

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНІКА**

Факультет/інститут математики та інформатики

Кафедра математичного та функціонального аналізу

**СИЛАБУС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**Методи функціонального аналізу в обчислювальній математиці**

Освітня програма Бакалавр

Спеціальність 113 Прикладна математика

Галузь знань 11 Математика та статистика

Затверджено на засіданні кафедри  
Протокол № 1 від 27.08.2020 р.

## ЗМІСТ

1. Загальна інформація
2. Анотація до курсу
3. Мета та цілі курсу
4. Компетентності
5. Результати навчання
6. Організація навчання курсу
7. Система оцінювання курсу
8. Політика курсу
9. Рекомендована література

<b>1. Загальна інформація</b>	
<b>Назва дисципліни</b>	Функціональний аналіз та теорія міри
<b>Рівень вищої освіти</b>	Бакалавр
<b>Викладач (-і)</b>	Федак Іван Васильович
<b>Контактний телефон викладача</b>	0973577603
<b>Е-mail викладача</b>	ivan.fedak@pnu.edu.ua
<b>Формат дисципліни</b>	Лекції, практичні заняття, індивідуальні завдання у формі домашніх контрольних робіт, аудиторна контрольна робота
<b>Обсяг дисципліни</b>	180 год./6 кредитів
<b>Посилання на сайт дистанційного навчання</b>	
<b>Консультації</b>	Консультації проводяться в індивідуальному порядку щодо розв'язування окремих конкретних задач домашньої контрольної роботи або ж за вказаними контактним телефоном чи електронною поштою.
<b>2. Анотація до курсу</b>	
<p>У процесі свого розвитку людству доводилося вирішувати цілий ряд практичних задач, які виникали перед ними. Це сприяло і розвитку математичних теорій, які допомагали вирішувати такі проблеми. Зокрема, і появи апарату функціонального аналізу. У процесі вивчення дисципліни «Методи функціонального аналізу в обчислювальній математиці» студенти матимуть змогу ознайомитися з основними поняттями функціонального аналізу, їх властивостями та, що основне, можливостями застосування методів функціонального аналізу до розв'язування практичних задач, пов'язаних з наближеним розв'язуванням алгебраїчних рівнянь, систем лінійних рівнянь, диференціальних та інтегральних рівнянь, операторних рівнянь.</p>	
<b>3. Мета та цілі курсу</b>	
<p><b>Мета курсу:</b> Ознайомити студентів з основними структурами функціонального аналізу, властивостями лінійних функціоналів та лінійних операторів та застосуваннями цих властивостей до розв'язування конкретних задач обчислювальної математики.</p> <p><b>Завдання курсу:</b> Навчити студентів застосовувати методи функціонального аналізу до розв'язування конкретних задач як теоретичного, так практичного характеру в обчислювальній математиці.</p>	
<b>4. Компетентності</b>	
<p>Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу, до застосування теорії у практичних ситуаціях.</p> <p>Здатність математично формалізувати проблему прикладного характеру, розпізнати стандартні об'єкти і властивості аналізу, звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь математичної фізики, дискретної математики, теорії керування, методів оптимізації, алгебри, геометрії.</p> <p>У результаті проходження курсу студент повинен знати:  означення та властивості метричних, лінійних, нормованих, банахових, евклідових просторів;  принцип стискаючих відображень та його застосування;  означення та властивості лінійних функціоналів і операторів;  можливості застосування властивостей лінійних операторів до розв'язування конкретних задач обчислювальної математики.</p>	
<b>5. Результати навчання</b>	
<p>Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, рівнянь математичної фізики, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, числовими методами, методами оптимізації.</p> <p>У результаті проходження курсу студент повинен вміти:  розв'язувати алгебраїчні рівняння, системи лінійних рівнянь,  задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь,  інтегральні рівняння Фредгольма і Вольтерри методом послідовних наближень.  розв'язувати інтегральні рівняння методом ітерованих ядер та за формулами Фредгольма.</p>	

6. Організація навчання курсу					
Обсяг курсу					
Вид заняття			Загальна кількість годин		
лекції			30 год.		
семінарські заняття / практичні / лабораторні			30 год.		
самостійна робота			120 год.		
Ознаки курсу					
Семестр	Спеціальність	Курс (рік навчання)		Нормативний / вибірковий	
6	Прикладна математика	3		вибіркова (вільного вибору студента)	
Тематика курсу					
Тема, план	Форма заняття	Література	Завдання, год	Вага оцінки	Термін виконання
<b>1. Множини та метричні простори</b> 1. Множини та їх потужності. 2. Означення та приклади метричних просторів. 3. Відкриті і замкнені множини та поняття про топологічні простори. 4. Збіжність у метричних просторах.	Лекція (2 год.) +	[4] ст. 4 – 11, 14 - 22	Аналіз матеріалів теми (4 год.)	1	Тиждень 1
	Пр. зан. (2 год)	[4] ст. 12 – 13, 23	Індивідуальне завдання (4 год.)		
<b>2. Міра множини</b> 1. Міри прямокутника та елементарної множини. 2. Зовнішня міра множини та міра Жордана. 3.Продовження міри за Лебегом. 4. Поняття про $\sigma$ - скінченні міри.	Лекція (2 год.) +	[4] ст. 24 – 31, 34 - 39	Аналіз матеріалів теми (4 год.)	1	Тиждень 2
	Пр. зан. (2 год)	[4] ст. 32 – 33, 40 - 41	Індивідуальне завдання (4 год.)		
<b>3. Вимірні функції та їх властивості</b> 1. Означення та приклади вимірних функцій. 2. Арифметичні дії над вимірними функціями. 3. Послідовності вимірних Функцій. 4. Збіжність за мірою, її зв'язок зі збіжністю майже скрізь.	Лекція (2 год.) +	[4] ст. 42 – 48	Аналіз матеріалів теми (4 год.)	1	Тиждень 3
	Пр. зан. (2 год)	[4] ст. 49 – 51	Індивідуальне завдання (4 год.)		
<b>4. Інтеграл Лебега та його основні властивості</b> 1. Означення інтеграла Лебега по множині скінченної міри. 2. Основні властивості інтеграла Лебега. 3. Теореми про граничний перехід під знаком інтеграла. 4. Зв'язок між інтегралами Лебега та Рімана.	Лекція (2 год.) +	[5] ст. 4 – 13	Аналіз матеріалів теми (4 год.)	1	Тиждень 4
	Пр. зан. (2 год)	[5] ст. 14 – 16	Індивідуальне завдання (4 год.)		
<b>5. Інші властивості</b>	Лекція	[5]	Аналіз	1	Тиждень 5

<p><b>інтеграла Лебега</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Інтеграл Лебега як границя інтегральної суми.</li> <li>2. Інтеграл Лебега по множині нескінченної міри.</li> <li>3. Збіжність в середньому, її зв'язок з іншими видами збіжності.</li> <li>4. Теорема Фубіні.</li> </ol>	<p>(2 год.) +</p> <p>Пр. зан. (2 год)</p>	<p>ст. 17 – 24</p> <p>[5] ст. 25 – 26</p>	<p>матеріалів теми (4 год.)</p> <p>Індивідуальне завдання (4 год.)</p>		
<p><b>6. Повні метричні простори та їх відображення</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Означення та приклади повних метричних просторів. Теорема про вкладені кулі.</li> <li>2. Відображення метричних просторів. Принцип стискаючих відображень.</li> <li>3. Застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування алгебраїчних рівнянь та систем лінійних рівнянь.</li> <li>4. Застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування систем лінійних рівнянь.</li> </ol>	<p>Лекція (2 год.) +</p> <p>Пр. зан. (2 год)</p>	<p>[6] ст. 4 – 10</p> <p>[6] ст. 16 – 17</p>	<p>Аналіз матеріалів теми (4 год.)</p> <p>Індивідуальне завдання (4 год.)</p>	1	Тиждень 6
<p><b>7. Метод послідовних наближень для диференціальних та інтегральних рівнянь.</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Розв'язування задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку.</li> <li>2. Розв'язування задачі Коші для систем диференціальних рівнянь першого порядку та рівнянь вищих порядків.</li> <li>3. Розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма II роду методом послідовних наближень.</li> <li>4. Розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри II роду методом послідовних наближень.</li> </ol>	<p>Лекція (2 год.) +</p> <p>Пр. зан. (2 год)</p>	<p>[1] ст. 70 – 82</p> <p>[1] ст. 88</p>	<p>Аналіз матеріалів теми (4 год.)</p> <p>Індивідуальне завдання (4 год.)</p>	1	Тиждень 7
<p><b>8. Лінійні топологічні та нормовані простори</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Означення та приклади лінійних просторів.</li> <li>2. Основні поняття, пов'язані з лінійними просторами.</li> <li>3. Лінійні топологічні та нормовані простори.</li> <li>4. Нормований простір <math>L_1</math> та його повнота.</li> </ol>	<p>Лекція (2 год.) +</p> <p>Пр. зан. (2 год)</p>	<p>[6] ст. 18 – 24</p> <p>[6] ст. 25 – 26</p>	<p>Аналіз матеріалів теми (4 год.)</p> <p>Індивідуальне завдання (4 год.)</p>	1	Тиждень 8

<b>Контроль самостійної роботи</b>	ДКР			20	Тиждень 9
<b>9. Евклідові простори</b> 1. Означення та приклади евклідових . 2. Нерівність Коші-Буняковського та аналог теореми Піфагора. 3. Евклідовий простір $L_2$ та його повнота. 4. Збіжність у середньому квадратичному.	Лекція (2 год.) +  Пр. зан. (2 год)	[6] ст. 27 – 33  [6] ст. 34 – 35	Аналіз матеріалів теми (4 год.)  Індивідуальне завдання (4 год.)	1	Тиждень 10
<b>10. Ортогональні системи та ряди Фур'є</b> 1. Базис евклідового простору. Приклади базисів. 2. Ряди Фур'є та нерівність Бесселя. 3. Зв'язок між замкненими, повними та тотальними системами. 4. Гільбертові простори. Теорема про ізоморфізм.	Лекція (2 год.) +  Пр. зан. (2 год)	[6] ст. 36 – 44  [6] ст. 45 – 46	Аналіз матеріалів теми (4 год.)  Індивідуальне завдання (4 год.)	1	Тиждень 11
<b>11. Лінійні функціонали</b> 1. Лінійні функціонали: неперервність, обмеженість, норма. 2. Приклади лінійних неперервних функціоналів. 3. Спряжені простори. Слабка збіжність. 4. Простори основних та узагальнених функцій.	Лекція (2 год.) +  Пр. зан. (2 год)	[7] ст. 4 – 11  [7] ст. 12 – 13	Аналіз матеріалів теми (4 год.)  Індивідуальне завдання (4 год.)	1	Тиждень 12
<b>12. Лінійні оператори</b> 1. Означення та приклади лінійних операторів та їх норм. 2. Добуток та степінь лінійних Операторів. 3. Оборотні та обернені Оператори. 4. Наближене розв'язування операторних рівнянь.	Лекція (2 год.) +  Пр. зан. (2 год)	[7] ст. 14 – 22  [7] ст. 23 – 24	Аналіз матеріалів теми (4 год.)  Індивідуальне завдання (4 год.)	1	Тиждень 13
<b>13. Операторні методи розв'язування інтегральних рівнянь</b> 1. Метод ітерованих ядер для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду 2. Метод ітерованих ядер для лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду. 3. Наближене розв'язування Інтегральних рівнянь II роду методом ітерованих ядер. 4. Формули Фредгольма. Резольвента Фредгольма.	Лекція (2 год.) +  Пр. зан. (2 год)	[1] ст. 44 – 54, 56 – 66  [1] ст. 55, 69	Аналіз матеріалів теми (4 год.)  Індивідуальне завдання (4 год.)	1	Тиждень 14

<b>14. Спектр оператора. Компактні оператори</b> 1. Спектр та резольвента оператора. 2. Спряжені оператори та їх властивості. 3. Компактні оператори та їх властивості. 4. Теорема Гільберта-Шмідта та її застосування.	Лекція (2 год.) +	[7] ст. 25 – 35	Аналіз матеріалів теми (4 год.)	1	Тиждень 15
	Пр. зан. (2 год)	[7] ст. 36 – 37	Індивідуальне завдання (4 год.)		
<b>15. Теорема Фредгольма</b> 1. Інтегральні рівняння Фредгольма II роду з виродженим ядром та теореми Фредгольма для них. 2. Теорема Фредгольма для довільних лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду. 3. Метод вироджених ядер. 4. Інтегральні рівняння Фредгольма II роду із симетричним ядром.	Лекція (2 год.) +	[1] ст. 56 – 67, 104 – 108	Аналіз матеріалів теми (4 год.)	1	Тиждень 16
	Пр. зан. (2 год)	[1] ст. 69, 117	Індивідуальне завдання (2 год.)  Контрольна робота (2 год)	25	
<b>Контроль самостійної роботи</b>	ДКР			20	Тиждень 17
<b>Контроль самостійної роботи</b>	Тестова контроль на робота	[7] ст. 39 – 55 [1] ст. 169 – 178		20	Тиждень 18

#### 7. Система оцінювання курсу

Загальна система оцінювання курсу	Залік (100 балів). З них: 15 балів – поточне оцінювання; 40 балів – за домашні контрольні роботи, 25 балів – за аудиторну контрольну роботу, 20 балів – за здачу теоретичного модуля у формі тесту.		
	<b>Шкала оцінювання: національна та ECTS</b>		
	Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою для заліку
	90 – 100	<b>A</b>	зараховано
	80 – 89	<b>B</b>	
	70 – 79	<b>C</b>	
	60 – 69	<b>D</b>	
	50 – 59	<b>E</b>	
	26 – 49	<b>FX</b>	не зараховано з можливістю повторного складання
	0-25	<b>F</b>	не зараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

Вимоги до письмової роботи	Написати розв'язання запропонованих задач з поясненнями (5 балів за кожну задачу аудиторної чи домашньої контрольної роботи)
Семінарські заняття	Контроль за відвідуванням та виконанням домашніх завдань.
Умови допуску до підсумкового контролю	Набрати не менше половини балів за кожну з форм оцінювання.

#### **8. Політика курсу**

Акцентування уваги студентів на основних поняттях функціонального аналізу, їх зв'язках з практичними потребами та можливостями застосування апарату функціонального аналізу для розв'язування основних задач обчислювальної математики.

#### **9. Рекомендована література**

##### **Базова**

1. *Василишин Т.В., Гой Т.П., Федак І.В.* Інтегральні рівняння: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Голіней, 2016. – 224с.
2. *Колмогоров А.М., Фомін С.В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 456с.
3. *Федак І.В.* Елементи теорії міри та інтеграла Лебега: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Сімик, 2011. – 168 с.
4. *Федак І.В.* Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри: Навчальний посібник для студентів спеціальності «Прикладна математика». Ч. 1. Вимірні множини та вимірні функції. – Івано-Франківськ: ПНУ, 2018. – 52с.
5. *Федак І.В.* Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри: Навчальний посібник для студентів спеціальності «Прикладна математика». Ч. 2. Інтеграл Лебега. – Івано-Франківськ: ПНУ, 2018. – 56с.
6. *Федак І.В.* Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри: Навчальний посібник для студентів спеціальності «Прикладна математика». Ч. 3. Основні структури функціонального аналізу. – Івано-Франківськ: ПНУ, 2018. – 48с.
7. *Федак І.В.* Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри: Навчальний посібник для студентів спеціальності «Прикладна математика». Ч. 4. Лінійні функціонали та лінійні оператори. – Івано-Франківськ: ПНУ, 2018. – 56с.
8. *Федак І.В.* Функціональний аналіз: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Голіней, 2011. – 120с.

##### **Допоміжна**

9. *Антоневич А.Б., Радыно Я.В.* Функціональний аналіз и інтегральні уравнения: Учебник. – Минск: БГУ, 2006. – 430с.
10. *Антоневич А.Б., Ваткина Е.И., Мазель М.Х. и др.* Функціональний аналіз и інтегральні уравнения: Лаб. практикум: Учеб. пособие. / Под редакцией А.Б. Антоневича и Я.В. Радыно. – Минск: БГУ, 2006. – 179с.
11. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 588с.
12. *Соболев В.И.* Лекции по дополнительным главам математического анализа. – М.: Наука, 1968. – 288с.

**Викладач Федак**