

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНІКА

Факультет/інститут математики та інформатики

Кафедра математичного та функціонального аналізу

СИЛАБУС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Функціональний аналіз та теорія міри

Освітня програма Бакалавр

Спеціальність 113 Прикладна математика

Галузь знань 11 Математика і статистика

Затверджено на засіданні кафедри
Протокол № 1 від 30.08.2021 р.

ЗМІСТ

1. Загальна інформація
2. Анотація до курсу
3. Мета та цілі курсу
4. Компетентності
5. Результати навчання
6. Організація навчання курсу
7. Система оцінювання курсу
8. Політика курсу
9. Рекомендована література

1. Загальна інформація	
Назва дисципліни	Функціональний аналіз та теорія міри
Рівень вищої освіти	Бакалавр
Викладач (-і)	Федак Іван Васильович
Контактний телефон викладача	0973577603
Е-mail викладача	ivan.fedak@pnu.edu.ua
Формат дисципліни	Лекції, практичні заняття, індивідуальні завдання у формі домашніх контрольних робіт, аудиторна контрольна робота
Обсяг дисципліни	90 год./3 кредити
Посилання на сайт дистанційного навчання	
Консультації	Консультації проводяться в індивідуальному порядку щодо розв'язування окремих конкретних задач домашньої контрольної роботи або ж за вказаними контактним телефоном чи електронною поштою.
2. Анотація до курсу	
<p>З поняттям міри людству доводилося стикатися ще зі стародавніх часів, вимірюючи відстані, площі, об'єми тощо. У процесі вивчення дисципліни «Функціональний аналіз та теорія міри» студенти матимуть змогу ознайомитися з основними математичними підходами до теорії вимірних множин та вимірних функцій. З цими поняттями також тісно пов'язане поняття інтеграла Лебега, який є природним узагальненням інтеграла Рімана, з яким студенти вже мали справу як в курсі математичного аналізу, так і шкільному курсі математики. Так само елементи функціонального аналізу стануть узагальненням тих понять, з якими студенти вже зустрічалися при вивченні математичного аналізу та алгебри, а також знайдуть своє застосування для розв'язування практичних задач.</p>	
3. Мета та цілі курсу	
<p>Мета курсу: Ознайомити студентів з поняттями міри Лебега, вимірних за Лебегом функцій, інтеграла Лебега, деякими узагальненнями поняття інтеграла і їх основними властивостями, основними структурами функціонального аналізу, властивостями лінійних функціоналів та лінійних операторів та застосуваннями цих властивостей до розв'язування конкретних задач.</p> <p>Завдання курсу: Навчити студентів застосовувати властивості міри, вимірних функцій, інтеграла Лебега, лінійних нормованих та топологічних просторів, лінійних функціоналів та лінійних операторів до розв'язування конкретних задач як теоретичного, так практичного характеру.</p>	
4. Компетентності	
<p>ЗК02. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.</p> <p>ЗК06. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.</p> <p>ФК01. Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем.</p> <p>ФК03. Здатність обирати та застосовувати математичні методи для розв'язування прикладних задач, моделювання, аналізу, проектування, керування, прогнозування, прийняття рішень.</p>	
5. Результати навчання	
<p>РН01. Демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій прикладної математики і використовувати їх на практиці.</p> <p>РН02. Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь з частинними похідними, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами.</p>	
6. Організація навчання курсу	
Обсяг курсу	
Вид заняття	Загальна кількість годин
лекції	16 год.
семінарські заняття / практичні / лабораторні	14 год.

самостійна робота		60 год.			
Ознаки курсу					
Семестр	Спеціальність	Курс (рік навчання)		Нормативний / вибірковий	
4	Прикладна математика	2		нормативна	
Тематика курсу					
Тема, план	Форма заняття	Література	Завдання, год	Вага оцінки	Термін виконання
1. Множини та їх потужності. Системи множин 1. Множини та операції над ними. 2. Зліченні та незліченні множини. Потужність множини. 3. Канторова множина та її властивості. 4. Поняття про системи множин.	Лекція (1 год.) + Пр. зан. (1 год)	[5] ст. 4 – 11 [5] ст. 12 – 13	Аналіз матеріалів теми (2 год.) Індивідуальне завдання (2 год.)	1	Протягом семестру згідно з розкладом занять
2. Множини у метричних просторах 1. Означення та приклади метричних просторів. 2. Класифікація точок множини Сепарабельні простори. 3. Відкриті і замкнені множини. 4. Топологічні простори. Компактність.	Лекція (1 год.) + Пр. зан. (1 год)	[5] ст. 14 – 22 [5] ст. 23	Аналіз матеріалів теми (2 год.) Індивідуальне завдання (2 год.)	1	Протягом семестру згідно з розкладом занять
3. Квадровані фігури та загальне означення міри 1. Міри прямокутника та елементарної множини. 2. Зовнішня міра множини та міра Жордана. 3. Загальне означення міри. Приклади мір. 4. «Важка» та «легка» задачі теорії міри.	Лекція (1 год.) + Пр. зан. (1 год)	[5] ст. 24 – 31 [5] ст. 32 – 33	Аналіз матеріалів теми (2 год.) Індивідуальне завдання (2 год.)	1	Протягом семестру згідно з розкладом занять
4. Множини, вимірні за Лебегом 1. Міра Лебега. σ - алгебра вимірних за Лебегом множин. 2. σ - адитивність та неперервність міри Лебега. 3. Загальний підхід до продовження міри за Лебегом. 4. Поняття про σ - скінченні міри.	Лекція (1 год.) + Пр. зан. (1 год)	[5] ст. 34 – 39 [5] ст. 40 – 41	Аналіз матеріалів теми (2 год.) Індивідуальне завдання (2 год.)	1	Протягом семестру згідно з розкладом занять
5. Вимірні функції та їх властивості 1. Означення та приклади вимірних функцій. 2. Арифметичні дії	Лекція (1 год.) + Пр. зан. (0,5 год)	[5] ст. 42 – 48 [5] ст. 49 – 51	Аналіз матеріалів теми (2 год.) Індивідуальне	1	Протягом семестру згідно з розкладом занять

над вимірними функціями. 3. Послідовності вимірних Функцій. 4. Збіжність за мірою, її зв'язок зі збіжністю майже скрізь.			завдання (2 год.)		
6. Інтеграл Лебега та його основні властивості 1. Означення інтеграла Лебега по множині скінченної міри. 2. Основні властивості інтеграла Лебега. 3. Теореми про граничний перехід під знаком інтеграла. 4. Зв'язок між інтегралами Лебега та Рімана.	Лекція (1 год.) + Пр. зан. (0,5 год)	[6] ст. 4 – 13 [6] ст. 14 – 16	Аналіз матеріалів теми (2 год.) Індивідуальне завдання (2 год.)	1	Протягом семестру згідно з розкладом занять
7. Інші властивості інтеграла Лебега 1. Інтеграл Лебега як границя інтегральної суми. 2. Інтеграл Лебега по множині нескінченної міри. 3. Збіжність в середньому, її зв'язок з іншими видами збіжності. 4. Теорема Фубіні.	Лекція (1 год.) + Пр. зан. (1 год)	[6] ст. 17 – 24 [26] ст. 25 – 26	Аналіз матеріалів теми (2 год.) Індивідуальне завдання (2 год.)	1	Протягом семестру згідно з розкладом занять
8. Невизначений інтеграл Лебега та узагальнення поняття інтеграла 1. Невизначений інтеграл Лебега та монотонні функції. 2. Абсолютно неперервні функції, їх зв'язок з невизначеним інтегралом Лебега. 3. Знакозмінні міри. Теорема Радона-Нікодіма. 4. Міри та інтеграл Лебега-Стільтьєса.	Лекція (1 год.) + Пр. зан. (0,5 год)	[6] ст. 27 – 41 [6] ст. 42 – 44	Аналіз матеріалів теми (2 год.) Індивідуальне завдання (2 год.)	1	Протягом семестру згідно з розкладом занять
Контроль самостійної роботи	ДКР			20	Протягом семестру згідно з розкладом занять
9. Повні метричні простори та їх відображення	Лекція (1 год.) + Пр. зан. (0,5 год)	[7] ст. 4 – 15 [7] ст. 16 – 17	Аналіз матеріалів теми (2 год.) Індивідуальне завдання (2 год.)	1	Протягом семестру згідно з розкладом занять

<p>1. Означення та приклади повних метричних просторів. Теорема про вкладені кулі.</p> <p>2. Відображення метричних просторів. Принцип стискаючих відображень.</p> <p>3. Застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування рівнянь та систем лінійних рівнянь.</p> <p>4. Розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь методом послідовних наближень.</p>					
<p>10. Лінійні топологічні та нормовані простори</p> <p>1. Означення та приклади лінійних просторів.</p> <p>2. Основні поняття, пов'язані з лійними просторами.</p> <p>3. Лінійні топологічні та нормовані простори.</p> <p>4. Нормований простір L_1 та його повнота.</p>	<p>Лекція (1 год.) + Пр. зан. (1 год)</p>	<p>[7] ст. 18 – 24</p> <p>[7] ст. 25 – 26</p>	<p>Аналіз матеріалів теми (2 год.)</p> <p>Індивідуальне завдання (2 год.)</p>	1	Протягом семестру згідно з розкладом занять
<p>11. Евклідові простори</p> <p>1. Означення та приклади евклідових .</p> <p>2. Нерівність Коші-Буняковського та аналог теореми Піфагора.</p> <p>3. Евклідовий простір L_2 та його повнота.</p> <p>4. Збіжність у середньому квадратичному.</p>	<p>Лекція (1 год.) + Пр. зан. (1 год)</p>	<p>[7] ст. 27 – 33</p> <p>[7] ст. 34 – 35</p>	<p>Аналіз матеріалів теми (2 год.)</p> <p>Індивідуальне завдання (2 год.)</p>	1	Протягом семестру згідно з розкладом занять
<p>12. Ортогональні системи та ряди Фур'є</p> <p>1. Базис евклідового простору. Приклади базисів.</p> <p>2. Ряди Фур'є та нерівність Бесселя.</p> <p>3. Зв'язок між замкненими, повними та тотальними системами.</p> <p>4. Гільбертові простори. Теорема про ізоморфізм.</p>	<p>Лекція (1 год.) + Пр. зан. (1 год)</p>	<p>[7] ст. 36 – 44</p> <p>[7] ст. 45 – 46</p>	<p>Аналіз матеріалів теми (2 год.)</p> <p>Індивідуальне завдання (2 год.)</p>	1	Протягом семестру згідно з розкладом занять
<p>13. Лінійні функціонали</p> <p>1. Лінійні функціонали: неперервність, обмеженість, норма.</p> <p>2. Приклади лінійних неперервних функціоналів.</p> <p>3. Спряжені простори. Слабка збіжність.</p> <p>4. Простори основних та узагальнених функцій.</p>	<p>Лекція (1 год.) + Пр. зан. (1 год)</p>	<p>[8] ст. 4 – 11</p> <p>[8] ст. 12 – 13</p>	<p>Аналіз матеріалів теми (2 год.)</p> <p>Індивідуальне завдання (2 год.)</p>	1	Протягом семестру згідно з розкладом занять

14. Лінійні оператори 1. Означення та приклади лінійних операторів та їх норм. 2. Добуток та степінь лінійних Операторів. 3. Оборотні та обернені Оператори. 4. Метод ітерованих ядер для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма та Вольтерри.	Лекція (1 год.) + Пр. зан. (1 год)	[8] ст. 14 – 22 [8] ст. 23 – 24	Аналіз матеріалів теми (2 год.) Індивідуальне завдання (2 год.)	1	Протягом семестру згідно з розкладом занять
15. Спектр оператора. Компактні оператори 1. Спектр та резольвента оператора. 2. Спряжені оператори та їх властивості. 3. Компактні оператори та їх властивості. 4. Теорема Гільберта-Шмідта та її застосування.	Лекція (1 год.) + Пр. зан. (1 год)	[8] ст. 25 – 35 [8] ст. 26 – 37	Аналіз матеріалів теми (2 год.) Контрольна робота (2 год)	1 25	Протягом семестру згідно з розкладом занять
Контроль самостійної роботи	ДКР			20	Протягом семестру згідно з розкладом занять
Контроль самостійної роботи	Тестова контрольна робота	[8] ст. 39 – 55		20	Протягом семестру згідно з розкладом занять

7. Система оцінювання курсу

Загальна система оцінювання курсу	Залік (100 балів). З них: 15 балів – поточне оцінювання; 40 балів – за домашні контрольні роботи, 25 балів – за аудиторну контрольну роботу, 20 балів – за здачу теоретичного модуля у формі тесту.		
	Шкала оцінювання: національна та ECTS		
	Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою для заліку
	90 – 100	A	зараховано
	80 – 89	B	
	70 – 79	C	
	60 – 69	D	
	50 – 59	E	
	26 – 49	FX	не зараховано з можливістю повторного складання
	0-25	F	не зараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни
Вимоги до письмової роботи	Написати розв'язання запропонованих задач з поясненнями (5 балів за кожен задачу аудиторної чи домашньої контрольної роботи)		
Семинарські заняття	Контроль за відвідуванням та виконанням домашніх завдань.		

Умови допуску до підсумкового контролю	Набрати не менше половини балів за кожну з форм оцінювання.
--	---

8. Політика курсу

Акцентування уваги студентів на основних поняттях теорії міри та інтеграла, їх зв'язках з практичними потребами. Обґрунтування потреби у вивчення різних структур функціонального аналізу та лінійних функціоналів і лінійних операторів на цих структурах. Ілюстрація взаємозв'язків між різними підходами до інтегрування функцій та на взаємозв'язках елементів функціонального аналізу з дисциплінами математичного аналізу і лінійної алгебри і його можливостями практичного застосування.

9. Рекомендована література

Базова

1. Колмогоров А.М., Фомін С.В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 456с.
2. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480с.
3. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций: Учебное пособие. – М.: Просвещение, 1981. – 271с.
4. Федак І.В. Елементи теорії міри та інтеграла Лебега: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Сімик, 2011. – 168 с.
5. Федак І.В. Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри: Навчальний посібник для студентів спеціальності «Прикладна математика». Ч. 1. Вимірні множини та вимірні функції. – Івано-Франківськ: ПНУ, 2018. – 52с.
6. Федак І.В. Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри: Навчальний посібник для студентів спеціальності «Прикладна математика». Ч. 2. Інтеграл Лебега. – Івано-Франківськ: ПНУ, 2018. – 56с.
7. Федак І.В. Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри: Навчальний посібник для студентів спеціальності «Прикладна математика». Ч. 3. Основні структури функціонального аналізу. – Івано-Франківськ: ПНУ, 2018. – 48с.
8. Федак І.В. Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри: Навчальний посібник для студентів спеціальності «Прикладна математика». Ч. 4. Лінійні функціонали та лінійні оператори. – Івано-Франківськ: ПНУ, 2018. – 56с.
9. Федак І.В. Функціональний аналіз: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Голіней, 2011. – 120с.

Допоміжна

1. Антоневи́ч А.Б., Радыно́ Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения: Учебник. – Минск: БГУ, 2006. – 430с.
2. Антоневи́ч А.Б., Ваткина́ Е.И., Мазель М.Х. и др. Функциональный анализ и интегральные уравнения: Лаб. практикум: Учеб. пособие. / Под редакцией А.Б. Антоневи́ча и Я.В. Радыно́. – Минск: БГУ, 2006. – 179с.
3. Васи́лишин Т.В., Гой Т.П., Федак І.В. Інтегральні рівняння: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Голіней, 2016. – 224с.
4. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 588с.
5. Соболев В.И. Лекции по дополнительным главам математического анализа. – М.: Наука, 1968. – 288с.
6. Теляковский С.А. Сборник задач по теории функций действительного переменного. – М.: Наука, 1980. – 112с.