**Завдання XVII обласного турніру юних математиків 2023-2024 н.р.**

1. Дві однаково міцні кульки вціліють при падінні з деякої висоти $n \in N$ метрів, але розіб'ються, впавши з висоти 17 метрів. За яку найменшу кількість спроб вдасться гарантовано визначити найбільше можливе значення $n$, якщо за одну спробу можна опустити будь-яку з цих кульок з довільної висоти, але кульку, яка при падінні розбилася, повторно використовувати не дозволяється?
2. Миколка намалював на дошці опуклий чотирикутник, виміряв довжини його сторін та діагоналей і записав результати своїх вимірювань за зростанням: 2,5 дм, 3,9 дм, 5,2 дм, 5,6 дм, 6 дм та 6,5 дм. Чи можна довіряти записаному? Товщиною ліній знехтувати.
3. Натуральні числа $x$ та $y$ задовольняють умову $23 + x^2 = 24y^2$. Доведіть, що множина усіх пар таких чисел є нескінченною.
4. Неперервна функція $f$ є *кусково-лінійною*, тобто для деяких чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ вона є лінійною на кожному із проміжків $(-\infty; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ... ,$[x_{k-1}; x_k]$, $[x_k; +\infty)$. Для $k = 3$ довести, що $f$ можна єдиним чином подати у вигляді
$$f(x) = a_1|x - x_1| + a_2|x - x_2| + a_3|x - x_3| + a_4x + a_5, \quad x \in \mathrm{R},$$
де $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ – деякі дійсні числа.
5. Доведіть, що існує безліч пар $(x, y)$ додатних раціональних чисел, що задовольняють рівняння $x^y = (2y)^x$.
6. Для усіх натуральних чисел $n$ доведіть нерівність $\sqrt{1^3 + \sqrt{2^3 + \ldots + \sqrt{n^3}}} < 3$.
7. Доведіть, що $\left(2^b - 2^a\right)\left(3^b - 3^a\right) < \dfrac{b-a}{2}\left(6^b - 6^a\right)$ для усіх $a < b$.
8. Нехай $a$ та $b$ – натуральні числа такі, що $a^b + b^a = (4n-1)^{2n-1}$. Доведіть, що $ab$ ділиться націло на $(2n-1)^2$ при кожному натуральному $n$.
9. Розріжте рівнобічну трапецію на три подібні між собою трапеції всіма можливими способами. Для рівнобічної трапеції з основами $a$ та $b$ і бічною стороною $c = 1$ з'ясуйте необхідні та достатні умови реалізації кожного способу розрізання.
10. Використовуючи з тригонометричних формул лише означення тангенса гострого кута прямокутного трикутника як відношення протилежного катета до прилеглого, доведіть рівність $tg10^o tg50^o tg60^o tg70^o = 1$.
11. У трикутнику $ABC$ кут $C$ дорівнює $20°$. Відкладемо на стороні $AC$ відрізок $MC = AB$, а на стороні $BC$ – відрізок $CK = AM$. Знайдіть величину кута $MKC$, якщо кут $BAC$ дорівнює: а) $20°$; б) $40°$; в) $60°$; г) $80°$.
12. У трикутнику $ABC$ точка $I$ — інцентр, точка $I_a$ — центр зовні вписаного кола, яке дотикається сторони $BC$. З вершини $A$ всередині кута $BAC$ провели промені $AX$ та $AY$. Промінь $AX$ перетинає прямі $BI$, $CI$, $BI_a$, $CI_a$ в точках $X_1$, …, $X_4$ відповідно, а промінь $AY$ перетинає ці ж прямі в точках $Y_1$,…, $Y_4$ відповідно. Виявилося, що точки $X_1, X_2, Y_1, Y_2$ лежать на одному колі. Доведіть рівність $\dfrac{X_1X_2}{X_3X_4} = \dfrac{Y_1Y_2}{Y_3Y_4}$.

**13.** У клітинки квадрата $5\times5$ Петрик і Ганнуся по черзі (першим ходить Петрик) вписують цифри від 1 до 9. Квадрат називається *магічним*, якщо після заповнення всіх клітинок суми в усіх менших квадратах $3\times3$ належать діапазону [37; 53]. Петрик полюбляє магію і хоче зробити квадрат магічним. Чи вдасться Ганнусі йому завадити?

**14.** Двоє гравців та суддя грають у таку гру. Суддя випадково вибирає один із натуральних дільників числа $n$ та називає його, а далі гравці по черзі множать останній названий дільник на 2, або множать на 5, або ж ділять на 10 – так, щоб отриманий результат був знову дільником числа $n$, який не називався раніше. Гравець, який не може зробити хід, програв. Яка ймовірність, що за правильної гри виграє перший гравець, якщо $n=10^6$?

**15.** Марійка та Миколка грають у таку гру. Спочатку Миколка називає деяке *просте* число $p$. Після цього Марійка записує на дошці натуральне число $n$ Тоді Миколка дописує до цього числа справа одну чи декілька цифр 3. Він виграє, якщо отримане таким чином число ділиться на $p$. В іншому разі – перемагає Марійка. Хто з них виграє, якщо обоє прагнуть перемогти?

**16.** У гострокутному трикутнику $ABC$ провели бісектрису $AP$ та відмітили центр $O$ описаного кола. Описане коло трикутника $ABP$ вдруге перетинає пряму $AC$ у точці $X$, описане коло трикутника $ACP$ вдруге перетинає пряму $AB$ у точці $Y$. Доведіть, що прямі $XY$ та $PO$ перпендикулярні.

**17.** Доведіть, що існує нескінченна кількість пар взаємно простих натуральних чисел $a$ та $b$ таких, що усі три дійсні корені рівняння $x^4=\dfrac{ax-b}{bx-a}$ є трьома різними раціональними числами.

**18.** Відомо, що натуральне число $N$ менше за $10^6$. Шукаємо таке натуральне $M$ що воно ділиться на $N$, а *сума цифр* числа $M$ не перевищує числа $k$ Для якого найменшого $k$ можна стверджувати, що таке число $M$ в усіх випадках існує?

**19.** На площині розміщено мільйон точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Дев'ять гравців по черзі сполучають ці точки відрізками, кожний олівцем свого кольору. За один хід дозволяється сполучити довільні дві точки, які ще не були з'єднані. Виграє той, хто першим отримає трикутник з вершинами в заданих точках, *усі сторони якого мають однаковий колір*. Чи може така гра закінчитися внічию?

**20.** На стороні *CD* квадрата *ABCD* обрано точку *F* та побудовано два рівні квадрати *DGFE* та *AKEH* (точки *E* і *H* лежать всередині квадрата). Нехай *M* – це середина *DF*, *J* – інцентр трикутника *CFH*. Доведіть, що точки *D, K, H, J, F* лежать на одному колі.

***Примітка***. Більшість пропонованих тут задач відповідають завданням XXIII Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка, оприлюдненим на сайті http://tym.in.ua/ , або є їх фрагментами, що можна використати при підготовці узагальнень.

Оскільки у два попередні роки Всеукраїнський етап турніру не був проведений і пропоновані до нього завдання оновлені лише частково, а обласний турнір у 2021 році проводився, то окремі задачі повторюють завдання позаминулорічного обласного турніру.