Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

О. В. Махней

ПРАКТИКУМ З МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів
спеціальностей «Математика», «Прикладна математика»

Івано-Франківськ
2022

УДК 004.94:519.87
ББК 22.18
М 36

Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника як навчальний посібник для студентів спеціальностей «Математика», «Прикладна математика» (протокол № 9 від 19 травня 2022 р.).

Рецензенти:

П'янило Я. Д., доктор технічних наук (Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача);

Власій О. О., кандидат технічних наук (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника).

М36 Махней О. В. Практикум з математичного моделювання : навчальний посібник. — Івано-Франківськ : Голіней, 2022. — 172 с.

Посібник містить короткий теоретичний матеріал, приклади розв'язування типових задач, підбір задач для практичних занять і самостійної роботи з математичного моделювання. Містить понад 60 прикладів і задач з детальним розв'язуванням.

Для студентів спеціальностей «Математика» і «Прикладна математика». Може бути корисним для студентів інженерно-технічних та природничих спеціальностей.

УДК 004.94:519.87
ББК 22.18

Зміст

Передмова

Моделювання — це потужний універсальний метод дослідження й оцінювання ефективності різноманітних систем. Під математичним моделюванням розуміють процес створення для заданого реального об'єкта деякої математичної моделі, якою може бути як система рівнянь, так і комп'ютерна програма. Математичне моделювання широко використовують у різноманітних галузях і розділах сучасної науки й техніки.

Метою пропонованого практикуму з математичного моделювання є ознайомлення студентів із розв'язуванням задач з різноманітних методів математичного моделювання.

Практикум містить десять тем. До кожної теми наведено короткі теоретичні відомості, рекомендовану літературу, розв'язані типові задачі, запропоновані вправи для аудиторної і самостійної роботи. Кінець розв'язаних прикладів позначається символом ■, проте у тих випадках, де була можливість «загубити» відповідь серед тексту, її написано в кінці прикладу.

Практикум написаний на основі досвіду проведення автором практичних занять з математичного моделювання на факультеті математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника для студентів спеціальностей «Математика» і «Прикладна математика».

Тема 1. Диференціальні моделі

Короткі теоретичні відомості

Диференціальними називають моделі, які задаються з допомогою диференціальних рівнянь. Найпоширеніший метод побудови диференціальних рівнянь полягає у використанні фундаментальних законів природи у конкретній ситуації, таких як другий закон Ньютона, закон розчинення речовини, закон Гука та інші.

Можна рекомендувати дотримуватись такої послідовності дій при складанні і дослідженні диференціальних моделей:

1) встановити величини, які змінюються у заданому явищі чи процесі, і виявити закони (формули) відповідної науки, які ці величини пов'язують;

2) вибрати незалежні змінні і функції цих змінних, які потрібно знайти;

3) виходячи з відомих даних, визначити початкові, крайові або інші умови, які накладаються на шукані функції;

4) виразити всі величини через незалежні змінні, шукані функції та їхні похідні або прирости незалежних змінних і функцій;

5) виходячи з закону, який описує задане явище, або отриманої залежності, скласти диференціальне рівняння чи систему таких рівнянь;

6) зінтегрувати одержані диференціальні рівняння;

7) якщо задані початкові чи інші умови, то знайти частинний розв'язок, який ці умови задовольняє;

8) за необхідності здійснити дослідження одержаного розв'язку.

Рекомендована література: [1, с. 9–64], [9, с. 23–46], [11, с. 15–226], [13, с. 11–92].

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 1.1. З деякої висоти вертикально вниз кинуто тіло масою m. Знайти закон зміни швидкості v падіння цього тіла від часу t, якщо на нього діє сила ваги і гальмівна сила опору повітря, пропорційна квадрату швидкості тіла. Визначити максимальну можливу швидкість падіння тіла.
Розв'язання. З другого закону Ньютона

$$m\frac{dv}{dt} = F.$$

Сила F складається з двох сил: сили ваги $F_1 = mg$ і сили опору повітря $F_2 = -kv^2$. Тоді

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2.$$

Відокремлюємо змінні і інтегруємо рівняння:

$$\frac{m\,dv}{mg - kv^2} = dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{m}{k}\int \frac{dv}{v^2 - \frac{mg}{k}} = t + C \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{kg}}\ln\left|\frac{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}}\right| = t + C \quad \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}}\right| = -2\sqrt{\frac{kg}{m}}\,(t + C) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}} = Ce^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t} \quad \Rightarrow$$

$$v = \frac{\sqrt{\frac{mg}{k}}\left(1 + Ce^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}\right)}{1 - Ce^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}. \tag{1.1}$$

Якщо початкова швидкість дорівнює v_0, то

$$C = \frac{v_0 - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v_0 + \sqrt{\frac{mg}{k}}},$$

зокрема, якщо $v_0 = 0$, то $C = -1$.

Для того щоб знайти максимальну можливу швидкість падіння тіла, перейдемо в (1.1) до границі при $t \to +\infty$. Тоді $v_{max} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$. Можна й іншим способом отримати цю швидкість: з рівності $F = 0$ маємо $mg = kv^2$, звідки $v_{max} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$. ■

Приклад 1.2. У лекційній аудиторії об'ємом 200 м^3 повітря після лекції містить 0,1 % вуглекислоти. Кондиціонер подає свіже повітря, що містить 0,04 % вуглекислого газу, в кількості a м^3/хв. Припустивши, що змішування чистого повітря з забрудненим відбувається миттєво, обчислити, якою має бути величина a, щоб після 10 хвилин перерви вміст вуглекислого газу в аудиторії не перевищував 0,06 %.

Розв'язання. Позначимо вміст вуглекислого газу (в %) у повітрі в момент часу t через $y(t)$. Розглянемо деякий проміжок часу Δt і знайдемо зміну концентрації вуглекислого газу в аудиторії за цей проміжок, вважаючи, що процес є рівномірним. За цей час кондиціонер подає $0{,}0004a\Delta t$ м^3 вуглекислого газу, а виходить його з приміщення назовні через шпарини $0{,}01y(t+\alpha)a\Delta t$ м^3. Отже, за Δt хвилин кількість вуглекислоти в повітрі змінюється на $0{,}0004a\Delta t - 0{,}01y(t+\alpha)a\Delta t$ м^3. З іншого боку, $(y(t+\Delta t) - y(t))0{,}01 \cdot 200$ – це приріст вуглекислоти в приміщенні. Отже,

$$(y(t+\Delta t) - y(t))0{,}01 \cdot 200 = (0{,}0004 - 0{,}01y(t+\alpha))a\Delta t \quad \Rightarrow$$
$$200dy = (0{,}04 - y)a\,dt.$$

Таким чином, одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Зінтегруємо його:

$$200\frac{dy}{0{,}04-y} = a\,dt \quad \Rightarrow \quad y = 0{,}04 + Ce^{-\frac{at}{200}}.$$

Оскільки $y(0) = 0{,}1$, то $C = 0{,}06$ і

$$y = 0{,}04 + 0{,}06e^{-\frac{at}{200}}.$$

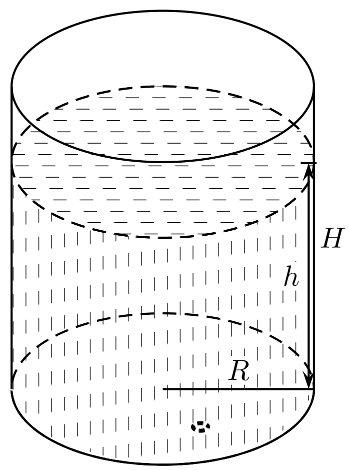
Внаслідок умови $y(10) = 0{,}06$ маємо:

$$0{,}06 = 0{,}04 + 0{,}06e^{-\frac{10a}{200}} \quad \Rightarrow \quad a = 20\ln 3 \approx 22 \text{ м}^3/\text{хв.} \blacksquare$$

Приклад 1.3. У дні вертикальної циліндричної посудини висоти H і радіуса основи R, заповненої водою, утворився невеликий отвір площі S (рис. 1.1). Через який час через отвір витече вся вода, якщо чверть води витікає через t_1 с.

Розв'язання. Якщо б витікання води відбувалось рівномірно, то вся вода витекла б з посудини за $4t_1$ с. Однак досліди показують, що зі зменшенням рівня води у посудині швидкість витікання води зменшується. Тому потрібно врахувати залежність між швидкістю витікання v і висотою h стовпа води над отвором. Згідно із законом Торрічеллі

$$v = \mu\sqrt{2gh},$$



1.1

де g — прискорення вільного падіння ($g = 9{,}8$ м/с^2), μ — коефіцієнт, залежний від в'язкості рідини та форми отвору (для води у випадку круглого отвору $\mu = 0{,}6$).

Розглянемо досліджуваний процес на відрізку $[t; t + \Delta t]$. Нехай у момент часу t висота води над отвором становила h, а через Δt с вона зменшилась і стала $h+\Delta h$, де Δh — приріст висоти (очевидно, $\Delta h < 0$). Тоді об'єм води, який витік з посудини, дорівнює об'єму відповідного циліндра, тобто

$$\Delta V = -\pi R^2 \Delta h.$$

Припустимо, що вода з посудини виливається у вигляді циліндричного струменя, площа основи якого S, а висота дорівнює шляху, який пройшла вода за проміжок часу $[t; t+\Delta t]$. На початку і наприкінці цього відрізку швидкість витікання води згідно із законом Торрічеллі дорівнювала $\mu\sqrt{2gh}$ і $\mu\sqrt{2g(h+\Delta h)}$ відповідно. Якщо Δt досить мале, то $\Delta h(t)$ також мале і отримані вирази для швидкості майже однакові. Тому шлях, пройдений водою за проміжок часу $[t; t+\Delta t]$, виражається формулою $\big(\mu\sqrt{2gh} + \alpha(\Delta t)\big)\Delta t$, де $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \alpha(\Delta t) = 0$. Отже, об'єм рідини, яка виллється за проміжок часу $[t; t+\Delta t]$, можемо знайти за формулою

$$\Delta V = \Big(\mu\sqrt{2gh} + \alpha(\Delta t)\Big) S \Delta t.$$

Прирівнюючи два вирази для об'єму рідини, яка вилилась з посудини за проміжок часу $[t; t+\Delta t]$, одержуємо рівняння

$$-\pi R^2 \Delta h = \Big(\mu\sqrt{2gh} + \alpha(\Delta t)\Big) S \Delta t. \tag{1.2}$$

Поділимо обидві частини (1.2) на Δt і перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$. Оскільки $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \alpha(\Delta t) = 0$, а $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta h(t)}{\Delta t} = h'(t)$, то одержуємо диференціальне рівняння першого порядку

$$-\pi R^2 h'(t) = \mu\sqrt{2gh}\, S. \tag{1.3}$$

Отримати рівняння (1.3) можна й інакше. Досліджуючи процес протягом нескінченно малого проміжку часу dt, припустимо, що за цей проміжок швидкість витікання води є незмінною. Тоді замість наближеного рівняння (1.2) відразу одержуємо рівняння

$$-\pi R^2 dh = \mu\sqrt{2gh}\,Sdt, \tag{1.4}$$

яке, очевидно, є просто іншою формою запису рівняння (1.3).

Рівняння (1.4) — рівняння з відокремлюваними змінними. Зінтегруємо його:

$$dt = \frac{-\pi R^2}{\sqrt{2g}\mu S}\frac{dh}{\sqrt{h}} \quad\Rightarrow\quad t = \frac{-\sqrt{2}\pi R^2}{\sqrt{g}\mu S}\sqrt{h} + C \quad\Rightarrow$$
$$t = C - A\sqrt{h}, \tag{1.5}$$

де стала $A = \frac{\sqrt{2}\pi R^2}{\sqrt{g}\mu S}$ залежить від розмірів і форми отвору, в'язкості рідини та деяких інших фізичних параметрів, а стала C є довільною (це стала інтегрування). Знайдемо ці сталі.

За умовою задачі $h(0) = H$ (на початку відліку висота стовпа води дорівнювала H). Підставляючи у (1.5) $t = 0$ і $h = H$, знаходимо сталу $C = A\sqrt{H}$.

Сталу A знайдемо з умови задачі $h(t_1) = \frac{3}{4}H$. Звідси

$$t_1 = A\sqrt{H} - A\sqrt{\frac{3H}{4}} \quad\Rightarrow\quad A = (4 + 2\sqrt{3})\frac{t_1}{\sqrt{H}}.$$

Підставляючи знайдені значення сталих A і C у формулу (1.5), одержуємо закон зміни часу витікання від висоти стовпа води:

$$t = (4 + 2\sqrt{3})\frac{\sqrt{H} - \sqrt{h}}{\sqrt{H}}t_1. \tag{1.6}$$

З (1.6) знаходимо час T повного витікання рідини з посудини:

$$h(T) = 0 \quad\Rightarrow\quad T = (4 + 2\sqrt{3})\,t_1.$$

Зауважимо, що знайдене значення T приблизно у 1,9 разу більше від значення $4t_1$, одержаного у припущенні, що рідина з посудини витікає рівномірно. ■