Івано-Франківське математичне товариство
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Всеукраїнська наукова конференція

Тези доповідей

Ворохта
20 – 26 лютого 2012

Івано-Франківськ, 2012

Івано-Франківське математичне товариство
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Всеукраїнська наукова конференція

Тези доповідей

Ворохта
20 – 26 лютого 2012

Івано-Франківськ, 2012

Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”//Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2012. – 63 с.

Організаційний комітет:

Загороднюк Андрій Васильович

Осипчук Михайло Михайлович

Шарин Сергій Володимирович

Соломко Андрій Васильович

Слободян Світлана Ярославівна

Дубей Марія Володимирівна

Частина I

Пленарні доповіді

ЗАДАЧА ПРО СКЛЕЮВАННЯ ДВОХ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ: УМОВА СПРЯЖЕННЯ ТИПУ ВЕНТЦЕЛЯ ТА УЗАГАЛЬНЕНІ ДИФУЗІЙНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ В РОЗУМІННІ ПОРТЕНКА

Копитко Богдан Іванович, Новосядло Андрій Федорович

Львівський національний університет імені Івана Франка

bohdan.kopytko@ gmail.com, nandrew183@gmail.com

Задача про склеювання двох дифузійних процесів виникає при дослідженні проблеми, пов'язаної з побудовою математичної моделі фізичного явища дифузії в скінченновимірному евклідовому просторі, де на деякій поверхні є розташована мембрана. В [1] показано, що певний тип розташованих на деякій поверхні мембран можна отримати, збурюючи звичайний дифузійний процес векторним полем, яке діє в напрямку конормалі і має структуру δ-функції. В результаті такого збурення з'являється новий неперервний феллерівський процес, для якого дифузійні характеристики існують лише в узагальненому сенсі (точніше, у даному випадку узагальненою функцією буде лише вектор переносу). Метод побудови такого типу процесів ґрунтується на інтегральних та інтегро-диференціальних рівняннях для густини ймовірності переходу шуканого процесу. Постановка розглядуваної нами задачі передбачає, що середовища, розділені між собою поверхнею, де є розташована мембрана, можуть бути різними за своїми дифузійними характеристиками, а поведінка породжених цими характеристиками дифузійних процесів після їх потрапляння на згадану поверхню визначається заданою на ній умовою спряження типу Вентцеля [2]. Розв'зання цієї задачі для різних часткових випадків умови спряження типу Вентцеля також приводить до побудови узагальнених дифузійних процесів в розумінні М.І. Портенка з відповідними типами мембран. До того ж тут узагальненими функціями можуть бути як вектор переносу, так і матриця дифузії. Побудова таких процесів, як і в [1], здійснюється нами за допомогою методів класичної теорії потенціалу.

[1] *Портенко М.І.* Процеси дифузії в середовищах з мембранами, Інститут математики НАН України, Київ, (1995).

[2] *Вентцель А.Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теория вероятн. и ее примен. - 1959. - 4, №2. - с. 172-185.

ЧИСЛЕННЯ МАЛЛЯВЕНА ДЛЯ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ВІДБИТТЯМ

Пилипенко А.Ю. [1]

Інститут математики НАН України

apilip@imath.kiev.ua

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння в замкненій області $D \subset \mathbb{R}^d$ з достатньо гладкою границею:

$$d\varphi(t) = a(\varphi(t))dt + \sum_{k=1}^{m} b_k(\varphi(t))dw_k(t) + n(\varphi(t))dl(t), \tag{1}$$

$$\varphi(0) = x, \ x \in D, \tag{2}$$

де $n(y), \ y \in \partial D$ – внутрішня нормаль, а процеси $\varphi(t), l(t)$ задовольняють умовам:

$$\varphi(t) \in D, \ t \geq 0, \tag{3}$$

$$l(0) = 0, \tag{4}$$

$$l(t), t \geq 0 \text{ неперервна та монотонна по } t, \tag{5}$$

$$l(t) = \int_0^t 1\!\!\mathrm{I}_{\varphi_s \in \partial D} dl(s), \ t \geq 0. \tag{6}$$

За деяких природних умов на коефіцієнти рівняння доведено, що $\varphi(t)$ стохастично диференційовано, та знайдено явний вигляд стохастичної похідної.

Одержані результати застосовані для дослідження броунівського руху із відбиттям. А саме, нехай $B_x(t)$ – розв'язок (1)–(6), де $a(\cdot) \equiv 0, \ b_k(\cdot) = \text{const}, \sum_k b_k b_k^* = E$ з початковою умовою $B_x(0) = x$. Припустимо, що для довільної гіперлощини L множина $L \cap \partial D$ має нульову $(d-1)$ вимірну міру. Тоді, по-перше, розподіл вектора $(B_x(t), W(t))$ є абсолютно неперервним в $\mathbb{R}^{2d}$ для довільного $x \in \partial D$, де $W(t) = \sum_k b_k w_k(t)$. По-друге, якщо $x \neq y$, то розв'язки $B_x(t), \ B_y(t)$ з ймовірністю 1 ніколи не потрапляють у спільну точку. Останній результат є узагальненням робіт Кранстона та Лє Жана [1, 2].

[1] *Cranston M., Le Jan Y.* On the noncoalescence of a two point Brownian motion reflecting on a circle// Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist. – 1989. – vol. 25, no. 2. – P. 99–107.

[2] *Cranston M., Le Jan Y.* Noncoalescence for the Skorohod equation in a convex domain of R^2// Probab. Theory Related Fields. – 1990. – vol. 87, no. 2 – P.241–252.

[1] Робота частково підтримана грантом Державного фонду фундаментальних досліджень України та Російського фонду фундаментальних досліджень, грант № Ф40.1/023.

ЗОБРАЖЕННЯ СПЕКТРУ АЛГЕБРИ СИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Загороднюк Андрій Васильович,
Чернега Ірина Володимирівна

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

andriyzag@yahoo.com, icherneha@ukr.net

Проблема опису спектрів алгебр аналітичних функцій на банахових просторах вивчалась в [1], [2] та в ряді інших робіт. У доповіді розглядається алгебра симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі ℓ_1, $H_{bs}(\ell_1)$, та досліджується її спектр, тобто множина всіх комплексних гомоморфізмів.

Для елементів простору ℓ_1 вводяться операції змішування та мультиплікативного змішування, за допомогою чого на спектрі алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ визначаються операції симетричної та мультиплікативної згорток. Це дозволяє отримати зображення спектру даної алгебри в термінах цілих функцій експоненціального типу.

Проведені дослідження дозволяють покращити результати, отримані спільно з П. Галіндо у роботі [3].

[1] *R. Alencar, R. Aron, P. Galindo, and A. Zagorodnyuk*, Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p// Bull. Lond. Math. Soc. **35** (2003), 55–64.

[2] *R.M. Aron, B.J. Cole, and T.W. Gamelin*, Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space// J. Reine Angew. Math. **415** (1991), 51–93.

[3] *I. Chernega, P. Galindo, and A. Zagorodnyuk*, The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions// To appear.

СУКУПНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ВІДОБРАЖЕНЬ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ У РІЗНИХ УЗАГАЛЬНЕННЯХ МЕТРИЗОВНИХ ПРОСТОРІВ

Володимир Маслюченко, Оксана Мироник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

math.analysis.chnu@gmail.com

Дослідження сукупної неперервності нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$ зі значеннями в неметризовних просторах почалося з прикладу Гофмана-Йорґенсена нарізно неперервного і скрізь розривного відображення квадрата $[-1,1]^2$ у тихоновський куб $[-1,1]^{[-1,1]^2}$ [1, с. 459]. Перші результати про сукупну неперервність нарізно неперервних відображень зі значеннями в індуктивних границях отримав В.К.Маслюченко [2, 3]. В [2, 3] вони були перенесені на той випадок, коли простір Z сильно σ-метризовний. Відображення зі значеннями в просторах Мура почав вивчати З. Пьотровський [5, 6]. З того часу з'явилося чимало робіт з цієї тематики (див. [7-9] і вказану там літературу), огляд результатів яких буде подано в доповіді.

На сьогоднішній день відомо багато класів просторів, близьких до метризовних, декотрі з них зібрані в огляді Ґ.Ґрюнгейджа [10]. Стосовно кожного з цих класів просторів природно постає питання про можливість перенесення результатів про сукупну неперервність нарізно неперервних відображень та їх аналогів зі значеннями в метризовних просторах на відображення зі значеннями у просторах того чи іншого типу.

Важливими типами просторів, близьких до метризовних, є вичерпні і напіввичерпні простори [10, 11]. Нарізно неперервні відображення зі значеннями в таких просторах досліджувались в [12, 13]. Зокрема, там був встановлений такий результат:

Теорема. *Простір $C_p[0,1]$ є напіввичерпним і не σ-метризовним, причому у кожного нарізно неперервного відображення $f : X \times Y \to C_p[0,1]$, де X і Y – топологічні простори і Y задовольняє першу аксіому зліченності, множина $D(f)$ всіх його точок розриву є першої категорії в $X \times Y$.*

Наступний приклад є істотним доповненням до цієї теореми. Нехай $\mathrm{sp} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – функція Шварца, що визначається так:

$$\mathrm{sp}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \text{ якщо } (x,y) \neq (0,0), \text{ і } \mathrm{sp}(0,0) = 0.$$

Теорема. *Функція $f_0 : [0,1]^2 \to C_p[0,1]$, яка визначається формулою*

$$f_0(x,y)(t) = \mathrm{sp}(x-t,y) + \mathrm{sp}(x,y-t),$$

де $0 \le x,y,t \le 1$, нарізно неперервна і розривна у всіх точках множини $E = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$.

Таким чином, на відміну від метризовного простору значень, нарізно неперервні функції $f_0 : [0,1]^2 \to C_p[0,1]$ можуть не мати ні властивості Вестона, ні тим більше властивості Гана відносно обох змінних, хоча вони обов'язково точково розривні.

[1] *Christensen J.P.R.* Joint continuity of separately continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – **82**, N3. – P.455-461.

[2] *Маслюченко В.К.* Раздельно непрерывные отображения со значениями в строгих индуктивных пределах // XIV школа по теории операторов в функциональных пространствах. Ч.II. – Новгород, 1989. – С.70.

[3] *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення зі значеннями в індуктивних границях // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, N3. – С.380–384.

[4] *Маслюченко В.К., Михайлюк О.В., Собчук О.В.* Дослідження про нарізно неперервні відображення // Матеріали міжнар. мат. конф., присв. пам. Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995.– С.192–246.

[5] *Piotrowski Z.* Mibu-type theorem // Classical Analysis. Proc. Inter. Symp. (20-26 september 1993, Poland). – Random, 1993. – P.141-147.

[6] *Piotrowski Z.* On the theorems of Y.Mibu and G.Debs on separately continuity // Inter. J. Math. and Math. Sci. – 1996. – **19**. – P.495-500.

[7] *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Філіпчук О.І.* Сукупна неперервність K_hC- функцій зі значеннями в просторах Мура // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, №11. – С. 1539-1547.

[8] *Філіпчук О.І.* Нарізно неперервні відображення та їх аналоги зі значеннями в неметризовних просторах // Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. - Чернівці, 2010. - 124с.

[9] *Holá L., Piotrowski Z.* Set of continuity points of functions with values in generalized metric spaces // Tatra Mt. Math. Publ. – 2009. – P. 149-160.

[10] *Gruenhage G.* Generalized metric spaces // Handbook of Set-Theoretic Topology, ed. K.Kunen and J.Vaughan, Elsevier Sci. 1984. – P. 423-510.

[11] *Borges C.* On stratifiable spaces // Pacif. J. Math. – 1966.–**17**, N1. – P. 1-16.

[12] *Маслюченко В.К., Мироник О.Д.* Вичерпні та напіввичерпні простори і нарізно неперервні відображення // Міжнар. конф. "Сучасні проблеми аналізу", присв. 70-річчю каф. мат. аналізу Чернів. ун-ту, 30 вересня – 3 жовтня 2010р. Тези доповідей. – Чернівці: Книги – XXI, 2010. – С.103–105.

[13] *Маслюченко В.К., Мироник О.Д.* Нарізно неперервні відображення і вичерпні простори // Мат. вісн. НТШ. – 2010. – **7**. – С.

ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ТИПУ ХІЛЛЕ-ФІЛІПСА В КЛАСІ ГІПЕРФУНКЦІЙ З КОМПАКТНИМИ НОСІЯМИ

Патра Марія Ігорівна, Шарин Сергій Володимирович

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

patra-m@mail.ru, sharynsir@yahoo.com

Нехай Ω — деяка фіксована відкрита множина на дійсній осі, а V — відкрита множина в комплексній площині, що містить Ω як відносно замкнуту підмножину. Гіперфункції Сато [1] визначають як елементи фактор-простору $\mathcal{B}(\Omega) := \mathcal{O}(V\setminus\Omega)/\mathcal{O}(V)$, де $\mathcal{O}(V\setminus\Omega)$ та $\mathcal{O}(V)$ — векторні простори всіх голоморфних функцій на $V\setminus\Omega$ і V відповідно. Часто гіперфункцію $f \in \mathcal{B}(\Omega)$ розуміють як різницю граничних значень деякої голоморфної функції $F \in \mathcal{O}(V\setminus\Omega)$, тобто $f(x) = F(x+\mathrm{i}0)-F(x-\mathrm{i}0)$, в цьому випадку пишуть $f = [F]$. Нехай $\mathcal{B}_C(\Omega) \subset \mathcal{B}(\Omega)$ — підпростір гіперфункцій з компактними носіями. Відомо (див. [1], [2]), що $\mathcal{B}_C(\Omega)$ з точністю до топологічного ізоморфізму є спряженим до простору $\mathcal{A}(\Omega)$ всіх дійсних аналітичних функцій на Ω. При цьому канонічний білінійний функціонал задають формулою $\langle f, \varphi \rangle = -\oint_\Gamma F(z)\varphi(z)\,dz$, $\forall f = [F] \in \mathcal{B}_C(\Omega)$, $\forall \varphi \in \mathcal{A}(\Omega)$, де Γ — замкнутий контур в перетині областей визначення функції F і аналітичного продовження φ, який оточує носій f один раз в додатному напрямку.

Для гіперфункцій Сато з компактними носіями в $\Omega_0 := (0,\infty)$ ми будуємо аналог функціонального числення, розвинутого в роботі [3]. За допомогою канонічного білінійного функціоналу $\langle f, \varphi \rangle$ ми можемо визначити крос-кореляцію гіперфункції f і дійсної аналітичної функції φ, а саме $(f \star \varphi)(t) := \langle f, \varphi(\,\cdot\, + t) \rangle \in \mathcal{A}(\Omega)$. Це, в свою чергу, дає можливість отримати вказаний аналог функціонального числення, яке визначаємо формулою

$$f_\varphi(A) := \int_0^\infty e^{-tA}(f \star \varphi)(t)\,dt,$$

де A — генератор (C_0)-напівгрупи e^{-tA}, що діє в банаховому просторі E. При цьому для кожного $\varphi \in \mathcal{A}(\Omega)$ відображення $f \longmapsto f_\varphi(A)$ є гомоморфізмом зі згорткової алгебри $\mathcal{B}_C(\Omega)$ в алгебру лінійних операторів над E.

[1] *Sato M.* Theory of hyperfunctions, I, II // Journal of the Faculty of Science, Univ. of Tokyo, **8** (1959), 139–193, **9** (1960), 387–437.

[2] *Komatsu H.* An Introduction to the Theory of Generalised Functions. Department of Mathematics Science Univesity of Tokyo, 2000, 185 p.

[3] *Lopushansky O., Sharyn S.* Operator calculus for convolution algebra of Schwartz distributions on semiaxis // Mat. Stud. –1997. –V.7, №1. –C.61–72.

ЩІЛЬНІ ПІДПРОСТОРИ В ШКАЛІ СОБОЛЕВСЬКИХ ПРОСТОРІВ

Володимир Кошманенко

Інститут математики НАН України

koshman63@googlemail.com

Розглянемо шкалу гільбертових просторів утворену соболевськими просторами:

$$\cdots W_2^{-k} \supset L_2(\mathbb{R}^n) \supset W_2^k(\mathbb{R}^n) \equiv W_2^k \cdots, \quad k = 1, 2, ...$$

Нехай $K \subset \mathbb{R}^n$ – довільний компакт, позначимо $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash K$. Введемо $\overset{\circ}{W}{}_2^k(\Omega)$ як замикання $C_0^\infty(\Omega)$ в W_2^k. Ми цікавимся питанням, коли $\overset{\circ}{W}{}_2^k(\Omega)$ є щільним в $W_2^m, \quad m \leq k-1$?

Згідно [1] k-ємністю компактної множини $K \subset \mathbb{R}^n$ називається величина

$$C_k(K) \equiv \mathrm{cap}_k(K) = \inf\{\|\varphi\|^2_{W_2^k} \ \mid \varphi \in C_0^\infty, \varphi \geq 1 \text{ на } K\}.$$

Теорема *Нехай для компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ k-ємність $C_k(K) > 0$. Власний підпростір $\overset{\circ}{W}{}_2^k(\Omega), \quad \Omega = K^c$ з W_2^k є щільним в W_2^m, $m \leq k-1$ тоді і лише тоді, коли m-ємність компакта K дорівнює нулеві $C_m(K) = 0$.*

[1] D. Adams, L.I. Hedberg, Functional Spaces and Potential Theory, // Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1996) 366 p.

ПРО ЗБІЖНІСТЬ 1-ПЕРІОДИЧНОГО ГІЛЛЯСТОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ З КОМПЛЕКСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Боднар Д.І, Бубняк М.М., Возняк О.Г.

Тернопільський національний економічний університет

dmytro_bodnar@hotmail.com, maria.bubnyak@gmail.com, olvoz@ukr.net

Розглянемо 1-періодичний гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду

$$\left(1+\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1}=\left(1+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{c_{i_1}}{1+\sum\limits_{i_2=1}^{i_1}\frac{c_{i_2}}{1+\ddots}}\right)^{-1}, \tag{1}$$

де $c_j \neq 0$ – комплексні числа ($j=\overline{1,N}$).

Теорема. *Нехай елементи дробу (1) належать областям* $c_j \in G_j$ ($j=\overline{1,N}$), *де*

$$G_1=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|arg\left(z+\frac{1}{4}\right)\right|<\pi\right\},$$

$$G_j=\bigcup_{\gamma\in[\Gamma_1^{j-1},\Gamma_2^{j-1}]}P_j(\gamma) \qquad (j=\overline{2,N}),$$

і $P_j(\gamma)=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|-Re(ze^{-i\gamma})\leq\frac{1}{N}\left(1-\frac{j}{2N}\right)\cos^2\gamma/2\right\}$, $-\pi<\gamma<\pi$, $[\Gamma_1^{j-1},\Gamma_2^{j-1}]=\bigcap\limits_{m=1}^{j-1}[\gamma_1^m,\gamma_2^m]$, γ_1^j *та* γ_2^j *визначаються з умов:* $c_j\in P_j(\gamma)$, *якщо* $\gamma\in[\gamma_1^j;\gamma_2^j]$ ($j=\overline{1,N}$).

Тоді

1) *дріб (1) збігається;*

2) *множиною його значень є замкненена область* $K(\Gamma_1^N)\bigcup K(\Gamma_2^N)$, *де*

$$K(\Gamma)=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-\frac{e^{-i\Gamma/2}}{\cos\Gamma/2}\right|\leq\frac{1}{\cos\Gamma/2}\right\}$$

.

[1] *Боднар Д.И.* Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наука, 1986. – 176 с.

ЗОБРАЖЕННЯ ЛОГАРИФМА ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ КОМПЛЕКСНИХ ЗМІННИХ

О. Я. Бродяк[a], Я. В. Васильків[b]

[a] *Національний університет "Львівська політехніка"*
[b]*Львівський національний університет імені Івана Франка*
brodyakoksana@mail.ru, YaVVasylkiv@gmail.com

Нехай $f(z)$ – ціла в $\mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ функція, $f(0)=1$, $\mathcal{Z}_f = f^{-1}(\{0\}) = \{z \in \mathbb{C}^n :\, f(z)=0\}$ – її нульова поверхня, а ν_f – функція кратності нульової поверхні $\mathcal{Z}_f$ (тобто пара $(\mathcal{Z}_f, \nu_f)$ – дивізор функції f), $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$, $d := \partial + \overline{\partial}$, $\quad d^{\perp} := i(\partial - \overline{\partial})$, де $\partial = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\, z_k}\, d\, z_k$, $\quad \overline{\partial} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\, \overline{z}_k}\, d\, \overline{z}_k$. Нехай також $\omega^{n-1}(\eta) = \left(\frac{1}{4} d^{\perp} d\, \log|\eta|^2\right)^{n-1}$, $\quad \eta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, – однорідна метрична форма Фубіні-Штуді, $\sigma(\eta) = -\frac{1}{2\pi^n}\, d^{\perp} \log|\eta| \wedge \omega^{n-1}(\eta)$ – метрична форма Пуанкаре (тобто нормована форма об'єму на сферах $\mathbf{S}^n(r) = \{\eta \in \mathbb{C}^n : |\eta| = r\},\ 0 < r < +\infty)$.

Покладемо $\langle z, \eta\rangle = z_1\overline{\eta}_1 + \dots + z_n\overline{\eta}_n$, $\{z,\eta\} \subset \mathbb{C}^n$, $\mathbf{B}^n(t) = \{\eta \in \mathbb{C}^n : |\eta| < t\}$, $\mathbf{B}^n_*(t) = \mathbf{B}^n(t) \cap \mathbb{C}^n_*$, $\mathbb{C}^n_* = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup\limits_{\zeta \in \mathcal{Z}_f} \zeta(a)$, де $\zeta(a) = a\,\zeta,\ a \in [1,+\infty)$, $0 < t < +\infty$. Нехай $f(z)$ – ціла в $\mathbb{C}^n$ функція, $f(z) \neq 0$ для всіх z із замикання кулі $\overline{\mathbf{B}}^n(s)$ при деякому $0 < s < +\infty,\ f(0)=1$. Покладемо

$$\log\, f(z) := \int_0^{|z|} \frac{f'_x(xz/|z|)}{f(xz/|z|)}\, d\, x, \quad z \in \mathbb{C}^n_*, \quad \log\, f(0) = 0.$$

Теорема. *Нехай f – ціла в $\mathbb{C}^n$ функція, $f(z) \neq 0$ в замиканні кулі $\overline{\mathbf{B}}^n(s)$ при деякому $0 < s < R < +\infty,\ f(0)=1,\ |z| = r$. Тоді для всіх $z \in \mathbf{B}^n_*(R)$*

$$\log\, f(z) = 2\int_{\mathbf{S}^n(R)} \log|f(\eta)| \left(\frac{R^{2n}}{(R^2 - \langle z,\eta\rangle)^n} - 1\right)\sigma(\eta) +$$

$$+\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_0^R \frac{dt}{t} \int_{\mathcal{Z}_f \cap \mathbf{B}^n(t)} \nu_f(\eta)\left(\frac{t^n|\eta|^n}{(t|\eta| - \langle z,\eta\rangle)^n} - 1\right)\omega^{n-1}(\eta) +$$

$$+\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_0^R \frac{dt}{t} \int_{\mathcal{Z}_f \cap \mathbf{B}^n(t)} \nu_f(\eta)\left(1 - \frac{R^{2n}|\eta|^n}{(R^2|\eta| - t\langle z,\eta\rangle)^n}\right)\omega^{n-1}(\eta).$$

[1] *Kneser H.* Zur theorie der gebrochenen Funktionen mehrer Veränlicher // Jber. Deutsch. Math.-Verein. – 1938. – **48**. – P. 1–28.

[2] *Stoll W.* Normal familes of non-negative divisors // Math. Z. – 1964. –**84**. – P. 154–218.

[3] *Бродяк О. Я., Васильків Я. В., Тарасюк С. І.* $H(p,q)$-розвинення плюрісубгармонійних в $\mathbb{C}^n$ функцій // Вісн. Харківського національного у-ту. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2010. – **931**. – С. 73-92.

MEROMORPHIC MAPPINGS OF TORUS ONTO THE RIEMANN SPHERE

A. Ya. Khrystiyanyn, A. A. Kondratyuk

Ivan Franko National University of Lviv

khrystiyanyn@ukr.net, kond@franko.lviv.ua

Let $\mathcal{T}$ be a two-dimensional torus in $\mathbb{R}^3$ obtained by a continuous map τ of the closure of the annulus $A_\rho = \{z : \rho < |z| < \frac{1}{\rho}\}$, $0 < \rho < 1$, in $\mathbb{R}^3$ which is homeomorphic in the interior of A_ρ, $\tau(\overline{A_\rho}) = \mathcal{T}$, $\tau(\rho e^{i\varphi}) = \tau(\frac{1}{\rho}e^{i\varphi})$ for each φ from $[0, 2\pi]$. That is, the points of ∂A_ρ lying on the same ray are identified.

A mapping F of $\mathcal{T}$ onto the Riemann sphere S *is said to be meromorphic* if there is a meromorphic function f on $\overline{A_\rho}$ such that $f = p \circ F \circ \tau$, where p is the stereographic projection of S onto $\overline{\mathbb{C}}$.

The mapping $\tau(z)$ is called of *conformal type* if there exists a positive continuous function $\varkappa(z)$ on $\overline{A_\rho}$ such that

$$ds = \varkappa(z)|dz|,$$

where ds is the length element on $\mathcal{T}$.

We prove the following propositions:

(i) there is the unique mapping τ of conformal type;

(ii) if F is meromorphic and non-constant then $F(\mathcal{T}) = S$;

(iii) if F is meromorphic then f admits the meromorphic continuation in the punctured plane $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ by the relation $f(\rho^2 z) = f(z)$. That is, f is *loxodromic* [1] – [3] (multiplicatively periodic [4]) of multiplicator ρ^2.

Also we introduce the notion of torus-derivative of f, the Ahlfors-Shimizu characteristic, and investigate its property.

[1] *Valiron G.* Cours d'Analyse Mathematique, Theorie des fonctions, 2nd Edition // Masson et.Cie., Paris, 1947, 522 pp.

[2] *Hellegouarch Y.* Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles // Academic Press, 2002, 381 pp.

[3] *Crowdy D.G.* Geometric function theory: a modern view of a classical subject // IOP Pablishing Ltd and London Mathematical Society, Nonlinearity **21** (2008), T205-T219.

[4] *Rausenberger O.* Lehrbuch der Theorie der Periodischen Functionen Einer Variabeln // Leipzig, Druck und Ferlag von B.G.Teubner, 1884, 470 p.

Частина II

Секційні доповіді

1 Секція теорії ймовірностей

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ПОТОКУ, ЩО ПОРОДЖУЄТЬСЯ СТОХАСТИЧНИМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ РІВНЯННЯМ З РОЗРИВНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ПЕРЕНОСУ

Арясова Ольга Вікторівна

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України

oaryasova@mail.ru

В доповіді розглядається стохастичний потік на $\mathbb{R}$, що породжується стохастичним диференціальним рівнянням

$$\begin{cases} d\varphi_t(x) = \alpha(\varphi_t(x))dt + dw(t), \\ \varphi_0(x) = x, \end{cases} \tag{1}$$

де $a < 0, b \geq 0$, а $\alpha(x) = a\mathbb{I}_{x \geq 0} + b\mathbb{I}_{x<0}$. Зауважимо, що для кожного $x \in \mathbb{R}$ існує єдиний сильний розв'язок рівняння (1) (див. [1]).

Ми розглядаємо задачу про можливість зустічі двох розв'язків рівняння (1), що стартують з різних точок. Виявляється, що стартувавши з різних точок, розв'язки не зустрічаються з ймовірністю одиниця. Цей результат одержується як наслідок з твердження про існування слабкої похідної Соболева для розв'язку рівняння (1). Також досліджено асимптотичні властивості потоку. Основні результати доповіді сформульовано в теоремах 1 і 2.

Позначимо через $W^1_{p,loc}(\mathbb{R})$ множину функцій заданих на $\mathbb{R}$, що належать простору $W^1_p(\Omega)$ для довільної обмеженої множини $\Omega \subset \mathbb{R}$.

Теорема 1.

1) Для всіх $t \geq 0$,

$$P\{\forall p \geq 1 \ : \ \varphi_t(\cdot) \in W^1_{p,loc}(\mathbb{R})\} = 1.$$

2) Слабка похідна Соболева $\nabla\varphi_t(x)$ *визначається за формулою*

$$\nabla\varphi_t(x) = \exp\left\{(a-b)L_0^{\varphi(x)}(t)\right\},$$

де $L_0^{\varphi(x)}(t)$ *локальний час процесу* $\varphi(x)$ *в точці* 0.

3) Для всіх $\{x_1, x_2\} \in \mathbb{R},\ x_1 \neq x_2,$

$$P\{\varphi_t(x_1) \neq \varphi_t(x_2),\ t \geq 0\} = 1.$$

Теорема 2. *Для всіх* $\{x_1, x_2\} \in \mathbb{R},\ x_1 < x_2,$

$$\frac{\ln(\varphi_t(x_2) - \varphi_t(x_1))}{t} \to ab,\ t \to \infty,\ \text{майже напевно.}$$

[1] *A.K.Zvonkin.* A transformation of the phase space of a diffusion process that removes the drift. *Mat. Sb. (N.S.)*, 93(135):129–149, 1974.

УТОЧНЕННЯ ОСНОВНОЇ ФАКТОРИЗАЦІЙНОЇ ТОТОЖНОСТІ ДЛЯ МАЙЖЕ НАПІВНЕПЕРЕРВНИХ ГРАТЧАСТИХ ПРОЦЕСІВ НА ЛАНЦЮГАХ МАРКОВА

Герич Мирослава Сергіївна

Ужгородський національний університет

miroslava.gerich@yandex.ru

Розглядається гратчастий пуассонівський процес на ланцюгу Маркова (ЛМ)

$$\mathbf{Z}(t) = \{\xi(t), x(t)\}\ (t \geq 0,\ \xi(0) = 0),$$

де $x(t)$ – регулярний однорідний ЛМ з обмеженою множиною станів $\mathbb{E} = = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$; $\xi(t) = \{\xi_1(t), \ldots, \xi_k(t)\}$, де кожному стану ЛМ $x(t) = k$ відповідає $\xi_k(t)$. Повне означення процесу $\mathbf{Z}(t)$ в негратчастому і гратчастому випадках див. в [1, 2].

В [2] одержано двосторонній факторизаційний розклад для

$$\boldsymbol{g}(s, z) = \mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)} = \|E[z^{\xi(\theta_s)},\ x(\theta_s) = r | x(0) = k]\|,\ (r, k \in \mathbb{E})$$

θ_s –показниково розподілена випадкова величина (такий розклад для $\boldsymbol{g}(s, z)$ називають матричною основною факторизаційною тотожністю (о.ф.т.)).

У випадку майже напівнеперервності зверху (знизу) розглядуваного процесу, коли його додатні (від'ємні) стрибки мають геометричний розподіл, одержано явний вигляд компонент о.ф.т., а саме, генератрис екстремумів процесу та їх доповнень:

$$\boldsymbol{g}_{\pm}(s, z) = \mathbf{E}z^{\xi^{\pm}(\theta_s)} = \|E[z^{\xi^{\pm}(\theta_s)},\ x(\theta_s) = r | x(0) = k]\|,$$

$$\boldsymbol{g}^{\pm}(s, z) = \mathbf{E}z^{\xi(\theta_s) - \xi^{\mp}(\theta_s)}.$$

Для напівнеперервних процесів, коли їх додатні (від'ємні) стрибки одиничні в [3] одержано вигляд $\boldsymbol{g}_{\pm}(s, z)$, $\boldsymbol{g}^{\pm}(s, z)$.

[1] *Гусак Д.В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на скінченних ЛМ та для напівмарковських процесів. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 320 с.

[2] *Гусак Д.В., Герич М.С.* Уточнення компонент основної факторизаційної тотожності для гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова// Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.матем. і інформ. (подано до друку)

[3] *Гусак Д.В., Турениязова А.И.* О решетчатых полунепрерывных пуассоновских процессах на цепи Маркова// Укр. матем. ж. - 1987. -39, № 6.- с.707-711.

СИСТЕМА $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ З ГІСТЕРЕЗИСНИМ РЕГУЛЮВАННЯМ ДОВЖИНИ ЧЕРГИ

Жерновий Костянтин Юрійович

Львівський національний університет імені Івана Франка

k_zhernovyi@yahoo.com

У застосуваннях систем обслуговування важливе значення має вирішення двох проблем: а) черга повинна бути невеликою; б) загальний час простою системи повинен бути малим. Покажемо, що вирішення стандартним шляхом одної з цих проблем ускладнює вирішення другої. Нехай ρ – коефіцієнт завантаження системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1$. Відомо, що для $0 < \rho < 1$ середня довжина черги скінченна, але черга необмежено зростає, якщо $\rho \uparrow 1$. З іншого боку, середнє значення відносного часу простою має тенденцію до збільшення, якщо $\rho \downarrow 0$. Отже, вирішення проблеми а) вимагає значень ρ, близьких до 0, а проблеми б) – близьких до 1. У цій праці ми намагаємось задовольнити обидві вимоги одночасно, використовуючи особливий тип системи обслуговування, в якій протікає осцилюючий випадковий процес.

Для системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ застосовуються два режими обслуговування (основний та післяпороговий) з функціями розподілу часу обслуговування $F(t)$ і $\widetilde{F}(t)$ відповідно. Післяпороговий режим супроводжується блокуванням вхідного потоку і починає функціонувати, якщо в момент t початку обслуговування чергового замовлення кількість замовлень у системі $\xi(t)$ задовольняє умову $\xi(t) > h_2$. Повернення до основного режиму і припинення блокування здійснюється в момент початку обслуговування того замовлення, для якого $\xi(t) \le h_1$, де $h_1 \le h_2$ ($1 \le h_2 \le m-1$).

Спираючись на метод потенціалу В. С. Королюка [1] для неперервних знизу випадкових блукань, знайдено перетворення Лапласа для розподілу кількості замовлень у системі під час періоду зайнятості і для функції розподілу періоду зайнятості, визначена середня тривалість періоду зайнятості, отримано формули для стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі та стаціонарних характеристик. Розглянуто випадок $m = \infty$ і розв'язано задачі оптимального синтезу систем з заданими характеристиками.

[1] *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – Киев: Наук. думка, 1975. – 139 с.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ У ПЕРЕКЛАДОЗНАВЧИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ ПОЕТИЧНИХ ТЕКСТІВ

Качановська Тетяна Олександрівна

Київський Національний Університет імені Тараса Шевченка

tkach@zeos.net

Актуальним питанням сучасного перекладознавства є аналіз тенденцій, що спостерігаються у перекладах поетичних творів, спільного та відмінного між творчими манерами різних перекладачів, виявлення найбільш типових компенсаторних механізмів, що нейтралізують розбіжності, існуючі між вихідною та цільовою мовами та системами віршування, тощо.

Вагомий внесок у вивчення одноплановых елементів віршованого твору в одномовному контексті зробили А. Н. Колмогоров та його учні (див., зокрема, [1]—[5]), які на основі теорії ймовірності, комбінаторики, статистики і теорії інформації створили нові статистичні методи дослідження вірша. Виник цілий напрямок міждисциплінарних досліджень (див., напр., [6]—[8]), що ґрунтується на зіставленні таких елементів.

Метою нашої доповіді є опис узагальнення вищезгаданої методики на двомовний контекст.

[1] *Колмогоров А. Н., Прохоров А. В.* О дольнике современной русской поэзии (Статистическая характеристика дольника Маяковского, Багрицкого, Ахматовой) // Вопросы языкознания. — 1964. — № 1. — С. 75–94.

[2] *Колмогоров А. Н.* Замечания по поводу анализа ритма «Стихов о советском паспорте» Маяковского // Вопросы языкознания. — 1965. — № 3. — С. 70–75.

[3] *Колмогоров А. Н.* О метре пушкинских «Песен западных славян» // Русская литература. — 1966. — № 1. — С. 98–111.

[4] *Колмогоров А. Н.* Анализ метрической структуры стихотворения Пушкина «Арион» // Проблемы теории стиха. — Л.: Наука, 1984. — С. 118–120.

[5] *Колмогоров А. Н., Рычкова Н. Г.* Анализ ритма русского стиха и теория вероятностей // Теория вероятностей и её применения. — 1999. — Т. 44. — Вып. 2. — С. 419–431.

[6] *Тарановский К. Ф.* О взаимоотношении стихотворного ритма и тематики // О поэзии и поэтике, Сборник статей, М.: Языки русской культуры, 2000. — С. 372–403.

[7] *Афонина И. А.* Статистическая оценка ритмических характеристик переводного текста // Языки и культуры в современном мире. Сб. материалов конференции, — Тюмень, 2006. — С. 15—20.

[8] *Сеченова Е. Г.* Статистико-вероятностная модель гендерообусловленного авторского "Я"в научном дискурсе // дис. ... канд. филол. наук, ТюмГУ, Тюмень, 2009.

ПОВЕДІНКА ІМОВІРНІСНОЇ ЩІЛЬНОСТІ ДЕЯКИХ ПРОЦЕСІВ ЛЕВІ ПРИ МАЛИХ ЗНАЧЕННЯХ ЧАСУ

Кнопова Вікторія Павлівна

Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України

vicknopova@googlemail.com

Доповідь присвячено сумісній роботі з О. М. Куліком [1].

Нехай $(Z_t)_{t\geq 0}$ процес Леві в $\mathbb{R}$, тобто стохастично неперервний процес з незалежними однорідними приростами. Процес Леві однозначно визначається своєю характеристичною експонентою $\psi(\xi)$:

$$Ee^{iZ_t\xi} = e^{-t\psi(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Ми припускаємо, що ψ дійсна, та не містить гаусівську компоненту. При такій умові ψ допускає зображення Леві-Хінчіна

$$\psi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(\xi u))\mu(du),$$

де μ-міра Леві, т.б. $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge u^2)\mu(du) < \infty$.

При певних умовах (Тип 1) на ψ досліджується поведінка імовірнісної щільності $p_t(x)$ при $t \in (0, 1]$. Ми продемонструємо, що $p_t(x)$ можна оцінити за допомогою $(f_{lower}, f_{upper}, z_t^-, \Lambda_t)$:

$$z_t^- f_{lower}(xz_t^-) * P_t(x) \leq p_t(x) \leq z_t^- f_{upper}(xz_t^-) * P_t(x), \quad t \in (0, 1], x \in \mathbb{R},$$

де f_{lower}, f_{upper}, z_t^- -певні функції,

$$P_t(A) := e^{-\Lambda_t(\mathbb{R})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Lambda_t^{*k}(A),$$

та

$$\Lambda_t(du) := t\mu(du) 1_{|u|>1/z_t^-}.$$

Також, при менш строгих умовах (Тип 2) досліджено поведінку щільності при $x = 0$.

[1] *V.Knopova, A. Kulik.* Compound kernel estimates for the transition density of a Lévy process. Препрінт, 2012.

ЙМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНА МОДЕЛЬ РОБОЧОЇ ДОВЖИНИ КРАТНОГО ЛАНЦЮГА МЕХАНІЧНОЇ ПЕРЕДАЧІ

Кривень В.А., Каплун А.В., Крива Н. Р.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

mmethod@tu.edu.te.ua

Ланцюгові передачі широко застосовуються у техніці для передачі крутного моменту. За потреби передачі великого крутного моменту, а також за необхідності високої надійності роботи, нерідко застосовують паралельно два і більше ланцюгів. Як виявилося, робоча довжина механічної передачі, складеної із декількох паралельно працюючих ланцюгів, є меншою за одинарний ланцюг, навіть коли усі ланцюги складені із одної і тої ж кількості однакових ланок.

Побудуємо імовірнісно-статистичу модель робочої довжини кратного ланцюга. Будемо вважати довжину ланок ланцюга рівною $a+X$, X – її випадкова похибка з нульовим математичним сподіванням та відомою і рівною σ^2 дисперсію. Приймемо також, що довжини всіх ланок розподілені незалежно та однаково за фінітним, близьким до нормального законом з густиною імовірності

$$\rho_X(x) = \begin{cases} A(x^2-9c^2)^2, |x|<3c; \\ 0, \qquad\qquad\quad |x|\geq 3c. \end{cases}$$

Тут $A = 5/1296/c^5$, $c = \sqrt{7}\sigma/3 \approx 0,885\sigma$. Скористаємося таким поясненням зменшення довжини n рядного ланцюга: робочою довжиною n паралельно працюючих ланок є довжина найкоротшої з них. Таким чином робоча довжина ланки n рядного ланцюга дорівнює $a+Y_n$, $Y_n = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$. Тоді $\rho_{Y_n}(y) = n(1-F_X(y))^{n-1}\rho_X(y)$, де $F_X(x)$ – функція розподілу X. Зі збільшенням n графіки щільностей імовірностей зміщуються вліво, а математичне сподівання випадкової складової робочої довжини ланки Y_n стає від'ємним. Ефективна довжина ланки кратного ланцюга зменшується на $|M[Y_n]|$. Вже для дворядного робоча довжина ланки зменшується на $0,575\sigma$. Робоча довжина n рядного ланцюга, кожен ряд якого складається із m однотипних ланок, матиме на $m|M[Y_n]|$ меншу робочу довжину, ніж однорядний, якщо довжину кожної із nm ланок можна вважати випадковою з математичним сподіванням рівним a.

ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО ІЗ ЗАДАНОЮ ТОЧНІСТЮ І НАДІЙНІСТЮ

Млавець Юрій Юрійович

ДВНЗ "Ужгородський національний університет"

yura-mlavec@ukr.net

Досліджується метод Монте-Карло підрахунку інтегралів

$$I(t) = \int \dots \int_{R^d} f(t, \vec{x}) p(\vec{x}) d\vec{x}, \ t \in \mathbf{T},$$

де $p(\vec{x})$ – щільність розподілу деякого випадкового вектору. Знайдено умови, за яких ці інтеграли можна обчислити із заданою надійністю і точністю в просторі $\mathbf{C}(\mathbf{T})$. Розглянуто також випадок, коли інтеграли не залежать від параметру t. При отриманні цих результатів використовувались методи теорії випадкових процесів з просторів Орліча.

[1] *V.V. Buldygin and Yu.V. Kozachenko.* Metric Characterization of Random Variables and Random processes, American Mathematical Society, Providence, Rhode (2000).

[2] *O. Kurbanmuradov and K. Sabelfeld.* Exponential bounds for the probability deviations of sums of random fields, Monte Carlo Methods and Appl., Vol. 12, No. 3-4, pp. 211-229 (2006)

[3] *Yu.V.Kozachenko and Yu.Yu.Mlavets.* Probability of large deviations of sums of random processes from Orlicz space, Monte Carlo Methods Appl., No. 17, pp. 155-168 (2011)

ПЕРІОДИЧНІ БІЛІ ШУМИ ТА МОДЕЛІ СТОХАСТИЧНО ПЕРІОДИЧНИХ ПОТОКІВ

М.Приймак, О.Маєвський, О.Мацюк

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

kaf_KN@tu.edu.te.ua, alexmajevskiy@gmail.com, alexandr.matsyuk@gmail.com

Досліджуючи системи масового обслуговування (СМО), основну увагу привертають їх вхідні потоки замовлень, структура системи, встановлені правила обслуговування замовлень, ефективність функціонування системи. Першочерговим у вивченні, очевидно, є вхідні потоки, оскільки їх властивості суттєво використовуються в інших задачах

СМО. Відомо [1], що добре вивченими є стаціонарні потоки. Однак розглядаючи роботу систем на достатньо тривалих інтервалах часу, для багатьох із них спостерігається стохастична періодичність (ритмічність) їх функціонування, причому тут чітко виявляються дві причини, що породжують ритмічність – добове обертання Землі та річний цикл руху Землі навколо Сонця. Яким же чином в подібних випадках враховувати та досліджувати стохастичну періодичність?

Мета роботи - провести огляд випадкових процесів і шумів, які дають змогу враховувати стохастичну періодичність, та розглянути можливості їх використання в задачах дослідження СМО.

Нагадаємо деякі означення, в основі яких лежать процеси з незалежними приростами [2].

Означення 1. Випадковий з незалежними приростами процес $\eta(t)$ називається процесом з незалежними T-періодичними приростами, якщо існує таке число $T > 0$, що розподіли приростів $\Delta_h\eta(t) = \eta(t + h) - \eta(t)$ є періодичним по t з періодом T.

Означення 2. Періодичним білим шумом (у вузькому розумінні) називається узагальнена похідна від процесу з незалежними періодичними приростами.

Означення 1 і 2 дають можливість провести класифікацію процесів з незалежними приростами та відповідно періодичних білих шумів.

Означення 1а. Пуассонівським процесом з періодичними приростами називається процес з незалежними періодичними приростами, причому прирости мають пуассонівський розподіл.

Означення 2а. Пуассонівським періодичним білим шумом називається узагальнена похідна від пуассонівського процесу з періодичними приростами.

Аналогічно до означень 1а та 2а в [3] визначений вінерівський процес з періодичними приростами та нормальний періодичнй білий шум.

Крім періодичних шумів з неперервним аргументом має місце різноманітні класи дискретних періодичних шумів (д.п.ш.).

Означення 3. Дискретний білий шум $\{\eta_j, j \in Z\}$, що є послідовністю незалежних випадкових величин, називається періодичним дискретним шумом, якщо існує таке число $L > 0$, що його функція розподілу є періодичною з періодом L, тобто

$$F(x, j) = P\{\eta_j < x\} = F(x; j + L) \tag{1}$$

Означення дискретного білого шуму є найбільш загальним, оскільки в ньому не вказується функція розподілу. Конкретизуючи функцію розподілу, отримаємо різні класи дискретних білих шумів [3]. Для прикладу наведемо лише два із них.

Означення 4. Періодичний шум $\{\eta_j, j \in Z\}$ є пуассонівським періодичним шумом, якщо випадкові величини η_j мають розподіл Пуассона, тобто $P\{\eta_j = k\} = \frac{\lambda_j^k}{k!}e^{-\lambda_j}$, причому параметр λ_j є періодичним з деяким періодом $L > 1 : p_j = p_{j+L} \cdot j \in Z$.

Означення 5. Білий шум $\{\eta_j, j \in Z\}$ є експоненційним (показниковим) періодичним білим шумом, якщо випадкові величин η_j мають показників розподіл, тобто густина

$f_j(x) = \begin{cases} \lambda_j e^{-\lambda_j x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0, j \in Z \end{cases}$, причому параметр λ_j змінюється періодично з періодом $L > 1 : \lambda_j = \lambda_{j+L}\ j \in Z$.

Інші класи дискретних періодичних шумів подані в таблиці.

Дискретні періодичні шуми (д.п.ш.)		
Шуми з дискретними розподілами	Шуми з неперервними розподілами	
Бернулі д.п.ш	рівномірний д.п.ш.	χ^2 д.п.ш.
біноміальний д.п.ш.	трикутний д.п.ш.	χ д.п.ш.
геометричний д.п.ш.	експоненційний д.п.ш.	Стьюдента д.п.ш.
Пуассона д.п.ш.	нормальний д.п.ш.	F д.п.ш.
логарифмічний д.п.ш.	гама д.п.ш.	логістичний д.п.ш.
	бета д.п.ш.	логарифмічний д.п.ш.
	Коші д.п.ш.	Вейбула-Гніденко д.п.ш.

Відомо, що інтервали часу $\tau(t)$ між черговими подіями вхідного потоку мають експоненційний розподіл з деякою функцією інтенсивності $\lambda(t)$. Для стохастично періодичного потоку з періодом T згадані інтервали $\tau(t)$ теж будуть мати стохастично періодичний характер. Цю закономірність можна врахувати в моделі потоку, вважаючи, що параметр $\lambda(t)$ змінюється періодично з цим же періодом: $\lambda(t) = \lambda(t+T)$. В цьому випадку густина розподілу інтервалів часу $\tau(t)$ між сусідніми подіями теж буде періодичною функцією: $f(x;t) = \lambda(t)e^{-\lambda(t)x} = \lambda(t+T)e^{-\lambda(t+T)x} = f(x;t+T)$. Періодичним при цьому буде також розподіл Ерланга

$$f_k(x;t) = \frac{\lambda(t)(\lambda(t)x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda(t)x} = \frac{\lambda(t+T)(\lambda(t+T)x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda(t+T)x} = \\ = f_k(x;t+T), k = 1, 2, ...$$

Періодичні шуми мають як теоретичне значення так і прикладне застосування, зокрема в задачах імітаційного моделювання ритмічних періодичних потоків, функціонування СМО в цілому, розрахунку оптимальних режимів систем тощо.

[1] *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. - М.: Наука, 1983. – 398 с.

[2] *Красильников О.І., Марченко Б.Г., Приймак М.В.* Процеси з незалежними періодичними приростами і періодичні білі шуми // Відбір і обробка інформації. – 1996. – Вип.10(86). – С.22-27.

[3] *Приймак М.В.*Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: Автореф. дис…докт. техн. наук: 05.13.06 / Київ: НАУ, 2001. – 34 с.

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА СИМЕТРИЧНОГО ВИПАДКОВОГО БЛУКАННЯ З МЕМБРАНОЮ

Приходько Юрій Євгенович

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

npuxodbko@gmail.com

Розглянемо однорідний ланцюг Маркова $(X_1(k),\ k \in \mathbb{Z}_+)$ на $\mathbb{Z}$ із симетричними перехідними імовірностями поза деякого відрізку $[-m, m]$:

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2 \text{ при } |i| > m$$

та довільними інтегровними стрибками з $[-m, m]$:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |j|\, p_{i,j} < \infty \text{ при } |i| \leqslant m.$$

Довизначимо процес $(X_1(t),\ t \geqslant 0)$ для всіх t неперервно як лінійну інтерполяцію та покладемо

$$X_n(t) := \tfrac{1}{\sqrt{n}} X_1(nt),\ t \geqslant 0,\ n = 2, 3, \ldots.$$

Доведено, що послідовність (X_n) слабко збігається (при $n \to \infty$) в $\mathrm{C}([0,1])$ до деякого процесу X_∞. Зокрема, якщо всі стани ланцюга $(X_1(k))$ сполучні, то граничний процес є косим броуновим рухом. Для коефіцієнту проникнення косого броунового руху знайдені явні формули в термінах перехідних імовірностей $p_{i,j}$.

Наприклад, якщо $m = 1$ $p_{1,j} = \mathrm{P}(\xi = j)$ та $p_{-1,j} = \mathrm{P}(\eta = j)$, де ξ та η — деякі цілозначні інтегровні випадкові величини і $\mathrm{P}(|\xi| \leqslant 1) = \mathrm{P}(|\eta| \leqslant 1) = 0$, то граничний процес є косим броуновим рухом з параметром

$$\gamma = \frac{\mathrm{E}\xi \mathrm{P}(\eta > 0) + \mathrm{E}\eta \mathrm{P}(\xi < 0)}{\mathrm{E}|\xi| \mathrm{P}(\eta > 0) + \mathrm{E}|\eta| \mathrm{P}(\xi < 0)}.$$

Ця теорема узагальнює відповідний результат, який отримали J.M. Harrison та L.A. Shepp [1]. Див. також [2], [3].

[1] *Harrison J.M., Shepp L.A.* On skew Brownian motion // Ann. Probab. — 1981. — 9(2). — P. 309–313.

[2] *Минлос Р.А., Жижина Е.А.* Предельный диффузионный процесс для неоднородного случайного блуждания на одномерной решетке // УМН. — 1997. — 52:2(314). — С. 87–100.

[3] *Пилипенко А.Ю., Приходько Ю.Є.* Про граничну поведінку симетричних випадкових блукань з мембранами // ТЙМС. — 2011. — 85. — С. 84–94.

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ВІНЕРОВИМ ПРОЦЕСОМ

Осипчук Михайло Михайлович

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

myosyp@gmail.com

Нехай $(w(t), \mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x)_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}}$ — вінерів процес в $\mathbb{R}$, для якого $\mathbb{P}_x(w(0) = x) = 1$. Розглянемо момент першого досягнення процесом $(w(t))_{t\geq 0}$ початку координат: $\tau = \inf\{s \geq 0 : w(s) = 0\}$.

Метою роботи є встановлення коефіцієнту переносу, який забезпечив би, в певному розумінні, мінімальне значення моменту τ. Коефіцієнт переносу вибиратимемо на множині V прогресивно вимірних процесів $(\alpha(t), \mathcal{M}_t)_{t\geq 0}$ в $\mathbb{R}$, для яких $\mathbb{P}_x$-м.н. $\int\limits_0^\tau \alpha^2(s)\,ds < +\infty$ та мають місце умови $\mathbb{E}_x\mathcal{E}^0_\tau(\alpha) = 1$, $\mathbb{E}_x(\mathcal{E}^0_\tau(\alpha))^2 < +\infty$, де $\mathbb{E}_x$ означає математичне сподівання за мірою $\mathbb{P}_x$, а $\mathcal{E}^0_\tau(\alpha) = \exp\left\{\int\limits_0^\tau \alpha(s)\,dw(s) - \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau \alpha^2(s)\,ds\right\}$.

Нехай функція $f(t)_{t\geq 0}$ додатна неперервна монотонно зростаюча та обмежена.

Означення. *Цільовою функцією будемо називати функціонал $\Phi(\alpha) = \mathbb{E}_x f(\tau)\mathcal{E}^0_\tau(\alpha)$ заданий на множині V допустимих стратегій.*

Основним результатом є наступне твердження.

Теорема. *Нехай додатна неперервна монотонно зростаюча та обмежена функція $f(t)_{t\geq 0}$ така, що існують сталі $u > 0$ та $r \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$ і функція $(\rho(t))_{t>0}$, для яких при всіх $0 < t < u$*

$$f(s+t) - f(s) \leq \rho(s)t^r,$$

причому функція ρ квадратично інтегровна в деякому околі нуля та обмежена поза ним.

Тоді існує допустима стратегія $\alpha^*(t) = \dfrac{h'_x(t, w(t))}{h(t, w(t))}$, на якій функціонал Φ досягає свого мінімуму на множині $W = \{\alpha \in V : \mathbb{E}_x(\mathcal{E}^0_\tau(\alpha))^2 \leq K\}$. Тут $K = \dfrac{\mathbb{D}_x f(\tau)}{(C - \mathbb{E}_x f(\tau))^2} + 1$, $h(t,x) = C - \mathbb{E}_x f(t+\tau)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $C = \sup\limits_{t\geq 0} f(t)$.

[1] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.

[2] Дынкин Е.Б. Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 860 с.

РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ СТРУНИ З ВИПАДКОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ З ПРОСТОРУ ОРЛІЧА

Сливка-Тилищак Ганна Іванівна

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

aslyvka@tn.uz.ua

Розглянемо першу крайову задачу для однорідного гіперболічного рівняння [3]. Ставиться питання про існування функції $u = (u\,(x,y)\,,\ x \in [0,\pi]\,,\ \ t \in [0,T])$, яка задовольняє наступним умовам:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0;$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ u(x,0) = \xi(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \eta(x).$$

Припустимо, що $(\xi(x),\ x \in [0,\pi])$ і $(\xi(x),\ x \in [0,\pi])$ є випадкові процеси із простору Орліча [1]. При використанні методу Фур'є [3] розв'язок задачі шукається у вигляді

$$u\,(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\left[A_k cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} sin\sqrt{\lambda_k}t\right],$$

де

$$A_k = \int_0^\pi \xi(x)X_k(x)\rho(x)dx, \quad B_k = \int_0^\pi \eta(x)X_k(x)\rho(x)dx,\ k \geq 1,$$

$\lambda_k,\ k \geq 1$ — власні значення, $X_k = (X_k)(x),\ x \in [0,\pi]),\ k \geq 1$ — відповідні їм власні функції наступної задачі Штурма-Ліувілля

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_k(x)}{dx}\right) - q(x)x(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0,\ X(0) = X(\pi) = 0.$$

Знайдено умови існування з імовірністю одиниця двічі неперервно диференційовного розв'язку поставленої задачі. Основною метою роботи є виклад нового підходу до вивчення рівнянь математичної фізики з випадковими початковими умовами і використання цього підходу при обґрунтуванні використання методу Фур'є.

[1] *V.V. Buldygin and Yu.V. Kozachenko.* Metric Characterization of Random Variables and Random processes, American Mathematical Society, Providence, Rhode (2000).

[2] *Б.В. Довгай, Ю.В. Козаченко, Г.І. Сливка-Тилищак Г.І.* Крайові задачі математичної фізики з випадковими факторами.Монографія, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет 2008 - 175с.

[3] *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. – М.: Высшая школа, 1964. – 559 с.

ПРО УЗАГАЛЬНЕННЯ РІВНЯННЯ МАККІНА-ВЛАСОВА НА СИСТЕМИ ЧАСТИНОК З НЕСКІНЧЕННОЮ СУКУПНОЮ МАСОЮ

Танцюра М. В.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

mtan@meta.ua

Нехай $\{w_t, t \geq 0\}$ – вінерівський процес на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, P)$, μ – локально скінченна міра на $\mathbb{R}$. Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$X_t(u,w) = u + w_t(\omega) +$$
$$\int_0^t \int_\Omega \int_{\mathbb{R}} b(X_s(v,\widetilde{\omega}) - X_s(u,\omega))\mu(dv)P(d\widetilde{\omega})ds,\ t \in [0,T]. \tag{1}$$

У випадку, коли μ - ймовірнісна міра, розподіл процесу $X_t = X_t(u,\omega)$ на ймовірнісному просторі $(\overline{\Omega}, \overline{P}) = (\Omega \times \mathbb{R}, P \times \mu)$ співпадає з розподілом процесу Маккіна-Власова, який є границею (див. [1]-[3]) розв'язків наступних систем стохастичних диференціальних рівнянь, що описують динаміку руху взаємодіючих частинок у випадковому середовищі:

$$\begin{cases} dX_t^{i,N} = dw_t^i + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N b(X_t^{i,N}, X_t^{j,N})dt,\ i = 1, ..., N, \\ \hfill X_0^{i,N} = x_0^i. \end{cases} \tag{2}$$

Тут $X_t^{i,N}$ – положення i-ї частинки в момент часу t, x_0^i – положення i-ї частинки в початковий момент часу, x_0^i має розподіл μ, w_t^i – вінерівські процеси, всі випадкові елементи $\{x_0^i,\ w_t^i\}$ незалежні в сукупності.

Для рівняння (1) доведена теорема існування та єдиності розв'язку у випадку, коли μ може бути навіть необмеженою мірою на $\mathbb{R}$, яка в наступному сенсі мажорується мірою Лебега:

$$\exists C_\mu > 0\ \forall [u,v] \subset \mathbb{R}: \quad \mu([u,v]) \leq C_\mu(v - u + 1),$$

а функція b задовольняє певним умовам гладкості та умовам спадання на нескінченності.

[1] *McKean H. P.* A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations// Proc. Nat. Acad. Sci. 56, 1907-1911(1966).

[2] *Sznitman A.S.* Topics in propagation of chaos// Ecole d'Ete de Probabilites de Saint-Flour XIX—1989, 165–251, Lecture Notes in Math., 1464, Springer, Berlin, 1991.

[3] *Tanaka H.* Limit theorems for certain diffusion processes with interaction// Stochastic analysis (Katata/Kyoto, 1982), 469–488, North-Holland Math. Library, 32, North-Holland, Amsterdam, 1984.

ЗАДАЧА ПРО СКЛЕЮВАННЯ ДВОХ НЕОДНОРІДНИХ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ НА ПРЯМІЙ

Шевчук Роман Володимирович

Львівський національний університет імені Івана Франка

r.v.shevchuk@gmail.com

Нехай в областях $D_1 = (-\infty, 0)$ і $D_2 = (0, \infty)$ задано два неоднорідні дифузійні процеси, які визначаються диференціальними операторами

$$A_s^{(i)}\varphi_i(x) = \frac{1}{2}b_i(s,x)\frac{d^2\varphi_i(x)}{dx^2} + a_i(s,x)\frac{d\varphi_i(x)}{dx}, \quad i = 1,2,$$

де коефіцієнти дифузії $b_i(s,x)$ і коефіцієнти переносу $a_i(s,x)$ є обмеженими неперервними функціями для $(s,x) \in [0,T] \times \overline{D}_i$ ($T > 0$ — фіксоване, $\overline{D}_i = D_i \cup \{0\}$), до того ж $b_i(s,x) > 0$. За область визначення оператора $A_s^{(i)}$ приймемо множину $C_2(\overline{D}_i)$ всіх функцій φ_i, обмежених і рівномірно неперервних на $\overline{D}_i$ разом зі своїми похідними перших двох порядків.

Позначимо через $C_{2,0}(\mathbb{R})$ множину всіх функцій φ, обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ таких, що їх звуження $\varphi_i = \varphi|_{\overline{D}_i}$ належать до класів $C_2(\overline{D}_i)$, $i = 1,2$, відповідно, до того ж $A_s^{(1)}\varphi_1(0) = A_s^{(2)}\varphi_2(0)$. Визначимо оператор A_s, який діє на множині $C_{2,0}(\mathbb{R})$ за таким правилом:

$$A_s\varphi(x) = A_s^{(i)}\varphi_i(x), \quad x \in \overline{D}_i, \quad i = 1,2.$$

Запишемо тепер загальну умову спряження типу Феллера-Вентцеля (див. [1]), яка звужує оператор A_s до генератора двопараметричної феллерівської напівгрупи в просторі обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій:

$$L_s\varphi(0) = r(s)A_s\varphi(0) + q_1(s)\varphi'(0-) - q_2(s)\varphi'(0+) + \gamma(s)\varphi(0) + \\ + \int\limits_{D_1 \cup D_2} [\varphi(0) - \varphi(y)]\mu(s,dy) = 0.$$

Тут $q_1(s)$, $q_2(s)$, $\gamma(s)$ — невід'ємні, неперервні функції на відрізку $[0, T]$, а $\mu(s,\cdot)$ — невід'ємна міра на $D_1 \cup D_2$ така, що для довільних обмеженої неперервної функції f і числа $\delta > 0$ інтеграли

$$F_f^{(i)}(s) = \int\limits_{D_{i,\delta}} y f(y)\mu(s, dy), \quad G_f^{(i)}(s) = \int\limits_{D_i \setminus D_{i,\delta}} f(y)\mu(s, dy)$$

є неперервними функціями для $s \in [0, T]$, де $D_{i,\delta} = \{x \in D_i : \ |x| < \delta\}$. При цьому $r(s)$, $q_1(s)$, $q_2(s)$, $\gamma(s)$ та $\mu(s, dy)$ не повинні одночасно дорівнювати нулю, яким би не було $s \in [0, T]$.

Наша задача полягає в тому, щоб побудувати інтегральне зображення двопараметричної феллерівської напівгрупи T_{st}, $0 \leq s < t \leq T$, в просторі обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій, генератор $\widetilde{A}_s$ якої визначений на множині

$$\vartheta(\widetilde{A}_s) = \{\varphi \in C_{2,0}(\mathbb{R}) : \quad L_s\varphi(0) = 0\},$$

і для всіх $\varphi \in \vartheta(\widetilde{A}_s)$ виконується рівність $\widetilde{A}_s\varphi = A_s\varphi$.

Сформульовану задачу ще часто називають задачею про склеювання двох неоднорідних дифузійних процесів на прямій (див. [2, 3, 4]). При її дослідженні ми використовуємо аналітичні методи. За такого підходу розв'язання нашої задачі практично зводиться до дослідження відповідної задачі спряження для лінійного параболічного рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами. Класичну розв'язність останньої задачі вперше встановлено нами методом граничних інтегральних рівнянь з використанням звичайних потенціалів простого шару.

[1] *Вентцель А. Д.* Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка // Докл. АН СССР — 1956. — Т.111, №2. — С. 269–272.

[2] *Портенко М. І.* Процеси дифузії в середовищах з мембранами. – Київ: Інститут математики НАН України, 1995. – 200 с.

[3] *Копытко Б. И.* О склеивании двух неоднородных диффузионных процессов на прямой // Укр. мат. журн. — 1983. — Т.35, №2. — С. 156–163.

[4] *Kononchuk P. P.* One-dimensional model of the diffusion process with a membrane that is described by the Feller-Wentzel conjugation condition // Theory of Stochastic Processes, **17(33)**, 1 (2011), 61–69.

2 Секція математичного аналізу

ON CONVERGENCE OF FUNCTIONAL BRANCHED CONTINUED FRACTION

Hoyenko Natalya , Manzij Lesya

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National University "Lvivska Politechnika", Lviv, Ukraine

hoyenko@gmail.com, lesly@ukr.net

Let

$$b_0(z_1, z_2) + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{a_{i(k)}(z_1, z_2)}{b_{i(k)}(z_1, z_2)}, \tag{1}$$

be a functional branched continued fraction(BCF) where $a_{i(k)}(z_1, z_2)$, $b_{i(k)}(z_1, z_2)$ are some polynomials. Its approximants are defined as finite BCF:

$$f_n(z_1, z_2) = b_0(z_1, z_2) + \mathop{D}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{a_{i(k)}(z_1, z_2)}{b_{i(k)}(z_1, z_2)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

In these cases, the approximants of BCF $f_n(z_1, z_2)$, $n = 1, 2, \ldots$, are rational functions in $\mathbb{C}^2$.

BCF (1) *converges uniformly* on every compact subset of some domain D, $D \subset \mathbb{C}^2$, if the sequence of its approximants (2) $\{f_n(z_1, z_2)\}$ converges uniformly on every compact subset of D. This means that a number of conditions holds for any compact K of D: 1) there exists $N(K)$ such that $f_n(z_1, z_2)$ is holomorphic in some domain containing K for all $n > N(K)$; and 2) given $\varepsilon > 0$ there exists $N_\varepsilon > N(K)$ such that

$$\sup_{(z_1,z_2)\in K} |f_{n+k}(z_1, z_2) - f_n(z_1, z_2)| < \varepsilon, \quad \text{for } n \geq N_\varepsilon, \quad k \geq 0.$$

BCF (1) *corresponds* to a formal double power series, if a sequence of its approximants (2)(rational functions with nonzero denominator in the origin) $\{f_n(z_1, z_2)\}$ corresponds to P.

Теорема. *Let BCF (1) corresponds at the origin to a formal double power series*

$$P = c_{00} + c_{10}z_1 + c_{01}z_2 + c_{20}z_1^2 + c_{11}z_1z_2 + c_{02}z_2^2 + \cdots .$$

Let $D (D \subset \mathbb{C}^2)$ be a domain containing the origin.

Then:

(A) BCF (1) converges uniformly on every compact subset of D to some holomorphic function $f(z_1, z_2)$ if only if the sequence of its appriximants
$\{f_n(z_1, z_2)\}$ are uniformly bounded on every compact subset of D.

(B) The series $P = P(f)$ is a Taylor series of $f(z_1, z_2)$ at $(z_1, z_2) = (0, 0)$.

МУЛЬТИПЛІКАТИВНІ ФУНКЦІОНАЛИ У ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ СИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА ℓ_1

Голубчак Олег Михайлович

Івано-Франківський коледж Львівського національного аграрного університету,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

oleggol@ukr.net

Розглянемо простір симетричних поліномів на ℓ_1, який позначимо $P_s(\ell_1)$. Відомо, що поліноми

$$P_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$$

утворюють алгебраїчний базис в $P_s(\ell_1)$. Також відомо, що поліноми вигляду $P_\lambda = P_{\lambda_1} \cdot P_{\lambda_2} \cdot ... \cdot P_{\lambda_m}$ утворюють лінійний базис в $P_s(\ell_1)$, де $P_{\lambda_k}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\lambda_k}$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ — деяке розбиття натурального числа n, тобто $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m = n$. У доповіді буде розглянуто гільбертів простір H_s симетричних аналітичних функцій на ℓ_1 з ортонормованим базисом $\{P_\lambda\}$ і показано, що елементи цього простору будуть аналітичними функціями в області

$$\Omega = \{x \in \ell_1 \colon |P_n(x)| < 1,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Іншими словами, функціонал R_x значення в точці x: $R_x(f) = f(x)$, $f \in H_s$ буде неперервним, якщо $x \in \Omega$.

Лінійний функціонал $\varphi : H_s \to \mathbb{C}$ називається мультиплікативним, якщо $\varphi(P \cdot Q) = \varphi(P) \cdot \varphi(Q)$ для всіх поліномів $P, Q \in H_s$. Прикладом таких функціоналів є функціонал значення в точці R_x, $x \in \Omega$. Кожен мультиплікативний функціонал φ визначається послідовністю $\{a_n = \varphi(P_n)\}$. Тому для визначення множини $M(H_s)$ всіх мультиплікативних функціоналів необхідно описати множину послідовностей $\{a_n\}$. Наступна теорема показує, що множина $M(H_s)$ суттєво відрізняється від множини характерів рівномірної алгебри симетричних аналітичних функцій на ℓ_1 (див. [1]).

Теорема. *Для кожного $\varphi \in M(H_s)$ послідовність $\{a_n = \varphi(P_n)\}$ належить ℓ_2. Навпаки, для кожної послідовності $\{a_n\} \in \ell_2$ існує функціонал $\varphi \in M(H_s)$ такий, що $\{a_n = \varphi(P_n)\}$.*

[1] I. Chernega, P. Galindo, and A. Zagorodnyuk, *Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra.* Proc. Edinburgh Math. Soc. (2012) **55**, 125–142.

ОСОБЛИВІ ТОЧКИ СИМЕТРИЗОВАНИХ ЗАДАЧ 4 ВЗАЄМОДІЮЧИХ ЧАСТИНОК НА ПРЯМІЙ

Довгань Богдан Костянтинович, Вус Андрій Ярославович

Львівський національний університет імені Івана Франка

bohdan_dovhanj@ukr.net, andrij_vus@ukr.net

Розглядається питання існування ненульових особливих точок потенціалу взаємодії симетризованих задач 4 частинок на прямій з гамільтоніаном

$$H = T + W, \tag{1}$$

де кінетична енергія $T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$, а

$$W = V(x_1 + x_2) + V(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}V(2x_1) + \frac{1}{2}V(2x_2). \tag{2}$$

Потенціальна енергія "замкнутого"ланцюжка має вигляд

$$W = V(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}V(2x_1) + \frac{1}{2}V(2x_2). \tag{3}$$

Питання інтегровності за Ліувіллем цих задач зводиться до питання існування додаткового першого інтеграла, поліноміального за імпульсами.

Твердження. *Нехай система з гамільтоніаном (1), (2) допускає перший інтеграл $F_{2\tilde{N}}$. Якщо потенціал V задовільняє умову $V(\infty) = 0$, то V не може мати ненульових полюсів.*

Твердження. *Нехай система з гамільтоніаном (1), (3) допускає перший інтеграл $F_{2\tilde{N}}$. Тоді V не може мати особливої точки типу полюса.*

Твердження. *Нехай система з гамільтоніаном (1), (2) або (1), (3) допускає перший інтеграл $F_{2\tilde{N}}$. Якщо потенціал V задовільняє умову $V(\infty) = 0$, то V не може мати істотно особливих точок.*

Використано результат робіт [1] і [2].

[1] *Довгань Б., Вус А.* Інтегровні потенціали симетричних задач 4 та 5 попарно взаємодіючих частинок на прямій – 2010. – Вісник ЛНУ – вип. 72. С. 107–126.

[2] *Довгань Б., Вус А.* Неінтегровність симетричної задачі взаємодії найближчих сусідів замкнутого ланцюжка 4 частинок на прямій – 2012. – Вісник ЛНУ – (to appear).

ГІПЕРЦИКЛІЧНІ ОПЕРАТОРИ НА ВІЛЬНОМУ БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Дубей М.В., Загороднюк А.В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

mariadubey@gmail.com, andriyzag@yahoo.com

Нехай E — нормований простір, X — метричний простір, з деякою фіксованою точкою θ, на якому можна задати норму α за формулою $\alpha(x) = \rho(\theta, x)$ для довільного елемента $x \in X$. Відомо, що існує єдиний, з точністю до ізометричного ізоморфізму, банахів простір $B(X)$, а також ізометричне вкладення $\nu : X \to B(X)$ такі, що довільне ліпшицеве відображення F з метричного простору з фіксованою точкою може бути продовжене до лінійного неперервного оператора $\widetilde{F} : B(X) \to E$, причому $\|\widetilde{F}\| = L_F$ для довільного нормованого простору E. Простір $B(X)$ називається вільним банаховим простором. Відображення F з метричного простору X в себе називається *топологічно транзитивним*, якщо існує елемент $x \in X$, такий що орбіта $Orb(F, x) = \{F^n(x) = \underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{n}(x) \colon n \in \mathbb{N}\}$ буде щільною в X. Лінійний неперервний оператор T на просторі Фреше E в себе називається *гіперциклічним*, якщо T є топологічно транзитивним. Вектор $x \in E$ для якого $Orb(T, x)$ є щільною в E називається *гіперциклічним вектором* оператора T. Лінійний неперервний оператор $T : E \to E$ називається *циклічним*, якщо для деякого вектора $x \in E$ лінійна оболонка $spanOrb(T, x)$ є щільною в E. Зокрема, доведено наступні теореми.

Теорема. *Нехай (X, θ) — повний метричний простір з відміченою точкою θ і $F : X \to X$ є топологічно транзитивним відображенням з $F(\theta) = \theta$. Тоді лінійний оператор $\widehat{F} : B(X) \to B(X)$ буде циклічним.*

Теорема. *Нехай E – сепарабельний простір Фреше. Якщо $T : E \to E$ – гіперциклічний оператор, який задовольняє критерій гіперциклічності, то $\widehat{T} : B(E) \to B(E)$ — також гіперциклічний оператор і задовольняє критерій гіперциклічності.*

СПЕКТР АЛГЕБРИ БЛОЧНО-СИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО ТИПУ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Загороднюк А.В., Кравців В.В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

andriyzag@yahoo.com, maksymivvika@gmail.com

Розглянемо простір $\mathcal{X}_\infty^s = \oplus_{\ell_1} \mathbb{C}^s$ з нормою $\|\overline{x}\| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$, де вектор $\overline{x} \in \mathcal{X}_\infty^s$ і $x_i \in \mathbb{C}^s$. Будемо казати, що поліном P на просторі $\mathcal{X}_\infty^s$ називається *блочно-симетричним (векторно-симетричним)*, якщо:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m)} \ldots)$$

де $x_i \in \mathbb{C}^s$ і σ – довільна підстановка на множині $\mathbb{N}$. Позначимо $\mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ — алгебру блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі $\mathcal{X}_\infty^s$ і $\mathcal{M}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ — множину характерів (комплексних гоморфізмів) алгебри $\mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$.

У доповіді буде введено поняття симетричної згортки для елементів множини $\mathcal{M}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ і описано у частинних випадках спектр алгебри $\mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$.

[1] *Kravtsiv V.V., Zagorodnyuk A.V.* On algebraic bases of algebras of block-symmetric polynomials on Banach spaces // Matematychni Studii. — 2012.

НОВИЙ ОПИС ВИНЯТКОВОЇ МНОЖИНИ У НЕРІВНОСТІ ТИПУ ВІМАНА ДЛЯ ІНТЕГРАЛІВ ЛАПЛАСА–СТІЛТ'ЄСА

Зікрач Дмитро Юрійович

Українська академія друкарства

zikrach.dm@gmail.com

Скасків Олег Богданович

Львівський національний університет імені Івана Франка

matstud@franko.lviv.ua

Нехай $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Для $x = (x_1, \ldots, x_p), y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p_+, p \geq 2$ вживатимемо наступні позначення

$$\|x\| = \sum_{i=1}^p x_i, \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^p x_i y_i, |x| = \left(\sum_{i=1}^p x_i^2\right)^{1/2}.$$

Нехай ν — зліченно-адитивна невід'ємна на $\mathbb{R}^p_+$ міра з необмеженим носієм supp ν, $f(x)$ — довільна невід'ємна ν-вимірна функція на $\mathbb{R}^p_+$. Через $\mathcal{I}^p(\nu)$ позначимо клас функцій $F\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, зображуваних збіжним для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p$ інтегралом вигляду

$$F(\sigma) = \int_{\mathbb{R}^p_+} f(x) e^{\langle \sigma, x\rangle} \nu(dx). \tag{1}$$

Для $F \in \mathcal{I}^p(\nu), \sigma \in \mathbb{R}^p_+$ та $t > 0$ позначимо

$$\mu_*(\sigma, F) = \sup\{f(x) e^{\langle \sigma, x\rangle}\colon x \in \text{supp } \nu\}, \nu_0(0, t] = \nu\{x \in \mathbb{R}^p_+\colon \|x\| \leq t\}.$$

Теорема. *Нехай $F \in \mathcal{I}^p(\nu)$. Якщо виконується умова*

$$(\exists\ q > 0)\colon \quad \int_{t_0}^{+\infty} \frac{(\nu_0(0, t])^q}{t^2} dt < +\infty, \tag{2}$$

то співвідношення

$$F(\sigma) \leq o\big(\mu_*(\sigma, F) \ln^{1/q} \mu_*(\sigma, F)\big) \tag{3}$$

виконується при $|\sigma| \to +\infty, \sigma \in K\backslash E$ для кожного конуса $K \subset \mathbb{R}^p_+$ з вершиною в початку координат O такого, що $\overline{K}\backslash\{O\} \subset \mathbb{R}^p_+$, причому для множини E виконується

$$\int_{E \cap K} \frac{d\sigma_1 \ldots d\sigma_p}{|\sigma|^{\alpha - 1}} < +\infty.$$

Наступна теорема, вказує на те, що оцінку (3) (в загальному) і саме твердження теореми 2 в класі $\mathcal{I}^p(\nu)$ істотно покращити не можна.

Теорема. *Для кожного $q > 0$ існують міра ν, для якої виконується умова (2) і для кожного $\varepsilon > 0$*

$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{(\nu_0(0,t])^{q+\varepsilon}}{t^2} dt = +\infty,$$

а функція $F \in \mathcal{I}^p(\nu)$ такі, що для кожного $\varepsilon > 0$ і для кожного непорожнього конуса K з вершиною в початку координат O такого, що $\overline{K} \backslash \{O\} \subset \mathbb{R}^p_+$, виконується

$$\frac{F(\sigma)}{\mu_*(\sigma, F)(\ln \mu_*(\sigma, F))^{1/q-\varepsilon}} \to +\infty \quad (|\sigma| \to +\infty, \sigma \in K).$$

НАБЛИЖЕННЯ (ψ,β)–ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ ІНТЕГРАЛАМИ ВЕЙЄРШТРАССА В СЕРЕДНЬОМУ

Ю. І. Харкевич, І. В. Кальчук

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк

kalchuk_i@ukr.net

Нехай L — простір 2π–періодичних сумовних на періоді функцій із нормою $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

Нехай $f(x) \in L$ і $S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ — ряд Фур'є функції f.

Нехай, далі, $\psi(k)$ — довільна фіксована функція натурального аргументу і β — фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\pi\beta}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\pi\beta}{2}\right) \right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ, то цю функцію називають (ψ,β)–похідною функції $f(x)$ і позначають через $f^{\psi}_{\beta}(x)$ $\quad (\varphi(x) = f^{\psi}_{\beta}(x))$. Множину усіх функцій $f(x)$, котрі задовольняють таку умову, позначають через L^{ψ}_{β}. Якщо $f \in L^{\psi}_{\beta}$, і крім того, $f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина функцій із L, то записують, що $f \in L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Якщо в якості $\mathfrak{N}$ виступає множина $S^0_1 = \{\varphi \in L_1 : \|\varphi\|_1 \le 1,\ \varphi \perp 1\}$, то множину $L^{\psi}_{\beta} S^0_1$ позначають через $L^{\psi}_{\beta,1}$ (див., наприклад, [1]).

Наслідуючи О. І. Степанця через $\mathfrak{M}$ позначимо множину неперервних опуклих донизу на $[1,\infty)$ спадних до нуля функцій ψ, а через $\mathfrak{M}'$ — підмножину функцій $\psi(\cdot)$ з $\mathfrak{M}$, що задовольняють умову $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t} dt < \infty$. Нехай, далі,

$$\mathfrak{M}_0 := \Big\{ \psi \in \mathfrak{M} :\ 0 < \frac{t}{\eta(t) - t} \le K < \infty \quad \forall t \ge 1 \Big\},$$

де $\eta(t)=\eta(\psi,t)=\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$, ψ^{-1} — функція, обернена до функції ψ, а константа K може залежати від ψ.

Нехай $f(x)\in L$. Величину

$$W_\delta(f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\Big\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{k^2}{\delta}}\cos kt\Big\}dt,\quad \delta>0,$$

називають інтегралом Вейєрштрасса функції f (див., наприклад, [2]).

Робота присвячена вивченню асимптотичної поведінки при $\delta\to\infty$ величини

$$\mathcal{E}\left(L^{\psi}_{\beta,1};W_\delta\right)_1=\sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,1}}\|f(\cdot)-W_\delta(f;\cdot)\|_1.$$

Якщо в явному вигляді знайдена функція $\varphi(\delta)=\varphi(L^{\psi}_{\beta,1};\delta)$ така, що при $\delta\to\infty$ $\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1};W_\delta)_1=\varphi(\delta)+o(\varphi(\delta))$, то, наслідуючи О.І. Степанця [1], будемо казати, що розв'язана задача Колмогорова–Нікольського для класу [2] та інтеграла Вейєрштрасса в метриці простору L.

Нехай

$$\tau(u)=\tau_\delta(u;\psi)=\begin{cases}\left(1-e^{-u^2}\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})},\ 0\le u\le\frac{1}{\sqrt{\delta}},\\ \left(1-e^{-u^2}\right)\frac{\psi\left(\sqrt{\delta}u\right)}{\psi\left(\sqrt{\delta}\right)},\ u\ge\frac{1}{\sqrt{\delta}},\end{cases}$$

де $\psi(u)$ — функція, визначена і неперервна при всіх $u\ge1$.

Теорема *Нехай $\psi\in\mathfrak{M}'_0=\mathfrak{M}_0\cap\mathfrak{M}'$, функція $g(u)=u^2\psi(u)$ опукла вгору або донизу на $[b,\infty)$, $b\ge1$. Тоді при $\delta\to\infty$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}\left(L^{\psi}_{\beta,1};W_\delta\right)_1=\psi(\sqrt{\delta})A(\tau)+O\left(\frac{1}{\delta}+\frac{\psi(\sqrt{\delta})}{\sqrt{\delta}}\right),$$

де величина $A(\tau)$ означена рівністю

$$A(\tau)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt$$

і для неї справедлива оцінка

$$A(\tau)=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{1}^{\sqrt{\delta}}u\psi(u)du+\frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du\right)+O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right).$$

[1] *Степанец А.И.* Методы теории приближения. — Киев: Ин-т математики НАН Украны, 2002. — Ч.I. — 427 с.

[2] *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 407 с.

ДІАГОНАЛІ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Олена Карлова, Володимир Михайлюк, Олександр Собчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

math.analysis.chnu@gmail.com

Для відображення $f : X^2 \to Y$ відображення $g : X \to Y$, $g(x) = f(x, x)$, називатимемо *діагоналлю відображення f*.

Діагоналі нарізно неперервних функцій дійсних змінних були вивчені в роботах Р. Бера. Ним було встановлено, що діагоналі нарізно неперервних функцій двох дійсних змінних є, в точності, функціями першого класу Бера, тобто поточковими границями неперервних функцій. Починаючи з другої половини XX століття, берівська класифікація нарізно неперервних відображень та їх аналогів досить активно вивчається багатьма математиками. Зокрема, в [1] було показано, що для довільних топологічного простору X і функції $g : X \to \mathbb{R}$ $(n-1)$-го класу Бера існує нарізно неперервна функція $f : X^n \to \mathbb{R}$ з діагоналлю g. У зв'язку з цим виникає питання про діагоналі нарізно неперервних відображень зі значеннями в абстрактних просторах.

Теорема. *Нехай X – топологічний простір, (Z, λ) – метризовний рівномірно зв'язний простір, $g : X \to Z$ і виконується одна з наступних умов:*

(1) $CC(X \times X, Z) \subseteq B_1(X^2, Z)$;

(2) *X – метрично чверть-вичерпний сильно зліченно вимірний паракомпакт;*

(3) *X – метрично чверть-вичерпний простір і Z – локально опуклий;*

(4) *X – метризовний простір.*

Тоді наступні умови еквівалентні:

(i) $g \in B_1(X, Z)$;

(ii) *існує нарізно неперервне відображення $f : X^2 \to Z$ з діагоналлю g.*

Питання. *Нехай X і Z – топологічні простори такі, що діагональ кожного відображення $f \in CC(X \times X, Z)$ є відображенням першого класу Бера. Чи обов'язково має місце включення $CC(X \times X, Z) \subseteq B_1(X^2, Z)$?*

[1] ихайлюк В.В. Побудова нарізно неперервних функцій від n змінних з даним звуженням // Укр. мат. вісник. – 2006. – Т. 3, № 3. – С. 374-381.

ДВОСТОРОННІ ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ З ПІСЛЯДІЄЮ

Копач М.І., Шувар Б.К.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

kopachm2009@gmail.com

Диференціальні рівняння та інші класи операторних рівнянь із запізненням аргументу мають широке застосування при моделюванні реальних процесів у техніці, медицині, біології, економіці, фізиці, демографії та інших галузях науки і техніки. В таких моделях, що мають просторову протяжність поведінки об'єктів характеризуються не лише зміною по часу, але також часто залежить від їхнього попереднього стану. Так, наприклад, в процесах керування соціальними явищами суттєвий вплив мають ефекти інформаційного запізнення. При дослідженні поширення сигналів у каналах обернених зв'язків, що мають скінченну швидкість, яка пов'язана з інерційністю регуляторів, також потрібно враховувати запізнення.

Починаючи з другої половини XX ст. почались інтенсивні дослідження властивостей розв'язків різних класів рівнянь та їх систем, що містять запізнення. Перші теореми про існування розв'язків лінійних диференціальних рівнянь із запізненням та їх поведінку були встановленні В. Файтом, А. Д. Мишкісом, С. Б. Норкіним та іншими авторами. Динамічним системам, що описуються рівняннями із запізненням, присвячена велика кількість робіт. Відмітимо, що в багатьох випадках на рівняння із запізненням аргументу можна поширити методику дослідження звичайних диференціальних рівнянь, в яких невідомі функції залежать тільки від поточного часу.

Авторами доповіді для рівняння виду

$$x'(t) = g(t, x(t), x(\tau(t))) - h(t, x(t), x(\tau(t))),$$

де $\tau(t) = t - \Delta(t)$ є неперервною при $t \in [t_0, T]$ дійсною функцією, причому $\Delta(t) \geq 0$, $g(t, y, z)$, $h(t, y, z)$ є неперервними при $t \in [t_0, T]$, $y, z \in S(x_0, M) = \{x : |x - x_0| \leq M\}$ дійсними функціями, розв'язок якого повинен задовольняти умову $x(t) = \varphi(t)$ при $t \leq t_0$ з неперервною функцією $\varphi(t)$, встановлено теореми про існування, єдиність та двосторонні оцінки такого розв'язку. Одержані результати є продовженням досліджень з [1]. Побудовані алгоритми можна розглядати як аналоги двосторонніх методів Курпеля для диференціальних рівнянь з післядією.

[1] *Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф.,*Двосторонні наближені методи // Ів.-Франківськ: ВДВ ЦІТ, 2007. — 515 с.

МАКСИМУМ МОДУЛЯ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ І АРГУМЕНТИ КОЕФІЦІЄНТІВ КРАТНОГО СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ

А. О. Куриляк, О. Б. Скасків

Львівський національний університет ім. І.Франка

kurylyak88@gmail.ru, matstud@franko.lviv.ua

Розглядаємо цілі функції $f\colon \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}$, $p \geq 2$, вигляду $f(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n$, $z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{C}^p$, $z^n = z_1^{n_1} \ldots z_p^{n_p}$ де $\|n\| = \sum_{i=1}^{p} n_i,\ n = (n_1 \ldots n_p)$. Для $r = (r_1, \ldots, r_p) \in \mathbb{R}_+$ позначимо $r^\wedge = \max_{1\leq i\leq p} r_i,\ r^\vee = \min_{1\leq i\leq p} r_i$,

$$\mathfrak{M}_f(r) = \sum\nolimits_{\|n\|=0}^{+\infty} |a_n| r_1^{n_1} \ldots r_p^{n_p},\ M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z_i| \leq r_i, 1 \leq i \leq p\}.$$

Нехай $\mathcal{L}$ клас додатних неперервних функцій на $(-\infty, +\infty)$ і $\mathcal{L}_+$ підклас зростаючих до $+\infty$ функцій з класу $\mathcal{L}$. Через $\mathcal{L}_+^p$ позначимо клас додатних неперервних, зростаючих по кожній змінній функцій $\gamma(r_1, \ldots, r_p)$ на $\mathbb{R}^p$ таких, що $\lim_{r^\wedge \to +\infty} \gamma(r) = +\infty$.

Для $\psi \in \mathcal{L}_+^p$ через T_ψ^p позначимо клас цілих функцій f таких, що функції $f(1, \ldots, 1, z_i, 1, \ldots, 1)$ — трансцендентні для всіх $i \in \{1, \ldots, p\}$ і для деяких $n_{0i}(f) \in \mathbb{N}$ і всіх $n \notin \prod_{i=1}^{p} [0; n_{0i}(f) - 1]$

$$|a_n| \leq \exp\{-\|n\| \psi(n)\}.$$

Знайдено умови на послідовність $(|a_n|)$, за яких для функції $f \in T_\psi^p$ виконуються співвідношення

$$\mathfrak{M}_f(r) = O(M_f(r) h(\ln M_f(r))), \quad r^\vee \to +\infty,\ h \in \mathcal{L}, \tag{1}$$

$$\varphi(\ln \mathfrak{M}_f(r)) \sim \varphi(\ln M_f(r)), \quad r^\vee \to +\infty,\ \varphi \in \mathcal{L}_+. \tag{2}$$

Теорема. *Нехай $h \in \mathcal{L}, \psi \in \mathcal{L}_+^p$. Тоді для всіх цілих функцій $f \in T_\psi^p$ співвідношення (1) виконується тоді і лише тоді, коли*

$$(\forall \gamma \in \mathcal{L}_+^p)\colon \prod_{i=1}^{p} \sqrt{r_i} = O(h(\gamma(r)\psi(r))), \quad r^\vee \to +\infty.$$

Теорема. *Нехай $\varphi \in \mathcal{L}_+, \psi \in \mathcal{L}_+^p$. Якщо $\varphi(t+1) \sim \varphi(t)$, $t \to +\infty$, то для кожної цілої функції $f \in T_\psi^p$ співвідношення (2) виконується тоді і лише тоді, коли*

$$(\forall \gamma \in \mathcal{L}_+^p)\colon \quad \lim_{r^\vee \to +\infty} \varphi\Big(\gamma(r)\psi(r) + \frac{1}{2} \sum\nolimits_{i=1}^{p} \ln r_i\Big) / \varphi(\gamma(r)\psi(r)) = 1.$$

При $p = 2$ теореми 1 і 2 опубліковані в [1].

[1] *Skaskiv O. B., Kuryliak A. O.* Maximum modulus of entire functions of two variables and arguments of coefficients of double power series // Mat. Stud. – 2011. – V.36, №2. – P. 162–175.

ПРО ЗАГАЛЬНИЙ КРИТЕРІЙ ФРАКТАЛЬНОЇ ДОВІРЧОСТІ СІМЕЙСТВ ПОКРИТТІВ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Лебідь М. В., Торбін Г. М.

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова
Київ, Україна

mykola.lebid@gmail.com, torbin@imath.kiev.ua

Нехай M — фіксована обмежена підмножина дійсної прямої і Φ_M - *локально тонке сімейство покриттів* множини M (тобто таке сімейство множин, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує не більш ніж зчисленне ε–покриття множини M множинами з Φ_M). Нагадаємо (див., наприклад, [10]), що α–мірною мірою Хаусдорфа підмножини $E \subset M$ відносно заданого сімейства Φ_M називається

$$H^\alpha(E, \Phi_M) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\inf_{|E_j| \le \varepsilon} \left\{ \sum_j |E_j|^\alpha \right\} \right] = \lim_{\varepsilon \to 0} m_\varepsilon^\alpha(E, \Phi_M),$$

де інфімум береться по всеможливих не більш ніж зчисленних ε–покриттях $\{E_j\}$ множини E, $E_j \in \Phi_M$. Якщо Φ_M — сімейство всіх борелівських підмножин числової прямої, або сімейство всіх інтервалів (відрізків) числової прямої, то величина $H^\alpha(E, \Phi_M)$ співпадає з класичною мірою Хаусдорфа $H^\alpha(E)$.

Означення. *Невід'ємне число*

$$\dim_H(E, \Phi_M) = \inf\{\alpha : \ H^\alpha(E, \Phi_M) = 0\}$$

називаеться розмірністю Хаусдорфа множини $E \subset M$ відносно сімейства Φ_M.

Якщо $M = [0, 1]$ і Φ_M — сімейство всіх $s-$адичних відрізків одиничного відрізка, то $\dim_H(E, \Phi_M)$ співпадає з класичною розмірністю Хаусдорфа-Безиковича $\dim_H(E)$ множини E (див. [6]).

Означення. *Локально тонке сімейство покриттів Φ_M називаеться довірчим на множині M, якщо* $\dim_H(E, \Phi_M) = \dim_H(E)$, $\forall E \subset M$.

Проблема знаходження необхідних і достатніх умов довірчості локально тонких систем покриттів залишалась відкритою навіть для того випадку, коли множина M співпадає з одиничним відрізком, хоча дослідження у цьому напрямку ведуться відносно давно. Відомі, зокрема, деякі достатні умови довірчості для локально тонких систем покриттів, що породжуються розкладами дійсних чисел зі скінченним алфавітом [**?**, 6, 5, 8, 10, 9] та розкладами дійсних чисел з нескінченним алфавітом [3, 7]. Приклади недовірчих систем покриттів одиничного відрізка донедавна (до 2008 року) були відсутні. Тому досить несподіваним виявився результат про недовірчість системи циліндричних відрізків ланцюгового розкладу дійсних чисел ([4]). Базуючись на підході, який був розвинений в [4], в роботі [3] знайдено достатні умови недовірчості систем циліндричних відрізків Q_∞-розкладів (див. [10] для опису Q_∞-розкладів).

В доповіді пропонуються нові результати та методи доведення довірчості (недовірчості) локально тонких систем покриттів. Перший з основних результатів доповіді дає загальний критерій довірчості.

Теорема. *Нехай* Φ *- локально тонка сім'я покриттів* $[0,1]$. Φ *є довірчою тоді і тільки тоді, коли для довільних* $E \subset [0,1]$, $\alpha \in (0,1]$ *і* $\delta \in (0,\alpha)$ *виконується наступна нерівність:*

$$H^{\alpha}(E,\Phi) \leq H^{\alpha-\delta}(E). \tag{1}$$

Ця теорема природнім чином узагальнюється на загальний випадок метричних просторів.

Зазначимо, що до цього часу існуючі методи не давали змоги дослідити проблему довірчості сімейств циліндричних відрізків, що породжені розкладами дійсних чисел зі змінним (зростаючим) алфавітом. Прикладом таких розкладів є розклади дійсних чисел рядами Кантора.

Нехай $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – деяка фіксована послідовність натуральних чисел, $n_k > 1, \forall k \in \mathbb{N}$. Вираз

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{n_1 n_2 \ldots n_k}, \ \alpha_k(x) \in \{0,1,\ldots,n_k-1\}$$

називається зображенням дійсного числа $x \in [0,1]$ рядом Кантора.

Використавши зазначений вище критерій та спеціальну техніку, нами отримано необхідні і достатні умови довірчості для сімейств циліндричних відрізків, породжених зображеннями дійсних чисел рядами Кантора.

Теорема. *Сім'я циліндричних відрізків, що породжена зображенням дійсних чисел рядом Кантора, є довірчою на одиничному відрізку тоді і тільки тоді, коли*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln n_k}{\ln n_1 n_2 \ldots n_{k-1}} = 0. \tag{2}$$

У доповіді також обговорюються застосування отриманих результатів до аналізу фрактальних властивостей нескінченних узагальнених згорток Бернуллі ([1]).

[1] *S. Albeverio, G. Torbin*, On fine fractal properties of generalized infinite Bernoulli convolutions, *Bull. Sci. Math.*, **vol. 132, no. 8**, (2008), P. 711–727.

[2] *S. Albeverio, G. Torbin*, Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^*-digits, *Bull. Sci. Math.*, **vol. 129, no. 4**, (2005), P. 356–367.

[3] *S. Albeverio, Yu. Kondratiev, R. Nikiforov, G. Torbin*, On fractal phenomena connected with infinite linear IFS and related singular probability measures, *Submitted to Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.*.

[4] *Yu. Peres, G. Torbin*, Continued fractions and dimensional gaps, *in preparation.*

[5] *C. Cutler*, A note on equivalent interval covering systems for Hausdorff dimension on R, *Internat. J. Math. and Math. Sci.*, **vol. 2, no. 4**, (1988), P. 643–650.

[6] *П. Биллингслей* Эргодическая теория и информация. *М.: Мир*, (1969),—238 с.

[7] *Р. Нікіфоров, Г. Торбін*, Ергодичні властивості Q_∞-зображень та фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними Q_∞-символами. *Київ: Вид-во НПУ імені Драгоманова*, **no. 9**, (2008), с. 80–102.

[8] *М. Працьовитий*, Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. *Київ: Вид-во НПУ імені Драгоманова*, (1998), —296 с.

[9] *М. Працьовитий, Г. Торбін*, Аналітичне (символьне) представлення неперервних перетворень R^1, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича, *Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки.*, **no. 4**, (2003),с. 207–215.

[10] *А. Турбін, М. Працьовитий* Фрактальные множества, функции, распределения. *Киев: Наук.думка*, (1992), —208 с.

ПОБУДОВА $P_\mathcal{A}$-ФУНКЦІЙ З ДАНИМ КОЛИВАННЯМ

Маслюченко Олександр Володимирович

Буковинський державний фінансово-економічний університет, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ovmasl@gmail.com

Задача про побудову функцій з даним коливанням, яка йде від П. Костирка, досліджувалася багатьма авторами для різних функціональних класів (функції певного класу бера, нарізно неперервні чи диференційовні функцій, квазінеперервні функцій, тощо [1 – 7]). Тут ми подаємо результати дослідження цього питання для загального класу $P_\mathcal{A}$-функцій. Введемо деякі поняття.

Нехай X – топологічний простір. Сім'ю $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$ непорожніх систем $\mathcal{A}_x \subseteq 2^X$ називатимемо *структурою на* X. Множину M називатимемо *$\mathcal{A}$-околом точки* $x \in X$, якщо існує таке $A \in \mathcal{A}_x$, що $A \cup \{x\} \subseteq M$. Казатимемо, що множина M є *$\mathcal{A}$-околом множини* $E \subseteq X$, якщо вона є $\mathcal{A}$-околом кожної точки $x \in E$. Структуру $\mathcal{A}$ називатимемо *узгодженою*, якщо для довільних точки $x \in X$, її околу U і її $\mathcal{A}$-околу

M перетин $M \cap U$ є $\mathcal{A}$-околом точки x. Замкнену множину $F \subseteq X$ називатимемо *$\mathcal{A}$-мізерною*, якщо F має деякий ніде не щільний $\mathcal{A}$-окіл. Множину $E \subseteq X$ називатимемо *σ-$\mathcal{A}$-мізерною*, якщо існує послідовність $\mathcal{A}$-мізерних множин F_n, така, що $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$.

Нехай P – деяка властивість відображень на X. Простір X називається *P-регулярним*, якщо для довільної точки $x \in X$, її околу U s числа $\gamma > 0$ існує така неперервна P-функція $f : X \to [0, \gamma]$, що $\operatorname{supp} f \subseteq U$ і $f(x) = \gamma$. Казатимемо, що простір X є *колективно P-регулярним*, якщо для довільної замкненої дискретної множини S і неперервної знизу функції $u : X \to \mathbb{R}_+$, для якої точки $s \in S$ є точками локального мінімума існує неперервна P-функція $f : X \to \mathbb{R}_+$, для якої $f \leq u$ і $f(s) = u(s)$ при $s \in S$. Ясно, що кожний паракомпактний P-регулярний простір є колективно P-регулярним.

Функція $f : X \to Y$ називається *локальною P-функцією в точці $x \in X$,* якщо існує така P-функція $f_x : X \to Y$, яка рівна f в деякому околі точки x. Казатимемо, що f є *локальною P функцією*, якщо вона є такою в кожній точці $x \in X$. Функція $f : X \to Y$ називається *$P_{\mathcal{A}}$-функцією*, якщо для довільного $x \in X$ існує такий $\mathcal{A}$-окіл M_x точки x і P-функція $f_x : X \to Y$, для якої $f|_{M_x} = f_x|_{M_x}$. Властивість P називатимемо *локально замкненою*, якщо для довільного $x \in X$ і довільних $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ таких, що $f_n \rightrightarrows f$, з того, що f_n є локальною P-функціями в точці x випливає, що такою ж буде і функція f.

Топологічний простір X називається *дискретно досяжним*, якщо для довільної замкненої ніде мне щільної множини і довільної спадної послідовності відкритих множини G_n, таких, що $E \subseteq \overline{G}_n \setminus G_n$ існують замкнені дискретні множини $A_n \subseteq G_n$, такі, що $E = \bigcap\limits_{n=1^\infty} \overline{\bigcup\limits_{k \geq n} A_k}$. В [5, 6] було доведено, що метризовні і близькі до них простори є дискретно досяжними.

Теорема. *Нехай P' – лінійна властивість функцій P'' – локально замкнена лінійна властивість функцій,$P = P' \wedge P''$, X – досконало нормальний дискретно досяжний колективно P-регулярний простір, $\mathcal{A}'$ та $\mathcal{A}''$ – деякі узгоджені структури на X і $g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ – напівнеперервна зверху функція, для якої множина $S' = \overline{\operatorname{supp} g}$ є σ-$\mathcal{A}'$-мізерною а множина $S'' = \operatorname{supp} g \cup \overline{\operatorname{int} \operatorname{supp} g}$ є σ-$\mathcal{A}''$-мізерною. Тоді існує функція $f : X \to \mathbb{R}$ першого класу Бера, яка є $P'_{\mathcal{A}'}$-функцією і $P''_{\mathcal{A}''}$-функцією, причому $\omega_f = g$.*

[1] Kostyrko P. *Some properties of oscilation*// Math. Slovaca. – 1980. – **30.** – P.157–162.

[2] Ewert J., Ponomarev S.P. *Oscillation and ω–primitives*// Real Anal. Exchange . – 2002. – **26**. – P. 687–702.

[3] Ewert J., Ponomarev S.P.. *On the existance of ω-primitives on arbitrary metric spaces* // Math. Slovaca. – 2003. – **53**. – P.51–57.

[4] Маслюченко О.В. *Побудова ω-первісних: коливання суми функцій* // Математичний вісник НТШ. – **5**. – 2008. – С.151–163.

[5] Маслюченко О.В. *Побудова ω-первісних: сильно досяжні простори* // Математичний вісник НТШ. – **6**. – 2009. – С.155–178.

[6] Maslyuchenko O.V. *The oscillation of quasi-continuous functions on pairwise attainable spaces* // Houston J. of Math.– 2009. – **35**, N1. – P. 113–130.

[7] Герасимчук В.Г., Маслюченко О.В. *Коливання нарізно локально ліпшицевих функцій* // Карпатські математичні публікації.–2011.–**3**, N1.–С.22–33.

ВИЧЕРПНІСТЬ ГРЕБІНЦЯ СІДРА

Володимир Маслюченко, Оксана Мироник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

math.analysis.chnu@gmail.com

У праці [1] Дж. Сідр увів три класи просторів M_i $(i = 1, 2, 3)$ з допомогою відповідно баз, квазібаз чи парабаз, які зберігають замикання, при цьому $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3$. Пізніше К. Борґес [2] запропонував інший підхід до означення просторів з класу M_3, ввівши для них нову назву: вичерпні простори (stratifiable spaces). Щодо еквівалентності цих двох означень у [2] зроблено лише скупі вказівки з посиланням на дисертацію Дж. Сідра (1959). Крім того, Дж. Сідр навів приклад [1, example 9.1] неметризовного простору класу M_1, який задовольняє першу аксіому зліченності. Як і відома площина Немицького [3, с. 47], цей простір – це півплощина $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ зі спеціальним чином введеною топологічною структурою. Його ми позначаємо символом $\mathbb{M}$ і називаємо *площиною Сідра*. Оскільки $M_1 \subseteq M_3$, то, як оголошено в [2], площина Сідра буде вичерпним простором. Оскільки реконструювати доведення цього факту за статею [2] непросто, то постало питання про його безпосереднє доведення. В результаті пошуків такого доведення ми ввели загальніші простори і дослідили коли на цих просторах можна явно побудувати вичерпування.

Нехай X і Y – топологічні простори і $\omega \in Y$. *Гребінцем Сідра* ми називаємо топологічний простір $P = X \times Y_\omega$, який складається з точок добутку $X \times Y$ і топологічна структура на ньому вводиться так: множина W в P буде околом точки $p = (x, y)$, $y \neq \omega$, якщо існує окіл V точки y в Y, такий, що $\{x\} \times V \subseteq W$, і околом точки $p = (x, \omega)$, якщо існують окіл U точки x в X і окіл V точки ω в Y, такі, що $(U \times V) \setminus (\{x\} \times \dot{V}) \subseteq W$, де $\dot{V} = V \setminus \{\omega\}$. Якщо $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, +\infty)$ і $\omega = 0$, то $X \times Y_\omega$ – це площина Сідра.

Нехай X і Y – метризовні простори, топологічні структури яких породжені відповідно метриками ρ і d. Для відкритих множин G і H відповідно в просторах X і Y і номера n покладемо

$$A_n(G) = \left\{x \in G : \rho(x, X \setminus G) \geq \frac{1}{n}\right\} \text{ і } B_n(H) = \left\{y \in H : d(y, Y \setminus H) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

(ми вважаємо, що $\rho(x, \varnothing) = d(y, \varnothing) = +\infty$ для довільних $x \in X$ і $y \in Y$). Для $\delta \geq 0$ розглянемо замкнені кулі $V_\delta[y] = \{v \in Y : d(v, y) \leq \delta\}$ у просторі Y.

Для відкритої множини U в просторі $P = X \times Y_\omega$ розглянемо відкриту множину $G = G(U) = \{x \in X : (x, \omega) \in U\}$ у просторі X і визначимо функцію $h = h_U : G \to [0, +\infty]$, поклавши
$$h(x) = \sup\{\delta \geq 0 : V_\delta[\omega] \subseteq U^x\},$$
де $U^x = \{y \in Y : (x, y) \in U\}$. Нехай $h_n = \frac{n-1}{n} h$ і $\dot{U}^x = U^x \setminus \{\omega\}$. Визначимо множини

$$C_n(U) = \bigcup_{x \in \mathrm{pr}_X(U)} \{x\} \times B_n(\dot{U}^x),\ D_n(U) = \bigcup_{x \in A_n(G(U))} \{x\} \times V_{h_n(x)}[\omega]$$

і

$$F_n(U) = C_n(U) \cup D_n(U).$$

Теорема. *Для метризовних просторів X і Y, топології яких породжуються відповідно метриками ρ і d, відображення $(U, n) \mapsto F_n(U)$ є вичерпуванням гребінця Сідра $P = X \times Y_\omega$.*

[1] *Ceder J.* Some generalizations of metric spaces // Pacif. J. Math. – 1961.–**11**. – P. 105-126.

[2] *Borges C.* On stratifiable spaces // Pacif. J. Math. – 1966.–**17**, N1. – P. 1-16.

[3] *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ ВЛАСТИВОСТІ ГАНА

Нестеренко Василь Володимирович

Буковинський державний фінансово-економічний університет, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

math.analysis.chnu@gmail.com

Дослідження задачі Діні [1], про зв'язки між нарізною та сукупною неперервністю, розпочате в класичних працях Р.Бера та В.Осгуда найшло свое продовження в працях багатьох математиків XX століття. Одним із варіантів задачі Діні є питання про наявність у відображення $f : X \times Y \to Z$ властивості Гана [2], тобто існування залишкової множини $A \subseteq X$, такої, що $A \times Y \subseteq C(f)$, де $C(f)$ – множина точок неперервності відображення f. Починаючи з умови нарізної неперервності відображень $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, знайдено велику кількість достатніх умов існування у відображення $f : X \times Y \to Z$ властивості Гана. Ці умови стосуються як самого відображення f, так і просторів X, Y та Z. Питання про необхідні і достатні умови володіння властивістю Гана відображення f досі не розглядалися.

В даному повідомлені буде наведено необхідні і достатні умови володіння властивістю Гана відображення $f : X \times Y \to Z$, коли X – берівський простір, Y – компактний простір, що задовольняє другу аксіому зліченності і Z – метричний простір.

Нехай X і Y – топологічні простори, а Z – метричний простір. Для функції $f : X \times Y \to Z$ позначимо $f^x(y) = f_y(x) = f(x,y)$. Ми кажемо, що функція $f : X \times Y \to Z$ *задовольняє умову (A)*, якщо для довільних чисел $0 < \alpha < \beta$, довільних відкритих непорожніх множин U в X і V в Y, довільної множини $E \subseteq X$ щільної в U, для яких $\omega_f(E \times V) < \alpha$, існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $\omega_f(U \times V) < \beta$. Функція $f : X \times Y \to Z$ *задовольняє умову (C)*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$, для довільної множини E другої категорії в X і довільної відкритої непорожньої множини V в Y, існують десь щільна множина E_1 в X і точка $y \in V$, такі, що $E_1 \subseteq E$ і $\omega_{f_y}(E_1) < \varepsilon$.

Мають місце наступні результати.

Теорема 1. *Нехай X – топологічний простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метричний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови (A) та (C) і f^x – неперервна для всіх x з деякої залишкової множини M в X. Тоді функція f має властивість Гана.*

Теорема 2. *Нехай X – берівський простір, Y – компактний простір, Z – метричний простір, $f : X \times Y \to Z$ – функція, яка має властивість Гана. Тоді функція f задовольняє умови (A) і (C) та існує залишкова множина M в X, така, що f^x неперервна для всіх $x \in M$.*

З теорем 1 і 2 одержуються наступна характеристична теорема.

Теорема 3. *Нехай X – берівський простір, Y – компактний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метричний простір і $f : X \times Y \to Z$ – функція. Тоді для того, щоб функція f задовольняла властивість Гана необхідно і досить, щоб f задовольняла умови (A) і (C) та існувала залишкова множина M в X, така, що f^x була неперервна для всіх $x \in M$.*

[1] *Маслюченко В.К.* Простори Гана і задача Діні // Мат. методи і фіз-мех. поля. – 1998. – 41, N4. – С.39 - 45.

[2] *Маслюченко В.К., Михайлюк О.В., Собчук О.В.* Дослідження про нарізно неперервні відображення // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С. 192 - 246.

ТЕОРІЯ РИТМІЧНОСТІ В ЇЇ ІСТОРИЧНОМУ РОЗВИТКУ
(Частина перша)

Приймак М. В.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

Kaf_KN@tu.edu.te.ua

Вступ. Нас цікавить історія виникнення та розвиток теорії ритмічних (коливальних, циклічних, стохастично періодичних тощо) сигналів, явищ, процесів. Найбільш природній шлях дослідження історії – це йти шляхом «посилань» на попередників. Тут можливі два варіанти: або на деяких кроках ми доходимо до «істини», або ж зустрічаються посилання на джерела, що є «недоступними» як за «віком» так і за їх місцезнаходженням. Тому для дослідження цього питання ми використовували роботи історико-математичного характеру, що викликають довіру.

Щодо питання про ритмічність, то тут побутує вагома думка, що за модель ритмічності може бути вибрана та чи інша періодична функція, а методи дослідження таких функцій ґрунтуються на теорії тригонометричних рядів Фур'є. Щодо виникнення самих рядів, то іноді без будь-яких застережень їх пов'язують виключно із Ж.Б.Фур'є (1768-1830). Наприклад, в розділі «Хронологія» [1, с.569] говориться, що «Фур'є в 1811 році розробив вчення про подання функції у вигляді тригонометричного ряду».

Однак теорія, що описує ритмічність, має набагато глибшу історію. Багато в чому її виникнення пов'язано із дослідженнями коливання струни. Пік цих досліджень, що ввійшли в історію як «спір про коливання струни» (рос.: спор о колеблющейся струне), припадає на майже все вісімнадцяте століття. Учасниками спору було ціле покоління визначних математиків, зокрема Д. Бернуллі, Ейлер, Лагранж, Д'Аламбер. В [2, с.241] відзначається, що цей «спір» – один із найплодовитіших в математиці, він став джерелом таких різних областей науки, як диференціальні рівняння в частинних похідних, ряди Фур'є, теорія множин».

Щодо самої струни, то перші спогади про дослідження її коливань сягають часів Піфагора (біля 570-біля 500 р.р. до н.е.) [1, с.379]. Піфагор і його послідовники, як і вавилоняни, були віддані магії чисел, зокрема цілим числам [2, с.23]. Саме вони відкрили залежність тону звучання від довжини струни: її поділ на дві підвищує висоту тону на октаву, поділ на три підвищує висоту ще на одну п'яту і т.д. Це велике відкриття – перший ключ до того, що фізичний світ може мати в своїй основі математичну структуру [2, с.23]. Далі в цій же книзі говориться, що в античні часи різні автори припускали, що фізичною основою висоти коливань була частота. Але лише в 17-му столітті (1615 р.) наставник Декарта, голландський математик і механік Ісак Бекман (біля 1570-1630) з допомогою дослідів встановив зворотну пропорційність між частотою коливань струни і її довжиною. Залежність між частотою ν і натягом T, лінійною густиною ρ і довжиною l в 1634 році експериментально відкрив французький монах Марен Мерсенн (1588-1648): $\nu = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$. На основі цієї формули формулюються три закони Мерсенна, що є добре відомими в рівняннях математичної фізики. Уточнююче зауваження щодо результату Мерсенна зустрічаємо в [3, с.66; 5, с.439], де говориться, що питаннями залежності висоти тону від довжини струни займалися Р.Декарт (1596-1650), Галілей (1564-1642). Однак книга Галілея «Discorsi», де викладені його акустичні дослідження, з'явилася на два роки пізніше, ніж книга Мерсенна «Harmonie universelle». Остання з'явилася в 1636 році і визнана першою науковою працею в цій області. Далі в [3, с.66] наводяться міркування, що «не можна, однак, припускати, щоб вчитель в даному випадку слідував за учнем». Мерсенн знаходився в постійному спілкуванні з Галілеєм, і тому його (Галілея) роботи задовго до їх появи в друці були відомі Мерсенну. Доказом цього може слугувати і те, що дослідження коливань струни в Мерсенна більш повні і носять характер докладнішої розробки закону, встановленого Галілеєм.

Щодо самого Мерсенна, то варто відзначити, що в 1604-1609 роках він навчався в єзуїтському коледжі разом із Р.Декартом, в 1609-1611 роках – в Сорбоні. Як науковець, переписувався із багатьма вченими (крім Г.Галілея - із П.Ферма, Б.Паскалем, Х.Гюгенсом та ін.), ввійшов в історію науки і як організатор і зв'язковий між провідними вченими Європи. Біля 1630 року він організував гурток вчених, на основі якого в 1666 р. заснована Французька академія наук.

Результати Бекмана і Мерсенна були отримані, виходячи із фізичних експериментів коливання струн. Математична теорія коливання розпочинається з робіт англійського математика Брука Тейлора (1685-1731). Як висвітлюється в [4, с.474, 475], виходячи із понять механіки і геометрії, Тейлор показав (1713-1714), що при поперечному коливанні прискорення точки струни $\frac{d^2y}{dt^2}$ зворотно пропорційне радіусу кривизни $\rho = \frac{\left[1+(dy/dx)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{(d^2y/dt^2)}$, тобто $d^2y/dt^2 = \frac{d^2y}{dt^2} \times \frac{1}{\left[1+(dy/dx)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$. Останнє співвідношення є, по суті, проявом другого закону Ньютона: елемент струни, до якого прикладена сила, отримує прискорення $\frac{d^2y}{dt^2}$. Використовуючи деякі перетворення рівняння і припущення, що кінці струни закріплені і в початковий момент часу співпадають із віссю абсцис, Тейлор отримав розв'язок рівняння у вигляді $y = A \sin bx \cdot \sin bt$. Форма розв'язку у вигляді добутку двох функцій дозволяє стверджувати, що Тейлор започаткував метод, відомий тепер як метод розділення змінних або метод Фур'є.

В 1728 році були опубліковані дослідження І.Бернуллі (1667-1748) «Про струни, що коливаються» (рос.: «О колеблющихся струнах»). Після досліджень Тейлора, І.Бернуллі проблема рівняння коливань струни та його розв'язку привернула увагу Д.Бернуллі (1700-1782), Д'Аламбера (1717-1783), Ейлера (1707-1783), пізніше Лагранжа (1736-1813), Фур'є (1768-1830) та інших.

Початок інтенсивного вивчення вільних коливань скінченої ідеальної однорідної струни поклала стаття Д'Аламбера, відправлена ним в Берлінську академію наук наприкінці 1746 року та із схвалення Ейлера надрукована в томі її записок за 1747 рік (друга половина статті була відіслана в Берлін в 1747 році). Згідно [5, с.439; 6, с.221-223], основний зміст статті – в сучасному позначенні – складав пошук загального розв'язку записаного ним хвильового рівняння $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ у вигляді суми двох довільних функцій $y = f_1(x + t) + f_2(x - t)$, а потім визначення цих функцій із початкових і граничних умов $y(x,0)=\varphi_1(x,0), \frac{dy(x,0)}{dt}=\varphi_2(x,0), y(0,t)=y(l,t)=0$. Щодо умов на самі функції $\varphi_1(x,0)$ $\varphi_2(x,0)$ для існування розв'язку, то частину цих умов він сформулював явно, а одну із них висловив в «Додатку» до своєї першої роботи, надрукованому в Берлінській академії за 1750 рік (1752). Ця остання умова полягала в тому, щоб початкова форма струни, тобто функція $\varphi_1(x)$ і крива швидкостей, тобто функція $\varphi_2(x)$ (а значить і функції f_1 і f_2, що входять в загальний розв'язок диференціального рівняння задачі), виражалися кожна деяким одним визначеним рівнянням.

Щоб виявити основну причину виникнення «спору» і його подальший розвиток, вкажемо на погляд Ейлера щодо понять неперервності і розривності функцій [5, с.439; 6, с.221-223]. Ейлер в другому томі «Вступу в аналіз нескінчених», що вийшов із друку в 1744 році, вважав функцію (криву) неперервною, якщо в усій області існування вона визначається одним аналітичним виразом, а функція, що цій умові не задовольняє – розривною, причому питання про характер допустимих аналітичних виразів поставлене чітко не було. З цієї точки зору, наприклад, дві вітки гіперболи $xy=1$ утворюють неперервну криву, а промені бісектрис $y=-1$ при $x\leq 0$ і при $x>0$ - лінію розривну. До розривних Ейлер відносив і криві, проведені довільним начерком руки. Користуючись поняттями в розумінні Ейлера, можна сказати, що Д'Аламбер вважав допустимими в задачах математичної фізики виключно неперервні функції (крім деяких інших обмежень, про які мова тут не йде). В «Додатку», до першого мемуару про струну, надрукованому в 1752 році, він стверджував, що розв'язок задачі його методом можна отримати лише у випадках, коли різні форми струни, що коливається, охоплюються одним і тим же рівнянням.

Слідом за Д'Аламбером задачею про струну зайнявся і Ейлер, і як говориться в [6, с.224], подав свою статтю з цього питання в Берлінську академію 16 травня 1748 року. Відштовхуючись від багатьох результатів, Ейлер відкинув вимогу Д'Аламбера обмежити клас допустимих функцій неперервними (в розумінні Ейлера). З його точки зору початкова форма струни і крива швидкостей можуть бути настільки ж довільними, як будь-яка суцільна (однозначна) крива, довільно проведена начерком руки, незалежно від того, чи виражається ця крива одним рівнянням, декількома чи взагалі не виражається з допомогою будь-яких рівнянь. Д'Аламбер не погодився з Ейлером, і так розпочався спір про природу функцій, що входять в розв'язок рівняння в частинних похідних. В цей спір були втягнені майже всі великі математики декількох поколінь. Стисло висловлену суть спору знаходимо в [7; 8, с.314-334; 9, с.116]. Фактично спір йшов про те, що розуміти під поняттям (словом) «функція»: для Д'Аламбера це був довільний аналітичний вираз (тобто функція повинна задаватися аналітично), для Ейлера це була довільно накреслена крива (тобто функція може залежати від змінної так, як ордината точки, що лежить на «накресленій вільним рухом руки» кривій, від її абсциси).

Пізніше в спір струтився Д.Бернуллі. Він вже мав деякий досвід у вивченні питань акустики і розумів, що струна, яка звучить, має нескінчену множину головних коливань. Із дослідження систем дискретних точок вів вивів висновок, що найбільш загальний рух струни можна отримати додаванням головних коливань. Інакше кажучи, Д.Бернуллі стверджував [9, с.116], що завжди можна підібрати тригонометричний ряд, який задовольняє як рівнянню, так і початковим і крайовим умовам у випадку обмеженої струни. Ідеї Д.Бернуллі визріли в 1753 році [8, с.319] і висновок, до якого він прийшов, полягав в тому, що рівняння

$$y = a \sin x \cos t + \beta \sin 2x \cos 2t + \gamma \sin 3x \cos 3t + ...$$

охоплює як розв'язок Д'Аламбера, так і Ейлера. Таким чином Д.Бернуллі прийшов до відкриття [5, с.441] фундаментального в математичній фізиці принципу додавання лінійних коливань і методу розв'язку рівняння в частинних похідних, згодом названого методом Фур'є, або методом стоячих хвиль. Д.Бернуллі також висловлював впевненість в тому, що при відповідному виборі коефіцієнтів $\alpha, \beta, \gamma, ...$ тригонометричний ряд може виражати довільну криву.

Д.Бернуллі розумів [8, с.320] значення і суть відкритого ним **принципу суперпозиції** (додавання) коливань, але математично він не зміг його обґрунтувати, чим викликав заперечення і Д'Аламбера і Ейлера. Крім цього Д.Бернуллі не зміг [10, с.32] вказати метод визначення коефіцієнтів в своєму розв'язку у вигляді нескінченого тригонометричного ряду.

Коли математики спорили про математичні принципи, поставлені проблемою «струни», в дискусію вступає Лагранж (1736-1813). В цій тривалій дискусії він приєднався до Ейлера і став в опозицію до Д'Аламбера і Д.Бернуллі) [7; 8, с.320]. Лагранж ставить на перший план проблему інтерполювання. Беручи одну із «неправильних» функцій Ейлера і вибравши на ній дискретну множину точок, Лагранж шукає інтерполяційну криву, яка проходить через ці точки, причому інтерполяцію він бере лінійну тригонометричну. На цьому шляху Лагранж отримує тригонометричні ряди, названі пізніше рядами Фур'є. Далі в [7; 8, с.320] зазначається, що варто було зробити перестановку границь, і метод знаходження коефіцієнтів Фур'я був би відкритий, а разом з ним були б закінчені і всі дебати.

Як відзначено в [10, с.39], віковий спір з основних питань математики був розв'язаний Фур'є (1768-1830) і розв'язаний на користь Д.Бернуллі. В 1807 році він подав в Паризьку Академію наук статтю про розповсюдження тепла всередині твердих тіл. В цій роботі він дав правило [7; 8, с.323] обчислення коефіцієнтів a_n і b_n тригонометричного ряду $\frac{a_0}{2} + \sum a_n \; cosnx + b_n \sin nx$, що відображає «довільно задану» функцію $f(x)$. Формули ці
$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$ і $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$, що зразу ж отримали ім'я «формули Фур'є», категорично розв'язали спір на користь Д.Бернуллі. Головним переченням проти Д.Бернуллі була відсутність правила обчислення коефіцієнтів тригонометричного ряду, що зображає «довільну» функцію $f(x)$.

Щодо історії опублікування статті Фур'є, то згідно [10, с.39], ця стаття справила таке неочікуване і глибоке враження на весь математичний світ, що Паризька Академія наук, бажаючи допомогти автору вдосконалити свою роботу, постановила об'явити питання про розповсюдження тепла темою великої математичної премії за 1812 рік. В кінці 1811 року Фур'є подав свій мемуари як конкурсну роботу. Однак через певні причини робота Фур'є була опублікована лише в 1824-1826 роках.

Після робіт Фур'є поняття функції а також поняття її ряду Фур'є уточнювалося, вдосконалювалося. До цього процесу прилучилися великі вчені, зокрема Діріхле, Лобачевський, Коші, Вейерштрас, Лебег, Лузін та багато інших.

На сьогодні певний інтерес становлять функції із змінним періодом та ряди Фур'є таких функцій [11].

[1] *Боголюбов А.Н.*Математики и механики. Биографический справочник. Киев: Наукова думка, 1983. – 638 с.

[2] *Стиллвелл Д.*Математика и ее история. – Москва-Ижевск, 2004. – 530 с.

[3] *Розенберг Ф.*История физики. М.: Государственное технико-теоретическое издательство. – 1933.i

[4] *Тимченко И. Ю.*Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций. – Одесса. – 1899.

[5] *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений.

[6] *Юшкевич А.П.* К истории спора о колеблющейся струне (Даламбер о применении «разрывных» функций) // Историко-математические исследования. Выпуск 20. – М.: Наука, 1975. С. 221-231.

[7] *Лузин Н.Н.*Интеграл и тригонометрический ряд. М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. – 1951. – 550 с.

[8] *Лузин Н.Н.*Функция (в математике) // БСЭ, т.59. – М.: ОГИЗ, 1935. – С.314-334.

[9] *Писаревский Б.М., Харин В.Т.*Беседы о математике и математиках. – М.: Физматлит, 2004. – 208 с.

[10] *Паплаускас А.Б.* Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега. – М.: Наука, 1966. – 276 с.

[11] *Приймак М.В.*Періодичні функції із змінним періодом та деякі їх особливості // Всеукраїнський науковий семінар «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (тези доповідей). – Івано-Франківськ, Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2010. – С. 39-41.

КОЕФІЦІЄНТИ ФУР'Є ФУНКЦІЙ ІЗ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ

Приймак М.В., Дмитроца Л.П., Сарабун Р.О.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

Kaf._KN@tu.edu.te.ua

Наявність реальних сигналів із змінним періодом стало причиною введення в [1] класу функцій із змінним періодом, які можна було б використовувати як відповідні моделі. В [2] розглядалася система тригонометричних функцій $\sin t^{\alpha}$, $\cos t^{\alpha}$, $t \geq 0$, $\alpha > 0$, і в явному вигляді записаний змінний період цієї системи: $T(t) = -t + (t^{\alpha} + 2\pi)^{1/\alpha}$. Як приклад, на рисунку 1 показані графіки змінних періодів: при $\alpha = 3/4$ період $T(t) = -t + \left(t^{3/4} + 2\pi\right)^{4/3}$; при $\alpha = 4/3$ період $T(t) = -t + \left(t^{4/3} + 2\pi\right)^{3/4}$; для порівняння при $\alpha = 1$ період $T(t) = -t + (t^{1} + 2\pi)^{1/1} = 2\pi$.

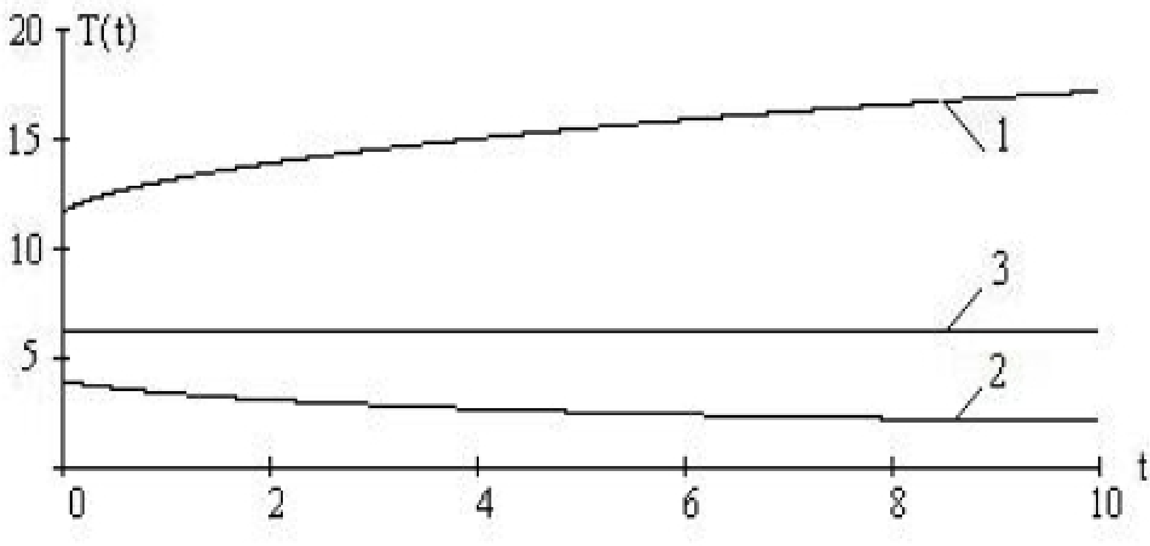

Рис. 1. Графіки змінних періодів: $T(t) = -t + \left(t^{3/4} + 2\pi\right)^{4/3}$ (графік 1), $T(t) = -t + \left(t^{4/3} + 2\pi\right)^{3/4}$ (графік 2) і для порівняння $T(t) = 2\pi$ (графік 3).

Також встановлено [2], що для кожного $\alpha > 0$ система функцій

$$1,\ \cos nt^{\alpha},\ \sin nt^{\alpha}, n = 1, 2, ..., \tag{1}$$

є ортогональною з ваговою функцією $t^{\alpha-1}$ на інтервалі $[t_0, t_0 + T(t_0)]$, де t_0 – довільна точка із області визначення $I = [0, \infty)$. Наголосимо, що кожний інтервал ортогональності $[t_0, t_0 + T(t_0)]$ має відповідну довжину, яка для кожної точки t_0 визначається значенням періоду $T(t_0)$. Норма кожної із функцій системи (1) рівна $\sqrt{\pi/\alpha}$.

Враховуючи наведені результати, постає питання про побудову для довільної функції $f(t)$, $t \in I$, змінний період якої $T(t) = -t + (t^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}$, її ряду Фур'є $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt^\alpha + b_n \sin nt^\alpha$. Як показано в [2,3], коефіцієнти ряду знаходяться за формулами

$$a_n = \frac{\alpha}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+T(t_0)} t^{\alpha-1} f(t) \cos nt^\alpha dt,$$
$$b_n = \frac{\alpha}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+T(t_0)} t^{\alpha-1} f(t) \sin nt^\alpha dt, \; n = 0, 1, ... \tag{2}$$

Перевіримо ці міркування чисельним методом. Для цього розглянемо функцію у вигляді скінченного ряду Фур'є

$$f(t) = 2 \sin t^{4/3} + 0.4167 \sin 3t^{4/3} + 0.0910 \sin 5t^{4/3}, \tag{3}$$

змінний період якої $T(t) = -t + \left(t^{4/3} + 2\pi\right)^{3/4}$ (див. рисунок 1), а графік самої функції наведений на рисунку 2.

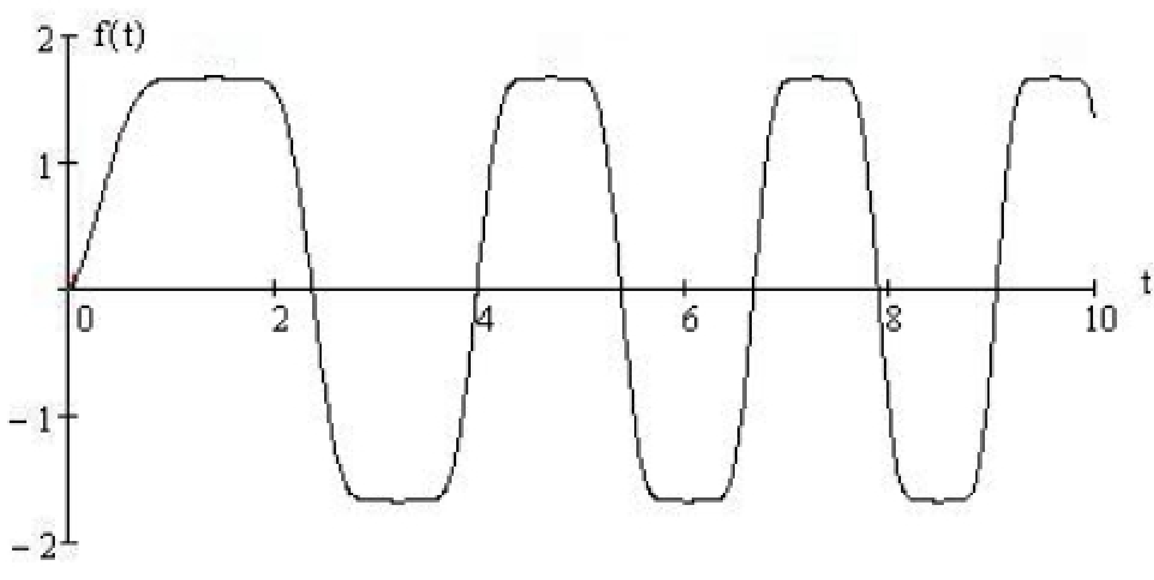

Рис. 2. Графік скінченого ряду Фур'є $2 \sin t^{4/3} + 0.4167 \sin 3t^{4/3} + 0.091 \sin 5t^{4/3}$.

Знайдемо коефіцієнти функції (3), використовуючи для цього два різних інтервали ортогональності. Нехай $t_1 = 1$, $t_2 = 5$. Підставивши ці значення в формулу $T(t) = -t + (t^{\alpha} + 2\pi)^{1/\alpha}$ при $\alpha = 4/3$, отримаємо $T(1) = 3,433$, $T(5) = 2,558$. Отже інтервалами ортогональності будуть $[1;\ 4,433]$ і $[5;\ 7,558]$. Обчислені згідно (2) коефіцієнти Фур'є функції (3) на зазначених інтервалах ортогональності наведені в таблиці.

Інтервали ортогональності	Коефіцієнти Фур'є				
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$[1;\ 4,433]$	$2,00045$	$-0,00046$	$0,41681$	$-0,00038$	$0,09153$
$[5;\ 7,558]$	$2,00057$	$0,00038$	$0,41669$	$-0,00013$	$0,09141$

Порівняння знайдених коефіцієнтів із коефіцієнтами функції (2) підтверджує можливість побудови для функцій із змінним періодом їх рядів Фур'є. Питання повноти тригонометричних систем функцій із змінним періодом, як і деякі інші питання функцій із змінним періодом будуть розглядатися в наступних працях.

[1] *Приймак М.В., Боднарчук І.О., Лупенко С.А.* Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – Т.10, №2 – С. 132-141.

[2] *Приймак М.В.*Ортогональні системи періодичних функцій із змінним періодом // Матеріали одинадцятої наукової конференції Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя. Тернопіль, вид. ТДТУ, 2007.

[3] *Приймак М.В.*Періодичні функції із змінним періодом та деякі їх особливості // Всеукраїнський науковий семінар «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (тези доповідей). – Івано-Франківськ, Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2010. – С. 39-41.

ПРО ВІДНОВЛЕННЯ ЕНЕРГОЗАЛЕЖНОГО РІВНЯННЯ ШТУРМА–ЛІУВІЛЛЯ ЗА ДВОМА СПЕКТРАМИ

Пронська Наталія Іванівна

Інститут прикладних проблем механіки та математики імені Я. С. Підстригача

nataliya_p@email.ua

В доповіді розглядається спектральна задача для рівняння Штурма–Ліувілля з енергозалежним потенціалом (cf. [1])

$$-y'' + qy + 2\lambda py = \lambda^2 y, \tag{1}$$

де $p \in L_{2,\mathbb{R}}(0,1)$ і $q = r'$ з $r \in L_{2,\mathbb{R}}(0,1)$, тобто q – дійснозначний розподіл з $W_2^{-1}(0,1)$. y – функція з простору $W_2^1(0,1)$ така, шо $y^{[1]} \in W_2^1(0,1)$. Тут $y^{[1]} = y' - ry$ – квазі-похідна функції y (див. [3]).

Ми розглядаємо два типи крайових умов, а саме умови Діріхле

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{2}$$

та крайові умови змішаного типу

$$y(0) = y^{[1]}(1) = 0. \tag{3}$$

Позначимо через A_1 та A_2 оператори Штурма–Ліувілля, що діють як

$$A_j y = -y'' + qy =: \ell(y), \quad j = 1, 2$$

на областях визначення

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} A_1 &: = \{y \in W_2^1(0,1) \mid y^{[1]} \in AC[0,1],\ \ell(y) \in L_2(0,1), y(0) = y^{[1]}(1) = 0\} \\ \operatorname{dom} A_2 &: = \{y \in W_2^1(0,1) \mid y^{[1]} \in AC[0,1],\ \ell(y) \in L_2(0,1), y(0) = y(1) = 0\} \end{aligned}$$

відповідно. Через B позначимо оператор множення на потенціал p. Тоді задачі (1)-(2) та (1)-(3) можна розглядати як спектральні задачі для *квадратичних операторних в'язок* $T_2(p,r)$ та $T_1(p,r)$ відповідно, де

$$T_j(p,r)(\lambda) := \lambda^2 I - 2\lambda B - A_j, \quad j = 1, 2$$

для $\lambda \in \mathbb{C}$ на λ-незалежних областях визначення $\operatorname{dom} T_j(p,r) := \operatorname{dom} A_j$.

Означення. ***Спектром*** *$\sigma(T)$ операторної в'язки T називається множина всіх $\lambda \in \mathbb{C}$, для яких $T(\lambda)$ необоротний, тобто*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 \in \sigma(T(\lambda))\}.$$

Означення. *Число $\lambda \in \mathbb{C}$ називається* ***власним значенням*** *T, якщо $T(\lambda)y = 0$ для деякої ненульової функції $y \in \operatorname{dom} T$, яка називається відповідною* ***власною функцією***.

Метою доповіді є дослідити відновлення потенціалів p і r рівняння (1) за спектрами $\sigma(T_1(p,r))$ and $\sigma(T_2(p,r))$. Ми робимо припущення

(A) Оператор A_1 додатній.

Означення. *Позначимо через SD набір всіх пар множин $(\mathbf{m}, \mathbf{l})$ таких, що елементами $\mathbf{m}$ та $\mathbf{l}$ є дійсні числа, які можна занумерувати за зростанням як μ_n, $n \in \mathbb{Z}$ та λ_n, $n \in \mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ відповідно так, що*

$$\mu_n = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right) + h + \tilde{\mu}_n, \quad \lambda_n = \pi n + h + \tilde{\lambda}_n, \tag{4}$$

де $(\tilde{\mu}_n)$, $(\tilde{\lambda}_n)$ – послідовності з $\ell_2(\mathbb{Z}^*)$, і μ_n та λ_n задовольняють умову майже чергування

$$\mu_k < \lambda_k < \mu_{k+1}, \text{ коли } k \neq 0 \tag{5}$$

За припущення (A) спектри операторних в'язок $T_1(p,r)$ та $T_2(p,r)$ утворюють елемент множини SD.

Головними результатами доповіді є наступні теореми існування та єдиності відновлення операторних в'язок, а отже, і рівняння (1)

Теорема (Єдиності)**.** *За припущення (A), операторні в'язки $T_j(p,r)$, $j = 1, 2$ однозначно визначаються їхніми спектрами $\mathbf{m}$ та $\mathbf{l}$.*

Теорема (Існування)**.** *Нехай пара $(\mathbf{m}, \mathbf{l})$ множин дійсних чисел є елементом SD. Тоді існують $p, r \in L_{2,\mathbb{R}}(0,1)$ такі, що $\mathbf{m}$ та $\mathbf{l}$ є спектрами $T_1(p,r)$ та $T_2(p,r)$ відповідно.*

При доведенні цих теорем використовується зведення спектральних задач для операторних в'язок $T_j(p,r)$, $j = 1, 2$ до відповідних задач для операторів Дірака. Основні результати випливають з відомої оберненої спектральної теорії для операторів Дірака (див. [2]).

[1] *Гасымов М. Г., Гусейнов Г. Ш.* Определение оператора диффузии по спектральным данным // Докл.АН Азерб. ССР, 37 (1981), № 2, 19–23. ;

[2] *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. // М.,Наука, 1988.

[3] *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат.заметки, Т.66. No 6, 1999, С. 897–912.

CONSTRUCTION OF EXACT SOLUTIONS OF NONLINEAR INTEGRABLE MODELS BY OPERATOR ALGEBRAS AND DRESSING METHODS

CHVARTATSKYI O.I., SYDORENKO YU.M.

Ivan Franko National University of L'viv

alex.chvartatskyy@gmail.com, y_sydorenko@franko.lviv.ua

We consider two different approaches for constructing exact solutions of nonlinear integrable models of mathematical physics. These methods are analyzed on the example of potential Kadomtsev-Petviashvili equation [1]

$$\alpha_2^2 u_{yy} = (\alpha_3 u_t - u_{xxx} - 6u_x^2)_x, \;\; \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R} \tag{1}$$

and nonlinear Schrödinger equation [2]

$$iq_{t_2} = q_{xx} + 2|q|^2 q. \tag{2}$$

The first approach, which is based on matrix Burgers-type equations, their generalizations [3] and operator algebras, was proposed by Marchenko V.A. [4]. The second method, which is considered, is based on the use of Lax, Zakharov-Shabat representations and operators of Darboux-Matveev-Salle type transformations [5]. We also compared the methods described above with the results of paper [6], where the integro-differential Lax representations were used. Using the results of these two approaches we propose the method of construction of N-soliton solutions for some nonlinear integrable models. The proposed method is based on the projection operators, which are present in the approach of V.A. Marchenko, and contains Lax differential representations and operators of Darboux-type transformations.

[1] *Kadomtsev B. B., Petviashvili V. I.* (1970). On the stability of solitary waves in weakly dispersive media. Sov. Phys. Dokl. 15: 539–541.

[2] *V. E. Zakharov, A. B. Shabat.* A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. Funkts. Anal. Prilozh., 8:3 (1974), 43–53

[3] *Samoilenko V.H., Sidorenko Yu.M., Buonanno L., Matarazzo G.* Explicit solutions of nonlinear evolution equations via nonlocal reductions approach//Proceedings of Institute of Math. of NAS of Ukraine. – 2000. – V.30, Part II. – P. 406-410.

[4] *Marchenko V.A.* Nonlinear equations and operator algebras.- Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo, Reidel, 1988.- 157p.

[5] *Matveev V. B., Salle M.A.* Darboux transformations and solitons.- Berlin Heidelberg, Springer-Verlag. – 1991. – 120 p.

[6] *Sidorenko Yu.M.,Chvartatskyi O.I.* Integration of scalar Kadomtsev-Petviashvili hierarchy by the method of integral Darboux-like transformations // Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech. Math. 74 (2011), 46 p. (in Ukrainian)

МЕРОМОРФНІ У ПІВСМУЗІ ФУНКЦІЇ СКІНЧЕННОГО λ-ТИПУ

Сокульська Наталія Богданівна

Львівський національний університет імені Івана Франка

natalia_sokulska@yahoo.com

Вивчаються мероморфні в замиканні півсмуги $S = \{\sigma + it : \quad \sigma > 0,$ $0 < t < 2\pi\}$ функції f, $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, $\sigma \geq 0$, з обмеженням на зростання їх неванліннових характеристик, що задаються додатними, неперервними, неспадними функціями $\lambda(s)$ при $s \geq s_0 > 0$. Неванліннова характеристика таких функцій вводиться наступним чином.

$$T(\sigma, f) = m(\sigma, f) - \frac{\sigma}{\sigma_0} m(\sigma_0, f) + \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right) m(0, f) + N(\sigma, f),$$

де

$$m(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(\sigma + it)| dt, \quad N(\sigma, f) = \int_0^{\sigma} n(\eta, f) d\eta,$$

$n(\eta, f)$ - кількість полюсів функції f у напіввідкритому прямокутнику $R_\eta = \{\sigma + it : 0 < \sigma \leq \eta, \quad 0 \leq t < 2\pi\}$.

Характеристика $T(\sigma, f)$ невід'ємна, неспадна, опукла при $\sigma \geq \sigma_0$ функція, $T(\sigma_0, f) = 0$.

Означення 1. Мероморфна в $\overline{S}$ функція f називається функцією скінченного λ-типу, якщо існують додатні сталі A, B такі, що

$$T(\sigma, f) \leq A\lambda(\sigma + B),$$

при всіх $\sigma \geq \sigma_0$. Клас таких функцій позначимо через $\mathbf{\Lambda}$, через $\mathbf{\Lambda}_H$ позначимо клас функцій голоморфних в $\overline{S}$.

Розв'язано наступні задачі.

(i) Встановлено критерій скінченності λ-типу функції $f \in \mathbf{\Lambda}$ в термінах коефіцієнтів Фур'є

$$c_k(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} \log |f(\sigma + it)| dt.$$

(ii) Описано множину полюсів (нулів) функції $f \in \mathbf{\Lambda}$.

(iii) Описано множину нулів функції $f \in \mathbf{\Lambda}_H$.

ЯВНИЙ ОПИС ХАРАКТЕРІВ АЛГЕБРИ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО ТИПУ НА l_p

Тарас Олена Геннадіївна

Прикарпатський національний університет імені В.Стефаника

elena_taras@ukr.net

В доповіді розглядається банаховий простір X з топологічним базисом $\{e_k\}$. Розглянемо підмножину $\mathbb{N} = \mathbb{N}_X = \bigcup_k \mathbb{C}e_k \subset X$. Нехай $H_b(X)$ – алгебра аналітичний функцій обмеженого типу на X, а $H_b(\mathbb{N})$ – алгебра звужень функцій з $H_b(X)$ на $\mathbb{N}$, $M_b(\mathbb{N})$ – множина характерів (ненульових комплекснозначих гомоморфізмів на $H_b(\mathbb{N})$) [2]. $A_n^{\mathbb{N}}$ – замикання алгебри породженої поліномами степеня $\leq n$ зі збереженням рівномірної топології на обмежених підмножинах в $\mathbb{N}$, $I_k^{\mathbb{N}}$ – мінімальний замкнений ідеал в $H_b(\mathbb{N})$ породжений k-однорідними поліномами з $A_n^{\mathbb{N}}$. Легко бачити, що $I_1^{\mathbb{N}} \subset I_2^{\mathbb{N}} \subset \ldots \subset I_n^{\mathbb{N}} \subset \ldots$ [1].

Позначимо T – оператор звуження, $H_b(X) \underset{T}{\to} H_b(\mathbb{N})$. Для довільного $\psi \in M_b(\mathbb{N})$ маємо

$$H_b(X) \underset{T}{\to} H_b(\mathbb{N}) \underset{\psi}{\to} C.$$

Ми хочемо дослідити спектр $M_b(\mathbb{N})$ і узагальнити отримані результати на спектр $M_b(X)$ алгебри $H_b(X)$.

Випадок $X = l_1$**.** Для алгебри $H_b(\mathbb{N}_{l_1})$ всі функції з $H_b(\mathbb{N}_{l_1})$ можна отримати як алгебраїчні комбінацій лінійних функціоналів і сталих функцій, тобто $A_1^{\mathbb{N}} = A_2^{\mathbb{N}} = \ldots = H_b(\mathbb{N}_{l_1})$.

Випадок $X = l_2$**.** Для алгебри $H_b(\mathbb{N}_{l_2})$ показано, що $I_1^{\mathbb{N}} \subsetneq I_2^{\mathbb{N}}$ і $I_2^{\mathbb{N}} \subsetneq I_3^{\mathbb{N}}$. Наступна теорема є аналогом теореми 5 роботи [1].

Теорема. *Існують характери $\phi_1, \phi_2 \in M_b(\mathbb{N}_{l_2})$ такі що $\phi_1(I_1) = 0$ і $\phi_1(\sum x_k^2) = 1$, та $\phi_2(I_2) = 0$ і $\phi_1(\sum x_k^3) = 1$.*

[1] *Zagorodnyuk A.*Spectra of Algebra of Entire Functions on Banach Spaces // Proceedings Of The American Mathematical Society. – 2006. – **2559**. – С. 15–22.

[2] *Aron R.M., Cole B.J., and Gamelin T.W.* Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine Angew. Math. - 1991. - 415, p. 51-93.

ПРО ОДНУ ПРОБЛЕМУ ЕЙЛЕРА, ПОВ'ЯЗАНУ З ФОРМУЛАМИ ВІЄТА

Федак Іван Васильович

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Fedak_ivan@rambler.ru

Ще у 1749 році Леонард Ейлер у листі до петербурзького академіка Хрістіана Гольдбаха зізнавався, що витратив чимало зусиль для розв'язання у цілих числах системи рівнянь

$$a + b + c = u^2, ab + bc + ca = v^2, abc = w^2.$$

Але донедавна було невідомо, скінченною чи нескінченною є множина трійок натуральних чисел a, b, c, що кожне з чисел $a + b + c$, $ab + bc + ca$, abc є точним квадратом, якщо числа однієї трійки не можуть бути отримані множенням відповідних чисел іншої трійки на те саме число.

У процесі підготовки команди "Париська Сорбонна"Парищенської ЗОШ I-III ступенів Надвірнянської районної ради Івано-Франківської області до XIV Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора Ядренка М.Й. вдалося розв'язати цю проблему. Більше того, точним квадратом при цьому виявилося ще й число $a^2 + b^2 + c^2$.

Нехай

$$x_1 = 8, y_1 = 9$$
$$x_{n+1} = 4x_n y_n (x_n^2 + 3x_n y_n + y_n^2),$$
$$y_{n+1} = (x_n - y_n)^2 (x_n + y_n)^2, n \in \mathbb{N}.$$

Тоді трійки чисел

$$a_n = x_n(x_n + y_n),$$
$$b_n = y_n(x_n + y_n),$$
$$c_n = x_n y_n$$

є розв'язками задачі для кожного натурального числа n. При цьому жодну з цих трійок не можна отримати множенням чисел іншої трійки на те саме число.

[1] *Федак І.В.*Несподівані точні квадрати і проблема Ойлера. / У світі математики. – 2011. – Т.17. Вип. 4. – С.5-8.

Зміст