МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА

Факультет/інститут **математики та інформатики**

Кафедра математичного та функціонального аналізу

СИЛАБУС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Функціональний аналіз та теорія міри

Освітня програма Бакалавр

Спеціальність 113 Прикладна математика

Галузь знань 11 Математика і статистика

Затверджено на засіданні кафедри
Протокол № 1 від 27.08.2020 р.

м. Івано-Франківськ - 2020

ЗМІСТ

1. Загальна інформація	
Назва дисципліни	Функціональний аналіз та теорія міри
Рівень вищої освіти	Бакалавр
Викладач (-і)	Федак Іван Васильович
Контактний телефон викладача	0973577603
E-mail викладача	ivan.fedak@pnu.edu.ua
Формат дисципліни	Лекції, практичні заняття, індивідуальні завдання у формі домашніх контрольних робіт, аудиторна контрольна робота
Обсяг дисципліни	180 год./6 кредитів
Посилання на сайт дистанційного навчання	
Консультації	Консультації проводяться в індивідуальному порядку щодо розв'язування окремих конкретних задач домашньої контрольної роботи або ж за вказаними контактним телефоном чи електронною поштою.

2. Анотація до курсу

З поняттям міри людству доводилося стикатися ще зі стародавніх часів, вимірюючи відстані, площі, об'єми тощо. У процесі вивчення дисципліни «Функціональний аналіз та теорія міри» студенти матимуть змогу ознайомитися з основними математичними підходами до теорії вимірних множин та вимірних функцій. З цими поняттями також тісно пов'язане поняття інтеграла Лебега, який є природним узагальненням інтеграла Рімана, з яким студенти вже мали справу як в курсі математичного аналізу, так і шкільному курсі математики. Так само елементи функціонального аналізу стануть узагальненням тих понять, з якими студенти вже зустрічалися при вивченні математичного аналізу та алгебри, а також знайдуть своє застосування для розв'язування практичних задач.

3. Мета та цілі курсу

Мета курсу: Ознайомити студентів з поняттями міри Лебега, вимірних за Лебегом функцій, інтеграла Лебега, деякими узагальненнями поняття інтеграла і їх основними властивостями, основними структурами функціонального аналізу, властивостями лінійних функціоналів та лінійних операторів та застосуваннями цих властивостей до розв'язування конкретних задач.

Завдання курсу: Навчити студентів застосовувати властивості міри, вимірних функцій, інтеграла Лебега, лінійних нормованих та топологічних просторів, лінійних функціоналів та лінійних операторів до розв'язування конкретних задач як теоретичного, так практичного характеру.

4. Компетентності

Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу, до застосування теорії у практичних ситуаціях.
Здатність математично формалізувати проблему прикладного характеру, розпізнати стандартні об'єкти і властивості аналізу, звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь математичної фізики, дискретної математики, теорії керування, методів оптимізації, алгебри, геометрії.

У результаті проходження курсу студент повинен знати:
поняття міри множини, основні властивості міри Лебега;
властивості вимірних та інтегровних за Лебегом функцій; властивості інтеграла Лебега та його зв'язок з інтегралом Рімана;
означення та властивості повних метричних просторів, принцип стискаючих відображень та його застосування; означення та властивості лінійних, нормованих та евклідових просторів;
означення та властивості лінійних функціоналів і операторів;
можливості застосування властивостей лінійних операторів до розв'язування конкретних задач.

5. Результати навчання

Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, рівнянь математичної фізики, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, числовими методами, методами оптимізації.

У результаті проходження курсу студент повинен вміти:
знаходити міри множини та обчислювати інтеграли Лебега;
розв'язувати рівняння, системи рівнянь, задачу Коші та інтегральні рівняння Фредгольма методом послідовних наближень;
досліджувати на збіжність послідовності у нормованих просторах;
обґрунтовувати лінійність та неперервність функціоналів і операторів та знаходити їхні норми;
розв'язувати інтегральні рівняння методом ітерованих ядер.

6. Організація навчання курсу

Обсяг курсу

Вид заняття	Загальна кількість годин
лекції	30 год.
семінарські заняття / практичні / лабораторні	30 год.
самостійна робота	120 год.

Ознаки курсу

Семестр	Спеціальність	Курс (рік навчання)	Нормативний / вибірковий
6	**Прикладна математика**	3	вибіркова (вільного вибору студента)

Тематика курсу

Тема, план	Форма заняття	Література	Завдання, год	Вага оцінки	Термін виконання
1. Множини та їх потужності. Системи множин 1. Множини та операції над ними. 2. Зліченні та незліченні множини. Потужність множини. 3. Канторова множина та її властивості. 4. Поняття про системи множин.	Лекція (2 год.) + Пр. зан. (2 год)	[5] ст. 4 – 11 [5] ст. 12 – 13	Аналіз матеріалів теми (4 год.) Індивідуальне завдання (4 год.)	1	Тиждень 1
***2.* Множини у метричних просторах** 1. Означення та приклади метричних просторів. 2. Класифікація точок множини Сепарабельні простори. 3. Відкриті і замкнені множини. 4. Топологічні простори. Компактність.	Лекція (2 год.) + Пр. зан. (2 год)	[5] ст. 14 – 22 [5] ст. 23	Аналіз матеріалів теми (4 год.) Індивідуальне завдання (4 год.)	1	Тиждень 2
3. Квадровані фігури та загальне означення міри 1. Міри прямокутника та елементарної множини. 2. Зовнішня міра множини та міра Жордана. 3. Загальне означення міри. Приклади мір. 4. «Важка» та «легка» задачі теорії міри.	Лекція (2 год.) + Пр. зан. (2 год)	[5] ст. 24 – 31 [5 ст. 32 – 33	Аналіз матеріалів теми (4 год.) Індивідуальне завдання (4 год.)	1	Тиждень 3
4. Множини, вимірні за Лебегом	Лекція (2 год.)	[5] ст. 34 – 39	Аналіз матеріалів	1	Тиждень 4

1. Міра Лебега. σ- алгебра вимірних за Лебегом множин. 2. σ- адитивність та неперервність міри Лебега. 3. Загальний підхід до продовження міри за Лебегом. 4. Поняття про σ- скінченні міри.	+ Пр. зан. (2 год)	[5] ст. 40 – 41	теми (4 год.) Індивідуальне завдання (4 год.)		
5. Вимірні функції та їх властивості 1. Означення та приклади вимірних функцій. 2. Арифметичні дії над вимірними функціями. 3. Послідовності вимірних Функцій. 4. Збіжність за мірою, її зв'язок зі збіжністю майже скрізь.	Лекція (2 год.) + Пр. зан. (2 год)	[5] ст. 42 – 48 [5] ст. 49 – 51	Аналіз матеріалів теми (4 год.) Індивідуальне завдання (4 год.)	1	Тиждень 5
6. Інтеграл Лебега та його основні властивості 1. Означення інтеграла Лебега по множині скінченної міри. 2. Основні властивості інтеграла Лебега. 3. Теореми про граничний перехід під знаком інтеграла. 4. Зв'язок між інтегралами Лебега та Рімана.	Лекція (2 год.) + Пр. зан. (2 год)	[6] ст. 4 – 13 [6] ст. 14 – 16	Аналіз матеріалів теми (4 год.) Індивідуальне завдання (4 год.)	1	Тиждень 6
7. Інші властивості інтеграла Лебега 1. Інтеграл Лебега як границя інтегральної суми. 2. Інтеграл Лебега по множині нескінченної міри. 3. Збіжність в середньому, її зв'язок з іншими видами збіжності. 4. Теорема Фубіні.	Лекція (2 год.) + Пр. зан. (2 год)	[6] ст. 17 – 24 [26] ст. 25 – 26	Аналіз матеріалів теми (4 год.) Індивідуальне завдання (4 год.)	1	Тиждень 7
8. Невизначений інтеграл Лебега та узагальнення поняття інтеграла 1. Невизначений інтеграл Лебега та монотонні функції. 2. Абсолютно неперервні функції, їх зв'язок з невизначеним інтегралом Лебега. 3. Знакозмінні міри. Теорема Радона-Нікодима. 4. Міри та інтеграл Лебега-Стільтьєса.	Лекція (2 год.) + Пр. зан. (2 год)	[6] ст. 27 – 41 [6] ст. 42 – 44	Аналіз матеріалів теми (4 год.) Індивідуальне завдання (4 год.)	1	Тиждень 8
Контроль самостійної роботи	ДКР			20	Тиждень 9

9. Повні метричні простори та їх відображення 1. Означення та приклади повних метричних просторів. Теорема про вкладені кулі. 2. Відображення метричних просторів. Принцип стискаючих відображень. 3. Застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування рівнянь та систем лінійних рівнянь. 4. Розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь методом послідовних наближень.	Лекція (2 год.) + Пр. зан. (2 год)	[7] ст. 4 – 15 [7] ст. 16 – 17	Аналіз матеріалів теми (4 год.) Індивідуальне завдання (4 год.)	1	Тиждень 10
10. Лінійні топологічні та нормовані простори 1. Означення та приклади лінійних просторів. 2. Основні поняття, пов'язані з лінійними просторами. 3. Лінійні топологічні та нормовані простори. 4. Нормований простір L_1 та його повнота.	Лекція (2 год.) + Пр. зан. (2 год)	[7] ст. 18 – 24 [7] ст. 25 – 26	Аналіз матеріалів теми (4 год.) Індивідуальне завдання (4 год.)	1	Тиждень 11
11. Евклідові простори 1. Означення та приклади евклідових . 2. Нерівність Коші-Буняковського та аналог теореми Піфагора. 3. Евклідовий простір L_2 та його повнота. 4. Збіжність у середньому квадратичному.	Лекція (2 год.) + Пр. зан. (2 год)	[7] ст. 27 – 33 [7] ст. 34 – 35	Аналіз матеріалів теми (4 год.) Індивідуальне завдання (4 год.)	1	Тиждень 12
12. Ортогональні системи та ря ди Фур'є 1. Базис евклідового простору. Приклади базисів. 2. Ряди Фур'є та нерівність Бесселя. 3. Зв'язок між замкненими, повними та тотальними системами. 4. Гільбертові простори. Теорема про ізоморфізм.	Лекція (2 год.) + Пр. зан. (2 год)	[7] ст. 36 – 44 [7] ст. 45 – 46	Аналіз матеріалів теми (4 год.) Індивідуальне завдання (4 год.)	1	Тиждень 13
13. Лінійні функціонали 1. Лінійні функціонали: неперервність, обмеженість, норма. 2. Приклади лінійних неперервних функціоналів. 3. Спряжені простори. Слабка збіжність. 4. Простори основних	Лекція (2год.) + Пр. зан. (2 год)	[8] ст. 4 – 11 [8] ст. 12 – 13	Аналіз матеріалів теми (4 год.) Індивідуальне завдання (4 год.)	1	Тиждень 14

та узагальнених функцій.					
14. Лінійні оператори 1. Означення та приклади лінійних операторів та їх норм. 2. Добуток та степінь лінійних Операторів. 3. Оборотні та обернені Оператори. 4. Метод ітерованих ядер для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма та Вольтерри.	Лекція (2 год.) + Пр. зан. (2 год)	[8] ст. 14 – 22 [8] ст. 23 – 24	Аналіз матеріалів теми (4 год.) Індивідуальне завдання (4 год.)	1	Тиждень 15
15. Спектр оператора. Компактні оператори 1. Спектр та резольвента оператора. 2. Спряжені оператори та їх властивості. 3. Компактні оператори та їх властивості. 4. Теорема Гільберта-Шмідта та її застосування.	Лекція (2 год.) + Пр. зан. (2 год)	[8] ст. 25 – 35 [8] ст. 26 – 37	Аналіз матеріалів теми (4 год.) Індивідуальне завдання (2 год.) Контрольна робота (2 год)	1 25	Тиждень 16
Контроль самостійної роботи	ДКР			20	Тиждень 17
Контроль самостійної роботи	Тестова контроль на робота	[8] ст. 39 – 55		20	Тиждень 18

7. Система оцінювання курсу

Загальна система оцінювання курсу

Залік (100 балів).
З них: 15 балів – поточне оцінювання;
40 балів – за домашні контрольні роботи,
25 балів – за аудиторну контрольну роботу,
20 балів – за здачу теоретичного модуля у формі тесту.

Шкала оцінювання: національна та ECTS

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою для заліку
90 – 100	**A**	зараховано
80 – 89	**B**	
70 – 79	**C**	
60 – 69	**D**	
50 – 59	**E**	
26 – 49	**FX**	не зараховано з можливістю повторного складання

	0-25	**F**	не зараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни
Вимоги до письмової роботи	Написати розв'язання запропонованих задач з поясненнями (5 балів за кожну задачу аудиторної чи домашньої контрольної роботи		
Семінарські заняття	Контроль за відвідуванням та виконанням домашніх завдань.		
Умови допуску до підсумкового контролю	Набрати не менше половини балів за кожну з форм оцінювання.		

8. Політика курсу

Акцентування уваги студентів на основних поняттях теорії міри та інтеграла, їх зв'язках з практичними потребами. Обґрунтування потреби у вивчення різних структур функціонального аналізу та лінійних функціоналів і лінійних операторів на цих структурах. Ілюстрація взаємозв'язків між різними підходами до інтегрування функцій та на взаємозв'язках елементів функціонального аналізу з дисциплінами математичного аналізу і лінійної алгебри і його можливостями практичного застосування.

9. Рекомендована література

Базова

1. *Колмогоров А.М., Фомін С.В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 456с.
2. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480с.
3. *Очан Ю.С.* Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций: Учебное пособие. – М.: Просвещение, 1981. – 271с.
4. *Федак І.В.* Елементи теорії міри та інтеграла Лебега: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Сімик, 2011. – 168 с.
5. *Федак І.В*. Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри: Навчальний посібник для студентів спеціальності «Прикладна математика». Ч. 1. Вимірні множини та вимірні функції. – Івано-Франківськ: ПНУ, 2018. – 52с.
6. *Федак І.В*. Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри: Навчальний посібник для студентів спеціальності «Прикладна математика». Ч. 2. Інтеграл Лебега. – Івано-Франківськ: ПНУ, 2018. – 56с.
7. *Федак І.В*. Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри: Навчальний посібник для студентів спеціальності «Прикладна математика». Ч. 3. Основні структури функціонального аналізу. – Івано-Франківськ: ПНУ, 2018. – 48с.
8. *Федак І.В*. Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри:Навчальний посібник для студентів спеціальності «Прикладна математика». Ч. 4. Лінійні функціонали та лінійні оператори. – Івано-Франківськ: ПНУ, 2018. – 56с.
9. *Федак І.В*. Функціональний аналіз: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Голіней, 2011. – 120с.

Допоміжна

1. *Антоневич А.Б., Радыно Я.В.* Функциональный анализ и интегральные уравнения: Учебник. – Минск: БГУ, 2006. – 430с.
2. *Антоневич А.Б., Ваткина Е.И., Мазель М.Х. и др.* Функциональный анализ и интегральные уравнения: Лаб. практикум: Учеб. пособие. / Под редакцией А.Б. Антоневича и Я.В. Радыно. – Минск: БГУ, 2006. – 179с.
3. *Василишин Т.В., Гой Т.П., Федак І.В.* Інтегральні рівняння: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Голіней, 2016. – 224с.
4. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 588с.
5. *Соболев В.И.* Лекции по дополнительным главам математического анализа. – М.: Наука, 1968. – 288с.

6. *Теляковский С.А.* Сборник задач по теории функций действительного переменного. – М.: Наука, 1980. – 112с.

Викладач ___*Федак*__