

Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Віктор МАЗУРЕНКО

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

ЧАСТИНА 1
ЛІНІЙНЕ І ДИСКРЕТНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Івано-Франківськ

2023

УДК 519.8:519.176

ББК 22.18

М13

Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника як навчальний посібник для здобувачів вищої освіти за спеціальністю «Прикладна математика» (протокол № 10 від 21.11.2023 р.)

Рецензенти: *Соломко А.В.*, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Дмитришин М.І., доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

М13 Мазуренко В. В.

Методи оптимізації та дослідження операцій. Ч. 1. Лінійне і дискретне програмування: Навч. посіб. – Ів.-Фр.: Ел. вид. ПНУ, 2023. – 306 с.

У першій частині посібника викладені основні методи лінійного і дискретного програмування в теорії оптимізації. Розглянуті спеціальні моделі дослідження операцій: параметричні, транспортні, мережеві. Теоретичний матеріал супроводжується численними прикладами з їх детальним розв’язуванням.

Для здобувачів вищої освіти за спеціальністю «Прикладна математика». Буде корисним при викладанні навчальних дисциплін «Теорія оптимізації», «Дослідження операцій», «Математичне програмування», «Математичне моделювання» тощо.

УДК 519.8:519.176

ББК 22.18

© Віктор МАЗУРЕНКО, 2023.

ВСТУП	4
1 МЕТОДИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	12
1.1. СЛАР: метод Жордана–Гауса	13
1.2. Основні форми запису ЗЛП	23
1.3. Стандартна ЗЛП: графічний метод	35
1.4. Канонічна ЗЛП: симплекс–метод.....	46
1.5. Основна ЗЛП: метод штучного базису	60
1.6. Канонічна ЗЛП: модифікований симплекс–метод	71
1.7. Псевдоканонічна ЗЛП: двоїстий симплекс–метод	85
2 МЕТОДИ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	105
2.1. Цілочислова ЗЛП: графічний метод.....	106
2.2. Цілочислова ЗЛП: метод відтинань Гоморі.....	115
2.3. Дискретна ЗЛП: метод Дальтона–Ллевеліна.....	136
2.4. Дискретна ЗЛП: метод гілок і меж.....	143
2.5. Бінарна ЗЛП: адитивний метод Балаша	163
3 СПЕЦІАЛЬНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ.....	169
3.1. Задачі параметричного програмування	171
3.2. Транспортні задачі за критерієм вартості.....	189
3.3. Транспортні задачі за критерієм часу та інші моделі	228
3.4. Задачі оптимізації на графах і мережах.....	258
3.5. Задачі про оптимальні призначення та комівояжера.....	291
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	303

"... у світі не відбувається нічого,
у чому не було б видно сенс якогось
максимуму чи мінімуму ..."

Леонард Ейлер

З проблемами вибору найкращої у деякому сенсі або, як кажуть, *оптимальної* серед декількох альтернативних варіантів поведінки (чи прийняття рішень) стикаємось у різних сферах людської діяльності (на виробництві, у сільському господарстві, економіці, транспорті, військовій справі, техніці, механіці, інформатиці, природознавстві тощо). Задачі такого характеру називають *задачами оптимізації* (також *задачами прийняття рішень*, *задачами оптимального керування*). Слово *оптимальний* походить від латинського *optimus*, що у перекладі означає *найкращий, досконалий*. Суть оптимізаційних задач зводиться до відшукування максимуму чи мінімуму (лат. *maximum* і *minimum* означають відповідно *найбільше* і *найменше*) деяких величин. Обидва ці поняття поєднуються терміном *екстремум* (лат. *extremum* означає *крайне*). Саме тому задачі такого типу називають ще *екстремальними* задачами.

Для прийняття більшості рішень на побутовому рівні науковий підхід, очевидно, не є вкрай необхідний, тут людині достатньо керуватися власним життєвим досвідом і здоровим глуздом. Однак для прийняття відповідальних рішень, коли ціна помилки може виявитись надто високою, наукове обґрунтування для планування діяльності і прийняття рішень стає не тільки бажаним, але й вкрай необхідним. Можливо тому в роки Другої світової війни дослідження у сфері прийняття рішень оформилися в окремий науковий напрям, що отримав назву "*дослідження операцій*". Перші публікації з цієї тематики з'явилися у 1939-40 рр. і були присвячені окремим задачам аналізу і дослідження військових операцій (звідси й назва напрямку). У повоєнні роки принципи та методи дослідження операцій почали використовувати у сфері промислово-фінансового керування. Зі зростанням масштабів виробництва, розвитком методів і форм організації керування економічними системами розширювалися також масштаби операційних досліджень та коло вирішуваних

проблем. Нині *дослідження операцій* – це комплексна математична дисципліна, що займається розробкою і застосуванням методів прийняття оптимальних рішень на основі побудови і аналізу математичних моделей в різних сферах людської діяльності. Під *операцією* слід розуміти систему керованих дій, поєднаних спільним задумом і спрямованих на досягнення певної мети.

Головним методологічним принципом дослідження операцій є *системний підхід* до вирішення поставленої проблеми, який полягає в тому, що будь-яка розв’язувана задача має розглядатися з точки зору її впливу на критерій функціонування системи в цілому. Ще однією важливою особливістю дослідження операцій є *принцип оптимальності*, тобто прагнення відшукати оптимальний розв’язок поставленої задачі. Однак часто на практиці знайти такий розв’язок неможливо з декількох причин: через неадекватність чи надмірну складність математичної моделі, через відсутність методів, через обмеженість наявних ресурсів (н-д, машинного часу ЕОМ) тощо. В такій ситуації обмежуються пошуком не оптимальних, а достатньо “хороших” з погляду практики розв’язків, тобто доводиться шукати компроміс між ефективністю прийнятих рішень та затратами на їх пошук. Мабуть, тому один із засновників дослідження операцій Т. Сааті визначив цю науку як “*мистецтво давати погані відповіді на такі практичні запитання, на які інші методи дають ще гірші відповіді*” [3].

Кінцеві результати операційних досліджень повинні бути продуктом колективної роботи, коли замовники досліджень і аналітики працюють пліч-о-пліч. Відтак, для проведення того чи іншого операційного дослідження на практиці, як правило, створюється аналітична група, до складу якої входять фахівці з різних галузей знань (інженери, математики, економісти, психологи тощо) і завданням якої є комплексне дослідження поставленої проблеми з використанням для цього ідей та методів різних наук. Загалом належним чином проведене операційне дослідження повинно включати такі основні етапи:

1. *Постановка проблеми і розробка концептуальної моделі*. Цей етап операційного дослідження є надзвичайно важливим і відповідальним. Недаремно кажуть, що правильно поставити проблему – це наполовину її вирішити. Найперше мету і задачу дослідження формулює замовник. Далі аналітична група детально обстежує відповідну систему (об’єкт дослідження) і в результаті неодноразових консультацій із замовником виконує змістовну постановку

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] *Бартіш М., Дудзяний І.* Дослідження операцій. Частина 1. Лінійні моделі: Підручник. — Львів: Вид. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. — 168 с.
- [2] *Бартіш М., Дудзяний І.* Дослідження операцій. Частина 2. Алгоритми оптимізації на графах: Підручник. — Львів: Вид. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. — 120 с.
- [3] *Зайченко Ю.* Дослідження операцій: підручник. — 7-е, переробл. та доповн. вид. — К.: Слово, 2006. — 816 с.
- [4] Математичне програмування: Навч. посіб. / А. Ф. Барвінський, І. Я. Олексів, З. І. Крупка та ін.; Під ред. А. Ф. Барвінського. — Львів: Інтелект-Захід, 2004. — 448 с.
- [5] *Попов Ю., Тюття В., Шевченко В.* Методи оптимізації: навч. електрон. посібн. — К.: Електронна бібліотека факультету кібернетики КНУ, 2003. — 215 с.
- [6] *Степанюк В.* Методи математичного програмування: навч. посіб. — К.: Вища школа, 1977. — 272 с.
- [7] *Цегелик Г.* Лінійне програмування. — Львів: Світ, 1995. — 213 с.
- [8] *Balas E.* An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables // *J. ORSA.* — 1965. — Vol. 13, No. 4. — P. 517–546.
- [9] *Bellman R.* On a routing problem // *Quarterly of Applied Mathematics.* — 1958. — Vol. 16, No. 1. — P. 87–90.
- [10] *Cayley A.* On the theory of the analytical forms called trees // *Philos. Mag.* — 1857. — Vol. 13. — P. 19–30. — [Mathematical Papers, Cambridge. — 1891. — Vol. 3. — P. 242–246].
- [11] *Charnes A.* Optimality and degeneracy in linear programming // *Econometrica.* — 1952. — Vol. 20, No. 2. — P. 160–170.
- [12] *Dantzig G.* Application of the simplex method to the transportation problem // Activity Analysis of Production and Allocation, Proceedings of Linear Programming Conference, June 20–24, 1949 / Ed. by T. C. Koopmans. — New York: John Wiley and Sons, 1951. — P. 359–373.

- [13] *Dantzig G.* All shortest routes in a graph // *Theory of Graphs, International Symposium, Rome.* — New York: Gordon and Breach, 1966. — P. 91–92.
- [14] *Dantzig G.* Reminiscences about the origins of linear programming // *Mathematical Programming: The Sytate of the Art* / Ed. by A. Bachem, M. Groetschel, B. Korte. — Berlin: Springer Verlag, 1983. — P. 79–86.
- [15] *Dantzig G., Thapa M.* Linear Programming 1: Introduction. — NY: Springer, 1997.
- [16] *Dantzig G., Thapa M.* Linear Programming 2: Theory and Extensions. — NY: Springer, 2003.
- [17] *Dijkstra E.* A note on two problems in connexion with graphs // *Numerische Mathematik.* — 1959. — Vol. 1. — P. 269–271.
- [18] *Dorfman R.* Mathematical, or „linear”, programming: A nonmathematical exposition // *American Economic Review.* — 1953. — Vol. 43, No. 5. — P. 797–625.
- [19] The dual method of solving the linear programming problems / J. Little, K. Murty, D. Sweeney, C. Karel // *Operations Research.* — 1963. — Vol. 11, No. 5. — P. 972–989.
- [20] *Egerváry J.* Matrixok kombinatorius tulajdonságairól [in hungarian: On combinatorial properties of matrices] // *Matematikai és Fizikai Lapok.* — 1931. — Vol. 38. — P. 16–28.
- [21] *Euler L.* Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis // *Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae.* — 1736. — Vol. 8. — P. 128–140. — [Opera Omnia. Series I. — 1766. — Vol. 7. — P. 1–10.].
- [22] *Evans J., Minieka E.* Optimization algorithms for networks and graphs. — 2nd edition. — Boca Raton: CRC Press, 1992. — 488 pp.
- [23] *Floyd R.* Algorithm 97: Shortest path // *Comm. of ACM.* — 1962. — Vol. 5. — P. 345.
- [24] *Ford L.R. J., Fulkerson D.* Flows in networks. — New Jersey: Princeton University Press, 1962. — P. 276.
- [25] *Frank A.* On kuhn’s hungarian method — a tribute from hungary: Technical Report 2004–14. — Budapest, Hungary: Egerváry Research Group on Combinatorial Optimization, 2004. — [www.cs.elte.hu/egres].
- [26] *Gomory R.* Outline of an algorithm for integer solution to linear programs // *Bulletin AMS.* — 1958. — Vol. 64. — P. 275–278.

-
- [27] *Hitchcock F.* The distribution of a product from several sources to numerous localities // *Journal of Mathematical Physics*. — 1941. — Vol. 20. — P. 224–230.
 - [28] *Jordan C.* Sur les assemblages de lignes // *J. Reine Angew. Math.* — 1869. — Vol. 70. — P. 185–190.
 - [29] *Kantorovich L.* Mathematical methods of organizing and planning production // *Management Science*. — 1960. — Vol. 6, No. 4. — P. 366–422. — [English translation of the famous 1939 article by L. V. Kantorovich, originally published in Russian].
 - [30] *Kirchhoff G.* Über die auflösung der gleichungen, auf welche man bei der untersuchung der linearen verteilung galvanischer ströme geführt wird // *Ann. Phys. Chem.* — 1847. — Vol. 72. — P. 497–508.
 - [31] *Kőnig D.* Graphok és matrixok [in hungarian: Graphs and matrices] // *Matematikai és Fizikai Lapok*. — 1931. — Vol. 38. — P. 116–119.
 - [32] *Kőnig D.* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. — Leipzig: Acad. Verl. M.B.H., 1936. — P. 257. — [Reprint in New York: AMS Chelsea Publishing, 1950].
 - [33] *Koopmans T.* Optimum utilization of the transportation system // The Econometric Society Meeting, Proceedings of the International Statistical Conference. — Vol. 5. — 1947. — P. 136–146. — [Reprinted in Supplement to *Econometrica*. — 1949. — Vol. 17].
 - [34] *Korbut A., Finkel'shtein Y.* Discrete Programming. — M.: Nauka, 1969. — 264 pp. — in Russian.
 - [35] *Kruskal J.* On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem // *Proc. AMS*. — 1956. — Vol. 7, No. 1. — P. 48–50.
 - [36] *Kuhn H.* The hungarian method for the assignment problem // *Naval Res. Log. Quart.* — 1955. — Vol. 2, No. 1. — P. 83–97.
 - [37] *Land A., Doig A.* An automatic method of solving discrete programming problems // *Econometrica*. — 1960. — Vol. 28, No. 3. — P. 497–520.
 - [38] *Lemke C.* The dual method of solving the linear programming problems // *NRLQ*. — 1954. — Vol. 1, No. 1. — P. 36–47.
 - [39] *Minty G.* A comment on the shortest route problem // *Operations Research*. — 1957. — Vol. 5. — P. 724.

-
- [40] *Prim R.* Shortest connection networks and some generalizations // *Bell System Technical Journal*. — 1957. — Vol. 36. — P. 1389–1401.
 - [41] *Stigler G.* The cost of subsistence // *Journal of Farm Economics*. — 1945. — Vol. 27, No. 2. — P. 303–314.
 - [42] *Voloshin V.* Graph coloring: History, results and open problems // *Alabama Journal of Mathematics, Spring/Fall*. — 2009.
 - [43] *Winston W.* Operation Reserach: Applications and Algorithms. — Brooks/Cole–Thomson Learning, 2004. — 1418 pp.