le r$

Описано клас мероморфних при $|z| \ge 1$ функцій F

$$T_0(r,F) = O(\log r).$$

Вводяться голоморфні та мероморфні при $|z| \ge 1$ функції скінченного λ-типу. Описані множини їх нулів та полюсів.

[1] Kondratyuk A., Laine I. *Meromorphic functions in multiply connected domains, Fourier series method in complex analysis* (Merkrijärvi, 2005) // Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser. – 2006. – 10. – P. 9-111.

[2] Сокульська Н.Б. *Мероморфні функції скінченного λ-типу у півсмузі*// Carpathian Mathematical Publications,– 2012.– V4, No2.–P. 328-339.

ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ В БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Копач М.І.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

kopachm2009@gmail.com

Обшта А.Ф.

Національний університет "Львівська політехніка"

Шувар Б.А.

Національний університет "Львівська політехніка"

Для рівняння

$$x = Fx \tag{1}$$

в банаховому просторі E, з нелінійним оператором F підпорядкованому умові

$$\lim_{||x|| \to \infty} \frac{||Fx||}{||x||} = 0 \tag{2}$$

багатьма авторами встановлювались достатні умови існування розв'язку. Запропонована М.С. Курпелем в [1, п. 8] методика дозволяє замінити умову (2) менш обмежеючою умовою

$$\lim_{||x|| \to \infty} \frac{||Fx||}{||x||} = \alpha \tag{3}$$

для рівняння (1) з монотонним оператором F.

В пропонованому повідомленні авторами розвинуто і уточнено деякі результати з [1] для рівняння (1) з оператором F, який задовольняє умову (3) із сталою $\alpha \leq 1$. При цьому вважається, що напівупорядкований простір E є нормованою структурою з монотонною нормою. Встановлено, зокрема справедливість наступних тверджень.

Теорема 1. *Нехай*

1. нормована структура є цілком правильно напівупорядкованим простором;

2. оператор F ізотонний;

3. існує таке число $M > 0$, що із співвідношення $||x|| \geq M$ випливає нерівність $||Fx|| \leq ||x||$ $(x \in E)$;
4. заданий елемент u, для якого $u \leq Fu$.

Тоді існує розв'язок $x*$ рівняння (2), до якого монотонно не спадаючи сходиться послідовність $\{y_n\}$, побудована з допомогою формул $y_0 = u$, $y_{n+1} = Fy_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ і має місце оцінка $u \leq x*$.

Теорема 2. *Нехай:*
1. E — цілком правильно напівупорядкований простір;
2. оператор F — антитонний;
3. існує таке число $M > 0$, що із співвідношення $||y, z|| \geq M$ випливає нерівність $||Fy, Fz|| \leq ||y, z||$;
4. задані елементи u, v, для яких $u \leq Fv$, $v \geq Fu$;
5. система рівнянь $y = Fz$, $z = Fy$ має не більше ніж один розв'язок в $E \times E$;
6. рівняння (1) має розв'язок.

Тоді для єдиного розв'язку $x* \in E$ рівняння (1) мають місце оцінки $y_0 \leq y_1 \leq \ldots y_n \leq \ldots \leq x* \leq \ldots \leq z_n \leq \ldots \leq z_1 \leq z_0$, де послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ побудовані з допомогою формул $y_0 = u$, $z_0 = v$, $y_{n+1} = Fz_n$, $z_{n+1} = Fy_n$. При цьому послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ збігаються до $x*$ по нормі в E.

[1] *Курпель Н.С., Шувар Б.А.* Двухсторонние операторные неравенства и их применение. – К: Наукова думка, 1980. – 267 с.

ПРО ПОЛІНОМІАЛЬНІСТЬ НАРІЗНО СТАЛИХ ФУНКЦІЙ

Косован В.М.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

orthodoks@meta.ua

Маслюченко В.К.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Для множини $E \subseteq \mathbb{R}^2$ символи $S_{0,0}(E), P_0(E)$ і $P(E)$ означають відповідно множини всіх нарізно сталих, сталих і поліноміальних функцій $f : E \to \mathbb{R}$. У працях [1, 2] було введено поняття hv-зв'язності множини E і показано, що рівність $S_{0,0}(E) = P_0(E)$ виконуються тоді і тільки тоді, коли множина E є hv-зв'язною. Там же був наведений приклад множини E (графік функції Діріхле), для якої $S_{0,0}(E) \nsubseteq P_0(E)$, але $S_{0,0}(E) \subseteq P(E)$. Тому постало природне питання про опис тих множин E, для яких $S_{0,0} \nsubseteq P_0(E)$ і $S_{0,0}(E) \subseteq P(E)$. Тут ми даємо деякі необхідні умови для цього і деякі достатні.

Компонентою hv-зв'язності множини E ми називаємо максимальну hv-зв'язну підмножину C в E. Різні компоненти hv-зв'язності множини E обов'язково не перетинаються, а вся множина E подається у вигляді диз'юнктного об'єднання всіх своїх компонент hv-зв'язності.

Для підмножини $C \subseteq \mathbb{R}^2$ і точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ покладемо $C^x = \{v \in \mathbb{R} : (x, v) \in C\}$ і $C_y = \{u \in \mathbb{R} : (u, y) \in C\}$. Символом $|M|$ ми позначатимемо потужність множини M. Для множини $C \in \mathbb{R}$ введемо множини

$$A(C) = \{x \in \mathbb{R} : |C^x| \geq \aleph_0\} \text{ і } B(C) = \{y \in \mathbb{R} : |C_y| \geq \aleph_0\}.$$

Теорема 1. *Нехай $E \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}$ – система всіх компонент hv-зв'язності множини E, $S_{0,0}(E) \nsubseteq P_0(E)$ і $S_{0,0}(E) \subseteq P(E)$. Тоді:*

(i) $1 < |\mathcal{C}| < \aleph_0$;

(ii) *якщо $A(C_0) \neq \varnothing$ для деякого $C_0 \in \mathcal{C}$, то $B(C) = \varnothing$ для всіх $C \in \mathcal{C} \setminus \{C_0\}$;*

(iii) *якщо $B(C_0) \neq \varnothing$ для деякого $C_0 \in \mathcal{C}$, то $A(C) = \varnothing$ для кожного $C \in \mathcal{C} \setminus \{C_0\}$;*

(iv) *множина $\{C \in \mathcal{C} : A(C) \neq \varnothing$ або $B(C) \neq \varnothing\}$ скінченна.*

Теорема 2. *Нехай множина E має рівно n різних компонент hv-зв'язності $C_1, ..., C_n$, причому $n \geq 2$. Припустимо, що всі проекції $pr_1(C_1), ..., pr_1(C_n)$ на вісь абсцис або всі проекції $pr_2(C_1), ..., pr_2(C_n)$ на вісь ординат скінченні. Тоді $S_{0,0}(E) \nsubseteq P_0(E)$ і $S_{0,0}(E) \subseteq P(E)$.*

[1] *Косован В.М., Маслюченко В.К.* Нарізно сталі функції // Міжнар. конф. до 100-річчя М.М.Боголюбова та 70-річчя М.І.Нагнибіди. 8-13 червня, 2009, Чернівці. Тези доповідей. – Чернівці: Книги - XXI, 2009. – с.80.

[2] *Косован В.М., Маслюченко В.К.* Про нарізно сталі і стало лінійні функції // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту ім. Ю.Федьковича. Серія: Математика. – 2011.– **1**, №3. – С.44-48.

ТОПОЛОГО-МЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ОДНІЄЇ МНОЖИНИ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ, ВИЗНАЧЕНОЇ В ТЕРМІНАХ ЧАСТОТИ ДВІЙКОВОЇ ЦИФРИ

Макарчук Олег Петрович

НПУ імені. М.П.Драгоманова

makolpet@gmail.com

Ізюмченко Олександр Ігорович

КНУ імені Тараса Шевченка

sashaizyumchenk@mail.ru

Нехай

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{2^j} = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$$

– двійкове зображення числа $x \in [0;1]$, $\alpha_n \in \{0,1\}, \forall n \in N$. Для двійково-раціональних чисел вигляду $\frac{r}{2^s}, r, s \in Z_+, r \leq 2^s$ прийнято використовувати період (0).

Позначимо $N_i(x,n) = \#\{k : \alpha_k(x) = i, k \leq n\}$. Якщо існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_i(x,n)}{n} = \nu_i(x),$$

то вона називається частотою цифри i у двійковому зображенні числа x.

Число називається *нормальним* за основою 2, якщо для кожного $i \in \{0,1\}$: $\nu_i(x) = \frac{1}{2}$, у протилежному випадку число називають *анормальним.* У роботах [1], [2] досліджувалась множина розв'язків рівняння $\nu_1(x) = x$ в трійковій системі числення. Нажаль, перенести методи дослідження з вказаних робіт на даний випадок неможливо.

В роботі досліджуються властивості множини розв'язків рівняння $\nu_i(x) = f(x)$ $(i \in \{0,1\})$ в двійковій системі числення. Вказано алгоритм побудови коренів рівняння $\nu_i(x) = f(x)$.

Теорема 1. *Нехай $f(x) : [u_1; v_1] \to [u_2; v_2]$,($[u_i; v_i] \subset [0;1], (i \in \{0,1\})$) – неперервна строго монотонна функція. Множина точок, які задовольняють рівність $\nu_i(x) = f(x)$ $(i \in \{0,1\})$ є континуальною, всюду щільною на відрізкі $[u_1; v_1]$ множиною нульової міри Лебега, всі елементи якої, за виключенням щонайбільше одного є анормальними числами.*

[1] *Котова.О.В.* Континуальність множини розв'язків одного класу рівнянь, які містять функцію частоти трійкових цифр числа// Укр.мат.журн.–2005,№6.–С.255-260.

[2] *Котова О.В.* Фрактальність множини розв'язків одного класу рівнянь, які містять функцію частоти трійкових цифр числа//Науковий часопис НПУ. імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки –Київ:НПУ. імені М.П.Драгоманова.–2006,№7.–С.152-159.

ПОРІВНЯННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ЛІПШИЦЕВИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Марцінків Марія Володимирівна

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

mariadubey@gmail.com

Нехай X, Y — метричні простори, позначимо через $\mathbb{P}(^nX, Y)$ множину відображень з X в Y таких, що для довільного відображення $F \in \mathbb{P}(^nX, Y)$ існує n-однорідний неперервний поліном $P_F \in \mathcal{P}(^nB(X), B(Y))$, для якого $P_F(\underline{x}) = \underline{F(x)}$ для довільного $x \in X$. Іншими словами $F \in \mathbb{P}(^nX, Y)$, якщо діаграма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & Y \\ \nu \downarrow & & \downarrow \nu \\ B(X) & \xrightarrow{P_F} & B(Y) \end{array}$$

комутативна для деякого $P_F \in \mathcal{P}(^nB(X), B(Y))$, де $B(X), B(Y)$ — вільні банахові простори просторів X та Y відповідно [1].

Елементи класу $\mathbb{P}(^nX, Y)$ будемо називати *n-однорідними ліпшицево-поліноміальними відображеннями* з простору X у простір Y.

Нехай X — нормована множина і E — нормований простір. Скажемо, що відображення $F : X \to E$ називається *ліпшицево-аналітичним*, якщо існує $\widetilde{F} : B(X) \to E$, таке, що $F(x) = \widetilde{F}(\underline{x})$. Якщо $F \in H_b(B(X), E)$, тобто $\widetilde{F}$ є обмеженого типу (обмежене на обмежених множинах) то будемо казати, що F — *ліпшицево-аналітичне відображення обмеженого типу.*

Множину всіх ліпшицево-аналітичних відображень (відповідно обмеженого типу) з X в E позначимо $\mathbb{H}(X, E)$ (відповідно $\mathbb{H}_b(X, E)$). Наведені поняття введені у [2].

У доповіді буде здійснена порівняльна характеристика простору ліпшицевих, ліпшицево-поліноміальних та ліпшицево-аналітичних відображень, зокрема, наведені приклади, які доводять таке вкладення

$$Lip(X, E) \subsetneq \mathbb{P}(X, E) \subsetneq \mathbb{H}_b(X, E).$$

[1] *Dubei M., Tymchatyn E. D., Zagorodnyuk A.* Free Banach Spaces and Extension of Lipschitz Maps // Topology, Elsevier. – 2009. – V. 48, № 2. – P. 203–213.

[2] *Дубей М. В., Загороднюк А. В.* Лінеаризація ліпшицево-поліноміальних та ліпшицево-аналітичних функцій. // Карпатські математичні публікації. – 2011. – Т.3, №1. – С.40–48.

АКСІОМИ ВІДОКРЕМНОСТІ І МЕТРИЗОВНІСТЬ ДОБУТКУ СІДРА

В. Маслюченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

О. Маслюченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

О. Мироник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

math.analysis.chnu@gmail.com

Поняття добутку Сідра виникло як узагальнення поняття площини Сідра [1], яка є прикладом вичерпного неметризовного простору. В [2] було побудовано вичерпування добутку Сідра у випадку метризовних співмножників. В даному повідомленні ми подамо необхідні і достатні умови виконання аксіом відокремності T_0, T_1, T_2 і T_3, а також критерій метризовності добутку Сідра.

Нехай X і Y – топологічні простори і $b \in Y$. *Гребінцем* або *добутком Сідра* ми називаємо топологічний простір $P = X \times_b Y$, який складається з точок добутку $X \times Y$ і топологічна структура на ньому вводиться так: множина W в P буде околом точки $p = (x, y)$, $y \neq b$, якщо існує окіл V точки y в Y, такий, що $\{x\} \times V \subseteq W$, і околом точки $p = (x, b)$, якщо існують окіл U точки x в X і окіл V точки b в Y, такі, що

$$U \overset{x}{\times} V = (U \times V) \setminus (\{x\} \times \dot{V}) = (\dot{U} \times V) \cup \{p\} \subseteq W,$$

де $\dot{U} = U \setminus \{x\}$ і $\dot{V} = V \setminus \{b\}$.

Теорема 1. Нехай X, Y – топологічні простори, $X \neq \varnothing$, $b \in Y$ і $P = X \times_b Y$ – добуток Сідра. Для того, щоб P був T_0-простором необхідно і досить, щоб простори X і $\dot{Y} = Y \setminus \{b\}$ були T_0-просторами.

Теорема 2. Нехай X, Y – топологічні простори, $X \neq \varnothing$, $b \in Y$ і $P = X \times_b Y$ – добуток Сідра. Для того, щоб P був T_1-простором необхідно і досить, щоб простори X і $\dot{Y} = Y \setminus \{b\}$ були T_1-просторами і множина $\{b\}$ була замкнена в Y.

Теорема 3. Нехай X, Y – топологічні простори, $X \neq \varnothing$, $b \in Y$ і $P = X \times_b Y$ – добуток Сідра. Для того, щоб P був гаусдорфовим простором необхідно і досить, щоб простори X і $\dot{Y} = Y \setminus \{b\}$ були гаусдорфовими і множина $\{b\}$ була замкненою в Y.

Теорема 4. Нехай X, Y – топологічні простори, $X \neq \varnothing$, $b \in Y$ і $P = X \times_b Y$ – добуток Сідра. Для того, щоб простір P був регулярним необхідно і досить, щоб простори X і $\dot{Y} = Y \setminus \{b\}$ були регулярними, множина $\{b\}$ замкнена в Y і у випадку, коли X недискретний простір, точка b має базу із замкнених околів в просторі Y.

Теорема 5. Нехай X, Y – топологічні простори, $X \neq \varnothing$, b неізольована точка простору Y і $P = X \times_b Y$ – добуток Сідра. Тоді для того, щоб P був метризовним необхідно і досить, щоб X і $\dot{Y} = Y \setminus \{b\}$ були метризовними просторами, причому X – σ-дискретний, множина $\{b\}$ замкнена в Y і якщо X недискретний, то b має зліченну базу замкнених околів в Y.

[1] *Ceder J.* Some generalizations of metric spaces // Pacif. J. Math. – 1961.–**11**. – P. 105-126.

[2] *В. Маслюченко, О. Мироник* Вичерпність гребінця Сідра // Всеукр. наук. конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. 20 - 26 лютого, Ворохта. – Ів.-Франківськ, 2012. – С. 44-45.

ПРО НОВЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ КАЛБРІ-ТРОАЛЛІКА

Маслюченко Володимир Кирилович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Нестеренко Василь Володимирович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
math.analysis.chnu@gmail.com

У праці [1] Ж.Калбрі та Ж.-П.Троаллік ввели поняття множини зліченного типу і встановили такий результат: для топологічних просторів X і Y, метризовного простору Z, нарізно неперервного відображення $f : X \times Y \to Z$ і множини зліченного типу B в Y існує така залишкова множина A в X, що f є сукупно неперервним у кожній точці з $A \times B$.

Недавно у працях [2, 3] було отримані далекі узагальнення цієї теореми. Їх автори, застосовуючи різні методи, узагальнили теорему Калбрі-Троалліка на значно ширші класи відображень. Оскільки це були різні класи в обох працях, то природно постало питання про порівняннння результатів з [2] і [3]. Простий приклад відображення $f = \chi_{\{0\}\times\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ показав, що з теореми з [3] не випливає теорема з [2]. Так само можна переконатися в тому, що і з теореми з [2] не випливає теорема з [3].

Тоді постало питання про синтезуючу теорему, з якої випливали би обидва результати з [2] і [3]. Нам вдалося це зробити, розвиваючи поняття з [3] і застосовуючи метод з [2].

Многозначне відображення $F : X \to Y$ ми називаємо

- *псевдоквазінеперервним знизу*, якщо для кожної непорожньої відкритої множини U в X і довільної підмножини $A \subseteq X$, такої, що $U \subseteq \overline{A}$, існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $F(G) \subseteq \overline{F(A)}$;

- *покриттєво категорно кліковим знизу*, якщо для кожного відкритого покриття $\mathcal{V}$ простору Y і довільної множини E другої категорії в X існують десь щільна в X множина A і множина $V \in \mathcal{V}$, такі, що $A \subseteq E$ і $F(x) \cap V \neq \varnothing$ для всіх $x \in A$.

Символом $C(f)$ ми позначимо, як звичайно, множину точок неперервності відображення f. Крім того, для відображення $f : X \times Y \to Z$ і точки $p = (x, y) \in X \times Y$ ми покладаємо $f^x(y) = f_y(x) = f(p)$.

Теорема 1. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір, $\mathcal{V}$ – не більш, ніж зліченна система множин в Y,*

$$B(\mathcal{V}) = \{y \in Y : \{V \in \mathcal{V} : V\text{–окіл точки } y \text{ в } Y\}\text{–база околів точки } y \text{ в } Y\},$$

$f : X \times Y \to Z$ – таке відображення, що для кожної множини $V \in \mathcal{V}$, для якої $V \cap B(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, відображення

$$F_V : X \ni x \mapsto F_V(x) = f^x(V) \subseteq Z$$

псевдоквазінеперервне знизу та покриттєво категорно кліковее знизу. Тоді множина

$$R = \{x \in X : \{x\} \times (C(f^x) \cap B(\mathcal{V})) \subseteq C(f)\}$$

є залишкова в X.

Зауважимо, що поняття покриттєвої категорної кліковості знизу для многозначних відображень є розвитком покриттєвої кліковості і категорної кліковості для однозначних відображень, введених в [4]. Зв'язки між ними досліджувались в [5].

[1] *Calbrix J., Troallic J.P.* Applications séparément continues // C.R. Acad. Sc. Paris. Sér. A. – 1979. – **288**. – P. 647 - 648.

[2] *Маслюченко В.К., Нестеренко В.В.* Точки сукупної неперервності та великі коливання // Укр. мат. журн. — 2010. – **62**, №6. – С. 791 - 800.

[3] *Bouziad A., Troallic J.P.* Lower quasicontinuity, joint continuity and related concepts // Topology Appl. – 2010. – **157**, №18. – P. 2889 - 2894.

[4] *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Філіпчук О.І.* Сукупна неперервність K_hC-функцій зі значеннями в просторах Мура // Укр. мат. журн. — 2008. — 60, №11. -– С. 1539 – 1549.

[5] *Маслюченко В.К., Філіпчук О.І.* Зв'язки між кліковістю та її аналогами // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Вип.528. Математика. -– Чернівці: ЧНУ, 2010. — С. 101 – 103.

ПРОДОВЖЕННЯ КВАЗІНЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Маслюченко О.В.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
ovmasl@gmail.com

Нестеренко В.В.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

В роботі [1] було встановлено, що для довільної множини $Y \subseteq [0,1]$ і обмеженої неперервної функції $g : Y \to \mathbb{R}$ існує квазінеперервна функція $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, яка неперервна в точках множини Y і є продовженням функції g. В даному повідомлені наведено ряд узагальнень цього результату.

Нехай X – топологічний простір. Нагадаємо, що функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається *квазінеперервною*, якщо для довільної відкритої в $\mathbb{R}$ множини G виконується включення $f^{-1}(G) \subseteq \overline{\operatorname{int} f^{-1}(G)}$. Множину точок розриву функції f як звичайно позначатимемо $D(f)$. Для функції $g : Y \to \mathbb{R}$, що визначена на деякому підпросторі Y простору X, позначимо

$$\widetilde{D}(g) = D(g) \cup \{x \in \overline{Y} \setminus Y : \text{ не існує скінченної границі } \lim_{y \to x} g(y)\}.$$

Теорема 1. *Нехай X – топологічний простір, Y – щільний підпростір X і $g : Y \to \mathbb{R}$ – обмежена квазінеперервна функція. Тоді існує обмежена квазінеперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$ така, що $f|_Y = g$ і $\widetilde{D}(g) = D(f)$.*

Теорема 2. *Нехай X – спадково нормальний спадково берівський простір, $Y \subseteq X$ і $g : Y \to \mathbb{R}$ – обмежена квазінеперервна функція. Тоді існує обмежена квазінеперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$ така, що $f|_Y = g$ і $\widetilde{D}(g) = D(f)$.*

Теорема 3. *Нехай X – спадково нормальний простір, $Y \subseteq X$ і $g : Y \to \mathbb{R}$ – обмежена квазінеперервна функція. Тоді існує обмежена квазінеперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$ така, що $f|_Y = g$.*

[1] *Neugebauer C. J.* Blumberg sets and quasi-continuity // Mathematische Zeitschrift. – 1962. – **79**, N1. – P. 451-455.

ГРАНИЧНІ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Маслюченко О.В.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Онипа Д.П.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Фотій О.Г.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
math.analysis.chnu@gmail.com

Нехай X – топологічний простір, Y – компактний топологічний простір, G відкрита непорожня підмножина простору X і $F = \overline{G} \setminus G$. Розглянемо деяку функцію $f : G \to Y$. Нагадаємо, що множина

$$\Omega_f(x) = \bigcap \left\{ \overline{f(U \cap G)} : U\text{– окіл точки}\, x \right\}$$

називається *граничною множиною функції f в точці $x \in F$*. Таким чином, з довільною функцією f пов'язане многозначне відображення $\Omega_f : F \to Y$.

Дане повідомлення присвячено задачі про опис таких многозначних відображень $\Phi : F \to \overline{\mathbb{R}}$, для яких існує неперервна функція $f : G \to \mathbb{R}$ з $\Omega_f = \Phi$. Це питання споріднене з задачею про побудову функції з даним коливанням, яка детально вивчена першим із співавторів (див. [1, 2] і вказану там літературу).

Нагадаємо, що многозначне відображення $F : X \to Y$ називається *неперервним зверху*, якщо для довільної точки x з X і для кожної відкритої в Y множини V такої, що $F(x) \subseteq V$, існує окіл U точки x в X, для якого $F(U) \subseteq V$.

Твердження 1. *Нехай X – топологічний простір, Y – компактний топологічний простір, G відкрита непорожня підмножина простору X, $F = \overline{G} \setminus G$ і $f : G \to Y$. Тоді $\mathrm{Gr}\, \Omega_f = \overline{\mathrm{Gr}\, f} \cap (F \times Y)$. А тому, відображення Ω_f є неперервним зверху.*

Відкриту множину $G \subseteq X$ ми називатимемо *гранично локально зв'язною* в X якщо для довільної точки $x \in F$ і для довільного околу U точки x існує окіл V точки x такий, що $V \subseteq U$ і перетин $V \cap G$ зв'язний.

Твердження 2. *Нехай X – топологічний простір, Y – компактний топологічний простір, G – гранично локально зв'язна підмножина простору X, $F = \overline{G} \setminus G$ і f – неперервна функція з F в Y. Тоді для кожного $x \in X$ множина $\Omega_f(x)$ зв'язна.*

Теорема. *Нехай X метризовний топологічний простір, G – гранично локально зв'язна в X, $F = \overline{G} \setminus G$ і $\Phi : F \to \overline{\mathbb{R}}$ многозначне відображення. Тоді такі умови рівносильні:*
(i) існує неперервна функція $f : G \to \mathbb{R}$ така, що $\Omega_f = \Phi$;
(ii) Φ неперервне зверху і $\Phi(x)$ є континуумом для кожного $x \in F$;
(iii) існують напівнеперервна зверху функція $g : F \to \overline{\mathbb{R}}$ і напівнеперервна знизу функція $h : F \to \overline{\mathbb{R}}$ такі, що $\Phi(x) = [g(x); h(x)]$ для кожного $x \in F$.

[1] *Maslyuchenko O.V.* The oscillation of quasi-continuous functions on pairwise attainable spaces / Maslyuchenko O.V. // Houston J. Math.– 2009. – **35**, N1. – P. 113–130.

[2] *Маслюченко О.В.* Побудова ω-первісних та різні аналоги компактних операторів: Дис...докт. фіз.-мат. наук: 01.01.01. – Чернівці, 2012. – 300 с.

АПРОКСИМАЦІЯ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ НА СЕПАРАБЕЛЬНИХ НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ

Митрофанов Михайло Аркадійович

Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

mishmit@rambler.ru

Равський Олександр Віталійович

Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

Нами показано, що на сепарабельних дійсних нормованих просторах, що допускать розділяючий поліном, неперервні відображення рівномірно апроксимуються аналітичними. Нами отримані узагальнення результатів з апроксимації неперервних функцій на банахових просторах та просторах Фреше: Я. Курцвейля (1954 р.) [2], М. Боісо та П. Гаєка (2001 р.) [1] і М. Митрофанова та О. Равського (2011 р.) [3].

[1] *M. C. Boiso and P. Hájek* Analytic Approximations of Uniformly Continuous Functions in Real Banach Spaces // *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **256** (2001), P. 80–98.

[2] *J. Kurzweil* On approximation in real Banach spaces, // *Studia Math.* (1954), **14** P. 214–231.

[3] *М.А. Митрофанов та О.В. Равський* Апроксимація неперервних функцій на просторах Фреше // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* (2011), – Т. 54, №3. – С. 33–40.

ОПИС ДІАГОНАЛЕЙ НАРІЗНО ТОЧКОВО ЛІПШИЦЕВИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Михайлюк Володимир Васильович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
vmykhaylyuk@ukr.net

Собчук Олександр Васильович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
ss220367@ukr.net

Для відображення $f : X^2 \to Y$ функція $g : X \to Y$, $g(x) = f(x,x)$, називатимемо *діагоналлю відображення* f.

Дослідження діагоналей нарізно неперервних функцій $f : X^2 \to \mathbb{R}$ беруть свій початок з класичної праці Р. Бера [1], який показав, що діагоналі нарізно неперервних функцій двох дійсних змінних є, в точності, функціями першого класу Бера, тобто поточковими границями неперервних функцій.

Разом з тим, природно виникають аналогічні задачі про діагоналі відображень двох чи більшої кількості змінних, які відносно кожної змінної володіють властивостями, що є підсиленнями неперервності (ліпшицевістю, диференційовністю, тощо). Крім того, поряд із задачею про опис діагоналей таких функцій постає питання про те, наскільки такі діагоналі можуть відрізнятись від неперервних функцій. Зокрема, має місце таке питання.

Питання *Нехай $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ неперервна функція. Чи обов'язково існує нарізно ліпшицева (нарізно диференційовна) функція $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ з діагоналлю g?*

Нехай X і Z – метричні простори і $A \subseteq X$. Відображення $f : X \to Z$ називається *ліпшицевим на множині* A, якщо існує $C \geq 0$ таке, що $|f(x) - f(y)|_Z \leq C|x - y|_X$ для довільних $x, y \in A$. Відображення $f : X \to Z$, ліпшицеве на множині X, називається *ліпшицевим*. Відображення $f : X \to Z$

називається *локально ліпшицевим*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує окіл U точки x в X такий, що f ліпшицеве на U.

Відображення $f : X \to Z$ називається *ліпшицевим (або точково ліпшицевим) в точці* $x_0 \in X$, якщо існує окіл U точки x_0 в X і $C \geq 0$ такі, що $|f(x) - f(x_0)|_Z \leq C|x - x_0|_X$ для кожного $x \in U$. Відображення $f : X \to Z$, ліпшицеве в кожній точці $x \in X$, називається *точково ліпшицевим*.

Відображення $f : X \to Z$ називатимемо *σ-(локально, точково) ліпшицевим*, якщо існує зростаюча послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ замкнених множин $A_n \subseteq X$ така, що $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ і всі звуження $f|_{A_n}$ (локально, точково) ліпшицеві.

Теорема 1. *Нехай X – метричний простір, Z – нормований простір і $g : X \to Z$. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) існує нарізно точково ліпшицеве відображення $f : X^2 \to Z$ з діагоналлю g;

(ii) існує відображення $f : X^2 \to Z$ з діагоналлю g, яке в кожній точці діагоналі $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ точково ліпшицеве відносно змінних x і y;

(iii) g є σ-ліпшицевим;

(iv) g є σ-локально ліпшицевим;

(v) g є σ-точково ліпшицевим;

(vi) існує послідовність $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ точково ліпшицевих відображень $g_n : X \to Z$, яка стабільно поточково збігається до g.

[1] Baire R.*Sur les fonctions de variables reélles* // Ann. Mat. Pura Appl., **3**, (1899), № 3, 1-123.

ОПЕРАТОР ЗСУВУ НА ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Можировська Зоряна Гориславівна

Львівська комерційна академія

nzoriana@yandex.com

В доповіді розглянуто гільбертові простори аналітичних функцій від нескінченної кількості змінних $\mathcal{H}_\eta$, які в певному сенсі, узагальнюють простори введені в роботі [1] та оператор зсуву на цьому просторі вигляду $T_a : \mathcal{H}_\eta \to \mathcal{H}_\eta$, $f \longrightarrow f(x + a)$. Зокрема, встновлено умови при яких оператор диференціювання та зсуву буде неперервним на $\mathcal{H}_\eta$.

Скажемо, що оператор T на просторі Фреше E є гіперциклічним, якщо існує деякий вектор $x \in E$ з щільною орбітою $\overline{\mathrm{Orb}(T, x)} := \overline{\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}} = E$. Доведено гіперциклічність оператора зсуву на просторі $\mathcal{H}_\eta$.

[1] *Chan K.C., Shapiro J.H.* The cyclic behavior of translation operators on Hilbert spaces of entire functions // Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 1421–1449.

ПРО АНАЛОГИ ПЕРЕХІДНОСТІ ТА ДЕКОМПОЗИЦІЮ НЕПЕРЕРВНОСТІ

Нестеренко Василь Володимирович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

math.analysis.chnu@gmail.com

Питання, пов'язані з декомпозицією неперервності, досліджувались в працях багатьох математиків. Так Б.Сміт в [1] встановив, що функція $f:\ [0,1] \to \mathbb{R}$ буде неперервною тоді і тільки тоді, коли вона S-неперервна, майже неперервна і не є типу Чезаро. Пізніше, Дж.Смітал і Е.Станова [2], перенесли цей результат на випадок функцій $f: X \to \mathbb{R}$, де X – берівський локально зв'язний T_3-простір. Нарешті, в 1997 році Р.Ґібсон в [3] замінив умову S-неперервності на властивість Дарбу.

Р.Мімна в [4], використовуючи поняття "O-зв'язності" і "локальної w^*-неперервності", встановив наступну декомпозиційну теорему: якщо X – локально зв'язний простір, Y – топологічний простір, то відображення $f: X \to \mathbb{R}$ неперервне тоді і тільки тоді, коли воно O-зв'язне і локально w^*-неперервне. Результат Мімни було покращено в [5], де локальну w^*-неперервність замінено на перехідність.

Увівши поняття квазі w^*-неперервності, М.Матейдесем в [6] був отриманий, ще один результат на цю тему: якщо X – π-зв'язний простір, Y – топологічний простір, $f: X \to Y$ – O-зв'язне, майже неперервне і квазі w^*-неперервне відображення, то f квазінеперервне. Зауважимо, що якщо до того ж простір Y регулярний, то відображення f неперервне.

В усіх згаданих результатах фігурують властивості відображень (перехідність, локально w^*-неперервність, квазі w^*-неперервність і т.д.), які при умові гаусдорфовості та локальної компактності простору значень є послабленнями умови замкненості графіка. Такі властивості відображень ми будемо називати аналогами перехідності.

Множина A називається квазі-відкритою, якщо $A \subseteq \overline{intA}$. Через $fr(V)$ позначимо межу множини V. Відображення $f: X \to Y$ називається

- *w^*-неперервним*, якщо множина $f^{-1}(fr(V))$ є замкненою в X для кожної відкритої множини V в Y;
- *локально w^*-неперервним*, якщо існує база $\mathcal{B}$ відкритих множин простору Y, така, що множина $f^{-1}(fr(B))$ є замкненою в X для кожного $B \in \mathcal{B}$;

- *квазі w^*-неперервним у точці $x \in X$*, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y існують відкритий окіл W точки $f(x)$ в Y і квазі-відкрита множина U в X, такі, що $W \subseteq V$, $x \in U$ і $U \cap f^{-1}(frW) = \varnothing$;
- *перехідним у точці $x \in X$*, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y існують окіл U точки x в X і відкритий окіл W точки $f(x)$ в Y, такі, що $W \subseteq V$ і $U \cap f^{-1}(fr(W)) = \varnothing$;
- *квазіперехідним у точці $x \in X$*, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y, для кожного околу U точки x в X існують відкритий окіл W точки $f(x)$ в Y і відкрита непорожня множина G в X, такі, що $W \subseteq V$, $G \subseteq U$ і $G \cap f^{-1}(fr(W)) = \varnothing$;
- *слабко квазіперехідним у точці x* з X, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ у просторі Y і кожного околу U точки x в X існують непорожня відкрита множина G в X і точка $b \in V$, такі, що $G \subseteq U$ і $G \cap f^{-1}(b) = \varnothing$.

Відображення називається *квазі w^*-неперервним, перехідним, квазіпере-хідним, слабко квазіперехідним*, якщо воно є таким в кожній точці.

Для довільних топологічних просторів X і Y мають місце наступні строгі імплікації:

$$w^*\text{-неперервність} \Rightarrow \text{локальна } w^*\text{-неперервність} \Rightarrow \text{перехідність} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{квазі } w^*\text{-неперервність} \Rightarrow \text{квазіперехідність.}$$

Зауважимо, що слабка квазіперехідність відображення $f : X \to Y$ рівносильна тому, що відображення f не є типу Чезаро, а у випадку, коли $Y = \mathbb{R}$ слабка квазіперехідність і квазіперехідність є еквівалентними властивостями.

Відображення $f : X \to Y$ *має слабку властивість Дарбу*, якщо образ $f(G)$ кожної області G в X, тобто відкритої і зв'язної множини, є зв'язною множиною в Y. Це поняття фігурує у статті [4] під назвою O-зв'язність. Відображення f називається *майже неперервним (в розумінні Гусейна) в точці $x \in X$*, якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує множина A в X, така, що $x \in int\overline{A}$ і $f(A) \subseteq V$, і просто *майже неперервним*, якщо воно є таким в кожній точці.

Теорема 1. *Нехай X – локально зв'язний простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності і квазіперехідне відображення $f : X \to Y$ має слабку властивість Дарбу. Тоді множина $D(f)$ точок розриву відображення f є множиною першої категорії в просторі X.*

Теорема 2. *Нехай X – берівський локально зв'язний простір, Y – метризовний сепарабельний простір, $f : X \to Y$ – квазіперехідне і майже неперервне відображення, яке має слабку властивість Дарбу. Тоді відображення f неперервне.*

[1] *Smith B. D.* An alternate characterization of continuity // Proc. Am. Math. Soc. – 1973. – **39**. – P. 318 - 320.

[2] *Smital J., Stanova E.* On almost continuous functions // Acta Math. Univ. Comen. – 1980. – **37**. – P. 147 - 155.

[3] *Gibson R.G.* Concerning a characterization of continuity // Real Anal. Exch. – 1996. – **22**, No.1. – P. 437 - 442.

[4] *Mimna R.* A note on separate continuity and connectivity properties // Math. Bohemica – 1997. – **33**. – P. 57 - 61.

[5] *Маслюченко В.К., Нестеренко В.В.* Декомпозиція неперервності та перехідні відображення // Математичний вісник НТШ. – 2011 р. – Т.8. – С. 132 - 150.

[6] *Matejdes M.* Continuity points of functions on product spaces // Real Anal. Exch. – 1997. – **23**, No.1. – P. 275 - 280.

ОПИС МАКСИМАЛЬНО ДИСИПАТИВНИХ РОЗШИРЕНЬ СИМЕТРИЧНИХ ВІДНОШЕНЬ

Оліяр Юрій Ігорович

Львівський національний університет імені Івана Франка

aruy14@ukr.net

Сторож Олег Георгійович

Львівський національний університет імені Івана Франка

storozh@ukr.net

Нижче використовуємо такі позначення: $D(T), R(T), \ker T$- відповідно область визначення , область значень та многовид нулів оператора Т;

$B(X,Y)$ - множина лінійних неперервних операторів $T : X \to Y$ таких, що $D(T) = X$;

$(\cdot \mid \cdot)_X$- символ скалярного добутку у гільбертовому просторі X;

$\dim E$ - розмірність лінійного многовиду X; $\oplus, \ominus$ символи ортогональної суми та ортогонального доповнення відповідно;

Якщо $A_i : X \to Y_i$ - лінійні оператори $X \to Y_i \quad (i = 1, 2)$, то запис $A = A_1 \oplus A_2$ означає , що для будь-якого $x \in X$ $Ax = (A_1x, A_2x)$.

Нехай L_0 -замкнене лінійне симетричне відношення у гільбертовому просторі H. Нагадаємо, що (замкненим) лінійним відношенням у H називається (замкнений) лінійний підпростір простору $H^2 = H \oplus H$ і ,що для кожного лінійного відношення $T \subset H^2$ існує спряжене відношення $T^* \subset H^2$, яке визначається так:

$$T^* = \hat{J}[H^2 \ominus T](= H^2 \ominus \hat{J}T),$$

де

$$\forall y=(y_1,y_2)\in T \quad \hat{J}y=(-iy_2, iy_1).$$

Відношення T називається симетричним (самоспряженим), якщо $T\subset T^*$ (відповідно $T=T^*$). Воно називається дисипативним (акумулятивним), якщо

$$\forall y=(y_1,y_2)\in T \quad \Im(y_2 \mid y_1)_H \geq 0 (\leq 0)$$

і максимально дисипативним (максимально акумулятивним), якщо крім цього, воно не має нетривіальних дисипативних (акумулятивних) розширень в H^2

Перш ніж переходити до викладу основних результатів, зазначимо, що ми використовуємо такі специфічні позначення:

$$L=L_0^*,\ H_L^{\pm}=\{y\in H:(y,\pm y)\in L\},\ m^{\pm}=\dim H_L^{\pm}.$$

Означення 1. Нехай G^+G^- - гільбертові простори, $\delta_{\pm}\in B(L,G^{\pm})$, $G\overset{def}{=}G^+\oplus G^-$,$\delta=\delta_+\oplus\delta_-$.

Набір $(G^+,G^-,\delta_+\delta-)$ називається граничною четвіркою для L_0 якщо

1. $\dim G^{\pm}=m^{\pm}$;
2. $\ker\delta=L_0$;
3. $R(\delta)=G$;
4. $(\forall y\in L)(\forall z\in L)\left(i\hat{J}y \mid z\right)_{H^2}=i[(\delta_+y \mid \delta_+z)_{G^+}-(\delta_-y \mid \delta_-z)_{G^-}]$.

Теорема 1. Нехай G - гільбертів простір такий,що $\dim G=\dim(L\ominus L_0)$.Тоді існують ортогональний розклад $G=G^+\oplus G^-$ та оператори $\delta_{\pm}\in B(L,G^{\pm})$ такі , що $(G^+,G^-,\delta_+,\delta_-)$ - гранична четвірка для L_0.

Теорема 2. Нехай $(G^+,G^-,\delta_+,\delta_-)$ - гранична четвірка для L_0,$G=G^+\oplus G^-$,$A_1^{\pm}\in B(G^{\pm},G^-)$ (відповідно $A_1^{\pm}\in B(G^{\pm},G^+)$),

$$L_1=y\in L: A_1^+\delta_+y+A_1^-\delta_-y=0. \tag{1}$$

Такі твердження еквівалентні:

1. L_1 - максимально дисипативне (максимально акумулятивне) відношення;
2. $A_1^{\pm}(A_1^{\pm})^*\leq A_1^-(A_1^-)^*, \ker A_1^-=\{0\}$ $(A_1^{\pm}(A_1^{\pm})^*\geq A_1^-(A_1^-)^*, \ker A_1^+=\{0\})$
3. існує стиск $K\in B(G^+,G^-)$ такий,що $L_1=\{y\in L:\delta_-y=K\delta_+y\}$

   відповідно існує стиск $K\in B(G^-,G^+)$ такий,що $L_1=\{y\in L:\delta_+y=K\delta_-y\}$

Наслідок. В умовах теореми 2 $L_1 = L_1^*$ тоді і тільки тоді, коли $A_1^{\pm}(A_1^{\pm})^* = A_1^-(A_1^-)^*, \ker A_1^{\pm} = \{0\}$

У цьому випадку оператор K, який фігурує в згаданій теоремі, є унітарним.

Зауваження. Відомо [1], що будь-яке дисипативне (акумулятивне) розширення L_1 симетричного відношення L_0 є звуженням відношення L_0^*,а отже може бути поданим у вигляді (1).

[1] Кочубей А. Н. О расширениях неплотно заданного симметрического оператора // Сиб. мат. журн. -1977. 18, N 2.-С.314-320.

КРОСКОРЕЛЯЦІЯ ГІПЕРФУНКЦІЇ ТА ДІЙСНОЇ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Патра М.І.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

patra-m@mail.ru

Шарин С.В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

sharynsir@yahoo.com

Для будь-якої гіперфункції $f = [F] \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+)$ з компактним носієм на півосі $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ і для будь-якої дійсної аналітичної функції $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$ означимо операцію кроскореляції наступним чином:

$$(f \star \varphi)(t) := -\oint_{\Gamma} F(z)\boldsymbol{\varphi}(z+t)dz, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

де Γ — замкнутий контур, що обходить носій f один раз в додатньому напрямку в перетині області визначення функції F та області визначення функції $\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot + t)$, де $\boldsymbol{\varphi}$ — аналітичне продовження φ.

Властивості кроскореляції:

1) згідно з означенням (див. [1], [2]) канонічного білінійного функціоналу можемо записати $(f \star \varphi)(0) = -\oint_{\Gamma} F(z)\boldsymbol{\varphi}(z)dz = \langle f, \varphi \rangle$;

2) диференціювання кроскореляції $(f \star \varphi)^{(n)}(t) = (f \star \varphi^{(n)})(t)$;

3) для будь-якої гіперфункції $f = [F] \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+)$ і для будь-якої дійсної аналітичної функції $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$ маємо $(f \star \varphi) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$;

4) для будь-яких гіперфункцій $f = [F] \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+)$, $g = [G] \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+)$ і будь-якої дійсної аналітичної функції $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$ справджується рівність $f \star (g \star \varphi) = (f * g) \star \varphi$, де $f * g$ — згортка гіперфункцій.

Приклади.

1. $(\delta \star \varphi)(t) = -\oint\limits_{\Gamma} \left(-\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z}\right) \varphi(z+t)dz = \varphi(t).$

2. $(\delta^{(n)} \star \varphi)(t) = -\oint\limits_{\Gamma} \left(-\frac{(-1)^n n!}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z^{n+1}}\right) \varphi(z+t)dz = (-1)^n \varphi^{(n)}(t).$

[1] *Sato M.* Theory of hyperfunctions, I, II. // J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, **8** (1959), 139–193, 387–437.

[2] *Komatsu H.* An Introduction to the Theory of Generalised Functions. // Department of Mathematics Science University of Tokyo, 2000, 185 p.

ПРО РЕГУЛЯРНЕ ЗРОСТАННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЙМОВІРНОСНИХ ЗАКОНІВ

Плацидем Марта Іванівна

Львівський національний університет імені Івана Франка

marta0691@rambler.ru

Шеремета Мирослав Миколайович

Львівський національний університет імені Івана Франка

Нехай φ - аналітична в $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}, R > 0$, характеристична функція ймовірносного закону F, $M(r, \varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}, r \in [0, R)$, а $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x), x \geq 0$.

Через $\Omega(0, R)$, позначимо клас додатних необмежених на $[r_0, R)$ для деякого $r_0 \in (0\ , R)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $[r_0, R)$,і нехай ϕ - функція, обернена до Φ', а $\Psi(r) = r - \dfrac{\Phi(r)}{\Phi'(r)}$ - функція, асоційована з Φ за Ньютоном.

Досліджено умови на функції W_F і Φ, за яких

$$\ln M(r, \varphi) = (1 + o(1))\Phi(r), r \uparrow R.$$

ДЕЯКІ АПРОКСИМАТИВНІ ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛІВ ВЕЙЄРШТРАССА

Приймас Іванна Петрівна

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

ivanka_clever@ukr.net

Величину

$$W_\delta(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{\delta}} \cos kt\Big\}dt, \quad \delta > 0,$$

прийнято називати інтегралом Вейєрштрасса функції f (див., наприклад, [1], [2]).

Нехай $\omega(t)$ — довільний фіксований модуль неперервності. Кажуть, що функція $f(x) \in C$ належить до класу H_ω, якщо $\omega(f,t) \le \omega(t)$, або ж які б не були точки $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, справедлива нерівність $|f(t_1) - f(t_2)| \le \omega\left(|t_1 - t_2|\right).$

Тоді через $W^r H_\omega$ позначають клас функцій 2π–періодичних функцій, які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$–го порядку включно, і у яких $f^{(r)} \in H_\omega$.

Задачу про відшукання асимптотичних рівностей для величини

$$\mathcal{E}\left(\mathfrak{N}; W_\delta\right)_C = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \left\| f\left(x\right) - W_\delta\left(f;x\right)\right\|_C,$$

де $\mathfrak{N} \subseteq C$ — заданий клас функцій, $W_\delta(f;x)$ — інтеграли Вейєрштрасса, називають задачею Колмогорова–Нікольського (див., наприклад, [3]).

Якщо в явному вигляді знайдена функція $\varphi(\delta) = \varphi(\mathfrak{N}; W_\delta; \delta)$, така, що при $\delta \to \infty$ $\mathcal{E}(\mathfrak{N}; W_\delta)_C = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta))$, то кажуть, що розв'язана задача Колмогорова-Нікольського для інтеграла Вейєрштрасса $W_\delta(f;x)$ на класі $\mathfrak{N}$ в метриці простору C.

Нами розв'язано задачу Колмогорова–Нікольського для інтегралів Вейєрштрасса на класах H_ω і $W^r H_\omega$, $r = 1, 2...$ в рівномірній метриці.

[1] *Yu. I. Kharkevych, I. V. Kal'chuk.* Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. Journal. — 2007. — **59**, №8. — P. 1224–1237.

[2] *Приймас И.П., Степанюк Т.А., Харкевич Ю.И.* Аппроксимативные свойства интегралов Вейерштрасса на классах H_ω // Вестник Брестского университета им. А.С. Пушкина. Серия 4: физика и математика — № 2.— 2012.— С. 104–110.

[3] *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. — Киев: Наук. думка, 1981. — 339 с.

ТОПОЛОГО-МЕТРИЧНІ ТА ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ МНОЖИН НЕПОВНИХ СУМ ЗНАКОДОДАТНИХ РЯДІВ ОДНОГО КЛАСУ

Савченко Ігор Олександрович

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

igorsav4enko@rambler.ru

Нехай λ – дійсне число, $\lambda \in (0,1)$. Розглядається збіжний знакододатний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\lambda^n, \tag{1}$$

де $f(n)$ – функція, для якої виконується умова:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1.$$

Множина

$$A_f = \{x : x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(n)\lambda^n, x_n \in \{0,1\}\},$$

називається *множиною неповних сум ряду* (1).

Теорема 1. *Множина A_f неповних сум ряду* (1) *є*

1) ніде не щільною нульової міри Лебега при $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$, розмірність Хаусдорфа-Безиковича якої обчислюється за формулою

$$\alpha_0(A_f) = -\log_\lambda 2;$$

2) об'єднанням відрізків при $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1)$.

[1] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296с.

[2] *Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Один клас випадкових величин типу Джессена-Вінтнера // Доп. НАН України. — 1998. — №4. — С. 48-54.

[3] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208с.

ПРО h-МІРУ ВИНЯТКОВИХ МНОЖИН В ТЕОРЕМАХ ТИПУ ЕРДЕША-МАКІНТАЙРА-ФЕНТОНА

Сало Тетяна Михайлівна

Національний університет "Львівська політехніка"

salo_t@mail.ru

Скасків Олег Богданович

Львівський національний університет ім.І.Франка

tftj@franko.lviv.ua

Нехай $H(\Lambda)$ – клас абсолютно збіжних в $\mathbb{C}$ рядів Діріхле вигляду $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, де $\Lambda = (\lambda_n)$ – деяка фіксована послідовність така, що $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 < n \uparrow +\infty)$. Для $F \in H(\Lambda)$ і $\sigma \in \mathbb{R}$ позначимо $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n > 0\}$, $\quad m(\sigma, F) = \inf\{|F(\sigma + iy)| : y \in \mathbb{R}\}$, $\quad M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + iy)| : y \in \mathbb{R}\}$. Для диференційовної на $[0; +\infty)$ функції h і вимірної за Лебегом множини $E \subset [0; +\infty)$ назвемо h – мірою величину $m_h E = \int\limits_E dh(x)$.

Відомо [1], що умова $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} < +\infty$ в $H(\Lambda)$ є необхідною і достатньою для того, щоб $M(\sigma, F) = (1+o(1))\mu(\sigma, F)$, $M(\sigma, F) = (1+o(1))m(\sigma, F)$ при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини E скінченної міри Лебега.

Для додатної неперервної зростаючої до $+\infty$ на $[0; +\infty)$ функції φ позначимо $H^0_\varphi(\Lambda) = \bigcap\limits_{0<\delta<1} H_{\delta\varphi}(\Lambda)$, де

$$H_\varphi(\Lambda) = \{F \in H(\Lambda) : \ (\exists K = K_F > 0) \ (\forall n \geq n_0) : |a_n| \leq exp(-\lambda_n \varphi(K\lambda_n))\}.$$

Теорема. Нехай h,φ – додатні неперервні зростаючі до $+\infty$ на $[0; +\infty)$ функції, $h'(x)$ незростаюча, а послідовність Λ така, що

$$(\exists q > 1): \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h'(q\varphi(\lambda_n))}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = +\infty, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = O(\varphi(\lambda_{n+1})) \quad (n \to +\infty).$$

Тоді існують функція $F \in H^0_\varphi(\Lambda)$, множина $E \subset [0, +\infty)$, стала $\beta > 0$ такі, що

$$M(\sigma, F) > (1 + \beta)\mu(\sigma, F), \qquad M(\sigma, F) > (1 + \beta)m(\sigma, F)$$

для всіх $\sigma \in E$ і $m_h E = +\infty$.

[1] *Скасків О.Б.* Максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле // Доп. АН УРСР, сер. А. - 1984. - N 11. - С.22-24.

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ДЕЯКИХ ДОДАТНИХ РЯДІВ І ІНТЕГРАЛІВ

Скасків О. Б.

Львівський національний університет ім. І.Франка

matstud@franko.lviv.ua; skask@km.ru

Нехай ν – зліченно-адитивна міра на $\mathbb{R}_+$, f – додатна зростаюча на $[0;+\infty)$ функція така, що $f(0)=1$, а функція $\ln f(x)$ – опукла на $[0;+\infty)$.

Через $I(\nu,f)$ позначимо клас функцій F, представлених для всіх $x\geq 0$ інтегралом $F(x)=\int_0^{+\infty}g(t)f(xt)\nu(dt)$, де g – додатна на $[0;+\infty)$ функція. Нехай для $r\geq 0$

$$\sigma(r,F)=\sup\left\{\frac{1}{S(r,x)}-\frac{1}{F(x)}\,:\ x\in\mathbb{R}_+\right\},\ S(r,x)=\int_0^r g(t)f(tx)\nu(dt).$$

Теорема. *Нехай h – додатна неспадна на $[0;+\infty)$ функція. Якщо $F\in I(\nu,f)$, то*

$$\int_0^{+\infty}\frac{dh(\ln\nu_0(t))}{t}<+\infty\implies\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{1}{h(\ln\nu_0(\ln f(r)))}\ln\frac{1}{\sigma(r,F)}=+\infty,$$

де $\nu_0(t)=\nu\{x\geq 0:\ \ln f(x)\leq t\}$.

У випадку $h(x)=O(x)$ $(x\to+\infty)$ твердження теореми у певному сенсі непокращуване.

Наслідок 1. *Якщо функція $F\colon\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ має вигляд*

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nf(x\lambda_n)\ (x\geq 0),$$

де $a_n\geq 0,\ 0\leq\lambda_n<\lambda_{n+1}$ $(n\geq 0)$, функція f така, як у теоремі, а h – додатна і неспадна на $[0;+\infty)$ функція, то

$$\int^{+\infty}\frac{dh(\ln n_f(u))}{t}<+\infty\implies\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{1}{h(\ln n)}\ln\frac{1}{\sigma_n(F)}=+\infty,$$

де $n_f(t)=\sum_{\ln f(\lambda_n)\leq t}1$, $\sigma_n(F)=\sup\{1/S_n(x)-1/F(x)\colon x\in\mathbb{R}\}$, $S_n(x)=\sum_{k=0}^n a_kf(x\lambda_k)$.

Наслідок 2. *Якщо F така, як у наслідку 1,то*

$$\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ln f(\lambda_n)} < +\infty \Longrightarrow \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} \ln \frac{1}{\sigma_n(F)} = +\infty.$$

Вибираючи $f(x) = e^x$, з наслідків 1 і 2 негайно отримуємо твердження для додатних рядів Діріхле, а з теореми — для додатних інтегралів типу Лапласа-Стілт'єса. Відкритим залишається **питання:** *про можливість встановлення подібних тверджень для додатних цілих кратних рядів Діріхле та кратних інтегралів типу Лапласа-Стілт'єса.*

ОЦІНКИ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО ВИЗНАЧНИКА ЗАДАЧІ З ДВОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Симотюк Михайло Михайлович

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України

quaternion@ukr.net

Тимків Іван Романович

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

tymkiv_if@ukr.net

Розглянемо задачу

$$\prod_{q=1}^{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{p} a_j^q L_j^b + A_q(L_1, \ldots, L_p) \right) u(t,x) = 0,\ t \in (0,T), x \in (0,\pi)^p, \quad (1)$$

$$u(t_1, x) = \varphi_1(x),\ u(t_2, x) = \varphi_2(x),\ 0 \le t_1 < t_2 \le T,\ x \in (0,\pi)^p, \qquad (2)$$

$$L_j^m u(t,x)\Big|_{x_j=0} = L_j^m u(t,x)\Big|_{x_j=\pi} = 0,\ m \in \{0,1,\ldots,b-1\},\ j \in \{1,\ldots,p\}, \quad (3)$$

де $a_j^q > 0$, $j \in \{1,\ldots,p\}$, $q \in \{1,2\}$, $A_q(L_1,\ldots,L_p) = \sum\limits_{|s|<b} A_s^q L_1^{s_1} \ldots L_p^{s_p}, A_s^q \in \mathbb{C}, q \in \{1,2\}, b \in \mathbb{N}$, $L_j := -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(p_j(x_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + q_j(x_j)$, $p_j \in C^{2b-1}[0,\pi]$, $q_j \in C^{2b-2}[0,\pi]$, $p_j(x_j) \ge p_{0,j} > 0$, $q_j(x_j) \ge 0$, $j \in \{1,\ldots,p\}$. Позначимо: $\lambda_{k_j}, k_j \in \mathbb{N}$, — власні значення задачі $L_j X = \lambda X, X(0) = X(\pi) = 0$, $j \in \{1,\ldots,p\}$; $\mu_q(k) = -\sum_{j=1}^{p} a_j^q \lambda_{k_j}^b - A_q(\lambda_{k_1},\ldots,\lambda_{k_p})$, $q \in \{1,2\}$, $k = (k_1,\ldots,k_p) \in \mathbb{N}^p$, $\Delta(k) = e^{\mu_1(k)t_2 + \mu_2(k)t_1}\left[e^{(\mu_2(k)-\mu_1(k))(t_2-t_1)} - 1\right]$, якщо $\mu_1(k) \ne \mu_2(k)$, $\Delta(k) = (t_2-t_1)e^{\mu_1(k)(t_1+t_2)}$, якщо $\mu_1(k) = \mu_2(k)$; $s_{j,q}$, $j \in \{1,\ldots,p\}$, $q \in \{1,\ldots,b-1\}$,

— мультиіндекс довжини p, на j-ому місці якого знаходиться q, а на решті місць — нулі, $y_j^q = \mathrm{Im}(A^1_{s_{j,q}} - A^2_{s_{j,q}})$, $q \in \{1,\ldots,b-1\}$, $j \in \{1,\ldots,p\}$, $\vec{y}^q = (y_1^q,\ldots,y_p^q)$, $q \in \{1,\ldots,b-1\}$; $G = [c_1,d_1] \times \ldots \times [c_p,d_p]$, $c_j,d_j \in \mathbb{R}$, $c_j < d_j$, $j \in \{1,\ldots,p\}$; $\xi_j > \max\{a_j^1; a_j^2\}$, $j \in \{1,\ldots,p\}$.

Теорема. *Нехай $\rho \in (p-1;p]$. Для кожного $q \in \{1,\ldots,b-1\}$ для майже всіх (стосовно ρ-міри Гаусдорфа) векторів $\vec{y}^q \in G$ нерівність*

$$|\Delta(k)| > (\lambda_{k_1}^b + \ldots + \lambda_{k_p}^b)^{-\omega} \exp(-(\xi_1\lambda_{k_1}^b + \ldots + \xi_p\lambda_{k_p}^b)(t_1+t_2))$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{N}^p$ при $\omega > (p+2b-2)/((2b)(\rho-(p-1))) - q/(2b)$.

Отримані результати доповнюють дослідження, проведені в [1].

[1] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

ОЦІНКА МАЛОГО ЗНАМЕННИКА ЗАДАЧІ З НЕЛОКАЛЬНОЮ КРАЙОВОЮ УМОВОЮ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Симотюк М.М.

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України

quaternion@ukr.net

Савка І.Я.

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника

s-i@ukr.net

У роботах [1, 2] для рівняння мішаного типу досліджено крайову задачу спряження з нелокальною крайовою умовою, яка пов'язує значення шуканого розв'язку на протилежних сторонах прямокутної області. Для розв'язку цієї задачі побудовано формальне зображення у вигляді ряду Фур'є, збіжність якого в просторі гладких функцій зводиться до питання про можливість виконання оцінки

$$|\cos(\pi k\alpha) + \pi k \sin(\pi k\alpha) - \exp(-\pi^2 k^2 \beta)| \geq ck^{-\gamma} > 0, \quad c > 0, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

для натуральних чисел k, де $\alpha, \beta > 0$ — параметри прямокутної області, c, γ — сталі, що не залежать від k.

У працях [1, 2] показано, що у випадку, коли α — раціональне число, існує така стала $c > 0$, що оцінка (1) виконується для довільного $\beta > 0$ для достатньо великих $k \in \mathbb{N}$ при $\gamma = 0$. У випадку, коли α — ірраціональне число, питання про виконання нерівності (1) є відкритим (див. с. 111 у [1]).

За допомогою метричного підходу [3] отримано такий результат.

Теорема 1. *Для всіх ірраціональних (за винятком множини лебегової міри нуль) чисел $\alpha > 0$ існує така стала $c = c(\alpha) > 0$, що оцінка* (1) *виконується для всіх натуральних чисел k при $\gamma > 1$.*

[1] *Юнусова Г.Р.* Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2011. – **8** (89). – С. 108–117.

[2] *Sabitov K.B.* Nonlocal problem for a parabolic equation in a rectangular domain // Math. Notes. – 2011. – **89**, No. 4. – pp. 562–567.

[3] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

ОЦІНКИ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО ВИЗНАЧНИКА БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СТРОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Симотюк Михайло Михайлович

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України

quaternion@ukr.net

Хомяк Дмитро Володимирович

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України

khomiak.dmytro@gmail.com

Розглядаємо задачу

$$\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{|s|=n-s_0} a_{(s_0,s)} \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} =$$

$$= F(t,x) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|s|\le M} b_{j,s} \frac{\partial^{|s|} u(\tau_j, x)}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}}, \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega^p, \qquad (1)$$

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, n, \quad 0 \le t_1 < \ldots < t_n \le T, \quad x \in \Omega^p, \quad (2)$$

де $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$, $0 \leq \tau_1 < \ldots < \tau_m \leq T$, $\Omega^p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$. Припускаємо, що рівняння (1) є строго гіперболічним.

Позначимо: $\Delta(k) = \det \|\exp(\lambda_j(k)t_r)\|_{j,r=1}^n$, $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{\vec{0}\}$, де $\lambda_j(k)$, $j = 1, \ldots, n$, — корені рівняння $\lambda^n + \sum\limits_{s_0=0}^{n-1} \lambda^{s_0}(ik_1)^{s_1} \ldots (ik_1)^{s_p} = 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$, M_ω — множина тих векторів $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in [0, T]^n$, для яких нерівність

$$|\Delta(k)| \geq \prod_{n \geq j > q \geq 1} |\lambda_j(k) - \lambda_q(k)|(1 + \|k\|)^{-\omega}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Для встановлення умов розв'язності задачі (1), (2) у шкалі просторів Соболєва важливо дослідити, наскільки великою є множина M_ω.

На підставі метричного підходу [1] встановлено такий результат.

Теорема 1. *Для довільного $\rho \in (n-1, n]$ множина $[0, T]^n \backslash M_\omega$ має нульову ρ-міру Гаусдорфа, якщо $\omega > \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{p+1}{\rho_1 - n + 1} - 1\right)$.*

[1] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

ПРО ОДНУ РОЗРИВНУ НА ВСІЙ ЧИСЛОВІЙ ПРЯМІЙ ФУНКЦІЮ ТА ОБЕРНЕНУ ДО НЕЇ

Федак Іван Васильович

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

fedak_ivan@rambler.ru

Серед завдань для попередніх етапів XV Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.І. Ядренка була і наступна задача.

6.2. Про функцію $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ відомо, що вона є бієкцією множини всіх дійсних чисел на себе і є розривною у кожній точці числової прямої. Чи можна стверджувати, що й обернена до неї функція F^{-1} також є розривною у кожній точці числової прямої?

Доведемо, що так стверджувати не можна.

Нехай множина всіх дійсних чисел вигляду $x = \pm a_n a_{n-1} \ldots a_1 b_1 b_2 \ldots b_m$, де $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$, a_i, b_j — цифри, $b_m \neq 0$, $b_m \neq 5$. Покладемо

$$F(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \in \mathbb{R} \setminus X, \\ x - 1, & x \in X \setminus (0, 2), \\ g(x), & x \in X \cap (0, 2). \end{cases}$$

Визначимо функцію $g(x)$ на множині $X \cap (0,2)$ таким чином: $g(x) = \frac{1}{2}x$, якщо b_m — парна цифра. Якщо ж цифра $b_m = 1$ чи $b_m = 3$ то збільшимо її на 1, а якщо $b_m = 7$ чи $b_m = 9$, то зменшимо її на 1. Замінивши $x \in X \cap (0,2)$ на отриманий таким способом елемент x' покладемо $g(x) = \frac{1}{2}x' - 1$. Функція $y = F(x)$ є бієкцією множини всіх дійсних чисел на себе і розривна у кожній точці цієї множини. Але обернена до неї функція $y = F^{-1}(x)$ неперервна у точці $y = \frac{1}{3}$.

ПРИНЦИП РІВНОМІРНОЇ ОБМЕЖЕНОСТІ БАНАХА-ШТЕЙНГАУСА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Федак Олена Ігорівна

Львівський національний університет імені Івана Франка

aknelo@i.ua

В доповіді розглядається нелінійні аналоги теореми про рівномірну обмеженість Банаха-Штейнгауса та наслідки. Зокрема, буде обговорено зв'язок з теоремою Хартокса для аналітичних функцій на банахових просторах.

НАБЛИЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ З МАЛОЮ ГЛАДКІСТЮ, ВИЗНАЧЕНИХ НА ДІЙСНІЙ ОСІ, ОПЕРАТОРАМИ ВЕЙЄРШТРАССА

Харкевич Ю. І.

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк

Кальчук І. В.

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк

kalchuk_i@ukr.net

Нехай $\widehat{L}$ — простір локально сумовних функцій із скінченною нормою $\|f\|_{\widehat{L}} = \|f\|_{\widehat{1}} = \sup\limits_{a\in\mathbb{R}} \int\limits_{a}^{a+2\pi} |f(t)|\, dt$, $\widehat{L}_\infty$ — простір вимірних суттєво обмежених функцій, що задані на всій дійсній осі, із скінченною нормою $\|f\|_{\widehat{L}_\infty} = \|f\|_{\widehat{\infty}} = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$, а $\widehat{C}$ — простір неперервних, заданих на дійсній осі функцій із скінченною нормою $\|f\|_{\widehat{C}} = \max\limits_{t\in\mathbb{R}} |f\,(t)|$.

Нехай $f \in \widehat{L}$. Оператор W_δ, який діє на функцію $f(x)$ за правилом

$$W_\delta(f;x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t) \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \psi(v) e^{-\frac{v^2}{\delta}} \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv\, dt, \delta > 0,$$

будемо називати оператором Вейєрштрасса.

Через $\widehat{L}_\beta^\psi$ (див., наприклад, [1]) позначимо множину функцій $f \in \widehat{L}$, які майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ можна подати у вигляді

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\, \widehat{\psi}_\beta(t) dt = A_0 + \left(\varphi * \widehat{\psi}_\beta\right)(x), \tag{1}$$

де A_0 — деяка стала і $\varphi \in \widehat{L}$, а інтеграл слід розуміти як границю інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються. Якщо $f \in \widehat{L}_\beta^\psi$ і при цьому $\varphi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина із $\widehat{L}$, то покладають $f \in \widehat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Підмножини неперервних функцій із $\widehat{L}_\beta^\psi$ та $\widehat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ позначають відповідно через $\widehat{C}_\beta^\psi$ та $\widehat{C}_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Функцію $\varphi(\cdot)$ у (1) називають (ψ,β)-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $f_\beta^\psi(\cdot)$.

Через $\widehat{C}_{\beta,\infty}^\psi$ прийнято позначати множину функцій $f \in \widehat{C}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ у випадку, коли $\mathfrak{N}$ є одиничною кулею простору $\widehat{L}_\infty$, тобто $\mathfrak{N} = \widehat{S}_\infty = \{\varphi \in \widehat{L}_\infty : \|\varphi\|_{\widehat{\infty}} \leq 1\}$.

Метою роботи є вивчення асимптотичної поведінки при $\delta \to \infty$ величин

$$\mathcal{E}\left(\widehat{C}_{\beta,\infty}^\psi; W_\delta\right)_{\widehat{C}} = \sup_{f \in \widehat{C}_{\beta,\infty}^\psi} \|f(x) - W_\delta(f,x)\|_{\widehat{C}}.$$

Нехай $\mathfrak{A}$ — множина додатних неперервних при $t \geq 0$ функцій $\psi(t)$, які задовольняють умови: 1) $\psi(0) = 0$; 2) $\psi(t)$ опукла донизу на $[1,\infty)$ і $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$; 3) $\psi'(t) = \psi'(t+0)$ є функцією обмеженої варіації на $[0,\infty)$. Підмножину функцій $\psi \in \mathfrak{A}$, для яких $\int\limits_1^\infty \frac{\psi(t)}{t} dt < \infty$, позначають через $\mathfrak{A}'$. Нехай $\mathfrak{A}_0 = \left\{\psi \in \mathfrak{A} : 0 < \frac{t}{\eta(t)-t} \leq K < \infty\ \forall t \geq 1\right\}$, де $\eta(t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$, а ψ^{-1} — функція, обернена до функції ψ.

Покладемо

$$\tau(v) = \tau_\delta(v,\psi) = \left(1 - e^{-v^2}\right) \frac{\psi(\sqrt{\delta}v)}{\psi(\sqrt{\delta})}, \quad v \geq 0,$$

де $\psi(v)$ — неперервна при всіх $v \geq 0$ функція. Надалі будемо вважати, що $\psi(v)$ монотонно зростає, опукла донизу на $[0,1]$ і має неперервну другу похідну при всіх $v \geq 0$ за виключенням точки $v = 1$. Множину функцій $\psi \in \mathfrak{A}$ або $\psi \in \mathfrak{A}_0$, що мають вказані вище властивості позначимо відповідно через $\mathfrak{A}^*$ або $\mathfrak{A}_0^*$.

Теорема. *Нехай $\psi \in \mathfrak{A}_0^* \cap \mathfrak{A}'$, функція $g(v) = v^2\psi(v)$ опукла вгору або донизу на $[b, \infty)$, $b \geq 1$. Тоді при $\delta \to \infty$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}\left(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; W_\delta\right)_{\widehat{C}} = \psi(\sqrt{\delta})A(\tau), \tag{2}$$

де величина $A(\tau) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt$ *і для неї справедлива оцінка*

$$A(\tau) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{1}^{\sqrt{\delta}}v\psi(v)dv + \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty}\frac{\psi(v)}{v}dv\right) + O\left(1 + \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right).$$

Відмітимо, що у періодичному випадку аналогічні результати одержані авторами в роботі [2].

[1] *Степанец А.И.* Классы функций, заданные на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, № 1. — С. 102–112.

[2] *Yu. I. Kharkevych, I. V. Kal'chuk.* Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. Journal. — 2007. — **59**, №8. — P. 1224–1237.

ВЛАСТИВОСТІ НАПІВКІЛЬЦЯ ЕЛЕМЕНТІВ СПЕКТРУ АЛГЕБРИ $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$

Чернега Ірина Володимирівна

Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

icherneha@ukr.net

В доповіді розглядаються алгебраїчні та топологічні властивості напівкільця елементів спектру алгебри $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$ цілих симетричних функцій на банаховому просторі ℓ_1, які є обмежені на обмежених множинах. Досліджується проблема неперервності комплексних гомоморфізмів даного напівкільця та питання про продовження цих гомоморфізмів на відповідне кільце.

INTERPOLATION OF ANALYTIC FUNCTIONS IN THE UNIT DISK AND AN APPLICATION

IGOR CHYZHYKOV

Ivan Franko National University of L'viv, Lviv

chyzhykov@yahoo.com

In [1] A.Borichev, R. Dhuez, and K. Kellay obtained interpolation theorems in weighted spaces of analytic functions for radial weights of arbitrary (faster than logarithmic) growth. Using another method we give an alternative description of interpolating sequences in the unit disk $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ for functions of moderate growth in $\mathbb{D}$. An important ingredient of the proof is a result of B. Vynnytskyi and I. Sheparovych [2].

Using the obtained result we study zero sequences of solutions of differential equations.

Joint work with Iryna Sheparovych.

[1] *Borichev A., Dhuez R., Kellay K.* Sampling and interpolation in large Bergman and Fock space// J. Funct. Analysis **242** (2007), 563–606.

[2] *Винницький Б.В., Шепарович І.Б.* Інтерполяційні послідовності класу аналітичних в одиничному крузі функцій скінченного η-типу // Укр. мат. журн. **56** (2004), no.3, 425–430.

ON THE GROWTH OF SPIRALLIKE FUNCTIONS

IURKEVYCH MARIIA

Ivan Franko National University of L'viv

urkevych@gmail.com

Let S be the class of analytic univalent functions on $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, such that $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, and $\mathfrak{F}_\lambda = \{f \in S, \Re(e^{-i\lambda} z f'(z)/f(z)) > 0,\ |z| < 1\}$ be the class of λ-spirallike functions. Note that $\mathfrak{F}_0$ is the class of starlike functions. For $f \in S$ we denote by $\alpha(R, f)$ the length of the largest arc contained in the set $\{\zeta \in \partial\mathbb{D} : R\zeta \in f(\mathbb{D})\}$, and $A(f) = \lim_{R\to+\infty} \alpha(R, f)$.

Hansen [1] conjectured that

$$M(r, f) := \max\{|f(z)| : |z| = r\} = O((1 - r)^{-q_0}) \text{ if } A(f) \neq 0$$

where $q_0 = \frac{1}{\pi} A(f) \cos^2 \lambda$. He also conjectured that $a_n = O(n^{q_0-1})$ if $q_0 > 1$.

Yong Chan Kim and Toshiyuki Sugawa [2] showed that this is not true in general.

Theorem A [2]. *Let $\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$ and $0 < A < 2\pi$. Then there is $f \in \mathfrak{F}_\lambda$ with $A(f) = A$ so that $M(r, f) = O[(1-r)^{-A(f)\cos^2\lambda/\pi}]$ does not hold.*

We generalize Theorem A and give an estimate for Taylor coefficients of the function f.

A function $\psi : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ is called slowly growing if ψ is nondecreasing and $\forall c \in R \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(cx)}{\psi(x)} = 1$.

Theorem. *Let ψ be an unbounded slowly growing function, $0 \le A < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}$. Then there exist a function $f \in \mathfrak{F}_\lambda$ with $A(f) = A$ and a constant $D > 0$ such that*

$$\log M(r, f) \ge \frac{A\cos^2\lambda}{\pi} \log \frac{1}{1-r} + \frac{D \log \frac{1}{1-r}}{\psi(\frac{1}{1-r})}.$$

Proposition. *Let the assumptions of the theorem be satisfied, and $A\cos^2\lambda > \pi$. Assume, in addition, that $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, ψ is differentiable and $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\psi'(t)t\log t}{\psi^2(t)} = 0$. Then there exists a sequence of natural numbers (n_k), $n_k \uparrow +\infty$ $(k \to \infty)$, such that*

$$|a_{n_k}| \ge c n_k^{\alpha(1-\frac{1}{n_k})-1},$$

where $\alpha(r) = q_0 + \frac{D}{\psi(\frac{1}{1-r})}$.

Joint work with Igor Chyzhykov.

[1] *L.J.Hansen,* The Hardy class of a spirallike function // Michigan Math. J. **18** (1971), 279-282.

[2] *Yong Chan Kim and Toshiyuki Sugawa,* Correspondence between spirallike functions and starlike functions//Math. Nachr. **285** (2012), No.2–3, 322–331.

Іменний покажчик