ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ІМЕНІ Я. С. ПІДСТРИГАЧА
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ДВНЗ “ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА”
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

БІЛАНИК ІРИНА БОГДАНІВНА

УДК 517.5 + 511.14

ДИСЕРТАЦІЯ

НЕОБМЕЖЕНІ МНОЖИНИ УМОВНОЇ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

111 Математика

Математика та статистика

Подається на здобуття ступеня
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ____________________ І. Б. Біланик

Науковий керівник
БОДНАР ДМИТРО ІЛЬКОВИЧ,
доктор фізико-математичних наук,
професор

ЛЬВІВ — 2021

АНОТАЦІЯ

Біланик І. Б. Необмежені множини умовної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика. — Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, Львів. — ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", Івано-Франківськ, 2021.

Дисертаційна робота виконана в рамках аналітичної теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів і присвячена дослідженню збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду (гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними при фіксованих значеннях змінних), встановленню оцінок похибок апроксимації їх підхідними дробами.

Неперервні та гіллясті ланцюгові дроби є ефективним апаратом для побудови раціональних наближень аналітичних функцій. Засновником наукової школи теорії гіллястих ланцюгових дробів є В. Я. Скоробогатько. В процесі становлення аналітичної теорії було виділено три типи гіллястих ланцюгових дробів: гіллясті ланцюгові дроби загального вигляду з фіксованим числом гілок розгалуження, двовимірні неперервні дроби та гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними. Вони були об'єктами досліджень вітчизняних та закордонних науковців, зокрема, Д. І. Боднара, Х. Й. Кучмінської, М. О. Недашковського, Р. І. Дмитришина, Т. М. Антонової, С. В. Шарина, В. Р. Гладуна, О. М. Сусь, М. М. Пагірі, Н. П. Гоєнко, О. С. Манзій, О. Є. Баран, М. М. Бубняк, С. М. Возної, а також В. Семашка, М. О'Доногое і Дж. Мерфі, А. Кайт і Б. Вердонк, Х. Воделанда, Т. Коматцу та ін.

Найзагальніші алгоритми розвинення аналітичних функцій у неперервні дроби використовують принцип відповідності між степеневими рядами та різними типами функціональних неперервних дробів. Дослідження відповідно-

сті між кратними степеневими рядами та багатовимірними C-дробами сприяло появі гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, які були вперше введені Д. І. Боднаром. Такі дроби ефективно використовуються для побудови багатовимірних раціональних наближень аналітичних функцій багатьох змінних.

Основне завдання дисертаційного дослідження — встановлення необмежених множин умовної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду. Відомо, що необмежені множини не можуть бути множинами збіжності неперервних дробів, частинні знаменники яких рівні одиниці. Тому накладаються певні додаткові умови, які гарантують їх збіжність. Як правило, це розбіжність ряду, складеного із елементів неперервного дробу. Для отримання формул загальних членів аналогічних рядів при дослідженні необмежених множин умовної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду розглядається питання встановлення критерію та ефективних достатніх умов збіжності таких дробів з додатними елементами. Ці результати використовуються для побудови необмежених множин умовної збіжності: кутових, параболічних та інших.

Дисертація складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків до розділів та загальних висновків, списку джерел та одного додатку, який містить список публікацій автора.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами та особистий внесок здобувача, вказано також, де було апробовано та опубліковано результати дисертації.

У першому розділі систематизовано відомості про неперервні дроби та гіллясті ланцюгові дроби спеціального вигляду, проведено огляд літератури за темою дисертаційного дослідження, введено поняття $\mathcal{C}$-фігурної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду.

Другий розділ дисертаційного дослідження присвячений встановленню критерію збіжності та ефективних ознак збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з додатними елементами. Суттєво враховуючи структуру таких дробів, теорію стійкості до збурень, встановлено критерій збіжності, який є багатовимірним узагальнення теореми Зейделя для неперервних дробів. У формулюванні цього критерію використовуються ряди, елементами яких є значення збіжних неперервних дробів. Перевірити такі умови достатньо складно, тому встановлено низку ефективних ознак збіжності, які є багатовимірними узагальненнями відомих ознак збіжності неперервних дробів. Зокрема, встановлено багатовимірні аналоги теорем Зейделя – Штерна, Прінгсхайма.

В аналітичній теорії неперервних дробів суттєво використовуються тричленні рекурентні співвідношення для обчислення їх канонічних чисельників і знаменників. Актуальною є задача виділення класу гіллястих ланцюгових дробів, канонічні чисельники та знаменники яких задовольняють чотиричленні рекурентні співвідношення. У підрозділі 2.3 обґрунтовано формули для обчислення коефіцієнтів гіллястого ланцюгового дробу, канонічні чисельники та знаменники якого задовольняють лінійне однорідне рекурентне рівняння третього порядку. Досліджено збіжність цього дробу у випадку, коли його елементами є додатні числа. Встановлено умови, при виконанні яких побудований гіллястий ланцюговий дріб з двома гілками розгалуження є двовимірним гіллястим ланцюговим дробом спеціального вигляду.

В теорії неперервних дробів необмеженими множинами умовної збіжності найчастіше виступають півплощини, кутові області, зовнішності кругів, параболічні множини та інші. Третій розділ присвячено дослідженню параболічних множин умовної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду. У підрозділі 3.1 при фіксованих частинних знаменниках, які належать зовнішностям кругів, встановлено параболічні множини умовної збіжності. При цьому суттєво використовується раніше доведений багатовимірний аналог теореми Прінгсхайма, а також теорема Стільтьєса – Віталі про збіжність послідовності голоморфних функцій. Досліджено аналогічні параболічні множини збіжності, повернуті на певний кут, і отримано множини значень таких дробів. Ці результати використано для встановлення багатовимірного аналога теореми Трона про спарені параболічні множини збіжності неперервних дробів.

В підрозділі 3.2 доведено двовимірне узагальнення теореми Трона – Джоунса про параболічні області збіжності неперервних дробів. Доведення базується на використанні попередньо встановленої леми про стійкість неперервного дробу, елементи якого належать параболічним областям і задовольняють умовам теореми Трона – Джоунса.

Параболічні множини збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з комплексними елементами використовується в підрозділі 3.3 при дослідженні збіжності багатовимірних S-дробів з нерівнозначними змінними. Підхідні дроби цих гіллястих ланцюгових дробів є багатовимірними раціональними функціями. Встановлена теорема досліджує питання збіжності цих функцій при цьому суттєво використовується багатовимірне узагальнення теореми Стільтьєса – Віталі.

Кутові множини збіжності неперервних дробів вивчали Е. Б. Ван Флек, Йо. Л. Єнсен, О. Перрон, В. Б. Ґраґґ, Д. Д. Ворнер та ін. Четвертий розділ присвячений узагальненню цих результатів для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду. Доведення ґрунтується та використанні багатовимірного узагальнення критерію Зейделя. Підрозділ 4.1 присвячений встановленню багатовимірного аналога теореми Ван Флека. У підрозділі 4.2 основна увага приділена встановленню оцінки швидкості збіжності гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду з комплексними частинними знаменниками та частинними чисельниками рівними одиниці. При накладанні додаткових умов на розхил кута та елементи дробу встановлено різні оцінки швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду. У частині отриманих результатів вимагається розбіжність до нуля нескінченних добутків, або розбіжність рядів, елементи яких залежать від коефіцієнтів гіллястого ланцюгового дробу, його розмірності та кута розхилу області. Якщо елементи цього дробу відокремлені від нуля, то встановлена оцінка швидкості збіжності, яка є аналогом подібної оцінки, доведеної Йо. А. Єнсеном для неперервного дробу. При цьому використано остаточне формулювання цього твердження, наведене у роботі В. Б. Ґраґґа та Д. Д. Ворнера.

Запропоновано нові методи доведення оцінок швидкості збіжності гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду, які враховують розмірність дробу та відомі оцінки швидкості збіжності неперервних дробів. Труднощі, які виникають при встановленні оцінок швидкості збіжності гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду із частинними знаменниками близькими до нуля, вдалося подолати шляхом накладання обмежень на швидкість їх прямування до нуля.

У підрозділі 4.3 отримано оцінки швидкості збіжності гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду з довільними дійсними частинними чисельниками та комплексними частинними знаменниками зі спарених кутових множин. Доведено аналог оцінки Ґраґґа та Ворнера швидкості збіжності такого дробу.

Результати, отримані у підрозділах 4.1–4.3, використовуються при дослідженні збіжності та встановленні оцінок похибок апроксимації багатовимірних S-дробів з нерівнозначними змінними. При деяких обмеженнях такі оцінки є поточкові, при інших — рівномірні. Ефект використання цих оцінок проявляється при додаткових умовах на параметри, що визначають області, в яких проводиться оцінка.

Ключові слова: неперервний дріб, гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду, гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними, збіжність, рівномірна збіжність, раціональне наближення, багатовимірна раціональна апроксимація функції, оцінка похибки наближення, рекурентне спів-

відношення.

ANNOTATION

Bilanyk I. B. Unbounded conditional convergence regions of branched continued fractions of the special form. — Qualifying scientific work on rights of manuscript.

A Thesis for a Philosophy Doctor Degree in Mathematics, speciality 111 — Mathematics. — Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv. — Public Higher Education Institution "Vasyl Stefanyk Precarpathian National University", Ivano-Frankivsk, 2021.

The thesis is fulfilled within the analytic theory of continued and branched continued fractions and is devoted to the study of convergence of branched continued fractions of the special form (branched continued fractions with independent variables at fixed values of variables), to establishing truncation error bounds.

Continued and branched continued fractions are an effective apparatus for constructing rational approximations of analytic functions. The founder of the scientific school of the theory of branched continued fractions is V. Ya. Skorobogatko. During the process of formation of analytic theory, three types of branched continued fractions were distinguished: branched continued fractions of general form with a fixed number of branches of branching, two-dimensional continued fractions, and branched continued fractions with independent variables. They were the object of research of domestic and foreign scientists, in particular, D. I. Bodnar, Ch. Yo. Kuchminska, M. O. Nedashkovsky, R. I. Dmytryshyn, T. M. Antonova, S. V. Sharyn, V. R. Hladun, O. M. Sus, M. M. Pahirya, N. P. Hoyenko, O. S. Manziy, O. E. Baran, M. M. Bubnyak, S. M. Vozna as well as V. Semashko, M. R. O'Donohoe and J. Murphy, A. Cuyt and B. Verdonk, H. Waadeland, T. Komatsu and others.

The most general algorithms for the expansion of analytic functions into continued fractions use the principle of correspondence between power series and di-

fferent types of functional continued fractions. The study of the correspondence between multiple power series and multidimensional C-fractions contributed to the appearance of branched continued fractions with independent variables, which were first introduced by D. I. Bodnar. Such fractions are effectively used to construct multidimensional rational approximations of analytic functions with several variables.

The main task of the dissertation research is to establish unbounded conditional convergence regions of branched continued fractions of the special form. It is known that unbounded regions cannot be regions of convergence of continued fractions whose partial denominators are equal to one. Therefore, certain additional conditions are imposed that guarantee their convergence. As a rule, this is the divergence of a series composed of elements of a continued fraction. The question of establishing the criterion and effective sufficient conditions for convergence of such fractions with positive elements is considered in order to obtain the formulas of general terms of similar series in the study of unbounded conditional convergence regions of branched continued fractions of the special form. These results are used to construct unbounded conditional convergence regions: angular, parabolic, and others. The thesis consists of the abstract, introduction, four chapters, conclusions for each chapter and general conclusions, bibliography, and appendix that contains the list of author's publications.

The introduction substantiates the relevance of the research topics, formulates the purpose, object, subject, tasks and methods of research, outlines the scientific novelty of the obtained results, their practical significance, the connection of the work with scientific programs and the personal contribution of the author and also points out where the results of thesis have been discussed and published.

In the first section, the information about continued fractions and branched continued fractions of the special form is systematized, the literature on the topic of dissertation research is reviewed, the concept of $\mathcal{C}$-figured convergence of branched continued fractions of the special form is introduced.

The second section of the thesis research is devoted to the establishment of the convergence criterion and effective criteria of convergence of branched continued fractions of the special form with positive elements. Significantly taking into account the structure of such fractions, the theory of stability to perturbations, the criterion of convergence is established, which is a multidimensional generalization of Seidel's theorem for continued fractions. In the formulation of this criterion, series are used, the elements of which are the values of convergent continued fractions. It is rather difficult to verify such conditions, therefore a number of effective criteria of convergence which are multidimensional generalizations of well-known convergence theorems for continued fractions are established. In particular, multidimensional analogues of Seidel – Stern and Pringsheim theorems have been established.

In the analytic theory of continued fractions, three-term recurrent relations are significantly used to calculate their canonical numerators and denominators. The problem of distinguishing a class of branched continued fractions, whose canonical numerators, and denominators satisfy four-term recurrent relations, is urgent. Subsection 2.3 substantiates the formulas for calculating the coefficients of a branched continued fraction, the canonical numerators and denominators of which satisfy a linear homogeneous recurrent equation of the third order. The convergence of this fraction in the case when its elements are positive numbers is investigated. The conditions under which the branched continued fraction with two branches of branching is the two-dimensional branched continued fraction of a special type are established.

In the theory of continued fractions, unbounded regions of conditional convergence most often are half-planes, angular domains, the exteriors of circles, parabolic regions, and others. The third section is devoted to the study of parabolic conditional convergence regions of branched continued fractions of the special form. In subsection 3.1 for fixed partial denominators belonging to the exteriors of circles, parabolic conditional convergence regions are established. In this case, the previously proved multidimensional analogue of the Pringsheim theorem, as well as the Stieltjes – Vitali theorem on the convergence of the sequence of holomorphic functions, are significantly used. Similar parabolic convergence regions rotated to a certain angle are investigated, and value regions of such fractions are obtained. These results were used to establish a multidimensional analogue of Tron theorem on twin parabolic regions of convergence of continued fractions.

In subsection 3.2 it is proved a two-dimensional generalization of the Tron – Jones theorem on parabolic regions of convergence of continued fractions. The proof is based on the use of a preestablished lemma on the stability of a continued fraction, the elements of which belong to parabolic regions and satisfy the conditions of the Tron – Jones theorem.

Parabolic regions of convergence of branched continued fractions of the special form with complex elements are used in subsection 3.3 for the study of convergence of multidimensional S-fractions with independent variables. Approximants of these branched continued fractions are rational functions with several variables. The established theorem investigates the problem of the convergence of these functions, for this, the multidimensional generalization of the Stieltjes – Vitali theorem is substantially used.

The angular regions of convergence of continued fractions were studied by E. B. Van Fleck, J. L. Jensen, O. Perron, W. B. Gragg, D. D. Warner, and others. The fourth section is devoted to the generalization of these results for branched continued fractions of the special form. The proof is based on the use of a multidimensional generalization of Seidel criterion. Subsection 4.1 is devoted to establishing a multidimensional analogue of Van Fleck theorem. In subsection 4.2 the main attention is paid to the establishment of the truncation error bounds of a branched continued fraction of the special form with complex partial denominators and partial numerators equal to one. When imposing additional conditions on the angle and the elements of the fraction, different truncation error bounds of

branched continued fractions of the special form are established. Some of the obtained results require a divergence to zero of infinite products, or divergence of series, the elements of which depend on the coefficients of the branched continued fraction, its dimension, and the angle of inclination of the region. If the elements of this fraction are separated from zero, then truncation error bound is established, which is analogous to the similar estimate proved by Yo. A. Jensen for a continued fraction. The final formulation of this statement, given in the work of W. B. Gragg and D. D. Warner, was used.

New methods for proving truncation error bounds of branched continued fractions of the special form are proposed, which take into account the dimension of the fraction and known truncation error bounds of continuous fractions. Difficulties that arise in establishing truncation error bounds of a branched continued fraction of the special form with partial denominators close to zero, managed to be overcome by imposing restrictions on the speed of their tending to zero.

The results obtained in subsections 4.1–4.3 are used in the study of convergence and the establishment of truncation error bounds of multidimensional S-fractions with independent variables. For some restrictions such estimates are pointwise, for others restrictions they are uniform. The effect of using the obtained estimates is obvious under additional conditions on the parameters that determine the regions in which the truncation error bounds are conducted.

Key words: continued fraction, branched continued fraction of the special form, branched continued fraction with independent variables, convergence, uniform convergence, rational approximation, multidimensional rational approximation of function, truncation error bounds, recurrent relation.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНІ ОСНОВНІ НАУКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Bilanyk I., Bodnar D. Convergence criterion for branched continued fractions of the special form with positive elements // Carpathian Math. Publ. — 2017. — Vol. 9, № 1. — P. 13–21.
2. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів у кутових областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2017. — Т. 60, № 3. — С. 60–69. (Те саме: Bilanyk I. B., Bodnar D. I. On the convergence of branched continued fractions of a special form in angular domains // J. Math. Sci. — 2020. — Vol. 246. — P. 188–200.)
3. Bilanyk I., Bodnar D., Buyak L. Representation of a quotient of solutions of a four-term linear recurrence relation in the form of a branched continued fraction // Carpathian Math. Publ. — 2019. — Vol. 11, № 1. — P. 33–41.
4. Bilanyk I. A truncation error bound for some branched continued fractions of the special form // Mat. Stud. — 2019. — Vol. 52, Iss. 2. — P. 115–123.
5. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Оцінки швидкості поточкової та рівномірної збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2019. — Т. 62, № 4. — С. 72–82.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Параболічні області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Всеукраїнська наук. конф. “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 4–27 лютого 2016 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2016. — С. 57.
2. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Критерій збіжності гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами // Всеукраїнська наук. конф. “Сучасні

проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.): тези допов. - Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2017. — С. 54.

3. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Про параболічні області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Міжнар. наук. конф. "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяч. 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, проф. О. І. Степанця (Слов'янськ, 28 травня - 3 червня 2017 р.): тези доп. — Слов'янськ: ДДПУ, 2017. — С. 43.
4. Біланик І. Б., Боднар Д. І., Бубняк М. М. Деякі області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Міжнар. конф. молодих математиків, присвяч. 100-річчю з дня народження академіка НАН України, проф. Ю. О. Митропольського (Київ, 7–10 червня 2017 р.): тези допов. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2017. — С. 40.
5. Біланик І. Б., Боднар Д. І., Чорний В. З. Оцінка швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду у кутових областях // Всеукраїнська наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2018. — С. 37.
6. Біланик І. Б., Боднар Д. І., Чорний В. З. Про оцінку швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Міжнар. наук. конференція "Сучасні проблеми механіки та математики" (Львів, 22 – 25 травня 2018 р.): тези допов. — Електрон. текст. дані. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України. — 2018. — Т. 3. — URL : www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018 (дата звернення: 16.05.2021).
7. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Оцінка швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях", присвяч. 50-річчю факультету математики та

інформатики Чернівецького національного університету ім. Ю. Федьковича (Чернівці, 17–9 вересня 2018 р.): мітерфали конф. — Чернівці, 2018. — С. 167.

8. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Кутові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // VI Всеукраїнська наукова конференція ім. Б. В. Василишина "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 26–28 вересня 2018 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Вид-во Прикарп. нац. ун-ту ім. В.Стефаника, 2018. — С. 8.
9. Bilanyk I., Bodnar D., Buyak L, Voznyak O. Representation of a quotient of solutions of a linear recurrence relation in the form of a branched continued fraction // Всеукраїнська наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2019 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2019. — С. 22.
10. Біланик І. Б. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів у параболічних областях // Конференція молодих вчених "Підстригачівські читання — 2019" (Львів, 27–29 травня 2019 р.): тези допов. — Електрон. текст. дані. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України. — 2019. — Т. 3. — URL : http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2019/abstracts/Bilanyk.pdf (дата звернення: 16.05.2021).
11. Біланик І. Б. Оцінка швидкості збіжності двовимірних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду у деяких кутових областях // Міжнар. конф. молодих математиків (Київ, 6 - 8 червня 2019 р.): тези доп. — Київ : Ін-т математики НАН України, 2019. — С. 102.
12. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду в кутових областях // Міжнар. наук. конф. "Функціональні методи теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV", присвяч. 100-річчю з дня народження В. К. Дзядика (Світязь, 20 - 26 червня 2019 р.): тези доп. — Київ,

2019. — С. 33.

13. Bodnar D. I. Bilanyk I. B. Voznyak O. G. Some unlimited convergence domains of branched continued fractions of the special form // Всеукраїнська наук. конф. "Теорія наближень і її застосування" з нагоди 70-річчя В. Ф. Бабенка (Дніпро, 3–5 жовтня 2019 р.): тези доп. — Дніпро : ДНУ ім. О. Гончара, 2019. — С. 52.
14. Bodnar D. I. Bilanyk I. B. On convergence of branched continued fractions of the special form with positive elements // International Conference "Infinite Dimentional Analysis and Topology" dedicated to the 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky (Ivano-Frankivsk, October 16–20, 2019): Abstracts of talks. — P. 7.
15. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Оцінка швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Всеукраїнська наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 26 лютого – 1 березня 2020 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2020. — С. 35–36.
16. Біланик І. Б. Оцінка швидкості поточкової збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Конференція молодих вчених "Підстригачівські читання – 2020" (Львів, 26–28 травня 2020 р.) — Електрон. текст. дані. — URL: http://iapmm.lviv.ua/chyt2020/abstracts/Bilanyk.pdf (дата звернення: 16.05.2021).
17. Bilanyk I., Voznyak O. On the convergence of multidimensional S-fractions with independent variables // 11th International Skorobohatko mathematical conference (Lviv, Ukraine, October 26–30, 2020): Abstracts of talks. — P. 14.
18. Bilanyk I., Bodnar D., Voznyak O. Multidimensional analogue of Thron's Theorem About Twin Parabolic Convergence Regions For Continued Fractions // International Online Workshop on Approximation Theory (Ivano-Frankivsk, Ukraine, March 19–21, 2021). — P. 8–9.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Для наближення дійсних чисел, зокрема числа π, алгебраїчних ірраціональностей, древні математики використовували раціональні числа. Такі наближення можна отримати із розвинення дійсних чисел у неперервні дроби за алгоритмом Евкліда. Йо. Х. Ламберт, Ж. Лагранж, Л. Ойлер, К. Ф. Гаусс використовували функціональні неперервні дроби для наближення елементарних та спеціальних функцій. В середині XIX століття сформувалася аналітична теорія неперервних дробів. Результати досліджень викладені у монографіях О. Перрона, Г. Волла, У. Джоунса і В. Трона, Л. Лорентцен і Х. Воделанда, А. М. Хованського, А. Я. Хінчина, а також А. Кайт та В. Бревік-Петерсон, Б. Вердонк, Х. Воделанда, У. Джоунса. Неперервні дроби проявили себе як ефективний апарат для наближення дійсних чисел і аналітичних функцій. В аналітичній теорії неперервних дробів основними задачами є побудова розвинень функцій у різні типи функціональних неперервних дробів, дослідження збіжності та оцінки похибок апроксимації підхідними дробами числових та функціональних неперервних дробів.

Перші багатовимірні узагальнення неперервних дробів виникли у теоретико-числовому напрямку. Вони використовувалися для представлення алгебраїчних ірраціональностей вищих порядків, розв'язання діофантових рівнянь і нерівностей і були тісно пов'язані із тричленними рекурентними рівняннями, які використовувалися для обчислення канонічних чисельників та знаменників підхідних дробів.

У 1966 році для наближення функцій багатьох змінних В. Я. Скоробогатько запропонував використовувати багатовимірний аналог неперервних дробів — гіллястий ланцюговий дріб. Основи аналітичної теорії гіллястих ланцюгових дробів викладені у монографіях П. І. Боднарчука та В. Я. Скоробогатька, В. Я. Скоробогатька, Д. І. Боднара. Розвинення степеневих рядів у C-дроби базується на принципі відповідності, який використовували П. Л. Чебишев, Т. Йо. Стільтьєс. Цей же принцип був використаний для побудови Паде апроксимацій Ф. Г. Фробеніусом, К. Ф. Гауссом, А. Паде. Однак задача відповідності між кратними степеневими рядами і гіллястими ланцюговими дробами не мала єдиного розв'язку. Це привело до побудови та дослідження двовимірних неперервних дробів, відповідних подвійному степеневому ряду, у роботах Х. Й. Кучмінської, Д. І. Боднара, О. М. Сусь, Т. М. Антонової, С. М. Возної, М. О'Доногое і Дж. Мерфі, А. Кайт і Б. Вердонк, В. Семашка та інших.

При переході до N змінних значно ускладнюється структура двовимірних неперервних дробів. Це сприяло розвитку аналітичної теорії гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними. Відповідність таких дробів кратним степеневим рядам досліджували Д. І. Боднар, Р. І. Дмитришин, О. Є. Баран. Р. І. Дмитришин означив різні класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, побудував приклади розвинення функцій двох і трьох змінних у такі дроби, дослідив ефективність цих розвинень. При фіксованих значеннях змінних гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними називають гіллястими ланцюговими дробами спеціального вигляду. Дослідженням їх збіжності присвячені роботи Д. І. Боднара, Р. І. Дмитришина, С. В. Шарина, Т. М. Антонової, О. Є. Баран, М. М. Бубняк.

Для побудови раціональних наближень можна використовувати як підхідні дроби функціональних гіллястих ланцюгових дробів, так і багатовимірні апроксимації Паде. Багатовимірним апроксимаціям типу Паде для функцій багатьох змінних за допомогою методу моментних зображень присвячені дослідження А. П. Голуба, Л. О. Чернецької.

Континуальним аналогом гіллястих ланцюгових дробів є інтегральні ланцюгові дроби, означені М. С. Сявавком. Вони використовувалися для інтерполяції функціоналів у роботах В. Л. Макарова, Б. Р. Михальчука, І. І. Демківа.

Багато ознак збіжності неперервних та гіллястихланцюгових дробів формулюються як теореми про множини збіжності. Досліджуються зокрема, такі множини збіжності: кругові, зовнішності кругів, кутові, кардіоїдні, овальні, параболічні та ін. Відомо, що для неперервних дробів з частинними знаменниками рівними одиниці множини збіжності повинні бути обмеженими. При розгляді необмежених множин виникають додаткові умови. Такі множини називають множинами умовної збіжності. Аналогічна задача є актуальною для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними. Важливою є також проблема встановлення оцінок швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними на деяких підмножинах множин умовної збіжності.

З відомими багатовимірними узагальненнями неперервних дробів тісно пов'язані лінійні однорідні рекурентні рівняння третього і вище порядків. Дослідженню таких рекурентних співвідношень присвячені роботи Т. П. Гоя, Р. А. Заторського, С. В. Шарина, Р. Фрончака, У. Акбаби, А. Х. Дегера та інших. Для загальних гіллястих ланцюгових дробів рекурентні формули для підрахунку канонічних чисельників і знаменників не справджуються, тому виникла задача виділення та дослідження класу гіллястих ланцюгових дробів для канонічних чисельників і знаменників яких виконуються такі співвідношення.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження виконувалось у рамках науково-дослідної держбюджетної теми "Розвиток та застосування топологічних, диференціально-геометричних, аналітичних і числових методів дослідження рівнянь теорії фізичних полів і руху часток у ріманових просторах" (номер державної реєстрації 0120U100496) відділу диференціальних рівнянь і теорії функцій Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України.

Мета та задачі дослідження. Метою дисертаційного дослідження є встановлення необмежених множин умовної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду, встановлення оцінок похибки наближення підхідними дробами, що передбачає вирішення таких задач:

— встановити критерій збіжності гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду з додатними елементами;

— встановити ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів, які є багатовимірними аналогами теорем Зейделя – Штерна та Прінгсхайма;

— обґрунтувати розвинення відношення лінійно-незалежних розв'язків лінійного однорідного рекурентного рівняння третього порядку у гіллястий ланцюговий дріб, встановити умови збіжності цього дробу у випадку додатних елементів та умови виродження у гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду;

— встановити умови збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з частинними чисельниками, що належать параболічним областям, довести багатовимірний аналог теореми Трона про спарені параболічні множини збіжності;

— встановити аналог ознаки збіжності Трона та Джоунса про параболічні множини збіжності для двовимірних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду;

— довести багатовимірний аналог теореми Ван Флека про кутову область збіжності таких дробів;

— встановити оцінки швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з частинними чисельниками рівними одиниці в кутових областях при рівномірно ізольованих від нуля частинних знаменниках або при умовах, що певні елементи прямують до нуля із заданою швидкістю;

— встановити багатовимірні аналоги оцінок швидкості збіжності неперервних дробів отриманих Йо. Л. Єнсеном у формулюванні В. Б. Ґраґґа та Д. Д. Ворнера;

— застосувати отримані результати при дослідженні збіжності та оцінок похибки апроксимації багатовимірних S-дробів з нерівнозначними змінними.

Об'єктом дослідження є неперервні та гіллясті ланцюгові дроби спеціального вигляду, багатовимірні S-дроби з нерівнозначними змінними.

Предметом дослідження є необмежені множини умовної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду, оцінки похибки апроксимації підхідними дробами на їх підмножинах.

Методи досліджень. Для розв'язання поставлених задач використовуються методи математичного та комплексного аналізу, аналітичної теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів.

Наукова новизна результатів дослідження.

1. Запропоновано два нових методи дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду, які суттєво враховують структуру цих дробів. Перший метод базується на використанні і обґрунтуванні $\mathcal{C}$-фігурної збіжності таких дробів, другий — використовує відомі оцінки швидкості збіжності неперервних дробів і враховує розмірність гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду.
2. Встановлено критерій збіжності N-вимірних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з додатними елементами та ефективні достатні умови збіжності таких дробів, які є аналогами відомих ознак збіжності неперервних дробів.
3. Доведено теореми про параболічні множини умовної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду, зокрема у випадку довільної розмірності встановлено аналог теореми Трона про спарені параболічні множини збіжності неперервних і аналог теореми Трона – Джоунса для двовимірних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду.

4. Досліджено кутові множини умовної збіжності N-вимірних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду та встановлено оцінки швидкості збіжності на деяких підмножинах.
5. Проведено дослідження збіжності та встановлено оцінки похибок апроксимації багатовимірних S-дробів з нерівнозначними змінними.
6. Обґрунтовано розвинення відношення лінійно-незалежних розв'язків однорідного лінійного рекурентного рівняння третього порядку у гіллястий ланцюговий дріб з двома гілками розгалуження, досліджено збіжність отриманого дробу.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати досліджень можуть бути використані в аналітичній теорії гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними та теорії апроксимації аналітичних функцій багатьох змінних. Отримані ознаки збіжності та оцінки похибки апроксимації гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду були застосовані при дослідженні збіжності багатовимірних S-дробів з нерівнозначними змінними. Окремі результати були використані також у навчальному процесі (кафедра математики та методики її навчання, Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка) при читанні спецкурсу для магістрантів "Теорія ланцюгових дробів та їх застосування".

Особистий внесок здобувача. Дана дисертаційна робота виконана автором самостійно. У спільних роботах з науковим керівником останньому належать постановки задач та аналіз отриманих результатів. У спільній роботі з Д. І. Боднаром і Л. М. Буяк авторці належать обґрунтування формул обчислення елементів гіллястого ланцюгового дробу, який є розвиненням відношення лінійно-незалежних розв'язків чотиричленного рекурентного рівняння, дослідження збіжності цього добу.

Апробація результатів. Матеріали дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на:

— Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 24–27 лютого 2016 р.);

— Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.);

— Міжнародній конференції “Теорія наближення функцій та її застосування”, присвяченій 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007) (Слов’янськ, 28 травня – 3 червня 2017 р.);

— Міжнародній конференції молодих математиків, присвяченій 100-річчю з дня народження академіка НАН України, проф. Ю. О. Митропольського (Київ, 7–10 червня 2017 р.);

— Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.);

— Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки та математики”, присвяченій 90-річчю від дня народження академіка НАН України Ярослава Степановича Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України (Львів, 22–25 травня 2018 р.);

— Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях”, присвяченій 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Чернівці, 17–19 вересня 2018 р.);

— VI всеукраїнській науковій конференції імені Б. В. Василишина “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ – Микуличин, 26–28 вересня 2018 р.);

— Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2019 р.);

— Конференції молодих вчених "Підстригачівські читання — 2019" (Львів, 27–29 травня 2019 р.);

— Міжнародній конференції молодих математиків (Київ, 6–8 червня 2019 р.);

— Міжнародній науковій конференції "Функціональні методи теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV", присвяченій 100-річчю з дня народження В. К. Дзядика (Світязь, 20–26 червня 2019 р.);

— Всеукраїнській науковій конференції "Теорія наближень і її застосування" з нагоди 70-річчя В. Ф. Бабенка (Дніпро, 3–5 жовтня 2019 р.);

— International Conference "Infinite Dimentional Analysis and Topology" dedicated to the 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky (Ivano-Frankivsk, October 16–20, 2019);

— Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 26 лютого – 1 березня 2020 р.);

— Конференції молодих вчених "Підстригачівські читання — 2020" (Львів, 26–28 травня 2020 р.);

— 11th International Skorobohatko Mathematical Conference (Lviv, October 26–30, 2020);

— International Online Workshop on Approximation Theory (Ivano-Frankivsk, March 19–21, 2021);

а також на:

— науковому семінарі з аналітичної теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (Львів, 6 травня 2019 р., 14 травня 2021 р., керівники семінару: д. ф.-м.н., проф. Д. І. Боднар, д. ф.-м.н., ст. н. с. Х. Й. Кучмінська);

— науковому семінарі ім. В. Я. Скоробогатька Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (Львів, 17 травня 2021 р., керівники семінару: д. ф.-м.н.б ст. н. с. В.О. Пелих, к.ф.-м.н., ст. н. с. М. М. Симотюк).

Публікації. Результати дисертації опубліковано у 23 друкованих працях, серед яких: 5 статтей у вітчизняних та закордонних фахових виданнях [21, 23, 106, 107, 109], решта у матеріалах міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій [14–20, 22, 24–28, 108, 110–113]; 4 статті у періодичних наукових виданнях, які індексуються у базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection [23, 106, 107, 109].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Повний обсяг роботи становить 159 сторінок друкованого тексту. Список використаних джерел займає 19 сторінок і містить 189 найменувань. Додатки займають 6 сторінок і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Висловлюю щиру подяку моєму Вчителю Дмитру Ільковичу БОДНАРУ.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Елементи теорії неперервних дробів

Неперервним (ланцюговим) дробом [146, с. 17] називається впорядкована пара $\langle\langle\{a_n\},\{b_n\}\rangle,\{f_n\}\rangle$, де $a_1,a_2,\ldots$ і $b_0,b_1,b_2,\ldots$ — комплексні числа, причому всі $a_n\neq 0$, $\{f_n\}$ — послідовність з розширеної комплексної площини $\widehat{\mathbb{C}}$, означена співвідношеннями

$$f_n=S_n(0),\quad n=0,1,2,\ldots,$$

$$S_0(w)=s_0(w),\quad S_n(w)=S_{n-1}(s_n(w)),\quad n=1,2,3,\ldots,$$
$$s_0(w)=b_0+w,\quad s_n(w)=\frac{a_n}{b_n+w},\quad n=1,2,3,\ldots.$$

Для запису нескінченого неперервного дробу будемо використовувати наступні позначення:

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ddots}};$$

$$b_0+\frac{a_1}{b_1}\,{+}\,\frac{a_2}{b_2}\,{+}\,\ldots;$$

$$b_0+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{b_k}. \tag{1.1}$$

Числа $a_1,a_2,\ldots$ називають частинними чисельниками, $b_1,b_2,\ldots$ — частинними знаменниками, b_0 — вільним членом, f_n — n-им підхідним дробом або n-ою апроксимантою, причому

$$f_n=b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ddots+\cfrac{a_n}{b_n}}},\quad n\in\mathbb{N}_0,\quad f_0=b_0.$$

Для запису n-го підхідного дробу використовують також позначення

$$f_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1} \underset{+}{} \frac{a_2}{b_2} \underset{+}{} \ldots \underset{+}{} \frac{a_n}{b_n}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$f_n = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad f_0 = b_0.$$

Кожен n-ий підхідний дріб можна подати у вигляді

$$f_n = \frac{A_n}{B_n},$$

де A_n і B_n називаються відповідно n-им канонічним чисельником і n-им канонічним знаменником неперервного дробу (1.1). Для обчислення A_n і B_n використовують рекурентні співвідношення, встановлені Дж. Валлісом [188]:

$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \quad B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1.2}$$

при початкових умовах

$$A_0 = b_0, \quad A_{-1} = 1, \quad B_0 = 1, \quad B_{-1} = 0.$$

У випадку, коли $A_n = 0$ і $B_n = 0$, виникає невизначеність. Тоді вважаємо, що підхідний дріб f_n не має сенсу.

В монографіях О. Перрона [169], Г. Волла [187], У. Джоунса і В. Трона [146] та Л. Лорентцен і Х. Воделанда [156] даються різні означення збіжності неперервного дробу.

Неперервний дріб (1.1) збігається [187] (збігається у вузькому розумінні [169]), якщо всі його підхідні дроби мають сенс, окрім скінченного числа підхідних дробів, та існує скінчена границя послідовності $\{f_n\}$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} S_n(0) = f, \quad f \in \mathbb{C}.$$

Величина f називається значенням цього дробу.

Неперервний дріб (1.1) збігається [146] (збігається у широкому [169], у класичному [156] розумінні), якщо

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} S_n(0) = f, \quad f \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

Будемо використовувати означення запропоноване у роботі [187], або уточняти, що неперервний дріб збігається до скінченного значення.

Нехай f_n^*, $n \in \mathbb{N}_0$, — n-ий підхідний дріб неперервного дробу

$$b_0^* + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^*}{b_k^*}. \tag{1.3}$$

Неперервні дроби (1.1) і (1.3) називаються еквівалентними , якщо для їх підхідних дробів виконуються співвідношення:

$$f_n = f_n^*, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Теорема 1.1 *[146, с. 31] Неперервні дроби еквівалентні тоді і тільки тоді, коли існує послідовність ненульових сталих* $\{\rho_k\}$, $k \geq 1$, *така, що*

$$a_k^* = \rho_k \rho_{k-1} a_k; \quad b_k^* = \rho_k b_k; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad \rho_0 = 1.$$

Для позначення еквівалентності двох дробів використовують символ " $\approx$ ".

Неперервний дріб (1.1) за допомогою еквівалентних перетворень можна звести до дробу з частинними знаменниками рівними одиниці

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} \approx b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^*}{1},$$

де $a_1^* = a_1/b_1$, $a_k^* = a_k/(b_k b_{k-1})$, $k = 2, 3, \dots$, якщо $b_k \neq 0$ для всіх $k \geq 1$, або до дробу з частинними чисельниками рівними одиниці

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} \approx b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k^*},$$

де $b_k^* = b_k \prod\limits_{s=1}^{k} a_s^{(-1)^{k+s-1}}$, $k = 1, 2, \dots$.

Для підхідних дробів f_n, $n \geq 1$, неперервного дробу з додатними елементами справджується властивість "вилки" [100, с. 13], тобто

$$f_{2k} < f_{2k+2} < f_{2j+1} < f_{2j-1}, \tag{1.4}$$

де k, j —довільні натуральні числа.

Одним із основних напрямів в аналітичній теорії неперервних дробів є дослідження збіжності числових і функціональних дробів. Багато ознак збіжності неперервних дробів формулюються як теореми про множини збіжності та множини значень. Перші ідеї дослідження збіжності неперервних дробів за допомогою множин значень та відповідних їм множин елементів були запропоновані У. Скоттом і Г. Уоллом [172]. У. Трон [146], У. Джоунс [146], та інші удосконалвали та розширили техніку множин елементів та множин значень. На основі запропонованого підходу Л. Лорентцен [156–159] та Х. Воделанд [156, 157] отримали багато нових ознак збіжності.

Послідовність $\{V_k\}_{k=0}^{\infty}$ непорожніх множин $\{V_k\}$, $V_k \subset \widehat{\mathbb{C}}$, $k \geq 0$, називається послідовністю множин значень неперервного дробу (1.1), якщо

$$\frac{a_k}{b_k + V_k} \subseteq V_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Якщо всі $V_k = V$, тоді V називається простою множиною значень неперервного дробу (1.1). Якщо $V_{2k} = V_0$ і $V_{2k+1} = V_1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, тоді $\langle V_0, V_1 \rangle$ називаються спареними множинами значень неперервного дробу (1.1).

Для заданої послідовності множин значень $\{V_k\}_{k=0}^{\infty}$ послідовність множин $\{\Omega_k\}$; $\emptyset \neq \Omega_k \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$; $k \geq 1$, які визначаються співвідношеннями

$$\Omega_k := \left\{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : \frac{a}{b + V_k} \subseteq V_{k-1}\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

називається послідовністю множин елементів неперервного дробу (1.1), що відповідає $\{V_k\}$.

При заданих множинах значень, множина елементів неперервного дробу

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1} \tag{1.5}$$

визначається співвідношеннями

$$E_k := \left\{a \in \mathbb{C} : \frac{a}{1 + V_k} \subseteq V_{k-1}\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

тобто $\Omega_k = E_k \times \{1\}$; $k = 1, 2, \ldots$, а неперервного дробу

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k} \tag{1.6}$$

— співвідношеннями

$$G_k := \left\{ b \in \mathbb{C} : \frac{1}{b + V_k} \subseteq V_{k-1} \right\}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

тобто $\Omega_k = \{1\} \times G_k$; $k = 1, 2, \ldots$.

Якщо всі $\Omega_k = \Omega$, тоді Ω називається простою множиною елементів. Якщо $\Omega_{2k-1} = \Omega_1$ і $\Omega_{2k} = \Omega_2$, $k = 1, 2, \ldots$, тоді $\langle \Omega_1, \Omega_2 \rangle$ називаються спареними множинами елементів дробу (1.1).

Часто у літературі, вживають терміни області значень і області елементів як синоніми множин значень і множин елементів.

Послідовність областей елементів $\{\Omega_k\}$ називається послідовністю областей збіжності дробу (1.1), якщо умови $(a_k, b_k) \in \Omega_k$; $k = 1, 2, \ldots$, забезпечують збіжність дробу (1.1).

Якщо всі $\Omega_k = \Omega$, тоді Ω називається простою областю збіжності. Якщо $\Omega_{2k-1} = \Omega_1$ і $\Omega_{2k} = \Omega_2$; $k = 1, 2, \ldots$, тоді $\langle \Omega_1, \Omega_2 \rangle$ називаються спареними областями збіжності дробу (1.1).

У монографії У. Джоунса і В. Трона [146, с. 80] проведено аналіз ознак збіжності неперервного дробу (1.5) і зауважено, що жодна проста область збіжності не може бути необмеженою, тобто не існує необмежених простих областей збіжності цього дробу. Тому вводиться поняття простої множини умовної збіжності.

Підмножина $E \subset \mathbb{C}$ називається простою множиною умовної збіжності для неперервних дробів (1.5), якщо для його збіжності достатньо, щоб

$$a_n \in E,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

і розбігався ряд

$$\sum |b_n^*| ,$$

де дріб $\mathop{\text{D}}\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{b_k^*}$ еквівалентний даному, тобто $b_k^* b_{k-1}^* = \frac{1}{a_k},\ k \geq 1$, де $b_0^* = 1$.

Розглядаються такі необмежені множини умовної збіжності неперервних дробів: півплощини, кутові, параболічні множини, зовнішності кругів та інші.

До класичних результатів теорії збіжності неперервних дробів відносяться, зокрема, теореми Зейделя, Ворпіцького, Слешинського – Прінгсхайма, Ван Флека, Штерна – Штольца, параболічна теорема та інші.

Подальші дослідження пов'язані із багатовимірними узагальненнями наступних ознак збіжності неперервних дробів.

Теорема 1.2 (Ф. Л. Зейдель [174]) *Неперервний дріб* (1.6) *елементами якого є дійсні додатні числа, збігається тоді, і тільки тоді, коли розбігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Цей критерій було доведено Ф. Л. Зейделем у 1846 році. Два роки пізніше М. А. Штерн незалежно встановив аналогічний результат.

Теорема 1.3 (Ф. Л. Зейдель [174], М. А. Штерн [178]) *Неперервний дріб з додатними елементами* (1.1) *збігається тоді, і тільки тоді, коли розбігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \prod_{n=1}^{k} a_n^{(-1)^{n+k+1}}.$$

Теорема 1.4 (А. Прінгсхайм [171]) *Неперервний дріб* (1.1) *елементами якого є дійсні додатні числа, збігається якщо розбігається ряд*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sqrt{\frac{b_k b_{k-1}}{a_k}}.$$

Теорема 1.5 (Е. Б. Ван Флек [185]) *Нехай для елементів неперервного дробу*

$$b_0 + \mathop{\text{D}}\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{b_k} \tag{1.7}$$

виконуються умови

$$b_i \neq 0,\ |\arg b_i| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\ \ (i = 0, 1, 2, \dots)\,,$$

де ε *— довільне дійсне додатне число* $\left(0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}\right)$. *Тоді*

1) кожна n*-та апроксиманта* f_n *дробу* (1.7) *задовольняє умову*

$$f_n \neq 0,\ |\arg f_n| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\ \ (n = 0, 1, 2,\ ...)\,;$$

2) існують скінченні границі парних і непарних апроксимант;

3) для збіжності неперервного дробу (1.7) *необхідно і достатньо, щоб ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k|$ *розбігався.*

Теорема 1.6 (Д. Д. Ворнер, В. Б. Ґраґґ [137]) *Нехай для елементів неперервного дробу* (1.7) *виконуються умови*

$$b_k \neq 0,\ |\arg b_k| < \theta,\ \theta < \frac{\pi}{2},\ k = 0, 1, 2, \ldots\ . \tag{1.8}$$

Тоді

1) *існують скінченні границі парних і непарних підхідних дробів;*
2) *послідовність підхідних дробів* $\{f_n\}$ *збігається тоді і тільки тоді, коли ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ *розбігається;*
3) *справджується оцінка*

$$|f_m - f_{n-1}| \leq \frac{1}{d_n},\ m \geq n, \tag{1.9}$$

$$d_n \geq \frac{\Re b_1}{2 + \Re b_1} \cos\theta \ln\left(1 + (\Re\,(b_1))^2 \min\left\{1, \frac{1}{|b_1|^2}\right\} \cos\theta \sum_{k=1}^{n} |b_k|\right),\ n \geq 1.$$

Остання оцінка була встановлена Йо. А. Єнсеном [144, 168] при деведенні збіжності неперервних дробів, проте вона не фігурувала у формулюванні самої теореми. Пізніше Д. Д. Ворнер, В. Б. Ґраґґ у спільній роботі [137], використовуючи власну методику, довели цю ж оцінку у вищеприведеному вигляді.

Теорема 1.7 (Д. Д. Ворнер, В. Б. Ґраґґ [137]) *Нехай для елементів неперервного дробу* (1.1) *виконуються умови*

$$a_k > 0,\ \Re(b_k) > 0,\ k = 1, 2, \ldots\ .$$

Тоді

$$|f_m - f_{n-1}| \leq 2\alpha_1 \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{(1+4\alpha_k)^{1/2} - 1}{(1+4\alpha_k)^{1/2} + 1} \right), \ m \geq n \geq 1,$$

де

$$\alpha_k = \frac{a_k}{\Re(b_k)\Re(b_{k-1})}, \ b_0 = 1.$$

Перша параболічна область з віссю параболи вздовж дійсної осі

$$P = \left\{ w \in \mathbb{C} : |w| - \Re(w) \leq \frac{1}{2} \right\}$$

була досліджена У. Скоттом і Г. Уоллом.

Теорема 1.8 (В. Т. Скотт, Г. С. Волл [172]) *Множина точок S, симетрична відносно дійсної осі, є областю збіжності неперервного дробу*

$$\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{1} \right)^{-1} \tag{1.10}$$

тоді і тільки тоді, коли S — обмежена і міститься в параболічній області

$$P = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ |z| - \Re(z) \leq \frac{1}{2} \right\},$$

більше того, якщо $a_k \in P$, $k = 2, 3, ...$, то неперервний дріб збігається тоді і тільки тоді, коли виконується одна із умов:

1) існує індекс p такий, що $a_p = 0$;

2) всі $a_k \neq 0$, $k = 2, 3, \ldots$, і ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k|$ розбігається, де b_k, $k \geq 1$ – елементи неперервного дробу $\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_k}$, еквівалентного (1.10) *і $b_1 = 1$, $a_k = b_k^{-1} b_{k-1}^{-1}$, $k \geq 2$.*

Найповніший огляд огляд досліджень параболічних областей збіжності наведено у монографії У. Джоунса і У. Трона [146]. Ми ж сформулюємо лише ті параболічні теореми, які будуть узагальнені, або використані при подальших дослідженнях.

В наступній теоремі досліджено спарені параболічні множини збіжності.

Теорема 1.9 (В. Йо. Трон [184]) *Нехай d — додатне число, що задовольняє нерівності $d \leq \frac{1}{2}$ і γ — кут такий, що $-\dfrac{\pi}{2} < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$ нехай $z = x + iy \in C_0(\gamma, d)$, якщо*

$$x \operatorname{tg} \gamma - d \leq y \leq x \operatorname{tg} \gamma + d$$

і $z \in C_1(\gamma, d)$, якщо

$$x \operatorname{tg} \gamma - (1-d) \leq y \leq x \operatorname{tg} \gamma + (1-d).$$

Тоді неперервний дріб

$$1 + \frac{c_1^2}{1} {}_{+} \frac{c_2^2}{1} {}_{+} \cdots$$

збігається, якщо для усіх $n \geq 1$, $c_{2n} \in C_0(\gamma, d)$, $c_{2n-1} \in C_1(\gamma, d)$ і ряд $\sum |b_n|$ розбігається, де $b_1 = 1/c_1^2, b_n = 1/b_{n-1}c_n^2$, $n \geq 2$.

Остання умова є необхідною умовою для збіжності неперервного дробу. Умови належності елементів c_{2n} і c_{2n-1} множинам можуть бути поміняні місцями, тобто $c_{2n-1} \in C_0(\gamma, d)$, $c_{2n} \in C_1(\gamma, d)$, $n \geq 1$.

Теорема 1.10 (В. Б. Джоунс, В. Йо. Трон [145]) *Неперервний дріб* (1.1) *збігається до скінченного значення, якщо елементи a_n, b_n задовольняють умови:*

$$|a_n| - \Re(a_n e^{-i(\psi_n + \psi_{n-1})}) \leq 2p_{n-1}\left(\Re(b_n e^{-i\psi_n}) - p_n\right), \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

де $p_n \geq 0$ і ψ_n — дійсні, а послідовність

$$\left\{\frac{a_n}{p_n p_{n-1}}\right\}$$

обмежена. Всі його підхідні дроби скінченні і лежать у півплощині

$$\mathcal{H} = \left\{z \in \mathbb{C} : \Re\left(z e^{i(\psi_1 - \arg a_1)}\right) \geq 0\right\},$$

якщо $\Re(b_1 e^{i\psi_1}) = p_1$, і в крузі

$$\mathcal{K} = \left\{z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{a_1 e^{-i\psi_1}}{2(\Re(b_1 e^{-i\psi_1}) - p_1)} \right| \leq \frac{|a_1|}{2(\Re(b_1 e^{-i\psi_1}) - p_1)}\right\},$$

якщо $\Re(b_1 e^{i\psi_1}) > p_1$.

В аналітичній теорії неперервних дробів розглядають, крім числових, функціональні неперервні дроби

$$b_0(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(z)}{b_k(z)},$$

де $b_0(z)$, $a_k(z)$, $b_k(z)$ — функції комплексної змінної z, визначені в деякій області $D \subset \mathbb{C}$.

У монографіях Г. Уолла [187] та У. Джоунса і В. Трона [146] описані різні типи функціональних дробів: C-, S-, g-, π-, J-, T-дроби та інші.

Неперервний дріб

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k z}{1}, \tag{1.11}$$

де $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k \geq 1$, називають регулярним C-дробом (див. [169, с. 119]). Якщо $a_k > 0$, $k \geq 1$, то неперервний дріб (1.11) називають S-дробом або дробом Стільтьєса [97].

Для S-дробів класичною ознакою збіжності є наступна теорема.

Теорема 1.11 (Т. Йо. Стільтьєс [179]) *Нехай* (1.11) — *S-дріб, тобто* $a_k > 0$, $k \geq 1$. *Тоді*

1) *парна і непарна частини S-дробу* (1.11) *збігаються до функцій, голоморфних для всіх z у площині з розрізом*

$$R = \{z \in \mathbb{C} : \ |\arg z| < \pi\},$$

і рівномірно збігаються на кожній компактній підмножині області R;

2) *S-дріб* (1.11) *збігається до функції, голоморфної в області R, тоді і лише тоді, коли принаймні один із двох рядів*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \prod_{k=1}^{2n} a_k^{(-1)^{k-1}} \right|, \ \sum_{n=1}^{\infty} \left| \prod_{k=1}^{2n-1} a_k^{(-1)^{k}} \right|$$

розбігається;

3) *якщо S-дріб (1.11) збігається в одній точці із R, то цей неперервний дріб збігається у всіх точках із R до голоморфної функції;*

4) *якщо існує стала $M > 0$ така, що $|a_k| \leq M$, $k \geq 1$, то S-дріб (1.11) збігається до функції, голоморфної в області R.*

1.2. Основні поняття та результати аналітичної теорії гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними

Вперше багатовимірне узагальнення неперервних дробів запропонував японським математик К. Такебе. Воно було застосоване для розв'язання діофантових нерівностей $|ax + by \pm c| < 1$, де a, b, c — дійсні додатні числа. Л. Ойлер побудував багатовимірне узагальнення неперервних дробів для розв'язання кубічних рівнянь, використовуючи скінченні різницеві співвідношення. Ця ідея розвинута у роботах інших математиків [100, 149, 160, 165]. Л. М. Мілн-Томпсон [162] застосував матричний підхід до узагальнення неперервних дробів. Отримані результати він доповідав на I-му математичному конгресі у Цюриху.

Е. Фюрстенау [132] у 1876 році запропонував двовимірне узагальнення неперервних дробів. Це одна з небагатьох робіт, де сам дріб був явно виписаний. В роботі Б. В. Круковського [70] доведена ознака збіжності цих дробів. n-вимірне узагальнення дробів Фюрстенау було запропоновано та досліджено Р. А. Заторським [42, 43]. Ці дроби тісно пов'язані з лінійними однорідними рекурентними рівняннями третього і вищих порядків. Дослідженню таких рівнянь присвячені також роботи [134–136, 147, 148].

Одним із найбільш вдалих і досліджуваних узагальнень неперервних дробів є алгоритм Якобі-Перона [142]. Однак задача про представлення алгебраїчних ірраціональностей вищих порядків правильними багатовимірними узагальненнями неперервних дробів, для якої використовують алгоритм Якобі-Перона, фактично до кінця не розв'язана.

Г. Ф. Вороний у своїй докторські дисертації [53] отримав нове узагальнення неперервних дробів на основі коваріантних форм, критично проаналізував результати, присвячені багатовимірним узагальненням неперервних дробів своїх попередників.

Для наближення дійсних чисел раціональними використовують правильні неперервні дроби, побудовані за алгоритмом Евкліда. Багатовимірні узагальнення на основі цього алгоритму досліджували В. Брун [119] і Є. В. Подсипанін [85]. Тому актуальною є задача пошуку та дослідження раціональних наближень дійсних чисел. Такі проблеми виникають у прикладних задачах, наприклад, у роботах [153–155, 173].

Були й інші узагальнення неперервних дробів, зокрема у роботі Д. Секереша [180] на основі використання дробів Фарея. Усі згадані вище узагальнення неперервних дробів стосувалися задач теорії чисел і алгебри.

В. Я. Скоробогатько у 1966 році, використовуючи інтерпретацію неперервних дробів у вигляді графів і розглядаючи більш загальні графи типу дерева, дав означення гіллястого ланцюгового дробу (ГЛД) [89]. П. І. Боднарчук для означення ГЛД використав композицію дробово-лінійних відображень [48]. Основи аналітичної теорії ГЛД з N гілками розгалуження були закладені в роботах В. Я. Скоробогатька і його учнів П. І. Боднарчука, Д. І. Боднара, Х. Й. Кучмінської, М. О. Недашковського, а також Р. І. Дмитришина, Т. М. Антонової, В. Р. Гладуна, Н. П. Гоєнко, О. С. Манзій.

М. С. Сявавко запропонував континуальний аналог ГЛД і застосував його до розв'язування інтегральних рівнянь. Дослідженням інтегральних ланцюгових дробів займалися Т. М. Антонова [2], Р. І. Михальчук [78] та інші.

Один із основних методів розвинення функції у неперервний дріб побудований на використанні принципу відповідності. Задача відповідності між формальними кратними степеневими рядами і функціональними ГЛД не має єдиного розв'язку без накладання додаткових умов на коефіцієнти дробу. Саме тому, у випадку $N = 2$ ця проблема сприяла появі двовимірних неперервних дробів, які стали об'єктом досліджень у роботах Х. Й. Кучмінської, Т. М. Антонової, О. М. Сусь, С. М. Возної, В. Семашка, М. О'Доногое, Дж. Мерфі, Б. Вердонк, А. Кайт та інших [5, 44, 52, 71–73, 95, 121, 122, 150, 163, 164, 166, 175–177]. Проте у випадку більшої кількості змінних, конструкція цих дробів значно ускладнювалася, що викликало труднощі при їх дослідженні. Це спричинило появу у 1976 році ГЛД з нерівнозначними змінними, які у випадку фіксованих змінних отримали назву ГЛД спеціального вигляду [12, 33].

Принцип відповідності використали К. Г. Я. Якобі [143], Ф. Г. Фробеніус [131], А. Паде [167] для побудови апроксимацій Паде аналітичних функцій, заданих у вигляді степеневих рядів. У 1981 році В. К. Дзядик для побудови апроксимації Паде аналітичних функцій запропонував використовувати метод узагальнених моментних зображень [61, 62]. Багатовимірні апроксимації Паде почали вивчати лише з 70-х років XX ст. Метод моментних зображень був застосований А. П. Голубом, Л. О. Чернецькою для побудови таких апроксимацій [58, 59, 139–141]. У роботах [6, 13, 60, 63, 82, 86] досліджувалося питання збіжності апроксимацій Паде, зокрема діагональних апроксимацій Паде, які є фактично неперервними дробами.

Неперервні дроби, починаючи з роботи Т. О. Тіле [181], використовують для інтерполяції функцій. Ця тематика була розвинута у роботах М. М. Пагірі [83], Х. Й. Кучмінської, С. М. Возної [51, 52, 72, 73, 150], О. Є. Баран [11]. В. Л. Макаров, Б. Р. Михальчук, І. І. Демків [74–76] застосовували інтегральні ланцюгові дроби для інтерполяції функціоналів. Раціональні функції як апарат наближення досліджували Е. П. Долженко [64], В. М. Русак [88], Е. О. Ровба [87], О. А. Пекарський [84].

Оскільки неперервні дроби є ефективним апаратом раціональних наближень, то для побудови та дослідження багатовимірних раціональних апроксимацій використовують ГЛД. Об'єктом дисертаційного дослідження є ГЛД спеціального вигляду. Їх означення дають за аналогією із неперервними дробами, використовуючи композицію дробово-лінійних відображень [11].

Розглянемо множину мультиіндексів:

$$\mathcal{I} = \{i(k) :\ i(k) = (i_1, i_2, \dots, i_k);\ 1 \le i_p \le i_{p-1} \le ... \le i_0;\ k = 1, 2, \dots;\ i_0 = N\},$$

де N — фіксоване натуральне число.

Нехай b_0, $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, — комплексні числа, $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, — комплексні змінні, причому всі $a_{i(k)} \neq 0$, $i(k) \in \mathcal{I}$; і нехай

$$t_0(z_1, z_2, \dots, z_N) = b_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_N,$$

$$t_{i(k)}(z_{i(k),1}, z_{i(k),2}, \dots, z_{i(k),i_k}) = a_{i(k)}(b_{i(k)} + z_{i(k),1} + z_{i(k),2} + \dots + z_{i(k),i_k})^{-1} \quad (1.12)$$

— i_k-вимірні дробово-лінійні відображення, $i(k) \in \mathcal{I}$. Позначимо через $z_{i(k)}^{(r)}$; $r \in \mathbb{N}$, вектор із $\mathbb{C}^p$

$$z_{i(k)}^{(r)} = \{z_{i(k),j(r)} \in \mathbb{C};\ i(k), j(r) \in \mathcal{I}\}, \quad (1.13)$$

де $p = C_{i_k+r-1}^{i_k-1}$, і, зокрема,

$$z^{(r)} = \{z_{j(r)} \in \mathbb{C};\ j(r) \in \mathcal{I}\},$$

де $p = C_{N+r-1}^{N-1}$. Компоненти вектора (1.13) $z_{i(k),j(r)}$; $i(k), j(r) \in \mathcal{I}$, впорядковані наступним чином: $z_{i(k),n(r)} \prec z_{i(k),m(r)}$, якщо $n(r) \prec m(r)$ та $n(r) \prec m(r)$, якщо $n_1 < m_1$ або існує такий індекс s; $1 \le s < r$, що $n_p = m_p$; $p = \overline{1, s}$ і $n_{s+1} < m_{s+1}$. Нехай

$$w_{i(k)} = t_{i(k)}(z_{i(k)}^{(1)}), \quad i(k) \in \mathcal{I}.$$

Означимо $w_{i(k)}^{(r)}$ аналогічно (1.13). Розглянемо композиції дробово-лінійних відображень

$$T_0(z^{(1)}) = t_0(z^{(1)}), \quad T_k(z^{(k+1)}) = T_{k-1}(w^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.14)$$

і послідовність $\{T_k(\mathbf{0})\}$, де $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ — вектор із відповідного простору. Явні вирази для $T_k(\mathbf{0})$, $k = 0, 1, 2, \dots$, матимуть вигляд:

$$T_0(\mathbf{0}) = t_0(\mathbf{0}) = b_0, \quad T_1(\mathbf{0}) = t_0(t_1(\mathbf{0}), \dots, t_N(\mathbf{0})) = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i_1}}{b_{i_1}},$$

$$T_k(\mathbf{0}) = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i(1)}}{b_{i(1)} + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} \cfrac{a_{i(2)}}{b_{i(2)} + \ddots + \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \cfrac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}}}. \tag{1.15}$$

Гіллястим ланцюговим дробом спеціального вигляду називається впорядкована пара $\langle\langle\{a_{i(k)}\},\{b_{i(k)}\}\rangle,\{f_k\}\rangle$, де $a_{i(k)}$ і $b_0, b_{i(k)}$ — комплексні числа, $i(k) \in \mathcal{I}$, причому всі $a_{i(k)} \neq 0$, $\{f_k\}$ — послідовність із розширеної комплексної площини $\widehat{\mathbb{C}}$ така, що $f_k = T_k(\mathbf{0})$; $k = 0, 1, 2, \ldots$, і $T_k(\mathbf{0})$ визначаються за формулами (1.12)–(1.15).

Числа $a_{i(k)}$ та $b_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, називаються $i(k)$-ми частинними чисельниками та знаменниками ГЛД відповідно або його елементами, відношення $a_{i(k)}/b_{i(k)}$ називаються $i(k)$-ми частинними ланками, b_0 — вільним членом, f_k — k-им підхідним дробом або k-ою апроксимантою. Сукупність всіх k-их ланок утворює k-ий поверх гіллястого ланцюгового дробу.

Для запису ГЛД спеціального вигляду використовують наступні позначення, запропоновані О. Є. Баран [11]:

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i(1)}}{b_{i(1)} + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} \cfrac{a_{i(2)}}{b_{i(2)} + \sum\limits_{i_3=1}^{i_2} \cfrac{a_{i(3)}}{b_{i(3)} + \ddots}}};$$

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}} \, \underset{+}{} \, \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)}}{b_{i(2)}} \, \underset{+}{} \, \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{a_{i(3)}}{b_{i(3)}} \, \underset{+}{} \, \underset{\ldots}{};$$

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}. \tag{1.16}$$

Підхідні дроби компактно будемо записувати у вигляді

$$f_0 = b_0, \quad f_n = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Означення ГЛД загального вигляду вводиться аналогічно до означаєння ГЛД спеціального вигляду, за винятком певних відмінностей, що визначають специфічні особливості кожного класу ГЛД. Для ГЛД з N гілками розгалужень (ГЛД загального вигляду) дробово-лінійні відображення (1.12) мають вигляд

$$t_{i(k)}(z_{i(k),1}, z_{i(k),2}, \ldots, z_{i(k),N}) = a_{i(k)}(b_{i(k)} + z_{i(k),1} + z_{i(k),2} + \ldots + z_{i(k),N})^{-1},$$

а вектор $z_{i(k)}^{(r)}$ це вектор із $\mathbb{C}^p$; $p = N^r$; $r \in \mathbb{N}$, де $i(k) \in I$,

$$I = \left\{ i(k): \quad i(k) = (i_1, i_2, \ldots, i_k); \quad i_p = \overline{1, N}; \quad p = \overline{1, k}; \quad k = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Отже, нескінченний ГЛД з N-гілками розгалужень матиме вигляд

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i(1)}}{b_{i(1)} + \sum\limits_{i_2=1}^{N} \cfrac{a_{i(2)}}{b_{i(2)} + \sum\limits_{i_3=1}^{N} \cfrac{a_{i(3)}}{b_{i(3)} + \ddots}}}$$

і компактне позначення

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \tag{1.17}$$

а для для підхідних дробів використовують скорочений запис

$$f_0 = b_0, \quad f_n = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Найважливішим питанням в аналітичній теорії гіллястих ланцюгових дробів є питання збіжності ГЛД.

ГЛД спеціального вигляду (1.16) збігається [11], якщо не більше, ніж скінченна кількість його підхідних дробів не має змісту, і послідовність його підхідних дробів $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ збігається до скінченної границі f. У цьому випадку f називають значенням ГЛД (1.16). Інакше цей ГЛД розбігається.

Зауважимо, що підхідні дроби ГЛД з N гілками розгалужень (1.17) мають таку особливість, що довжина всіх віток, які входять у його структуру, рівна порядку підхідного дробу. Але підхідні дроби можна формувати таким чином, щоб їх гілки мали різну довжину. Такі апроксиманти називають фігурними підхідними дробами ГЛД. При розв'язанні конкретних задач виникають певні конструкції таких дробів. Зокрема, $\mathcal{A}$-фігурні апроксиманти використовуються при доведенні формул для канонічних чисельників і канонічних знаменників у формі визначників [32], $\mathcal{B}$-фігурні підхідні дроби — для вирішення питання відповідності між формальними кратними степеневими рядами і ГЛД.

$\mathcal{A}$-фігурні підхідні дроби будуються таким чином, що кожен новий підхідний дріб утворюється додаванням чергової ланки у природному записі ГЛД, тобто

$$\widehat{f}_0 = b_0,\ \widehat{f}_1 = b_0 + \frac{a_1}{b_1},\ \widehat{f}_2 = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2},\ \ldots,$$
$$\widehat{f}_N = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i_1}}{b_{i_1}},\ \widehat{f}_{N+1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \dfrac{a_{1,1}}{b_{1,1}}} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{a_{i_1}}{b_{i_1}},\ \ldots.$$

Таким чином,

$$\widehat{f}_n = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}} + \ldots + \sum_{i_{s-1}=1}^{N} \frac{a_{i(s-1)}}{b_{i(s-1)}} + \sum_{i_s=1}^{N} \frac{\xi_{i(s)}}{\eta_{i(s)}},$$

де

$$\left.\frac{\xi_{i(s)}}{\eta_{i(s)}}\right) \equiv \begin{cases} \dfrac{a_{i(s)}}{b_{i(s)}}, & \text{якщо } i(s) \preceq n(s), \\ \dfrac{0}{1}, & \text{якщо } i(s) \succ n(s), \end{cases}$$

запис тотожності $\dfrac{a}{b} \equiv \dfrac{c}{d}$, означає, що $a = c,\ b = d$, порядок на множині мультиіндексів визначено вище, а число s, індекси $n_j,\ j = \overline{1,s}$, мультиіндекси $n(s) = (n_1, n_2, \ldots, n_s)$, визначаються з розкладу числа n

$$n = n_1 N^{s-1} + n_2 N^{s-2} + \cdots + n_s,\ 1 \le k_j \le N,\ j = \overline{1,s}.$$

n-им $\mathcal{B}$-фігурним підхідним дробом ГЛД (1.17) є скінченний ГЛД вигляду

$$\breve{f}_n = \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{\xi_{i(k)}}{\eta_{i(k)}},\ n \ge 1,$$

де

$$\frac{\xi_{i(k)}}{\eta_{i(k)}} \equiv \begin{cases} \dfrac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, & \text{якщо } i_1 + i_2 + \ldots + i_k \leq n; \\ \dfrac{0}{1}, & \text{якщо } i_1 + i_2 + \ldots + i_k > n. \end{cases}$$

Аналогічним чином поняття $\mathcal{A}$-фігурного і $\mathcal{B}$-фігурного підхідних дробів переноситься на ГЛД спеціального вигляду.

Враховуючи особливості структури ГЛД спеціального вигляду, для нього можна ввести специфічні фігурні підхідні дроби, які неможливо означити для ГЛД загального вигляду, які будемо називати $\mathcal{C}$-фігурними підхідними дробами.

Нехай усі неперервні дроби, що входять у структуру N-вимірного ГЛД спеціального вигляду (1.16) збігаються, тобто мають зміст величини $b_0^{(1)}$ і $b_{i(s)}^{(1)}$, $i(s) \in \mathcal{I}^{(2)}$, де

$$b_0^{(1)} = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_{1[k]}}{b_{1[k]}}, \; b_{i(s)}^{(1)} = b_{i(s)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_{i(s),1[k]}}{b_{i(s),1[k]}},$$

$$\mathcal{I}^{(2)} = \{i(n) = (i_1, i_2, \ldots, i_n) : 2 \leq i_n \leq i_{n-1} \leq ... \leq i_0; \; n \geq 1; \; i_0 = N\},$$

$$1[k] = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k}).$$

Тоді скінченний ГЛД

$$\widetilde{f}_n = b_0^{(1)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=2}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}^{(1)}}, \; n \geq 1,$$

називатимемо $\mathcal{C}_1$-фігурним підхідним дробом ГЛД спеціального вигляду (1.16).

Нехай тепер усі $(N-1)$-вимірні ГЛД спеціального вигляду, що входять у структуру N-вимірного ГЛД спеціального вигляду (1.16) збігаються, тобто мають зміст величини $b_0^{(N-1)}$ і $b_{N[s]}^{(N-1)}$, $s = 1, 2, \ldots$, де

$$b_0^{(N-1)} = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{l=1}^{\infty} \sum_{i_l=1}^{i_{l-1}} \frac{a_{i(l)}}{b_{i(l)}}, \; b_{N[s]}^{(N-1)} = b_{N[s]} + \mathop{\mathrm{D}}_{l=1}^{\infty} \sum_{i_l=1}^{i_{l-1}} \frac{a_{N[s],i(l)}}{b_{N[s],i(l)}},$$

$$i_0 = N-1,\ s = 1, 2, \ldots, n.$$

Тоді скінченний неперервний дріб

$$\widetilde{\widetilde{f}}_n = b_0^{(N-1)} + \mathop{\mathrm{D}}_{s=1}^{n} \frac{a_{N[s]}}{b_{N[s]}^{(N-1)}},\ n \geq 1,$$

називатимемо $\mathcal{C}_2$-фігурним підхідним дробом ГЛД спеціального вигляду (1.16). Очевидно, що для двовимірного ГЛД спеціального вигляду $\mathcal{C}_1$- та $\mathcal{C}_2$-фігурні підхідні дроби співпадають.

Означення фігурної збіжності, з урахуванням конкретного типу фігурних підхідних дробів, вводиться аналогічно як і збіжністості ГЛД. Часто виникають питання взаємозв'язку звичайної та фігурної збіжності. Зазвичай, коли розглядають збіжність ГЛД, то мається на увазі збіжність послідовності $\{f_n\}$. Взаємозв'язок між фігурною збіжністю і збіжністю ГЛД демонструє наступна теорема.

Теорема 1.12 (Д. І. Боднар [32]) *Якщо ГЛД* (1.17) *з дадатними елементами збігається, то він фігурно збігається до тієї ж границі, при довільному виборі фігурних підхідних дробів.*

Для ГЛД з додатними елементами будемо використовувати наступну теорему.

Теорема 1.13 (Д. І. Боднар [90]) *Якщо ГЛД* (1.17) *з дадатними елементами збігається, то для довільного мультиіндексу $i(k)$, $i(k) \in I$, ГЛД*

$$b_{i(k)} + \mathop{\mathrm{D}}_{m=k+1}^{\infty} \sum_{i_m=1}^{N} \frac{a_{i(m)}}{b_{i(m)}},$$

що є частиною ГЛД (1.17)*, збігається.*

Ці теорема очевидним чином переноситься на ГЛД спеціального вигляду.

Для підхідних дробів ГЛД з додатними елементами виконується властивість "вилки", що виражається співвідношеннями типу (1.4).

Першим результатом, що стосується збіжності ГЛД спеціального вигляду, була теорема Зейделя для двовимірного випадку.

Теорема 1.14 (Д. І. Боднар [33]) *ГЛД*

$$a_{00}+\cfrac{1}{a_{01}+\cfrac{1}{a_{02}+\cfrac{1}{a_{03}+\ddots}}}+\cfrac{1}{a_{10}+\cfrac{1}{a_{11}+\cfrac{1}{a_{12}+\ddots}}+\cfrac{1}{a_{20}+\cfrac{1}{a_{21}+\ddots}+\cfrac{1}{a_{30}+\ddots}}},$$

де $a_{ik}>0$, $(i,k=0,1,\dots)$, *збігається тоді і тільки тоді, коли розбігаються ряди*

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_{ik},\sum_{i=0}^{\infty}\xi_i,$$

за умови, що

$$\xi_i=a_{i0}+\cfrac{1}{a_{i1}+\cfrac{1}{a_{i2}+\cfrac{1}{a_{i3}+\ddots}}},\ i=0,1,\dots.$$

При дослідженні збіжності неперервних дробів суттєво використовуються рекурентні співвідношення (1.2). Для гіллястих ланцюгових дробів таких формул немає. Тут для дослідження збіжності використовується формула різниці підхідних дробів, яка виражається через залишки підхідних дробів.

Залишками s-го підхідного дробу ГЛД (1.16) називаються вирази

$$Q_{i(s)}^{(s)}=b_{i(s)},\quad Q_{i(p)}^{(s)}=b_{i(p)}+\mathop{\mathrm{D}}_{r=p+1}^{s}\sum_{i_r=1}^{i_{r-1}}\frac{a_{i(r)}}{b_{i(r)}}, \tag{1.18}$$

де $s=1,2,\dots$; $p=\overline{1,s-1}$; $i(s)\in\mathcal{I}$; $i(p)\in\mathcal{I}$. Для залишків (1.18) виконуються такі рекурентні співвідношення:

$$Q_{i(p)}^{(s)}=b_{i(p)}+\sum_{i_{p+1}=1}^{i_p}\frac{a_{i(p+1)}}{Q_{i(p+1)}^{(s)}},$$

де $s=1,2,\dots$; $p=\overline{1,s-1}$; $i(p)\in\mathcal{I}$.

Тоді справджується формула різниці двох підхідних дробів f_n-f_m для ГЛД (1.16) [11]:

$$f_n-f_m=(-1)^m\sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2=1}^{i_1}\dots\sum_{i_{m+1}=1}^{i_m}\frac{\prod\limits_{r=1}^{m+1}a_{i(r)}}{\prod\limits_{r=1}^{m+1}Q_{i(r)}^{(n)}\prod\limits_{r=1}^{m}Q_{i(r)}^{(m)}}. \tag{1.19}$$

ГЛД (1.16) і ГЛД

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a^*_{i(k)}}{b^*_{i(k)}} \tag{1.20}$$

називаються еквівалентними, якщо

$$\widehat{f}_n = \widehat{f}^*_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.21}$$

де $\widehat{f}_n$, $\widehat{f}^*_n$ — n-і $\mathcal{A}$-фігурні підхідні дроби ГЛД (1.16) і (1.20) відповідно.

Теорема 1.15 (О. Є. Баран [11]) *Гіллясті ланцюгові дроби* (1.16) *і* (1.20), *в яких* $a_{i(k)} \neq 0$ *і* $a^*_{i(k)} \neq 0$, $i(k) \in \mathcal{I}$, *еквівалентні тоді і тільки тоді, коли існує послідовність ненульових сталих* $\{\rho_{i(k)}\}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, *така, що*

$$a^*_{i(k)} = \rho_{i(k)}\rho_{i(k-1)}a_{i(k)}; \quad b^*_{i(k)} = \rho_{i(k)}b_{i(k)}; \quad i(k) \in \mathcal{I}, \quad \rho_{i(0)} = 1. \tag{1.22}$$

Теорема 1.15 спочатку була сформульована для ГЛД загального вигляду [32].

Замінити умову (1.21) рівністю підхідних дробів $f_n = f^*_n$, $n = 0, 1, \ldots,$ у цій теоремі неможливо. Дійно, для двох ГЛД спеціального вигляду

$$\cfrac{\frac{1}{2}a}{1 + \cfrac{a}{1 + \ddots}} + \cfrac{\frac{1}{2}a}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}a}{1 + \cfrac{a}{1 + \ddots}} + \cfrac{\frac{1}{2}a}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}a}{1 + \ddots} + \cfrac{\frac{1}{2}a}{1 + \ddots}}}$$

і

$$\cfrac{\frac{1}{3}a}{1 + \cfrac{a}{1 + \ddots}} + \cfrac{\frac{2}{3}a}{1 + \cfrac{\frac{1}{3}a}{1 + \cfrac{a}{1 + \ddots}} + \cfrac{\frac{2}{3}a}{1 + \cfrac{\frac{1}{3}a}{1 + \ddots} + \cfrac{\frac{2}{3}a}{1 + \ddots}}}$$

підхідні дроби співпадають, $a \neq 0$. Проте жоден із цих ГЛД не можна перетворити у інший, використовуючи еквівалентні перетворення (1.22), оскільки повинні виконуватися суперечливі рівності, наприклад,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}a = \dfrac{1}{3}a\rho_{i(0)}\rho_1, \\ 1 = 1 \cdot \rho_1 \end{cases} \text{або} \begin{cases} \dfrac{1}{3}a = \dfrac{1}{2}a\rho_{i(0)}\rho_1, \\ 1 = 1 \cdot \rho_1, \end{cases}$$

де $\rho_{i(0)} = 1,\ a \neq 0$.

Якщо $b_{i(k)} \neq 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}$, то, вибираючи $\rho_{i(k)} = 1/b_{i(k)}$, ГЛД (1.16) можна звести до дробу з частинними знаменниками рівними одиниці, тобто

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \approx b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a^*_{i(k)}}{1},$$

де $a^*_{i(k)} = a_{i(k)}/(b_{i(k)}b_{i(k-1)})$; $i(k) \in \mathcal{I}$, причому $b_{i(0)} = 1$.

Вибираючи

$$\rho_{i(k)} = \prod_{p=1}^{k} (a_{i(p)})^{(-1)^{k+p-1}},$$

ГЛД (1.16) еквівалентними перетвореннями можна звести до ГЛД з частинними чисельниками рівними одиниці, тобто

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \approx b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{b^*_{i(k)}},$$

де $b^*_{i(k)} = b_{i(k)} \prod\limits_{p=1}^{k} (a_{i(p)})^{(-1)^{k+p-1}}$; $i(k) \in \mathcal{I}$.

Послідовність $\{V_{i(k)}\}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, непорожніх множин $V_{i(k)} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ називається послідовністю множин значень дробу (1.16), якщо

$$\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)} + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k} V_{i(k+1)}} \subseteq V_{i(k)}, \quad i(k) \in \mathcal{I}.$$

Для заданої послідовності множин значень $\{V_{i(k)}\}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, де $V_{i(k)} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$, послідовністю множин елементів ГЛД (1.16), що їй відповідає називається послідовність множин $\{\Omega_{i(k)}\}$, елементи якої визначаються співвідношеннями

$$\Omega_{i(k)} := \left\{ (a,b) \in \mathbb{C}^2 : \frac{a}{b + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k} V_{i(k+1)}} \subseteq V_{i(k)} \right\}, \quad i(k) \in \mathcal{I}.$$

У частинному випадку для ГЛД

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1} \tag{1.23}$$

множина елементів має вигляд

$$E_{i(k)} := \left\{ a \in \mathbb{C} : \frac{a}{1 + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k} V_{i(k+1)}} \subseteq V_{i(k)} \right\}, \quad i(k) \in \mathcal{I},$$

тобто для ГЛД (1.23) $\Omega_{i(k)} = E_{i(k)} \times \{1\}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, а для ГЛД

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{b_{i(k)}}, \tag{1.24}$$

множина елементів має вигляд

$$G_{i(k)} := \left\{ b \in \mathbb{C} : \frac{1}{b + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k} V_{i(k+1)}} \subseteq V_{i(k)} \right\}, \quad i(k) \in \mathcal{I},$$

тобто для ГЛД (1.24) $\Omega_{i(k)} = \{1\} \times G_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$.

У дисертаційній роботі [11] означено різні типи множин елементів та множин значень. Якщо всі $V_{i(k)} = V$, тоді V називається простою множиною значень дробу (1.16). Якщо $V_{i(2k)} = V_0$ і $V_{i(2k-1)} = V_1$, $i(2k) \in \mathcal{I}$, тоді $\langle V_0, V_1 \rangle$ називаються спареними множинами значень ГЛД (1.16).

Якщо всі $\Omega_{i(k)} = \Omega$, тоді Ω називається простою множиною елементів. Якщо $\Omega_{i(2k-1)} = \Omega_0$ і $\Omega_{i(2k)} = \Omega_1$, $i(2k) \in \mathcal{I}$, тоді $\langle \Omega_0, \Omega_1 \rangle$ називаються спареними множинами елементів дробу (1.16).

Послідовність областей елементів $\{\Omega_{i(k)}\}$ називається послідовністю областей збіжності ГЛД (1.16), якщо умова $(a_{i(k)}, b_{i(k)}) \in \Omega_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, забезпечує збіжність ГЛД (1.16).

Якщо всі $\Omega_{i(k)} = \Omega$, тоді Ω називається простою областю збіжності. Якщо $\Omega_{i(2k+1)} = \Omega_1$ і $\Omega_{i(2k)} = \Omega_2$, $i(k) \in \mathcal{I}$, тоді $\langle \Omega_1, \Omega_2 \rangle$ називаються спареними областями збіжності дробу (1.16).

Послідовність областей елементів $\{\Omega_{i(k)}\}$ називається послідовністю областей умовної збіжності, якщо, крім умови $(a_{i(k)}, b_{i(k)}) \in \Omega_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, для обґрунтування збіжності ГЛД потрібно вимагати інші додаткові умови. Саме встановлення таких умов є однією із задач дисертаційного дослідження. Як і у одновимірному випадку розглядатимемо кутові і параболічні множини умовної збіжності та їх підмножини. Ознаки збіжності ГЛД спеціального вигляду досліджували Д. І. Боднар, Р. І. Дмитришин, С. В. Шарин, Т. М. Антонова, О. Є. Баран, М. М. Бубняк [3, 4, 7–11, 33–35, 104, 116, 117, 129].

При встановленні оцінок похибок апроксимації підхідними дробами ГЛД спеціального вигляду з частинними знаменниками, що належать кутовим множинам, будемо використовувати результати, отримані при дослідженні цієї ж задачі Т. М. Антоновою [2, 4].

Теорема 1.16 (Т. М. Антонова [4]) *Нехай елементи ГЛД*

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{|a_{i(k)}|}{|b_{i(k)}| \exp\left(i\phi_{i(k)}\right)}, \tag{1.25}$$

задовольняють умови

$$0 \le \phi_{i(2p-1)} \le \frac{\pi}{2}, \ -\frac{\pi}{2} \le \phi_{i(2p)} \le 0, \ p = 1, \ 2, \dots, \tag{1.26}$$

$$\frac{|a_{i(k)}|}{|b_{i(k)} b_{i(k+1)}|} \le L, \ k = 1, 2, \dots, \tag{1.27}$$

де L *– додатна стала. Тоді ГЛД* (1.25) *збігається; для швидкості збіжності справджується оцінка*

$$|f - f_n| \le \max_{1 \le i_1 \le N} \frac{|a_{i(1)}|}{|b_{i(1)}|} C_{N+n}^{N-1} \left(\frac{L^2}{L^2+1} \right)^{n/2}.$$

Доведення цієї теореми ґрунтується на використанні нерівності

$$\left| \frac{a_{i(k)}}{Q_{i(k)}^{(s)} Q_{i(k+1)}^{(s)}} \right| \le \sqrt{\frac{L^2}{L^2+1}}, \ s = 2, 3, \dots \ k = 1, 2, \dots, s-1, \ i(k+1) \in \mathcal{I}. \tag{1.28}$$

Саме вона буде суттєво застосована для доведення оцінки швидкості збіжності ГЛД спеціального вигляду у спарених кутових множинах. Також важливою при цьому буде наступна лема.

Лема 1.1 *Якщо елементи ГЛД* (1.25) *задовольняють умови* (1.26) *або умови*

$$-\frac{\pi}{2} \le \arg b_{i(2p-1)} \le 0,\ 0 \le \arg b_{i(2p)} \le \frac{\pi}{2},\ p \ge 1,\ i(2p), \in \mathcal{I},$$

$$a_{i(k)} > 0,\ k \ge 1,\ i(k) \in \mathcal{I},$$

то для його залишків справджується оцінка

$$\left|Q_{i(k)}^{(n)}\right| \ge \left|b_{i(k)}\right|,\ i(k) \in \mathcal{I},\ k = 1, \ldots, n,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Використовуючи принцип відповідності між ГЛД і кратними степеневими рядами, аналогічно як і в одновимірному випадку можна виділити різні типи функціональних багатовимірних ГЛД з нерівнозначними змінними. Їх класифікацію зроблено у дисертації Р. І. Дмитришина [65].

ГЛД з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \tag{1.29}$$

де $a_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}$, називають багатовимірним регулярним C-дробом з нерівнозначними змінними [11, с. 40]. Якщо $a_{i(k)} > 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}$, то гіллястий ланцюговий дріб (1.29) називають багатовимірним S-дробом з нерівнозначними змінними.

Дослідженню рівномірної і поточкової збіжності таких дробів присвячені роботи [11, 36, 66–69, 114–116, 129, 129]. У роботах [65, 68] наведені приклади, які ілюструють ефективність наближення конкретних функцій у ГЛД з нерівнозначними змінними.

При дослідженні збіжності функціональних гіллястих ланцюгових дробів часто використостовується багатовимірне узагальнення теорем Монтеля [79] і Стільтьєса–Віталі [146].

Теорема 1.17 (Т. Йо. Стільтьєс, Дж. Віталі) *Нехай* $\{f_m\,(\mathbf{z})\}_{m=1}^{\infty}$ *— послідовність голоморфних функцій в області* $D \subset \mathbb{C}$ *таких, що* $f_m(\mathbf{z}) \neq a$, $f_m(\mathbf{z}) \neq b$, *для всіх* $\mathbf{z} \in D$, $m \in \mathbb{N}$, *де* a *і* b *— комплексні числа* $(a \neq b)$.

Нехай $\Delta \subset D$ *— нескінченна множина точок, що мають принаймні одну граничну точку, що належить* D.

Якщо послідовність $\{f_m\,(\mathbf{z})\}$ *збігається до скінченного значення для всіх* $\mathbf{z} \in \Delta$, *то вона рівномірно збігається на кожному компакті області* D *до голомогфної функції в* D.

Нехай D — деяка область в $\mathbb{C}^n$. Розглянемо послідовність $\{f_m(\mathbf{z})\}_{m=1}^{\infty}$ голоморфних функцій в D. Послідовність $\{f_m(z)\}$ називається рівномірно обмеженою всередині області D, якщо для довільного компакту K існує стала $M = M(K)$ така, що $|f_m(z)| \leq M$ для всіх $z \in K$ і довільного m, $m = 1, 2, \ldots$.

Теорема 1.18 ([32]) *Нехай* $\{f_m\,(\mathbf{z})\}_{m=1}^{\infty}$ *— послідовність голоморфних функцій в області* $D \subset \mathbb{C}^n$, *рівномірно обмежених всередині* D. *Якщо* $\{f_m\,(\mathbf{z})\}$ *збігається в кожній точці множини* $\Delta \subset D$, *яка є* $2n$*-вимірним околом,* n*-вимірним дійсним або* n*-вимірним комплексним околом точки* $\mathbf{z}_0 \in D$, *то* $f_m(\mathbf{z})$ *збігається рівномірно на будь-якому компакті* K, $K \subset D$, *до голоморфної функції в* D.

РОЗДІЛ 2
ГІЛЛЯСТІ ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ З ДОДАТНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

2.1. Критерій збіжності гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду

Питання збіжності неперервних дробів з додатними елементами повністю вирішує критерій Зейделя (теорема 1.2). Цей критерій використовується при дослідженні кутових та параболічних множин збіжності неперервних дробів з комплексними елементами. Встановимо багатовимірне узагальнення критерію Зейделя. Для цього доведемо деякі допоміжні леми.

Розглянемо ГЛД вигляду

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{b_{i(k)}}, \tag{2.1}$$

де $b_{i(k)} > 0,\ i(k) \in \mathcal{I}$,

$$\mathcal{I} = \{i(k) = (i_1, i_2, \ldots, i_k)\ : 1 \le i_k \le i_{k-1} \le ... \le i_0;\ k \ge 1;\ i_0 = N\}.$$

Лема 2.1 *Нехай ГЛД* (2.1) *з додатними компонентами збігається, $\varepsilon-$довільне дійсне додатне число.*

Тоді існує натуральне число $m,\ m \ge 2$, залежне від ε, таке, що для кожного ГЛД з додатними елементами

$$\widehat{b}_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{\widehat{b}_{i(k)}}, \tag{2.2}$$

де $\widehat{b}_{i(k)} = b_{i(k)}$, для всіх $i(k) \in \mathcal{I},\ k < m$, справджується оцінка

$$\left| f_r - f_r^{'} \right| < \varepsilon, \quad r \ge m - 1,$$

де $f_r,\ f_r^{'}$ – r-ті підхідні дроби ГЛД (2.1) *та* (2.2) *відповідно.*

Д о в е д е н н я. Зі збіжності ГЛД (2.1) слідує, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер $m,\ m \ge 2$, такий, що для кожного $r,\ r \ge m - 1$ маємо $|f_r - f_{m-2}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, зокрема, $|f_{m-1} - f_{m-2}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Оскільки $f_p = f_p^{'}$, $p = 1, 2, ..., m-1$, то, враховуючи властивість монотонності (властивість «вилки» (1.4)) підхідних дробів для ГЛД (2.2), маємо для будь-якого $r \geq m-1$

$$\left| f_r^{'} - f_{m-2}^{'} \right| \leq \left| f_{m-1}^{'} - f_{m-2}^{'} \right| = |f_{m-1} - f_{m-2}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, враховуючи, що $f_{m-2} = f_{m-2}^{'}$, маємо

$$\left| f_r - f_r^{'} \right| \leq |f_r - f_{m-2}| + \left| f_r^{'} - f_{m-2}^{'} \right| < \varepsilon.$$

■

Лема 2.2 *Нехай*

$$f_m = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{m} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{b_{i(k)}},\ m \geq 1,$$

– скінченний ГЛД з додатними компонентами. Нехай $\widehat{b}_0 > 0$, $\widehat{b}_{i(k)} > 0$ *наближені значення величин* b_0 *і* $b_{i(k)}$*, відповідно, і нехай*

$$\widehat{f}_m = \widehat{b}_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{m} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{\widehat{b}_{i(k)}},\ m \geq 1.$$

Якщо $\Delta_0 = \left| \widehat{b}_0 - b_0 \right|,\ \Delta_{i(k)} = \left| \widehat{b}_{i(k)} - b_{i(k)} \right|$*, то*

$$\left| f_m - \widehat{f}_m \right| \leq f_m \cdot \max_{0 \leq s \leq \left[\frac{m}{2}\right]} \max_{i(2s+1) \in \mathcal{I}} \left\{ \frac{\Delta_{i(2s)}}{b_{i(2s)}}, \frac{\Delta_{i(2s+1)}}{\widehat{b}_{i(2s+1)}} \right\},$$

причому $b_{i(0)} = b_0,\ \Delta_{i(0)} = \Delta_0,\ \Delta_{i(2k+1)} = 0$*, якщо* $m = 2k$*.*

Д о в е д е н н я. Доведення базується на використанні методики запропонованої у монографії [90, с. 106]. Нехай

$$\widehat{\delta}_\alpha = \frac{\alpha - \widehat{\alpha}}{\widehat{\alpha}},\ \delta_\alpha = \frac{\widehat{\alpha} - \alpha}{\alpha},$$

де $\widehat{\alpha}$ – наближене значення числа α.

Якщо $a > 0$, $\widehat{a} > 0$, $b > 0$, $\widehat{b} > 0$, то

$$|\delta_{a+b}| \leq \max \left\{ |\delta_a|, |\delta_b| \right\}.$$

Дійсно, нехай для визначеності $|\delta_b| \le |\delta_a|$, тоді

$$|\delta_{a+b}| = \frac{\left|\widehat{a}+\widehat{b}-a-b\right|}{a+b} = \frac{a}{a+b}\cdot\frac{|a-\widehat{a}|}{a}\left(1+\left|\frac{b-\widehat{b}}{a-\widehat{a}}\right|\right) \le$$

$$\le \frac{a}{a+b}\left|\delta_a\right|\left(1+\frac{b}{a}\right) = \left|\delta_a\right|.$$

Аналогічно можна довести нерівність

$$\left|\widehat{\delta}_{a+b}\right| \le \max\left\{\left|\widehat{\delta}_a\right|, \left|\widehat{\delta}_b\right|\right\}.$$

Вірними будуть також наступні рівності, що доводяться з використанням елементарних перетворень:

$$\left|\delta_{\frac{1}{a}}\right| = \left|\widehat{\delta}_a\right|,\ \left|\widehat{\delta}_{\frac{1}{a}}\right| = \left|\delta_a\right|,\ \left|\widehat{\delta}_a\right| = \left|\frac{\delta_a}{1+\delta_a}\right|.$$

Нехай

$$Q^{(m)}_{i(k)} = b_{i(k)} + \mathop{\mathrm{D}}_{s=k+1}^{m}\sum_{i_s=1}^{i_{s-1}}\frac{1}{b_{i(s)}} = b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k}\frac{1}{Q^{(m)}_{i(k+1)}},$$

$$\widehat{Q}^{(m)}_{i(k)} = \widehat{b}_{i(k)} + \mathop{\mathrm{D}}_{s=k+1}^{m}\sum_{i_s=1}^{i_{s-1}}\frac{1}{\widehat{b}_{i(s)}} = \widehat{b}_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k}\frac{1}{\widehat{Q}^{(m)}_{i(k+1)}}$$

і

$$\delta^{(m)}_{i(k)} = \frac{1}{Q^{(m)}_{i(k)}}\left(Q^{(m)}_{i(k)} - \widehat{Q}^{(m)}_{i(k)}\right),\ \widehat{\delta}^{(m)}_{i(k)} = \frac{1}{\widehat{Q}^{(m)}_{i(k)}}\left(Q^{(m)}_{i(k)} - \widehat{Q}^{(m)}_{i(k)}\right).$$

Тоді

$$f_m = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N}\frac{1}{Q^{(m)}_{i(1)}},\ \widehat{f}_m = \widehat{b}_0 + \sum_{i_1=1}^{N}\frac{1}{\widehat{Q}^{(m)}_{i(1)}}$$

і

$$\frac{\left|f_m - \widehat{f}_m\right|}{f_m} = \left|\delta^{(m)}_0\right| \le \max_{i_1}\left\{\left|\delta_0\right|, \left|\widehat{\delta}^{(m)}_{i(1)}\right|\right\} \le$$

$$\le \max_{i_1,i_2}\left\{\left|\delta_0\right|, \left|\widehat{\delta}_{i(1)}\right|, \left|\delta_{i(2)}(m)\right|\right\} \le$$

$$\le \max_{i_1,i_2,i_3}\left\{\left|\delta_0\right|, \left|\widehat{\delta}_{i(1)}\right|, \left|\delta_{i(2)}\right|, \left|\widehat{\delta}^{(m)}_{i(3)}\right|\right\} \le \ldots \le$$

$$\le \max_{0\le s\le\left[\frac{m}{2}\right]}\ \max_{i(2s+1)\in\mathcal{I}}\left\{\left|\delta_{i(2s)}\right|, \left|\frac{\delta_{i(2s+1)}}{1+\delta_{i(2s+1)}}\right|\right\} =$$

$$= \max_{0\le s\le \left[\frac{m}{2}\right]} \max_{i(2s+1)\in\mathcal{I}} \left\{ \frac{\Delta_{i(2s)}}{b_{i(2s)}}, \frac{\Delta_{i(2s+1)}}{\widehat{b}_{i(2s+1)}} \right\}.$$

■

Надалі будемо використовувати такі множини мультиіндексів

$$\mathcal{I}^{(m)} = \{i(n) = (i_1, i_2, \ldots, i_n) : m \le i_n \le i_{n-1} \le ... \le i_0;\ n \ge 1;\ i_0 = N\},$$

$m = \overline{2, N}$.

Рекурентно означимо неперервні дроби, при початкових умовах

$$\begin{array}{ll}
b_0^{(0)} = b_0, & b_{i(k)}^{(0)} = b_{i(k)}, i(k) \in \mathcal{I}, \\
b_0^{(1)} = b_0^{(0)} + \underset{s=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \dfrac{1}{b_{1[s]}^{(0)}}, & b_{i(n)}^{(1)} = b_{i(n)}^{(0)} + \underset{s=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \dfrac{1}{b_{i(n),1[s]}^{(0)}},\ i(n) \in \mathcal{I}^{(2)}, \\
b_0^{(2)} = b_0^{(1)} + \underset{s=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \dfrac{1}{b_{2[s]}^{(1)}}, & b_{i(n)}^{(2)} = b_{i(n)}^{(1)} + \underset{s=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \dfrac{1}{b_{i(n),2[s]}^{(1)}},\ i(n) \in \mathcal{I}^{(3)}, \\
\ldots, & \ldots, \\
b_0^{(m)} = b_0^{(m-1)} + \underset{s=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \dfrac{1}{b_{m[s]}^{(m-1)}}, & b_{i(n)}^{(m)} = b_{i(n)}^{(m-1)} + \underset{s=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \dfrac{1}{b_{i(n),m[s]}^{(m-1)}},\ i(n) \in \mathcal{I}^{(m+1)}, \\
\ldots, & \ldots, \\
b_0^{(N)} = b_0^{(N-1)} + \underset{s=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \dfrac{1}{b_{N[s]}^{(N-1)}}, &
\end{array} \tag{2.3}$$

де $m[s] = (\underbrace{m, m, ..., m}_{s})$, $b_{i(k)}$ — частинні знаменники ГЛД (2.1), $i(k) \in \mathcal{I}$.

Теорема 2.1 (Багатовимірне узагальнення критерію Зейделя) *ГЛД (2.1) з додатними частинними знаменниками збігається тоді і тільки тоді, коли з урахуванням позначень (2.3) для кожного m, $1 \le m \le N$, розбігаються ряди*

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_{m[p]}^{(m-1)}, \tag{2.4}$$

а також для кожного m, $1 \le m \le N$, і кожного мультиіндексу $i(n)$, $i(n) \in \mathcal{I}^{(m+1)}$ розбігяються ряди

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_{i(n),m[p]}^{(m-1)}. \tag{2.5}$$

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай дріб (2.1) є збіжним, тоді за аналогом теореми 1.13 для ГЛД спеціального вигляду збіжними є усі його s-ті залишки:

$$r_{i(s)} = b_{i(s)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=s+1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{b_{i(k)}}, \quad i(s) \in \mathcal{I}.$$

Зокрема, якщо $i_s = 1$, то збіжними є неперервні дроби

$$r_1 = b_1 + \mathop{\mathrm{D}}_{p=2}^{\infty} \frac{1}{b_{1[p]}}, \quad r_{i(n),1} = b_{i(n),1} + \mathop{\mathrm{D}}_{p=2}^{\infty} \frac{1}{b_{i(n),1[p]}}, \quad i(n) \in \mathcal{I}^{(2)}.$$

Тому згідно з теоремою Зейделя для кожного $i(n), i(n) \in \mathcal{I}^{(2)}$, розбіжними є ряди

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_{1[p]}, \quad \sum_{p=1}^{\infty} b_{i(n),1[p]}.$$

Позначимо

$$b_0^{(1)} = b_0 + \frac{1}{r_1}, \quad b_{i(n)}^{(1)} = b_{i(n)} + \frac{1}{r_{i(n),1}}, \quad i(n) \in \mathcal{I}^{(2)}.$$

Розглянемо $(N-1)$-вимірний ГЛД спеціального вигляду

$$b_0^{(1)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=2}^{i_{k-1}} \frac{1}{b_{i(k)}^{(1)}}, \tag{2.6}$$

елементами якого є значення неперервних дробів. Покажемо, що зі збіжності ГЛД (2.1) випливає збіжність ГЛД (2.6). Тобто зі збіжності ГЛД (2.1) випливає його $\mathcal{C}_1$-фігурна збіжність. n-й підхідний дріб ГЛД (2.6), $\widetilde{f}_n$, можна записати у вигляді

$$\widetilde{f}_n = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{\widetilde{b}_{i(k)}}, \ n \ge 1,$$

де

$$\widetilde{b}_{i(k)} = \begin{cases} b_{i(k)}, \text{ якщо } k < n; \\ b_{i(k)} + \mathop{\mathrm{D}}_{p=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_{i(k),1[p]}}, \text{ якщо } k = n. \end{cases}$$

Тобто $\widetilde{f}_n$ є $\mathcal{C}_1$-фігурним підхідним дробом ГЛД (2.1).

Нехай

$$Q_{i(k)}^{(n)} = b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{1}{Q_{i(k+1)}^{(m)}},$$

$$\widetilde{Q}_{i(k)}^{(m)} = \widetilde{b}_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{1}{\widetilde{Q}_{i(k+1)}^{(m)}},$$

тоді встановимо формулу різниці двох підхідних дробів $f_n - \widetilde{f}_n$:

$$f_n - \widetilde{f}_n = b_0 + \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{Q_{i(1)}^{(n)}} - b_0 - \sum_{i_1=1}^{N} \frac{1}{\widetilde{Q}_{i(1)}^{(n)}} = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\widetilde{Q}_{i(1)}^{(n)} - Q_{i(1)}^{(n)}}{\widetilde{Q}_{i(1)}^{(n)} Q_{i(1)}^{(n)}} =$$

$$= -\sum_{i_1=1}^{N} \frac{1}{\widetilde{Q}_{i(1)}^{(n)} Q_{i(1)}^{(n)}} \cdot \left(b_{i(1)} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{1}{Q_{i(2)}^{(n)}} - b_{i(1)} - \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{1}{\widetilde{Q}_{i(2)}^{(n)}} \right) =$$

$$= (-1)^2 \sum_{i_1=1}^{N} \frac{1}{\widetilde{Q}_{i(1)}^{(n)} Q_{i(1)}^{(n)}} \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{1}{\widetilde{Q}_{i(2)}^{(n)} Q_{i(2)}^{(n)}} \left(Q_{i(2)}^{(n)} - \widetilde{Q}_{i(2)}^{(n)} \right) = \cdots =$$

$$= (-1)^n \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{i_1} \ldots \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{Q_{i(n)}^{(n)} - \widetilde{Q}_{i(n)}^{(n)}}{\prod\limits_{p=1}^{n} \widetilde{Q}_{i(p)}^{(n)} Q_{i(p)}^{(n)}} =$$

$$= (-1)^n \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{i_1} \ldots \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{b_{i(n)} - \widetilde{b}_{i(n)}}{\prod\limits_{p=1}^{n} \widetilde{Q}_{i(p)}^{(n)} Q_{i(p)}^{(n)}}.$$

Очевидно, що для кожного $i(n)$, $i(n) \in \mathcal{I}$, $b_{i(n)} - \widetilde{b}_{i(n)} < 0$.

Отже, $(-1)^{n+1} \left(f_n - \widetilde{f}_n \right) > 0$. Враховуючи цю нерівність і властивість "вилки", маємо

$$f_{2r} < \widetilde{f}_{2r} < \widetilde{f}_{2r+1} < f_{2r+1}. \tag{2.7}$$

Якщо ГЛД (2.1) збігається, то $|f_{2r} - f_{2r-1}| \to 0$, при $r \to \infty$, а отже, з нерівності (2.7) маємо, що $\left| \widetilde{f}_{2r} - \widetilde{f}_{2r-1} \right| \to 0$, при $r \to \infty$, тобто ГЛД (2.6) збігається.

Аналогічно, зі збіжності дробу (2.6) випливає збіжність усіх його залишків, зокрема, неперервних дробів

$$r_2 = b_2^{(1)} + \mathop{\mathrm{D}}_{p=2}^{\infty} \frac{1}{b_{2[p]}^{(1)}}, \quad r_{i(n),2} = b_{i(n),2}^{(1)} + \mathop{\mathrm{D}}_{p=2}^{\infty} \frac{1}{b_{i(n),2[p]}^{(1)}}, \quad i(n) \in \mathcal{I}^{(3)}.$$

Тому згідно з теоремою Зейделя розбіжними будуть ряди

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_{2[p]}^{(1)}, \sum_{p=1}^{\infty} b_{i(n),2[p]}^{(1)}, i(n) \in \mathcal{I}^{(3)},$$

Проводячи аналогічні міркування для $(N-2)$-вимірного ГЛД спеціального вигляду

$$b_0^{(2)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=3}^{i_{k-1}} \frac{1}{b_{i(k)}^{(2)}},$$

доходимо висновку, що цей дріб збігається, а, отже, збігаються його залишки і розбігаються ряди (2.4) і (2.5) де $m = 3$. Повторивши даний процес, після $(N-1)$ кроку отримаємо, що ряди

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_{m[p]}^{(m-1)}, \sum_{p=1}^{\infty} b_{i(n),m[p]}^{(m-1)}$$

є розбіжними для кожного m, $1 \le m \le N-1$, $i(n) \in \mathcal{I}^{(m+1)}$, а також неперервний дріб

$$b_0^{(N-1)} + \mathop{\mathrm{D}}_{p=1}^{\infty} \frac{1}{b_{N[p]}^{(N-1)}}$$

є збіжним, що еквівалентно, за ознакою Зейделя, розбіжності ряду $\sum\limits_{p=1}^{\infty} b_{N[p]}^{(N-1)}$. Отже, розбіжними є ряди (2.4) для кожного m, $1 \le m \le N$ є , а також ряди (2.5) для кожного m, $1 \le m \le N-1$, і кожного мультиіндексу $i(n)$, $i(n) \in \mathcal{I}^{(m+1)}$.

Достатність. Доведення того факту, що із розбіжності рядів (2.4) і (2.5) випливає збіжність ГЛД (2.1) проведемо, використовуючи метод математичної індукції по N – розмірності ГЛД (2.1).

При $N = 1$ ГЛД (2.1) вироджується у неперервний дріб з додатними елементами

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{p=1}^{\infty} \frac{1}{b_{1[p]}},$$

який збігається за теоремою Зейделя, якщо ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_{1[p]}$ є розбіжним.

При $N=2$ ГЛД з додатними елементами

$$b_0+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{1}{b_{i(k)}},\quad i(k)\in\mathcal{I},\ i_0=2,$$

збігається за теоремою 1.14, якщо ряди

$$\sum_{p=1}^{\infty}b_{1[p]},\quad \sum_{p=1}^{\infty}b_{i(n),1[p]},\ i(k)\in\mathcal{I}^{(2)},\quad \sum_{p=1}^{\infty}b_{1[p]}^{(1)}$$

є розбіжними.

Припустимо, що при кожному N, $N<l$, із розбіжності рядів (2.4) випливає збіжність ГЛД (2.1) розмірності N.

Нехай $N=l$. Дослідимо збіжність ГЛД

$$b_0+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{1}{b_{i(k)}},\quad i(k)\in\mathcal{I},\ i_0=l. \tag{2.8}$$

З того, що $\sum\limits_{p=1}^{\infty}b_{1[p]}=\infty,\sum\limits_{p=1}^{\infty}b_{i(n),1[p]}=\infty$, $i(n)\in\mathcal{I}^{(2)}$, випливає збіжність неперервних дробів

$$b_0^{(1)}=b_0+\mathop{\mathrm{D}}_{p=1}^{\infty}\frac{1}{b_{1[p]}},\quad b_{i(n)}^{(1)}=b_{i(n)}+\mathop{\mathrm{D}}_{p=1}^{\infty}\frac{1}{b_{i(n),1[p]}},\quad i(n)\in\mathcal{I}^{(2)}, \tag{2.9}$$

до значень $b_0^{(1)}$ і $b_{i(n)}^{(1)}$ відповідно. Замінивши неперервні дроби (2.9) їх значеннями, одержуємо $(l-1)$ вимірний ГЛД

$$b_0^{(1)}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=2}^{i_{k-1}}\frac{1}{b_{i(k)}^{(1)}},\quad i_0=l. \tag{2.10}$$

Оскільки ряди (2.4) при кожному m, $2\le m\le l$, є розбіжними, то за припущенням індукції збіжним є дріб (2.10). Доведемо, що при цьому дріб (2.8) є також збіжним, тобто із $\mathcal{C}_1$-фігурної збіжності ГЛД (2.8) випливає його звичайна збіжність. Для цього розглянемо різницю підхідних дробів ГЛД (2.8) і (2.10).

Позначимо r-ті підхідні дроби неперервних дробів (2.9) $b_0^{(1,r)}, b_{i(n)}^{(1,r)}$ відповідно. Тоді r-й підхідний дріб ГЛД (2.8) можна записати у вигляді

$$f_r = b_0^{(1,r)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{r} \sum_{i_k=2}^{i_{k-1}} \frac{1}{b_{i(k)}^{(1,r-k)}}.$$

За своєю структурою f_r – скінченний $(l-1)$-вимірний ГЛД спеціального вигляду.

Нехай

$$\widehat{f_r} = b_0^{(1)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{r} \sum_{i_k=2}^{i_{k-1}} \frac{1}{b_{i(k)}^{(1)}}$$

– r-й підхідний дріб ГЛД (2.10).

Згідно з лемою 2.1, із збіжності дробу (2.10) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує m, $m \in \mathbb{N}$ таке, що для довільного номера r, $r \geq 2m+1$, виконується нерівність $\left|\widehat{f_r} - g_r\right| < \varepsilon$, де

$$g_r = b_0^{(1)} + \sum_{i_1=2}^{p} \frac{1}{b_{i(1)}^{(1)} + \sum\limits_{i_2=2}^{i_1} \frac{1}{b_{i(2)}^{(1)} + \dots + \sum\limits_{i_{2m+1}=2}^{i_{2m}} \frac{1}{b_{i(2m+1)}^{(1)} + \sum\limits_{i_{2m+2}=2}^{i_{2m+1}} \frac{1}{b_{i(2m+1)}^{(1,r-2m-2)} + \dots + \sum\limits_{i_r=2}^{i_{r-1}} \frac{1}{b_{i(r)}^{(1,0)}}}}}}.$$

Враховуючи, що

$$\left|f_r - \widehat{f_r}\right| \leq |f_r - g_r| + \left|g_r - \widehat{f_r}\right|,$$

для завершення оцінки $\left|f_r - \widehat{f_r}\right|$ застосуємо лему 2.2 для правої частини цієї нерівності

$$|f_r - g_r| \leq g_r \cdot \max_{0 \leq s \leq m} \max_{i(2s+1)} \left\{ \frac{\left|b_{i(2s)}^{(1,r-2s)} - b_{i(2s)}^{(1)}\right|}{b_{i(2s)}^{(1)}}, \frac{\left|b_{i(2s+1)}^{(1,r-2s-1)} - b_{i(2s+1)}^{(1)}\right|}{b_{i(2s+1)}^{(1,n-2s-1)}} \right\}.$$

Оскільки, неперервний дріб (2.9) збігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_{i(k)}^{(1,n-k)} = b_{i(k)}^{(1)}$, $i(k) \in \mathcal{I}^{(2)}$.

Також маємо, що

$$g_r < g_1 < b_0 + \sum_{i_1=1}^{l} \frac{1}{b_{i_1}} = A.$$

Тоді виберемо r_1, $r_1 \geq 2m+2$, таке, щоб для довільного r, $r \geq r_1$, і довільного $i(2s+1)$, $i(2s+1) \in \mathcal{I}^{(2)}$, виконувалися нерівності

$$\left|\frac{b_{i(2s)}^{(1,n-2s)} - b_{i(2s)}^{(1)}}{b_{i(2s)}^{(1)}}\right| < \frac{\varepsilon}{2A}, \quad \left|\frac{b_{i(2s+1)}^{(1,n-2s-1)} - b_{i(2s+1)}^{(1)}}{b_{i(2s+1)}^{(1)}}\right| < \frac{\varepsilon}{2A}.$$

Отже,

$$|f_r - g_r| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким чином, для довільного $r, r \geq r_1$ маємо, що

$$\left|\widehat{f_r} - g_r\right| < \varepsilon.$$

Тобто із збіжності ГЛД (2.10) слідує збіжність ГЛД (2.8). ∎

2.2. Достатні умови збіжності гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду

Оскільки елементи рядів (2.4) обчислити за формулами (2.3) непросто, то доведемо ефективну достатню ознаку збіжності ГЛД (2.1).

Теорема 2.2 *ГЛД* (2.1) *є збіжним, якщо для кожного* m, $1 \leq m \leq N$, *розбігаються ряди*

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_{m[p]}, \tag{2.11}$$

і для кожного m, $1 \leq m \leq N-1$, *і кожного мультиіндексу* $i(n)$, $i(n) \in \mathcal{I}^{(m+1)}$ *розбігаються ряди*

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_{i(n),m[p]}. \tag{2.12}$$

Д о в е д е н н я. Покажемо, що із розбіжності рядів (2.11) і (2.12) слідує розбіжність рядів (2.4) і (2.5).

Нехай $m = 1$. Ряди

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_{1[p]}^{(0)}, \quad \sum_{p=1}^{\infty} b_{i(n),1[p]}^{(0)}, \quad i(n) \in \mathcal{I}^{(2)},$$

є розбіжними оскільки $b^{(0)}_{1[p]} = b_{1[p]},\ b^{(0)}_{i(n),1[p]} = b_{i(n),1[p]},\ p \geq 1$.

Таким чином, на основі теореми Зейделя збіжними є неперервні дроби, які визначені згідно з (2.3) і приймають значення $b^{(1)}_{2[p]},\ b^{(1)}_{i(n),2[p]},\ i(n) \in \mathcal{I}^{(3)}$, відповідно.

При $m = 2$ з умов теореми маємо розбіжність рядів

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_{2[p]},\ \sum_{p=1}^{\infty} b_{i(n),2[p]},\ i(n) \in \mathcal{I}^{(3)}.$$

Враховуючи позначення (2.3), отримаємо наступні співвідношення

$$b^{(1)}_{2[p]} > b^{(0)}_{2[p]} = b_{2[p]},\ b^{(1)}_{i(n),2[p]} > b^{(0)}_{i(n),2[p]} = b_{i(n),2[p]},$$

де $p = 1, 2, \dots,\ i(n) \in \mathcal{I}^{(3)}$.

Звідси, за ознакою порівняння знакододатних рядів, маємо, що розбігаються ряди

$$\sum_{p=1}^{\infty} b^{(1)}_{2[p]},\ \sum_{p=1}^{\infty} b^{(1)}_{i(n),2[p]},\ i(n) \in \mathcal{I}^{(3)}.$$

Тому згідно із теоремою Зейделя збіжними є неперервні дроби, які визначені згідно з (2.3) і приймають значення $b^{(2)}_{3[p]}, b^{(2)}_{i(n),3[p]},\ p = 1, 2, \dots,\ i(n) \in \mathcal{I}^{(4)}$.

Повторивши ці міркування для $m = 3, 4, \dots, (N-1)$, одержимо розбіжність відповідних рядів

$$\sum_{p=1}^{\infty} b^{(m-1)}_{m[p]}, \quad \sum_{p=1}^{\infty} b^{(m-1)}_{i(n),m[p]}, \quad i(n) \in \mathcal{I}^{(m+1)},$$

а також збіжність дробів, які визначені згідно з (2.3) і приймають значення $b^{(m)}_0$, $b^{(m)}_{\underline{m-1}[p]}$, $b^{(m)}_{i(n),\underline{m-1}[p]}$, $i(n) \in \mathcal{I}^{(m+2)}$, $m = 3, 4, \dots, N-1$, $b^{N-1}_{N[p]}$, $p \geq 1$, де $\underline{m-1}[p] = (\underbrace{m-1, m-1, \dots, m-1}_{p})$.

Нехай $m = N$. В такому випадку, маємо розбіжність ряду

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_{N[p]}.$$

Беручи до уваги позначення (2.3), отримаємо

$$b^{(N-1)}_{N[p]} > b^{(N-2)}_{N[p]} > \dots > b^{(1)}_{N[p]} > b^{(0)}_{N[p]} = b_{N[p]}, \quad p = 1, 2, \dots .$$

Отже, розбіжними є ряди (2.4) та (2.5), і на основі достатності теореми 2.1 ГЛД (2.1) збігається. ■

Встановимо аналог достатньої ознаки збіжності неперервних дробів, теореми Штерна для ГЛД спеціального вигляду з додатними елементами.

Теорема 2.3 (Багатровимірний аналог теореми Штерна) *ГЛД спеціального вигляду з додатними елементами*

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \tag{2.13}$$

збігається, якщо виконуються умови

а) для кожного m, $1 \le m \le N$, розбігається хоча б один із рядів

$$\begin{gathered} \sum_{s=1}^{\infty} b_{m[2s]} \frac{a_{m[1]}a_{m[3]}\cdots a_{m[2s-1]}}{a_{m[2]}a_{m[4]}\cdots a_{m[2s]}}, \\ \sum_{s=1}^{\infty} b_{m[2s+1]} \frac{a_{m[2]}a_{m[4]}\cdots a_{m[2s]}}{a_{m[1]}a_{m[3]}\cdots a_{m[2s+1]}}; \end{gathered} \tag{2.14}$$

б) для кожного m, $1 \le m \le N-1$, і кожного $i(2l)$, $i(2l) \in \mathcal{I}^{(m+1)}$ розбігається хоча б один із рядів

$$\begin{gathered} \sum_{s=1}^{\infty} b_{i(2l),m[2s]} \frac{a_{i(2l),m[1]}\cdots a_{i(2l),m[2s-1]}}{a_{i(2l),m[2]}\cdots a_{i(2l),m[2s]}}, \\ \sum_{s=1}^{\infty} b_{i(2l),m[2s+1]} \frac{a_{i(2l),m[2]}\cdots a_{i(2l),m[2s]}}{a_{i(2l),m[1]}\cdots a_{i(2l),m[2s+1]}}; \end{gathered} \tag{2.15}$$

в) для кожного m, $1 \le m \le N-1$, і кожного $i(2l+1)$, $i(2l+1) \in \mathcal{I}^{(m+1)}$ розбігається хоча б один із рядів

$$\begin{gathered} \sum_{s=1}^{\infty} b_{i(2l+1),m[2s]} \frac{a_{i(2l+1),m[1]}\cdots a_{i(2l+1),m[2s-1]}}{a_{i(2l+1),m[2]}\cdots a_{i(2l+1),m[2s]}}, \\ \sum_{s=1}^{\infty} b_{i(2l+1),m[2s+1]} \frac{a_{i(2l+1),m[2]}\cdots a_{i(2l+1),m[2s]}}{a_{i(2l+1),m[1]}\cdots a_{i(2l+1),m[2s+1]}}. \end{gathered} \tag{2.16}$$

Д о в е д е н н я. Зведемо ГЛД (2.13) до еквівалентного йому

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{d_{i(k)}}, \tag{2.17}$$

де

$$d_{i(k)} = b_{i(k)} \prod_{r=1}^{k} \left(a_{i(r)}\right)^{(-1)^{k+r+1}},\ i(k) \in \mathcal{I}.$$

Останній ГЛД збігається, якщо розбігаються ряди

$$\sum_{p=1}^{\infty} d_{m[p]},\ m = \overline{1,N}, \tag{2.18}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} d_{i(n),m[p]},\ m = \overline{1,N-1},\ i(n) \in \mathcal{I}^{(m+1)}. \tag{2.19}$$

Розглянемо детальніше елементи рядів (2.18), $d_{m[p]},\ p = 2,3,\ldots;\ m = \overline{1,N-1}$. Нехай $p = 2s,\ s \geq 1$, тоді

$$d_{m[2s]} = b_{m[2s]} \prod_{r=1}^{2s} \left(a_{m[r]}\right)^{(-1)^{2s+r+1}} = b_{m[2s]} \frac{a_{m[1]}a_{m[3]}\ldots a_{m[2s-1]}}{a_{m[2]}a_{m[4]}\ldots a_{m[2s]}},\ s \geq 1;$$

Нехай $p = 2s+1,\ s \geq 1$, тоді

$$d_{m[2s+1]} = b_{m[2s+1]} \prod_{r=1}^{2s+1} \left(a_{m[r]}\right)^{(-1)^{2s+r+2}} = b_{m[2s+1]} \frac{a_{m[2]}a_{m[4]}\ldots a_{m[2s]}}{a_{m[1]}a_{m[3]}\ldots a_{m[2s+1]}},\ s \geq 1.$$

Таким чином із розбіжності одного із рядів (2.14) випливає розбіжність рядів (2.18).

Нехай $n = 2l,\ l \geq 1$, розглянемо елементи рядів (2.19) для кожного $i(2l) \in \mathcal{I},\ s = 1,2,\ldots$. Нехай $p = 2s,\ s \geq 1$

$$d_{i(2l),m[2s]} = b_{i(2l),m[2s]} \prod_{r=1}^{2s+2l} \left(a_{i(r)}\right)^{(-1)^{2s+2l+r+1}} =$$

$$= b_{i(2l),m[2s]} \frac{a_{i(1)}a_{i(3)}\ldots a_{i(2l-1)}a_{i(2l),m[1]}\ldots a_{i(2l),m[2s-1]}}{a_{i(2)}a_{i(4)}\ldots a_{i(2l)}a_{i(2l),m[2]}\ldots a_{i(2l),m[2s]}};$$

$$d_{i(2l),m[2s+1]} = b_{i(2l),m[2s+1]} \prod_{r=1}^{2s+2l+1} \left(a_{i(r)}\right)^{(-1)^{2s+2l+r+2}} =$$

$$= b_{i(2l),m[2s+1]} \frac{a_{i(2)}a_{i(4)}\ldots a_{i(2l)}a_{i(2l),m[2]}\ldots a_{i(2l),m[2s]}}{a_{i(1)}a_{i(3)}\ldots a_{i(2l-1)}a_{i(2l),m[1]}\ldots a_{i(2l),m[2s+1]}}.$$

Аналогічно, коли $n = 2l+1,\ l \geq 1$, розглянемо елементи рядів для кожного $i(2l+1),\ i(2l+1) \in \mathcal{I},\ s = 1, 2, \ldots,$

$$d_{i(2l+1),m[2s]} = b_{i(2l+1),m[2s]} \prod_{r=1}^{2s+2l+1} \left(a_{i(r)}\right)^{(-1)^{2s+2l+r+2}} =$$

$$= b_{i(2l+1),m[2s]} \frac{a_{i(2)}a_{i(4)} \ldots a_{i(2l)}a_{i(2l+1),m[1]} \ldots a_{i(2l+1),m[2s-1]}}{a_{i(1)}a_{i(3)} \ldots a_{i(2l+1)}a_{i(2l+1),m[2]} \ldots a_{i(2l+1),m[2s]}};$$

$$d_{i(2l+1),m[2s+1]} = b_{i(2l+1),m[2s+1]} \prod_{r=1}^{2s+2l+2} \left(a_{i(r)}\right)^{(-1)^{2s+2l+r+3}} =$$

$$= b_{i(2l+1),m[2s+1]} \frac{a_{i(1)}a_{i(3)} \ldots a_{i(2l+1)}a_{i(2l+1),m[2]} \ldots a_{i(2l+1),m[2s]}}{a_{i(2)}a_{i(4)} \ldots a_{i(2l)}a_{i(2l+1),m[1]} \ldots a_{i(2l+1),m[2s+1]}}.$$

Враховуючи останні співвідношення, із розбіжності хоча б одного із рядів (2.15) для кожного $i(2l),\ i(2l) \in \mathcal{I}$ та розбіжності хоча б одного із рядів (2.16) для кожного $i(2l+1),\ i(2l+1) \in \mathcal{I}$ випливає розбіжність рядів (2.19) для кожного $m,\ 1 \leq m \leq N-1$ і кожного $i(n),\ i(n) \in \mathcal{I}^{(m+1)}$. А це, згідно з теоремою 2.2 означає збіжність ГЛД (2.17) і відповідно збіжність еквівалентного йому ГЛД (2.13). ∎

Теорема 2.4 (Багатовимірне узагальнення теореми Прінгсхайма) *ГЛД з додатними елементами* (2.13) *збігається, якщо для кожного* $m,\ 1 \leq m \leq N$, *розбігаються ряди*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{\frac{b_{m[p]}b_{m[p+1]}}{a_{m[p+1]}}}, \tag{2.20}$$

і для кожного $m,\ 1 \leq m \leq N-1$, *і кожного мультиіндексу* $i(n),\ i(n) \in \mathcal{I}^{(m+1)}$ *розбігаються ряди*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{\frac{b_{i(n),m[p]}b_{i(n),m[p+1]}}{a_{i(n),m[p+1]}}}. \tag{2.21}$$

Д о в е д е н н я. Нехай ГЛД (2.13) до еквівалентного ГЛД (2.17). Згідно з теоремою 2.2 ГЛД (2.17) збігається якщо розбігаються ряди (2.18) і (2.19). Оскільки

$$\sum_{p=1}^{r} d_{m[p]} = \frac{1}{2}\left(d_{m[1]} + d_{m[r]}\right) + \sum_{p=1}^{r-1} \frac{1}{2}\left(d_{m[p]} + d_{m[p+1]}\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(d_{m[1]}+d_{m[r]}\right)+\sum_{p=1}^{r-1}\sqrt{d_{m[p]}d_{m[p+1]}}>$$

$$>\sum_{p=1}^{r-1}\sqrt{b_{m[p]}\prod_{s=1}^{p}\left(a_{m[s]}\right)^{(-1)^{p+s-1}}b_{m[p+1]}\prod_{s=1}^{p+1}\left(a_{m[s]}\right)^{(-1)^{p+s}}}=\sum_{p=1}^{r-1}\sqrt{\frac{b_{m[p]}b_{m[p+1]}}{a_{m[p+1]}}}$$

$$r=1,2,...,\ m=\overline{1,N};$$

і аналогічно

$$\sum_{p=1}^{r}d_{i(n),m[p]}>\sum_{p=1}^{r-1}\sqrt{d_{i(n),m[p]}d_{i(n),m[p+1]}}=$$

$$=\sum_{p=1}^{r-1}(\sqrt{b_{i(n),m[p]}\prod_{s=1}^{n}\left(a_{i(s)}\right)^{(-1)^{n+p+s-1}}\prod_{s=1}^{p}\left(a_{i(n),m[s]}\right)^{(-1)^{n+p+s-1}}}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{b_{i(n),m[p+1]}\prod_{s=1}^{n}\left(a_{i(s)}\right)^{(-1)^{n+p+s}}\prod_{s=1}^{p+1}\left(a_{i(n),m[s]}\right)^{(-1)^{n+p+s}}})=$$

$$=\sum_{p=1}^{r-1}\sqrt{\frac{b_{i(n),m[p]}b_{i(n),m[p+1]}}{a_{i(n),m[p+1]}}}.$$

Якщо ряди (2.20) і (2.21) розбігаються, то на основі теореми 2.2 ГЛД (2.17) збігається, а, отже, і збіжним є і еквівалентний йому ГЛД (2.13). ∎

2.3. Представлення та дослідження гіллястого ланцюгового дробу, в який розвивається відношення лінійно-незалежних розв'язків чотиричленного рекурентного рівняння

Відомо [146,156,169], що загальний розв'язок лінійного однорідного рекурентного рівняння рівняння II порядку

$$x_n=b_nx_{n-1}+a_nx_{n-2},\quad n=1,2,\ldots,$$

де a_n, b_n, $n\geq 1$, — комплексні числа, можна подати у вигляді лінійної комбінації двох лінійно-незалежних розв'язків

$$x^{(k)}=(x_{-1}^{(k)},x_0^{(k)},x_1^{(k)},\ldots),\quad k=1,2,$$

які задовольняють початкові умови:

$$x_{-1}^{(1)} = 1,\ x_0^{(1)} = 0,\ x_{-1}^{(2)} = 0,\ x_0^{(2)} = 1$$

і які є відповідно канонічними чисельниками і канонічними знаменниками підхідних дробів неперервного дробу

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \frac{a_k}{b_k}, \tag{2.22}$$

тобто, якщо $\dfrac{A_n}{B_n}$ – n-ий підхідний дріб (2.22), то $A_n = x_n^{(1)}$, $B_n = x_n^{(2)}$, $n = -1, 0, 1, \ldots$.

Розглянемо лінійне однорідне рекурентне рівняння III порядку

$$x_n = c_n x_{n-1} + b_n x_{n-2} + a_n x_{n-3}, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{2.23}$$

де a_n, b_n, c_n, $n \geq 2$, — комплексні числа.

Нехай

$$x^{(k)} = (x_{-1}^{(k)}, x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, \ldots), \quad k = 1, 2,$$

— два розв'язки (2.23), які задовольняють початкові умови:

$$\begin{cases} x_{-1}^{(1)} = 1, & x_0^{(1)} = 0, \qquad x_1^{(1)} = b_1, \\ x_{-1}^{(2)} = 0, & x_0^{(2)} = 1, \qquad x_1^{(2)} = c_1, \end{cases} \tag{2.24}$$

де b_1, c_1 — параметри, вибираючи значення яких, отримаємо всі три лінійно-незалежні розв'язки (2.23), наприклад,

$$x^{(1)} = (1, 0, 0, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots),$$

$$x^{(2)} = (0, 1, 0, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots),$$

$$x^{(1)} = (0, 1, 1, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \ldots).$$

За аналогією з неперервним дробом (2.22), побудуємо ГЛД канонічні чисельники A_n і канонічні знаменники B_n якого збігаються із розв'язками рекурентного рівняння (2.23) при початкових умовах (2.24). Тобто

$$A_n = x_n^{(1)}, \quad B_n = x_n^{(2)}, \quad n = -1, 0, 1, \ldots,$$

причому

$$\begin{cases} A_{-1} = 1, \quad A_0 = 0, \qquad A_1 = b_1, \\ B_{-1} = 0, \quad B_0 = 1, \qquad B_1 = c_1. \end{cases} \tag{2.25}$$

Розглянемо частку $\dfrac{A_n}{B_n}$, $n \geq 1$. Якщо $n = 1$, то $\dfrac{A_1}{B_1} = \dfrac{b_1}{c_1}$. Якщо $n = 2$, то

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{c_2 A_1 + b_2 A_0 + a_2 A_{-1}}{c_2 B_1 + b_2 B_0 + a_2 B_{-1}} = \frac{c_2 b_1 + a_2}{c_1 c_2 + b_2} = \frac{b_1}{c_1 + \dfrac{b_2}{c_2}} + \frac{a_2}{b_2 + c_1 c_2}.$$

Якщо $n \geq 3$, то у співвідношенні

$$A_n = c_n A_{n-1} + b_n A_{n-2} + a_n A_{n-3}, \tag{2.26}$$

візьмемо $(n-1)$ замість n і підставимо отримане значення A_{n-1} у (2.26). Отримаємо

$$A_n = (c_{n-1} c_n + b_n) A_{n-2} + (b_{n-1} c_n + a_n) A_{n-3} + a_{n-1} c_n A_{n-4},$$

Позначимо $\gamma_{n-1}^{(n)} = c_{n-1} c_n + b_n$, $\beta_{n-1}^{(n)} = b_{n-1} c_n + a_n$, $\alpha_{n-1}^{(n)} = a_{n-1} c_n$, тоді

$$A_n = \gamma_{n-1}^{(n)} A_{n-2} + \beta_{n-1}^{(n)} A_{n-3} + \alpha_{n-1}^{(n)} A_{n-4}. \tag{2.27}$$

Далі, якщо $n \geq 4$, знаходимо A_{n-2}, взявши у (2.26) $(n-2)$ замість n, підставляємо отримане значення A_{n-2} у (2.27) і т. д.

Якщо $n \geq \nu + 2$, то після $(n - \nu)$ кроків отримаємо

$$A_n = \gamma_\nu^{(n)} A_{\nu-1} + \beta_\nu^{(n)} A_{\nu-2} + \alpha_\nu^{(n)} A_{\nu-3},$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_\nu^{(n)} &= c_\nu \gamma_{\nu+1}^{(n)} + \beta_{\nu+1}^{(n)}; \\ \beta_\nu^{(n)} &= b_\nu \gamma_{\nu+1}^{(n)} + \alpha_{\nu+1}^{(n)}; \\ \alpha_\nu^{(n)} &= a_\nu \gamma_{\nu+1}^{(n)}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

$\nu = n-1, n-2, \ldots, 2$, причому $\gamma_n^{(n)} = c_n$, $\beta_n^{(n)} = b_n$, $\alpha_n^{(n)} = a_n$.

Аналогічне співвідношення, але з урахуванням початкових умов (2.24), справджується і для B_n

$$B_n = \gamma_\nu^{(n)} B_{\nu-1} + \beta_\nu^{(n)} B_{\nu-2} + \alpha_\nu^{(n)} B_{\nu-3},$$

де $\gamma_\nu^{(n)},\ \beta_\nu^{(n)},\ \alpha_\nu^{(n)}$ визначаються згідно із (2.28).

Використовуючи позначення

$$\begin{aligned} c'_k &= c_k c_{k-1} + b_k, \quad & k &= 2, 3, \ldots, n; \\ b'_k &= b_k c_{k-2} + a_k, \quad & k &= 3, 4, \ldots, n; \\ a'_k &= a_k c_{k-3}, & k &= 4, 5, \ldots, n; \end{aligned} \tag{2.29}$$

і

$$w_j^{(n)} = \frac{\beta_j^{(n)}}{\gamma_j^{(n)}}, \quad j = \overline{1, n}; \qquad v_j^{(n)} = \frac{c_{j-2}\beta_j^{(n)} + \alpha_j^{(n)}}{\gamma_j^{(n)}}, \quad j = \overline{3, n}, \tag{2.30}$$

з урахуванням початкових умов (2.25) і співвідношень (2.28), при $\nu = 2$ отримаємо

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{\gamma_2^{(n)} A_1 + \beta_2^{(n)} A_0 + \alpha_2^{(n)} A_{-1}}{\gamma_2^{(n)} B_1 + \beta_2^{(n)} B_0 + \alpha_2^{(n)} B_{-1}} = \frac{\gamma_2^{(n)} b_1 + \alpha_2^{(n)}}{\gamma_2^{(n)} c_1 + \beta_2^{(n)}} = \frac{\beta_1^{(n)}}{\gamma_1^{(n)}} = w_1^{(n)},\ n \geq 3.$$

Використовуючи позначення (2.29) і (2.30) отримаємо

$$w_1^{(n)} = \frac{b_1}{c_1 + w_2^{(n)}} + \frac{a_2 \gamma_3^{(n)}}{c_1(c_2\gamma_3^{(n)} + \beta_3^{(n)}) + b_2\gamma_3^{(n)} + \alpha_3^{(n)}} = \frac{b_1}{c_1 + w_2^{(n)}} + \frac{a_2}{c'_2 + v_3^{(n)}}.$$

Встановимо рекурентні формули для $w_k^{(n)},\ k = \overline{2, n-2},\ n \geq 4,\ v_k^{(n)},\ k = \overline{3, n-2},\ n \geq 5$. Маємо

$$w_k^{(n)} = \frac{\beta_k^{(n)}}{\gamma_k^{(n)}} = \frac{b_k \gamma_{k+1}^{(n)} + \alpha_{k+1}^{(n)}}{c_k \gamma_{k+1}^{(n)} + \beta_{k+1}^{(n)}} =$$

$$= \frac{b_k}{c_k + w_{k+1}^{(n)}} + \frac{a_{k+1}\gamma_{k+2}^{(n)}}{c_k(c_{k+1}\gamma_{k+2}^{(n)} + \beta_{k+2}^{(n)}) + b_{k+1}\gamma_{k+2}^{(n)} + \alpha_{k+2}^{(n)}} =$$

$$= \frac{b_k}{c_k + w_{k+1}^{(n)}} + \frac{a_{k+1}}{c'_{k+1} + v_{k+2}^{(n)}}.$$

Аналогічно

$$v_k^{(n)} = \frac{c_{k-2}\beta_k^{(n)} + \alpha_k^{(n)}}{\gamma_k^{(n)}} = \frac{c_{k-2}(b_k\gamma_{k+1}^{(n)} + \alpha_{k+1}^{(n)}) + a_k\gamma_{k+1}^{(n)}}{c_k\gamma_{k+1}^{(n)} + \beta_{k+1}^{(n)}} =$$

$$= \frac{b_k}{c_k + w_{k+1}^{(n)}} + \frac{a_{k+1}\gamma_{k+2}^{(n)}}{c_k(c_{k+1}\gamma_{k+2}^{(n)} + \beta_{k+2}^{(n)}) + b_{k+1}\gamma_{k+2}^{(n)} + \alpha_{k+2}^{(n)}} =$$

$$= \frac{b'_k}{c_k + w_{k+1}^{(n)}} + \frac{c_{k-2}a_{k+1}\gamma_{k+2}^{(n)}}{c_k(c_{k+1}\gamma_{k+2}^{(n)} + \beta_{k+2}^{(n)}) + b_{k+1}\gamma_{k+2}^{(n)} + \alpha_{k+2}^{(n)}} = \frac{b'_k}{c_k + w_{k+1}^{(n)}} + \frac{a'_{k+1}}{c'_{k+1} + v_{k+2}^{(n)}}.$$

Розглянемо випадок $k = n - 1$

$$w_{n-1}^{(n)} = \frac{b_{n-1}}{c_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}} + \frac{a_n}{c'_n},\ n \geq 2, \quad v_{n-1}^{(n)} = \frac{b'_{n-1}}{c_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}} + \frac{a'_n}{c'_n},\ n \geq 4.$$

Якщо $k = n$, то

$$w_n^{(n)} = \frac{b_n}{c_n},\ n \geq 1, \quad v_n^{(n)} = \frac{b'_n}{c_n},\ n \geq 3.$$

Отже, маємо такі рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned} w_k^{(n)} &= \frac{b_k}{c_k + w_{k+1}^{(n)}} + \frac{a_{k+1}}{c'_{k+1} + v_{k+2}^{(n)}}, \quad k = \overline{1, n}; \\ v_k^{(n)} &= \frac{b'_k}{c_k + w_{k+1}^{(n)}} + \frac{a'_{k+1}}{c'_{k+1} + v_{k+2}^{(n)}}, \quad k = \overline{3, n}, \end{aligned} \tag{2.31}$$

причому $w_{n+1}^{(n)} = v_{n+1}^{(n)} = 0$, $w_{n+2}^{(n)} = v_{n+2}^{(n)} = \infty$.

Розглянемо ГЛД з двома гілками розгалуження

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{\xi_{i(k)}}{\eta_{i(k)}}, \tag{2.32}$$

де

$$\xi_1 = b_1, \xi_2 = a_2$$

і для будь-якого мультиіднексу $i(k)$, $i(k) = i_1, i_2, \ldots, i_k$, $1 \le i_p \le 2$, $p = \overline{1,k}$, $k \ge 2$

$$\xi_{i(k)} = \begin{cases} b_{i_1+i_2+\ldots+i_k}, & \text{якщо } i_{k-1} = i_k = 1; \\ b'_{i_1+i_2+\ldots+i_k}, & \text{якщо } i_{k-1} = 2,\ i_k = 1; \\ a_{i_1+i_2+\ldots+i_k}, & \text{якщо } i_{k-1} = 1,\ i_k = 2; \\ a'_{i_1+i_2+\ldots+i_k}, & \text{якщо } i_{k-1} = 2,\ i_k = 2; \end{cases} \qquad (2.33)$$

а для довільного мультиіднексу $i(k)$, $k \ge 1$

$$\eta_{i(k)} = \begin{cases} c_{i_1+i_2+\ldots+i_k}, & \text{якщо } i_k = 1; \\ c'_{i_1+i_2+\ldots+i_k}, & \text{якщо } i_k = 2; \end{cases} \qquad (2.34)$$

де a_j, b_j, c_j, $j \ge 1$, — коефіцієнти рекурентного співвідношення (2.23), a'_{j+2}, b'_{j+1}, c'_j, $j \ge 2$, визначені згідно (2.29).

Теорема 2.5 *Нехай $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $n \ge -1$, — послідовності комплексних чисел визначаються згідно з рекурентними співвідношеннями*

$$A_n = c_n A_{n-1} + b_n A_{n-2} + c_n A_{n-3}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$B_n = c_n B_{n-1} + b_n B_{n-2} + c_n B_{n-3}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

причому

$$A_{-1} = 1, \quad A_0 = 0, \quad A_1 = b_1,$$

$$B_{-1} = 0, \quad B_0 = 1, \quad B_1 = c_1,$$

де a_n, b_n, c_n, $n \ge 1$ – комплексні числа. Тоді A_n, B_n – канонічний чисельник і канонічний знаменник n-го $\mathcal{B}$-фігурного підхідного дробу $\widehat{f_n}$ ГЛД з двома гілками розгалуження (2.32), тобто $\widehat{f_n} = \dfrac{A_n}{B_n}$.

Д о в е д е н н я. Побудуємо розвинення $\dfrac{A_n}{B_n}$ у ГЛД. Використаємо рекурентні співвідношення (2.31), враховуючи, що $\dfrac{A_n}{B_n} = w_1^{(n)}$. На першому кроці отримаємо

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{b_1}{c_1 + w_2^{(n)}} + \frac{a_2}{c'_2 + v_3^{(n)}} = \frac{\xi_1}{\eta_1 + w_2^{(n)}} + \frac{\xi_2}{\eta_2 + v_3^{(n)}}.$$

Звідки $\dfrac{A_1}{B_1} = \dfrac{\xi_1}{\eta_1} = \widehat{f}_1$. Після другого кроку матимемо

$$\frac{A_n}{B_n} = \cfrac{\xi_1}{\eta_1 + \cfrac{\xi_{1,1}}{\eta_{1,1} + w_3^{(n)}} + \cfrac{\xi_{1,2}}{\eta_{1,2} + v_4^{(n)}}} + \cfrac{\xi_2}{\eta_2 + v_3^{(n)}}, \tag{2.35}$$

а після третього кроку —

$$\frac{A_n}{B_n} = \cfrac{\xi_1}{\eta_1 + \cfrac{\xi_{1,1}}{\eta_{1,1} + \cfrac{\xi_{1,1,1}}{\eta_{1,1,1} + w_4^{(n)}} + \cfrac{\xi_{1,1,2}}{\eta_{1,1,2} + v_5^{(n)}}} + \cfrac{\xi_{1,2}}{\eta_{1,2} + v_4^{(n)}}} +$$

$$+ \cfrac{\xi_2}{\eta_2 + \cfrac{\xi_{2,1}}{\eta_{2,1} + w_4^{(n)}} + \cfrac{\xi_{2,2}}{\eta_{2,2} + v_5^{(n)}}}.$$

Методом математичної індукції доведемо, що після m кроків, $1 < m < n$, отримаємо, що

$$\frac{A_n}{B_n} = \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{m} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{\xi^*_{i(k)}}{\eta^*_{i(k)}}, \tag{2.36}$$

де $\xi^*_{i(k)} = \xi_{i(k)}$, якщо $i_1 + i_2 + \ldots + i_k \le m$ або $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = m + 1$ і $i_k = 2$;

$$\eta^*_{i(k)} = \begin{cases} \eta_{i(k)}, & \text{якщо } i_1 + i_2 + \ldots + i_k \le m - 1; \\ \eta_{i(k)} + w^{(n)}_{m+1}, & \text{якщо } i_k = 1 \text{ і } i_1 + i_2 + \ldots + i_k = m; \\ \eta_{i(k)} + v^{(n)}_{m+1}, & \text{якщо } i_k = 2 \text{ і } i_1 + i_2 + \ldots + i_k = m; \\ \eta_{i(k)} + v^{(n)}_{m+2}, & \text{якщо } i_k = 2 \text{ і } i_1 + i_2 + \ldots + i_k = m + 1. \end{cases}$$

В усіх інших випадках $\dfrac{\xi^*_{i(k)}}{\eta^*_{i(k)}} = \dfrac{0}{1}$.

Нехай $m = 2$, тоді

$$\xi^*_1 = \xi_1,\ \xi^*_2 = \xi_2,\ \xi^*_{11} = \xi_{11},\ \xi^*_{12} = \xi_{12},\ \xi^*_{21} = \xi^*_{22} = 0;$$

$$\eta_1^* = \eta_1,\ \eta_2^* = \eta_2 + v_3^{(n)},\ \eta_{11}^* = \eta_{11} + w_3^{(n)},\ \eta_{21}^* = \eta_{22}^* = 1.$$

Тобто ми отримали формулу (2.35)

Зробимо наступний $(m+1)$-й крок. Нехай $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = m$, $i_k = 1$, тоді

$$\eta_{i(k)}^* = \eta_{i(k)} + w_{m+1}^{(n)} = \eta_{i(k)} + \frac{b_{m+1}}{c_{m+1} + w_{m+2}^{(n)}} + \frac{a_{m+2}}{c'_{m+2} + v_{m+3}^{(n)}}$$

або з урахуванням (2.33), (2.34)

$$\eta_{i(k)}^* = \eta_{i(k)} + \frac{\xi_{i(k),1}}{\eta_{i(k),1} + w_{m+2}^{(n)}} + \frac{\xi_{i(k),2}}{\eta_{i(k),2} + v_{m+3}^{(n)}}.$$

Якщо $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = m$, $i_k = 2$, то

$$\eta_{i(k)}^* = \eta_{i(k)} + v_{m+1}^{(n)} = \eta_{i(k)} + \frac{b'_{m+1}}{c_{m+1} + w_{m+2}^{(n)}} + \frac{a'_{m+2}}{c'_{m+2} + v_{m+3}^{(n)}}$$

$$= \eta_{i(k)} + \frac{\xi_{i(k),1}}{\eta_{i(k)1} + w_{m+2}^{(n)}} + \frac{\xi_{i(k),2}}{\eta_{i(k),2} + v_{m+3}^{(n)}}.$$

Якщо $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = m+1$, $i_k = 2$, то

$$\eta_{i(k)}^* = \eta_{i(k)} + v_{m+2}^{(n)}.$$

Отже, ми довели справедливість формули (2.36), коли замість m взято $m+1$.

Покажемо тапер, що n-й $\mathcal{B}$-фігурний підхідний дріб ГЛД (2.32) співпадає із $\dfrac{A_n}{B_n}$, $n > 1$. Покладемо $m = n-1$. Тоді, враховуючи, що $w_n^{(n)} = \dfrac{b_n}{c_n}$, $v_n^{(n)} = \dfrac{b'_n}{c_n}$, $v_{n+1}^{(n)} = 0$, отримаємо за умови $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = n-1$, що $\eta_{i(k)}^* = \eta_{i(k)} + \dfrac{\xi_{i(k),1}}{\eta_{i(k),1}}$, якщо ж $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = n$, $i_k = 2$, то $\eta_{i(k)}^* = \eta_{i(k)}$.

Отже,

$$\frac{A_n}{B_n} = \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n-1} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{\xi_{i(k)}^*}{\eta_{i(k)}^*} = \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{\xi_{i(k)}^*}{\eta_{i(k)}^*} = \widehat{f}_n,$$

оскільки

$$\frac{\xi^*_{i(k)}}{\eta^*_{i(k)}} \equiv \begin{cases} \dfrac{\xi_{i(k)}}{\eta_{i(k)}}, & \text{якщо } i_1 + i_2 + \ldots + i_k \le n; \\ \dfrac{0}{1}, & \text{якщо } i_1 + i_2 + \ldots + i_k > n. \end{cases}$$

■

Зауваження 2.1 *Враховуючи формули (2.33), (2.34) обчислення* $\xi_{i(k)}$, $\eta_{i(k)}$, *бачимо що, загалом, гіллястий ланцюговий дріб з двома гілками розгалуження не можна звести до вигляду (2.32). Отже, для обчислення канонічних чисельників, знаменників підхідних дробів з числом гілок розгалуження* $N > 1$ *ГЛД не справджуються лінійні рекурентні співвідношення.*

Нехай маємо довільний ГЛД з двома гілками розгалуження

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{\alpha_{i(k)}}{\beta_{i(k)}}. \tag{2.37}$$

Розглянемо, наприклад, другі $\mathcal{B}$-фігурні підхідні дроби ГЛД (2.32) і (2.37), $\widehat{f}_2$ та $\widehat{g}_2$ відповідно. Тоді

$$\widehat{g}_2 = \frac{\alpha_1}{\beta_1 + \dfrac{\alpha_{1,1}}{\beta_{1,1}}} + \frac{\alpha_2}{\beta_2},$$

а

$$\widehat{f}_2 = \frac{b_1}{c_1 + \dfrac{b_2}{c_2}} + \frac{a_2}{b_2 + c_1 c_2}.$$

Якщо ми покладемо $b_1 = \alpha_1,\ c_1 = \beta_1,\ a_2 = \alpha_2,\ b_2 = \alpha_{1,1},\ c_2 = \beta_{1,2}$, тоді ми отримаємо, що співвідношення $\beta_1\beta_{1,2} + \alpha_{1,1} = \beta_2$ буде виконуватися. Але β_2 довільне. Таким чином, цей випадок ілюструє справедливість вищенаведеного зауваження.

Нехай коефіцієнти рівняння (2.23) з початковими умовами (2.24) $a_n,\ n \ge 2,\ b_n,\ n \ge 1,\ c_n,\ n \ge 1,$ — додатні дійсні числа. Тоді побудований ГЛД (2.32) матиме додатні елементи. Дослідимо фігурну збіжність цього дробу.

Теорема 2.6 *ГЛД* (2.32), *елементи якого визначаються згідно з формулами* (2.33), (2.34) *з використанням позначень* (2.29), $\mathcal{B}$*-фігурно збігається, якщо виконуються умови:*

а) $a_n,\ n \geq 2,\ b_n,\ n \geq 1,\ c_n,\ n \geq 1,$ *— дійсні додатні числа;*

б) розбігається ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \mu_k, \tag{2.38}$$

де

$$\mu_k = \min_{k \leq j \leq 2k} \left\{ \frac{M_j}{R_{j+1}}, \frac{M_{j+1}}{R'_{j+2}} \right\},\ k \geq 2,$$

$$M_j = c_j c'_j c_{j+1} c'_{j+2},\ j \geq 2,\ R_j = b_j c'_{j-1} c'_{j+1} + a_{j+1} c_{j-1} c_j,\ j \geq 3,$$

$$R'_j = b'_j c'_{j-1} c'_{j+1} + a'_{j+1} c_{j-1} c_j,\ j \geq 4.$$

Д о в е д е н н я. Використовуючи теорему 3.11 [32, с. 85] покажемо, що при виконанні умов теореми ГЛД (2.32) збігається. Для цього потрібно показати, що розбігається ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \min_{i(k+1) \in \mathcal{I},\ k \geq 2} \left\{ d_{i(k+1)} \right\},$$

де $d_{i(k+1)} = \eta_{i(k)} \eta_{i(k+1)} / \xi_{i(k+1)},\ i(k+1) \in \mathcal{I},\ k \geq 2$. Зафіксуємо $i(k-1) \in \mathcal{I},\ k \geq 2$, використовуючи співввідношення (2.33),(2.34), ми отримаємо

$$d_{i(k-1),1,1} = \frac{c_j c_{j+1}}{b_{j+1}},\ d_{i(k-1),2,1} = \frac{c_{j+1} c_{j+2}}{b'_{j+2}},$$

$$d_{i(k-1),1,2} = \frac{c'_j c'_{j+2}}{a_{j+2}},\ d_{i(k-1),2,2} = \frac{c'_{j+1} c'_{j+3}}{a'_{j+3}},$$

де $j = \sum_{l=1}^{k-1} i_l + 1$. Звідси,

$$\min_{i(k+1) \in \mathcal{I},\ k \geq 2} \left\{ d_{i(k+1)} \right\} =$$

$$\min_{k \leq j \leq 2k,\ k \geq 2} \left\{ \frac{c_j c_{j+1}}{b_{j+1}}, \frac{c_{j+1} c_{j+2}}{b'_{j+2}}, \frac{c'_j c'_{j+2}}{a_{j+2}}, \frac{c'_{j+1} c'_{j+3}}{a'_{j+3}} \right\} \geq$$

$$\geq \min_{k \leq j \leq 2k,\ k \geq 2} \left\{ \frac{M_j}{R_{j+1}}, \frac{M'_{j+1}}{R'_{j+2}} \right\} = \mu_k.$$

Із (2.38) випливає, що елементи ГЛД (2.32) задовольняють умовам теореми 3.11 [32, с. 85]. Отже, ГЛД (2.32) збігається. Нарешті, за теоремою 2.2 [32, с. 48], ГЛД (2.32) $\mathcal{B}$-фігурно збігається. ■

У випадку, коли елементи рекурентного співвідношення (2.23) задовольняють додаткові вимоги, відношення його лінійно-незалежних розв'язків може бути представлене у вигляді ГЛД спеціального вигляду.

Наприклад, якщо $b_k c_{k-2} + a_k = 0,\ k \geq 3$, то ГЛД (2.32) набуде вигляду

$$\cfrac{\xi_2}{\eta_2 + \cfrac{\xi_{2,2}}{\eta_{2,2} + \cfrac{\xi_{2,2,2}}{\eta_{2,2,2} + \cfrac{\xi_{2,2,2,2}}{\eta_{2,2,2,2} + \ddots}}}} + \cfrac{\xi_1}{\eta_1 + \cfrac{\xi_{1,2}}{\eta_{1,2} + \cfrac{\xi_{1,2,2}}{\eta_{1,2,2} + \cfrac{\xi_{1,2,2,2}}{\eta_{1,2,2,2} + \ddots}}} + \cfrac{\xi_{1,1}}{\eta_{1,1} + \cfrac{\xi_{1,1,2}}{\eta_{1,1,2} + \cfrac{\xi_{1,1,2,2}}{\eta_{1,1,2,2} + \ddots}} + \cfrac{\xi_{1,1,1}}{\eta_{1,1,1} + \ddots}}}. \qquad (2.39)$$

ГЛД (2.39) має структуру двовимірного ГЛД спеціального вигляду, у якого індекси 1 і 2 у кожному мультиіндексі $i(k)$ поміняні місцями. Якщо ж, накласти вимогу $a_{2n} = b_{2n} = 0,\ n \geq 1$, або ж $a_{2n+1} = b_{2n+1} = 0,\ n \geq 1$, то ГЛД (2.32) вироджується у неперервний дріб.

Висновки до розділу 2. Цей розділ присвячений дослідженню збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з додатними елементами.

У результаті проведеного дослідження встановлено критерій збіжності для N-вимірного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду з частинними чисельниками рівними одиниці і додатними частинними знаменниками.

Оскільки, у формулюванні цього критерію використовуються числові ряди, елементами яких є значення неперервних дробів, або ж гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду меншої розмірності, то встановлено низку ефективних достатніх умов збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з додатними елементами. Зокрема, багатовимірне узагальнення теореми Прінгсхайма та багатовимірний аналог теореми Зейделя-Штерна.

У підрозділі 2.3 обґрунтовано розвинення відношення двох лінійно-незалежних розв'язків лінійного однорідного рекурентного рівняння рівняння III порядку у гіллястий ланцюговий дріб з двома гілками розгалуження. Досліджено збіжність цього дробу у випадку, коли його елементами є додатні числа. Встановлено умови, коли цей гіллястий ланцюговий дріб з двома гілками розгалуження є двовимірним гіллястим ланцюговим дробом спеціального вигляду.

Результати, наведені у цьому розділі, опубліковані в таких працях: [17, 107–110, 112].

РОЗДІЛ 3
ПАРАБОЛІЧНІ МНОЖИНИ УМОВНОЇ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

3.1. Багатовимірні аналоги параболічних теорем

Розглянемо ГЛД спеціального вигляду з комплексними елементами

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}. \tag{3.1}$$

Лема 3.1 *Послідовність непорожніх множин* $\left\{V_{i(k)}\right\}_{i(k)\in\mathcal{I}}$, $\left\{\Omega_{i(k)}\right\}_{i(k)\in\mathcal{I}}$, *де*

$$V_{i(k)}=\left\{z\in\mathbb{C}:\Re\left(ze^{-i\psi_k}\right)\geq -p_{i(k)}\right\},\ p_{i(k)}>0,$$

$$\Omega_{i(k)}=\left\{(a,b)\in\mathbb{C}^2:|a|-\Re\left(ae^{-i(\psi_k+\psi_{k+1})}\right)\leq 2p_{i(k)}\left(\Re\left(be^{i\psi_{k+1}}\right)-p^*_{i(k)}\right)\right\}, \tag{3.2}$$

$p^*_{i(k)}=\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k}p_{i(k+1)}$, $-\dfrac{\pi}{2}<\psi_k<\dfrac{\pi}{2}$, $k=1,2,\ldots$, *є послідовностями множин значень та множин елементів ГЛД* (3.1), *відповідно.*

Д о в е д е н н я. Проводиться за схемою запропонованою в роботах [32, 146]. Потрібно показати, що для довільго алемента $(a,b)\in\Omega_{i(k)}$ виконується включення

$$\frac{a}{b+\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k}V_{i(k+1)}}\subseteq V_{i(k)},\ i(k)\in\mathcal{I}. \tag{3.3}$$

Для виконання умови (3.2) необхідно, щоб частинні знаменники задовольняли співвідношення

$$\Re\left(b_{i(k)}e^{i\psi_{k+1}}\right)\geq p^*_{i(k)},\ i(k)\in\mathcal{I}.$$

Нехай при деякому $i(k),\ i(k)\in\mathcal{I}$,

$$\Re\left(b_{i(k)}e^{i\psi_{k+1}}\right)=p^*_{i(k)}. \tag{3.4}$$

Якщо $v \in \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} V_{i(k+1)}$, то $\dfrac{a}{b+v}$ належить півплощині

$$H = \left\{ w \in \mathbb{C} : \Re \left(w e^{i(\psi_{k+1} - \arg a_{i(k)})} \right) \geq 0 \right\}.$$

У випадку виконання умови (3.4) множина (3.2) є непорожньою, коли $\arg a_{i(k)} = \psi_k + \psi_{k+1}$. Виконання останньої рівності з урахуванням того, що $\dfrac{a}{b+v} \in H$, гарантує виконання включення (3.3).

Нехай при деякому $i(k),\ i(k) \in \mathcal{I}$,

$$\Re \left(b_{i(k)} e^{i\psi_{k+1}} \right) > p^*_{i(k)}.$$

Якщо $v \in \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} V_{i(k+1)}$, то $\dfrac{a}{b+v}$ належить кругу

$$K_{i(k)} = \left\{ w \in \mathbb{C} : \left| w - \frac{a e^{-i\psi_{k+1}}}{2\left(\Re \left(b e^{i\psi_{k+1}} \right) - p^*_{i(k)} \right)} \right| \leq \frac{|a|}{2\left(\Re \left(b e^{i\psi_{k+1}} \right) - p^*_{i(k)} \right)} \right\}.$$

Для того, щоб виконувалися співвідношення (3.3), потрібно, щоб $K_{i(k)} \subseteq V_{i(k)}$. Це матеме місце, якщо відстань від центра круга $K_{i(k)}$ до межі $\partial V_{i(k)}$ півплощини $V_{i(k)}$,

$$\Delta_{i(k)} = \rho_{i(k)} \cos \left(\arg a - \psi_{k+1} - \psi_k \right) + p_{i(k)},$$

буде меншою, ніж радіус $\rho_{i(k)}$ круга, тобто має виконуватися нерівність $\Delta_{i(k)} \geq \rho_{i(k)}$, яка еквівалентна тому, що $(a, b) \in \Omega_{i(k)}$. ■

Якщо у дробі (3.1) елементи $a_{i(k)} \in \mathbb{C}$, $b_{i(k)} \in \mathbb{R}_+,\ i(k) \in \mathcal{I}$, а $\psi_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots$, то отримаємо наступний наслідок.

Наслідок 3.1 *Послідовність непорожніх множин* $\left\{ V_{i(k)} \right\}_{i(k) \in \mathcal{I}}$, $\left\{ \Omega_{i(k)} \right\}_{i(k) \in \mathcal{I}}$, *де*

$$V_{i(k)} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \Re (z) \geq -p_{i(k)} \right\},\ p_{i(k)} > 0, \tag{3.5}$$

$$\Omega_{i(k)} = \left\{ (a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+ : |a| - \Re (a) \leq 2 p_{i(k)} \left(b - p^*_{i(k)} \right) \right\}, \tag{3.6}$$

$p^*_{i(k)} = \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k} p_{i(k+1)}$, *є послідовностями множин значень та множин елементів ГЛД* (3.1), *відповідно.*

Встановимо параболічні області збіжності для ГЛД спеціального вигляду

$$\left(b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right)^{-1}, \tag{3.7}$$

де $b_0, b_{i(k)}, a_{i(k)} \in \mathbb{C}$, $i(k) \in \mathcal{I}$.

Теорема 3.1 *Нехай* $b_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$,*— фіксовані частинні знаменники ГЛД* (3.7), *які належать множинам*

$$\mathcal{B}_{i(k)} = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq p^*_{i(k)}\right\},\ p^*_{i(k)} = \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} p_{i(k+1)},\ p_{i(k)} > 0,\ i(k) \in \mathcal{I}.$$

Нехай при цьому частинні чисельники $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, *цього дробу належать параболічним множинам*

$$\mathcal{P}_{i(k)}(\varepsilon) = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| - \Re\left(ze^{-i(\arg b_{i(k)} + \arg b_{i(k-1)})}\right) \leq 2p_{i(k)}(1-\varepsilon)\left(\left|b_{i(k)}\right| - p^*_{i(k)}\right)\right\}, \tag{3.8}$$

де ε *— довільне мале дійсне число* $(0 < \varepsilon < 1)$, *і, крім того,* $a_{i(k)} \neq 0$, $i(k) \in \mathcal{I}$.

Тоді

1) існують скінченні границі парних і непарних підхідних дробів ГЛД (3.7);

2) ГЛД (3.7) *збігається, якщо для кожного* $m, 1 \leq m \leq N$, *розбігаються ряди*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{\left|\frac{b_{m[p]} b_{m[p+1]}}{a_{m[p+1]}}\right|}, \tag{3.9}$$

а також для кожного $m, 1 \leq m \leq N-1$, *і кожного* $i(n)$, $i(n) \in \mathcal{I}^{(m+1)}$ *розбігаються ряди*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{\left|\frac{b_{i(n),m[p]} b_{i(n),m[p+1]}}{a_{i(n),m[p+1]}}\right|}; \tag{3.10}$$

3) всі підхідні дроби ГЛД (3.7) належать півплощині

$$H = \{w \in \mathbb{C} : Re\,(w) \geq 0\}\,,$$

якщо $\Re\,(b_0) = \sum\limits_{i_1=1}^{N} p_{i(1)}$, *або кругу*

$$K = \left\{ w \in \mathbb{C} : \left| w - \frac{1}{2}\left(\Re\,(b_0) - \sum_{i_1=1}^{N} p_{i(1)}\right)^{-1} \right| \leq \frac{1}{2}\left(\Re\,(b_0) - \sum_{i_1=1}^{N} p_{i(1)}\right)^{-1} \right\},$$

якщо $\Re\,(b_0) > \sum\limits_{i_1=1}^{N} p_{i(1)}$.

Д о в е д е н н я. З допомогою еквівалентних перетворень, де $\rho_{i(k)} = e^{-i \arg b_{i(k)}}$ ГЛД (3.7) зведемо до еквівалентного ГЛД

$$\left(b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{\tilde{a}_{i(k)}}{\tilde{b}_{i(k)}} \right)^{-1}, \tag{3.11}$$

де $\tilde{a}_{i(k)} = a_{i(k)} e^{-i(\arg b_{i(k)} + \arg b_{i(k-1)})}$, $\tilde{b}_{i(k)} = \left|b_{i(k)}\right|$, $i(k) \in \mathcal{I}$.

Враховуючи співвідношення (3.8), отримаємо, що частинні чисельники ГЛД (3.11) належать параболічним множинам

$$P_{i(k)}(\varepsilon) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| - \Re\,(z) \leq 2p_{i(k)}\,(1-\varepsilon)\left(\tilde{b}_{i(k)} - p^*_{i(k)}\right) \right\},\ i(k) \in \mathcal{I}.$$

Нехай $\tilde{a}_{i(k)} = \left|\tilde{a}_{i(k)}\right| e^{i\alpha_{i(k)}}$, де $\alpha_{i(k)} = \arg \tilde{a}_{i(k)}$. Означимо функції

$$\tilde{a}_{i(k)}(z) = \left|\tilde{a}_{i(k)}\right| e^{i\alpha_{i(k)} z},\ i(k) \in \mathcal{I},$$

в області

$$G_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\Im(z)| < \delta,\ |\Re\,(z)| < 1 + \delta\}\,,$$

де δ – довільне дійсне число таке, що $(1+\delta)^2 e^{\pi\delta} < (1-\varepsilon)^{-1}$.

Використовуючи методику, запропоновану у [32], можна показати, що $\tilde{a}_{i(k)}(z) \in P_{i(k)}\,(0)\,,\ i(k) \in \mathcal{I}$.

Розглянемо функціональний ГЛД

$$\left(b_0+\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{\tilde{a}_{i(k)}(z)}{\tilde{b}_{i(k)}}\right)^{-1}. \qquad (3.12)$$

Використовуючи наслідок 3.1, а також властивості дробово-лінійних відображень, отримаємо, що значення підхідних дробів ГЛД оберненого до (3.12), лежать у півплощині

$$V=\left\{z\in\mathbb{C}:\Re\left(z\right)>\Re(b_0)-\sum_{i_1=1}^{N}p_{i(1)}\right\}.$$

Тому значення підхідних дробів ГЛД (3.12) належать області

$$K=\left\{w\in\mathbb{C}:\left|w-\frac{1}{2}\left(\Re\left(b_0\right)-\sum_{i_1=1}^{N}p_{i(1)}\right)^{-1}\right|<\frac{1}{2}\left(\Re\left(b_0\right)-\sum_{i_1=1}^{N}p_{i(1)}\right)^{-1}\right\}.$$

Нехай $f_n(z)$ – n-та апроксиманта ГЛД (3.12), $n=1,2,\ldots$. Очевидно, що $f_n(z)$ – голоморфна функція в області G_δ. Для функціональної послідовності $\{f_n(z)\}$ справджуються умови теореми 1.17, де, наприклад, $a=-1$, $b=-2$.

Візьмемо $\Delta=\{z\in\mathbb{C}\,:\,\Re\left(z\right)=0,\ |\Im\left(z\right)|<\delta\}$.

Тоді при $z\in\Delta$ ГЛД (3.12) набуде вигляду

$$\left(b_0+\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{a'_{i(k)}}{\tilde{b}_{i(k)}}\right)^{-1}. \qquad (3.13)$$

де

$$a'_{i(k)}=\left|\tilde{a}_{i(k)}\right|e^{-\Im(z)\alpha_{i(k)}},\ i(k)\in\mathcal{I}.$$

Із розбіжності рядів (3.9) для кожного $m, 1\le m\le N$, і (3.10) для кожного $m, 1\le m\le N-1$, і кожного $i(n),\ i(n)\in\mathcal{I}^{(m+1)}$, випливає розбіжність рядів

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sqrt{\left|\frac{b_{m[p]}b_{m[p+1]}}{a_{m[p+1]}}\right|}e^{\alpha_{m[p]}\Im(z)/2},\ 1\le m\le N,$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sqrt{\left|\frac{b_{i(n),m[p]}b_{i(n),m[p+1]}}{a_{i(n),m[p+1]}}\right|}e^{\alpha_{i(n),m[p]}\Im(z)/2},\ 1\le m\le N-1,\ i(n)\in\mathcal{I}^{(m+1)}.$$

А це, згідно з теоремою 2.4, означає, що ГЛД обернений до (3.13) є збіжним, а, отже, збіжним буде також ГЛД (3.13) при $z \in \Delta$.

Таким чином, згідно з теоремою 1.17, ГЛД (3.12) збігається на кожному компакті області G_δ, зокрема, на компакті $\{1\}$, що є рівносильно збіжності ГЛД (3.11), а, отже, ГЛД (3.7).

Враховуючи властивість монотонності підхідних дробів ГЛД з додатними елементами, одержуємо, що завжди існують скінченні границі парних і непарних підхідних дробів ГЛД (3.13). А використавши теорему 1.17 переконуємося у тому, що парні і непарні підхідні дроби ГЛД (3.7), мають скінченні границі. ∎

Зауваження 3.1 *Умова* $a_{i(k)} \neq 0,\ i(k) \in \mathcal{I}$, *може бути опущена, бо якщо існує мультиіндекс* $i(k)$ *такий, що* $a_{i(k)} = 0$, *то відповідна гілка багатовимірного дробу обривається і ряди, в мультиіндекси елементів яких входить* $i(k)$, *до уваги не беруться.*

Теорема 3.1 є певним аналогом теореми 3.22 [32] переформульованої для гіллястих ланцюгосих дробів спеціального вигляду.

Теорема 3.2 *Нехай* $b_{i(k)},\ i(k) \in \mathcal{I}$, *— фіксовані частинні знаменники ГЛД* (3.7), *які належать множинам*

$$\mathcal{B}_{i(k)} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \geq p^*_{i(k)} \right\},\ p^*_{i(k)} = \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} p_{i(k+1)},\ p_{i(k)} > 0,\ i(k) \in \mathcal{I}.$$

Нехай при цьому частинні чисельники $a_{i(k)},\ i(k) \in \mathcal{I}$, *цього дробу належать параболічним множинам*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{i(k)}(\varepsilon, \gamma) = \Big\{ z \in \mathbb{C} : |z| - \Re\left(z e^{-i(\arg b_{i(k)} + \arg b_{i(k-1)} + 2\gamma)} \right) \leq \\ \leq 2 p_{i(k)} \cos^2 \gamma \, (1 - \varepsilon) \left(\left| b_{i(k)} \right| - p^*_{i(k)} \right) \Big\}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

де ε *— довільне мале дійсне число* $(0 < \varepsilon < 1)$, $|\gamma| < \dfrac{\pi}{2}$, *і, крім того,* $a_{i(k)} \neq 0$, $i(k) \in \mathcal{I}$.

Тоді

1) існують скінченні границі парних і непарних підхідних дробів ГЛД (3.7);

2) ГЛД (3.7) збігається, якщо для кожного $m, 1 \leq m \leq N$, розбігаються ряди (3.9), а також для кожного $m, 1 \leq m \leq N-1$, і кожного $i(n),\ i(n) \in \mathcal{I}^{(m+1)}$ розбігаються ряди (3.10);

3) всі підхідні дроби ГЛД (3.7) належать півплощині

$$H(\gamma) = \left\{ w \in \mathbb{C} : Re\left(we^{i\gamma}\right) \geq 0 \right\}, \tag{3.15}$$

якщо $A(\gamma) = 0$, або кругу

$$K(\gamma) = \left\{ w \in \mathbb{C} : \left| w - \frac{e^{-i\gamma}}{2A(\gamma)} \right| \leq \frac{1}{2A(\gamma)} \right\}, \tag{3.16}$$

якщо $A(\gamma) > 0$, де

$$A(\gamma) = \Re\left(b_0 e^{-i\gamma}\right) - \sum_{i_1=1}^{N} p_{i(1)} \cos\gamma. \tag{3.17}$$

Доведення. З допомогою еквівалентних перетворень ГЛД (3.7) зведемо до еквівалентного ГЛД (3.11). Враховуючи співвідношення (3.14), отримуємо, що частинні чисельники ГЛД (3.11) належать параболічним множинам

$$P_{i(k)}(\varepsilon, \gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| - \Re\left(ze^{-i2\gamma}\right) \leq \right.$$

$$\left. \leq 2p_{i(k)} \cos^2\gamma \,(1-\varepsilon)\left(\tilde{b}_{i(k)} - p^*_{i(k)}\right)\right\},$$

Покажемо, що при відображенні $z = \left(we^{i\gamma}\right)^2$ область $P_{i(k)}(\varepsilon, \gamma)$ перейде у смугу

$$G_{i(k)}(\varepsilon, \gamma) = \left\{ w \in \mathbb{C} : |\Im(w)| \leq \sqrt{(1-\varepsilon) p_{i(k)}\left(\tilde{b}_{i(k)} - p^*_{i(k)}\right)} \cos\gamma \right\}. \tag{3.18}$$

Дійсно, нехай $z \in P_{i(k)}(\varepsilon, \gamma)$, тоді

$$|z| - \Re\left(ze^{-2i\gamma}\right) = \left|\left(we^{i\gamma}\right)^2\right| - \Re\left(\left(we^{i\gamma}\right)^2 e^{-2i\gamma}\right) =$$

$$= \left|w^2\right| - \Re\left(w^2\right) = 2\left(\Im(w)\right)^2 \leq 2p_{i(k)} \cos^2\gamma\,(1-\varepsilon)\left(\tilde{b}_{i(k)} - p^*_{i(k)}\right).$$

ГЛД (3.11) запишемо у вигляді

$$\left(b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{\left(c_{i(k)} e^{i\gamma}\right)^2}{\tilde{b}_{i(k)}}\right)^{-1}, \tag{3.19}$$

тобто покладемо $\tilde{a}_{i(k)} = \left(c_{i(k)} e^{i\gamma}\right)^2$. Якщо $\tilde{a}_{i(k)} \in P_{i(k)}(\varepsilon, \gamma)$, то $c_{i(k)} \in G_{i(k)}(\varepsilon, \gamma)$.

Кожен елемент $c_{i(k)}$ ГЛД (3.19), що належить області (3.18) можна однозначно представити у вигляді $c_{i(k)} = s_{i(k)} + i d_{i(k)} e^{i\gamma}$, де $d_{i(k)}, s_{i(k)} \in \mathbb{R}$.

Із умови $c_{i(k)} \in G_{i(k)}(\varepsilon, \gamma)$ випливає, що

$$\left|d_{i(k)}\right| \leq \sqrt{(1-\varepsilon) p_{i(k)} \left(\tilde{b}_{i(k)} - p^*_{i(k)}\right)}.$$

Зафіксуємо γ, $|\gamma| < \dfrac{\pi}{2}$. Нехай δ — дійсне додатне число $(0 < \delta < 1)$ таке, що $|\gamma \pm \delta| < \dfrac{\pi}{2}$. В області

$$S(\delta, \gamma) = \{z \in \mathbb{C} : 1 - \delta < |z| < 1 + \delta,\ -\gamma - \delta < \arg z < \delta\}, \text{ якщо } \gamma \geq 0,$$

або

$$S(\delta, \gamma) = \{z \in \mathbb{C} : 1 - \delta < |z| < 1 + \delta,\ -\delta < \arg z < -\gamma + \delta\}, \text{ якщо } \gamma < 0,$$

визначимо функції

$$c_{i(k)}(z) = s_{i(k)} + i d_{i(k)} e^{i\gamma} z,\ i(k) \in \mathcal{I}.$$

Очевидно, що $c_{i(k)} \in G_{i(k)}(\varepsilon, \gamma^*)$, де $\gamma^* = \gamma + \arg z$ і $|\gamma^*| < \dfrac{\pi}{2}$.

Враховуючи лему 3.1 і позначення (3.17), переконуємося, що область значень дробу, оберненого до (3.19), належить півплощині

$$V = \left\{z \in \mathbb{C} : \Re\left(z e^{-i\gamma^*}\right) > A(\gamma^*)\right\}.$$

Звідси слідує, що областю значень ГЛД (3.19), є півплощина $H(\gamma^*)$, визначена згідно (3.15), якщо $A(\gamma^*) > 0$, або круг $K(\gamma^*)$, визначений згідно (3.16), якщо $A(\gamma^*) > 0$.

Позначимо $f_n(z) - n$-ту апроксиманту ГЛД (3.18), $n = 1, 2, \ldots$. Для послідовності $\{f_n(z)\}$ голоморфних в області $S(\delta, \gamma)$ функцій, виконуються умови теореми Стільтьєса – Віталі (теорема 1.17), де, наприклад, $a = -1$, $b = -2$ і

$$\Delta = \{z \in S(\delta, \gamma) : \arg z = -\gamma\}.$$

Якщо $z \in \Delta$, то $c_{i(k)}(z) \in G_{i(k)}(\varepsilon, 0)$, тоді отримаємо, що

$$\left(\left(c_{i(k)}(z)\, e^{i\gamma}\right)^2, \tilde{b}_{i(k)}\right) \in P_{i(k)}(\varepsilon, 0).$$

В такому випадку ГЛД

$$\left(b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{\left(c_{i(k)}(z)\, e^{i\gamma}\right)^2}{\tilde{b}_i(k)}\right)^{-1} \tag{3.20}$$

є збіжним за теоремою 3.1. Звідси, дріб (3.20) збігається на будь-якому компакті області $S(\delta, \gamma)$, зокрема, на компакті, що містить лише одну точку $z = 1$. Це рівносильно збіжності ГЛД (3.7).

Пункт 1) доводиться аналогічно відповідного пункту теореми 3.1. ■

Поклавши $b_{i(k)} = 1$, $i(k) \in \mathcal{I}$, $p_{i(2s)} = \dfrac{1-d}{i_{2s-1}}$, $p_{i(2s-1)} = \dfrac{d}{i_{2s-2}}$, $i(2s-1), i(2s) \in \mathcal{I}$, $s = 1, 2, \ldots$, $i_0 = N$, $0 < d < 1$, можна отримати багатовимірний аналог теореми Трона про спарені параболічні множини збіжності неперервних дробів (теорема 1.9).

Наслідок 3.2 *Нехай елементи ГЛД*

$$\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1}$$

належать параболічним областям, тобто $a_{i(k)} \in \mathcal{P}_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, *де*

$$\mathcal{P}_{i(k)}(\varepsilon) = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| - \Re\left(ze^{-2i\gamma}\right) \le \frac{2D_k^2 (1-\varepsilon)}{i_{k-1}} \cos^2 \gamma\right\},$$

де $D_{2s} = (1-d)^2, D_{2s-1} = d^2$, $0 < d < 1, s = 1, 2, \ldots;$ ε *– довільне мале дійсне число* $(0 < \varepsilon < 1)$.

Тоді

1) існують скінченні границі парних і непарних підхідних дробів ГЛД (3.7)*;*

2) ГЛД (3.7) *збігається, якщо для кожного* $m, 1 \leq m \leq N$*, розбігаються ряди*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{\left|a_{m[p+1]}\right|^{-1}},$$

а також для кожного $m, 1 \leq m \leq N-1$*, і кожного* $i(n),\ i(n) \in \mathcal{I}^{(m+1)}$ *розбігаються ряди*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{\left|a_{i(n),m[p+1]}\right|^{-1}};$$

;

3) областю значень цього дробу є круг

$$K = \left\{ w \in \mathbb{C} : \left| w - \frac{e^{-i\gamma}}{2\,(1-d)\cos\gamma} \right| \leq \frac{1}{2\,(1-d)\cos\gamma} \right\}.$$

3.2. Двовимірне узагальнення теореми Трона – Джоунса про параболічні множини збіжності неперервних дробів

Розглянемо двовимірний гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду $(i_0 = 2)$

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \tag{3.21}$$

де $a_{i(k)},\ b_{i(k)} \in \mathbb{C},\ i(k) \in \mathcal{I}$. Встановимо аналог теореми Трона і Джоунса для таких дробів. Спочатку сформулюємо допоміжні твердження, які використовуються при доведенні теореми.

Лема 3.2 *Нехай*

$$P = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| - \Re\left(z e^{-i(\beta_1+\beta_2)} \right) \leq 2s_1 \left(\cos\beta_2 - s_2\right) \right\}$$

— параболічна множина, де $\beta_1,\ \beta_2$ *— дійсні числа,* $s_1,\ s_2$ *— додатні числа, такі, що*

$$\cos\beta_k \geq s_k,\ k = 1, 2, \tag{3.22}$$

і нехай

$$V' = \left\{ z \in \mathbb{C} : \Re\left(ze^{-i\beta_1}\right) > -s_1 \right\},$$

$$V'' = \left\{ z \in \mathbb{C} : \Re\left(ze^{-i\beta_2}\right) \geq -\cos\beta_2 + s_2 \right\}$$

— півплощини. Тоді справджуються включення:

$$P \subset V', \; P \subset V''.$$

Д о в е д е н н я. Доведемо включення $P \subset V'$. Нехай

$$H' = \left\{ z \in \mathbb{C} : \Re\left(ze^{-i\beta_1}\right) \geq 0 \right\}.$$

Очевидно, що

$$P = \left(P \cap H'\right) \cup \left(P \setminus H'\right).$$

Для того, щоб довести, що $P \subset V'$, достатньо показати, що виконуються включення:

$$P \cap H' \subset V' \quad \text{і} \quad P \setminus H' \subset V'.$$

Перше включення очевидне, оскільки $H' \subset V'$. Для доведення другого включення запишемо у полярній системі координат рівняння частини параболи, що належить межі множини $P \setminus H'$

$$\rho = \frac{2s_1\left(\cos\beta_2 - s_2\right)}{1 - \cos(\varphi - \beta_1 - \beta_2)}, \; \frac{\pi}{2} + \beta_1 < \varphi < \frac{3\pi}{2} + \beta_1.$$

Рівняння прямої, що є межею множини V', в полярній системі координат має вигляд

$$\rho = \frac{-s_1}{\cos(\varphi - \beta_1)}, \; \frac{\pi}{2} + \beta_1 < \varphi < \frac{3\pi}{2} + \beta_1.$$

При кожному фіксованому φ, $\frac{\pi}{2} + \beta_1 < \varphi < \frac{3\pi}{2} + \beta_1$, різниця радіус-векторів точок вищезгаданих прямої і параболи є додатною. Справді,

$$-\frac{s_1}{\cos(\varphi - \beta_1)} - \frac{2s_1\left(\cos\beta_2 - s_2\right)}{1 - \cos(\varphi - \beta_1 - \beta_2)} =$$

$$= -s_1 \cdot \frac{1 - \cos(\varphi - \beta_1 - \beta_2) + 2\cos\beta_2\cos(\varphi - \beta_1)}{\cos(\varphi - \beta_1)\left(1 + \cos(\varphi - \beta_1 - \beta_2)\right)} + \frac{2s_1s_2}{1 - \cos(\varphi - \beta_1 - \beta_2)} \geq$$

$$\geq \frac{-s_1}{\cos(\varphi-\beta_1)} \cdot \frac{1+\cos\left(\varphi-\beta_1+\beta_2\right)}{1-\cos(\varphi-\beta_1-\beta_2)} + s_1 s_2 \geq s_1 s_2 > 0,$$

оскільки $\frac{\pi}{2} < \varphi - \beta_1 < \frac{3\pi}{2}$ і $\varphi - \beta_1 \neq \beta_2$, бо, з урахуванням умов леми (3.22), $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \beta_2 < \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Отже, виконується включення $P \setminus H' \subset V'$ і тому $P \subset V'$.

Аналогічно доведемо, що $P \subset V''$. Означивши множину

$$H'' = \left\{ z \in \mathbb{C} : \Re\left(ze^{-i\beta_2}\right) \geq 0 \right\}$$

і врахувавши, що

$$P = \left(P \cap H''\right) \cup \left(P \setminus H''\right),$$

покажемо виконання включень

$$P \cap H'' \subset V'' \quad \text{і} \quad P \setminus H'' \subset V''.$$

Із співвідношення $H'' \subset V''$ слідує, що $P \cap H'' \subset V''$.

Повторюючи наведені вище міркування, запишемо рівняння частини параболи, що є межею множини $P \setminus H''$

$$\rho = \frac{2s_1\left(\cos\beta_2 - s_2\right)}{1-\cos(\varphi-\beta_1-\beta_2)},\ \frac{\pi}{2}+\beta_2 < \varphi < \frac{3\pi}{2}+\beta_2,$$

і рівняння межі множини V''

$$\rho = \frac{-\cos\beta_2 + s_2}{\cos(\varphi-\beta_2)},\ \frac{\pi}{2}+\beta_2 < \varphi < \frac{3\pi}{2}+\beta_2.$$

Для доведення включення $P \setminus H'' \subset V''$ покажемо при кожному фіксованому φ, $\frac{\pi}{2}+\beta_2 < \varphi < \frac{3\pi}{2}+\beta_2$, різниця радіус-векторів точок прямої і параболи є невід'ємною:

$$-\frac{\cos\beta_2 - s_2}{\cos(\varphi-\beta_2)} - \frac{2s_1\left(\cos\beta_2 - s_2\right)}{1-\cos(\varphi-\beta_1-\beta_2)} =$$

$$= -\left(\cos\beta_2 - s_2\right)\frac{1-\cos(\varphi-\beta_1-\beta_2)+2s_1\cos(\varphi-\beta_2)}{\cos(\varphi-\beta_2)\left(1-\cos(\varphi-\beta_1-\beta_2)\right)} \geq$$

$$\geq -\frac{\cos\beta_2 - s_2}{\cos(\varphi-\beta_2)} \cdot \frac{1+\cos\left(\varphi-\beta_2+\beta_1\right)}{1-\cos(\varphi-\beta_1-\beta_2)} \geq 0,$$

оскільки $\dfrac{\pi}{2} < \varphi - \beta_2 < \dfrac{3\pi}{2}$ і $\varphi - \beta_2 \neq \beta_1$, бо з урахуванням умов леми (3.22), $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k < \beta_1 < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Таким чином, $P \subset V''$. ■

Лема 3.3 *Нехай елементи неперервного дробу*

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \tag{3.23}$$

задовольняють умови:

$$|a_n| - \Re\left(a_n e^{-i(\phi_n + \phi_{n-1})}\right) \leq 2q_{n-1}\left(\Re\left(b_n e^{-i\phi_n}\right) - q_n\right),\ n = 1, 2, \ldots, \tag{3.24}$$

де ϕ_n – дійсні числа, q_n – деякі додатні сталі такі, що послідовність

$$\left\{\frac{a_n}{q_n q_{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{3.25}$$

обмежена. Тоді для довільного $\varepsilon,\ \varepsilon > 0$, існує $n_0,\ n_0 \in \mathbb{N}$, таке, що для довільного $n,\ n \geq n_0$, і довільного b^*_{n+1} такого, що

$$|a_{n+1}| - \Re\left(a_{n+1} e^{-i(\phi_n + \phi_{n+1})}\right) \leq 2q_n\left(\Re\left(b^*_{n+1} e^{-i\phi_{n+1}}\right) - q_{n+1}\right), \tag{3.26}$$

виконується нерівність

$$|f_n - f^*_{n+1}| < \varepsilon,$$

де

$$f_n = \frac{a_1}{b_1} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{a_2}{b_2} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \cdots \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{a_n}{b_n},$$

$$f^*_{n+1} = \frac{a_1}{b_1} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{a_2}{b_2} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \cdots \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{a_n}{b_n} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{a_{n+1}}{b^*_{n+1}}.$$

Д о в е д е н н я. Із умов леми випливає, що $\Re\left(b_n e^{-i\phi_n}\right) \geq q_n,\ n = 1, 2, \ldots$. Позначимо через $A_n,\ B_n$ та $A^*_{n+1},\ B^*_{n+1}$ канонічні чисельники та знаменники підхідних дробів f_n і f^*_{n+1} відповідно. Тоді для довільних $n,\ n \geq 2$, маємо

$$f_n - f^*_{n+1} = \frac{A_n}{B_n} - \frac{A^*_{n+1}}{B^*_{n+1}} = \frac{A_n}{B_n} - \frac{b^*_{n+1}A_n + a_{n+1}A_{n-1}}{b^*_{n+1}B_n + a_{n+1}B_{n-1}} =$$

$$= \frac{a_{n+1}B_{n-1}A_n - a_{n+1}A_{n-1}B_n}{\left(b^*_{n+1}B_n + a_{n+1}B_{n-1}\right)B_n} = \frac{B_{n-1}A_n - A_{n-1}B_n}{B_{n-1}B_n} \cdot \frac{1}{\dfrac{b^*_{n+1}B_n + a_{n+1}B_{n-1}}{a_{n+1}B_{n-1}}} =$$

$$= (f_n - f_{n-1}) \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{b^*_{n+1}}{a_{n+1}} \cdot \dfrac{B_n}{B_{n-1}}}.$$

Перетворимо знаменник другого множника

$$1 + \frac{b^*_{n+1}}{a_{n+1}} \left(\frac{b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}}{B_{n-1}} \right) = 1 + \frac{b^*_{n+1}}{a_{n+1}} \left(b_n + \frac{a_n}{\dfrac{B_{n-1}}{B_{n-2}}} \right) =$$

$$= 1 + \frac{b^*_{n+1}}{a_{n+1}} \left(b_n + \cfrac{a_n}{b_{n-1} + \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-2} + \ddots_{+\cfrac{a_2}{b_1}}}} \right),$$

оскільки

$$\frac{B_2}{B_1} = b_2 + \frac{a_2}{b_1}.$$

Здійснивши еквівалентні перетворення [146] неперервного дробу у дужках, де $\rho_k = 1/b_k,\ k = n-1, n-2, \ldots, 1$, маємо

$$b_n + \cfrac{a_n \rho_{n-1}}{b_{n-1}\rho_{n-1} + \cfrac{a_{n-1}\rho_{n-1}\rho_{n-2}}{b_{n-2}\rho_{n-2} + \ddots_{+\cfrac{a_2\rho_2\rho_1}{b_1\rho_1}}}} = b_n + \cfrac{a_n/b_{n-1}}{1 + \cfrac{a_{n-1}/(b_{n-1}b_{n-2})}{1 + \ddots_{+\cfrac{a_2/(b_2 b_1)}{1}}}}.$$

Здійснивши елементарні перетворення, отримуємо

$$f_n - f^*_{n+1} = (f_n - f_{n-1}) \cdot \cfrac{a_{n+1}/\left(b^*_{n+1} b_n\right)}{a_{n+1}/\left(b^*_{n+1} b_n\right) + 1 + \cfrac{a_n/\left(b_n b_{n-1}\right)}{1 + \ddots_{+\cfrac{a_2/\left(b_2 b_1\right)}{1}}}}. \qquad (3.27)$$

Нехай для кожного $k,\ 2 \le k \le n$,

$$\alpha_k = \frac{a_k}{b_k b_{k-1}}$$

і

$$F_n = \cfrac{\alpha_n}{1 + \cfrac{\alpha_{n-1}}{1 + \ddots_{+\cfrac{\alpha_2}{1}}}},\ n \ge 2.$$

Тоді вираз (3.27) запишемо у наступному вигляді

$$f_n - f_{n+1}^* = (f_n - f_{n-1}) \cdot \frac{a_{n+1}/\left(b_{n+1}^* b_n\right)}{a_{n+1}/\left(b_{n+1}^* b_n\right) + 1 + F_n}. \tag{3.28}$$

Покажемо, що для довільного ε, $\varepsilon > 0$, існує натуральне n_0 таке, що для довільних n, $n \geq n_0$, величина $|f_n - f_{n+1}^*|$ не перевищує ε.

Доведемо обмеженість другого множника в правій частині рівності (3.28). Визначимо множину, якій належить значення F_n. Нехай $\psi_k = \phi_k - \arg b_k$, $k = \overline{1,n}$. Очевидно, що $\cos\psi_k \geq \dfrac{q_k}{|b_k|}$, $k = \overline{1,n}$, оскільки $\Re\left(b_k e^{-i\phi_k}\right) \geq q_k$, $k = \overline{1,n}$. Тоді кожне α_k, $2 \leq k \leq n$, належить параболі

$$P_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| - \Re\left(z e^{-i(\psi_k + \psi_{k-1})}\right) \leq 2\tilde{q}_{k-1}\left(\cos\psi_k - \tilde{q}_k\right) \right\}, \tag{3.29}$$

де $\tilde{q}_k = \dfrac{q_k}{|b_k|}$, $k = \overline{1,n}$. Справді, беручи до уваги (3.24), маємо

$$|\alpha_k| - \Re\left(\alpha_k e^{-i(\psi_k + \psi_{k-1})}\right) = \left|\frac{a_k}{b_k b_{k-1}}\right| - \Re\left(\frac{a_k e^{-i(\psi_k + \psi_{k-1})}}{|b_k b_{k-1}|\, e^{i(\arg b_k + \arg b_{k-1})}}\right) =$$

$$= \frac{1}{|b_k b_{k-1}|}\left(|a_k| - \Re\left(a_k e^{-i(\phi_k + \phi_{k-1})}\right)\right) \leq 2\frac{q_{k-1}}{|b_{k-1}|}\left(\frac{\Re(b_k e^{-i\phi_k})}{|b_k|} - \frac{q_k}{|b_k|}\right) =$$
$$= 2\tilde{q}_{k-1}\left(\cos\psi_k - \tilde{q}_k\right), \; k = 2, 3, \ldots, n.$$

Нехай

$$V_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : \Re\left(z e^{-i\psi_k}\right) \geq -\cos\psi_k + \tilde{q}_k \right\}, \; k = 2, 3, \ldots, n.$$

Доведемо, що, якщо елементи неперервного дробу F_n належать параболічним областям, $\alpha_k \in P_k$, $k = 2, 3, \ldots, n$, то F_n належить V_n. Для цього достатньо показати, що $\alpha_2 \in V_2$ і справджуються включення

$$\frac{\alpha_k}{1 + V_{k-1}} \subset V_k, \; k = 3, 4, \ldots, n. \tag{3.30}$$

Із умов теореми випливає, що $\alpha_2 \in P_2$. Використовуючи лему 3.1, де $\beta_r = \psi_r$, $s_r = \widetilde{q}_r$, $r = 1, 2$, заключаємо, що $P_2 \subset V_2$, оскільки $P_2 = P$, $V_2 = V''$. Отже, $\alpha_2 \in V_2$.

Очевидно, що

$$1+V_{k-1}=\left\{z\in\mathbb{C}:\Re\left(ze^{-i\psi_{k-1}}\right)\geq\tilde{q}_{k-1}\right\},\ k=3,4,\ldots,n.$$

При відображенні $w=\dfrac{\alpha_k}{z}$, остання півплощина перейде у замкнений круг, оскільки $\tilde{q}_{k-1}\neq 0,\ k=2,3,\ldots,n$. Точка $c_k=2\tilde{q}_{k-1}e^{i\psi_{k-1}}$, симетрична початку координат відносно прямої $\Re\left(ze^{-i\psi_{k-1}}\right)=\tilde{q}_{k-1}$, перейде у центр цього круга, тотбо у точку

$$C_k=\frac{\alpha_k e^{-i\psi_{k-1}}}{2\tilde{q}_{k-1}}.$$

Образом точки $g_k=\tilde{q}_{k-1}e^{i\psi_{k-1}}$ прямої $\Re\left(ze^{-i\psi_{k-1}}\right)=\tilde{q}_{k-1}$ при відображенні $w=\dfrac{\alpha_k}{z}$ буде точка $G_k=\dfrac{\alpha_k e^{-i\psi_{k-1}}}{\tilde{q}_{k-1}}$, що належатиме колу, саме тому радіус цього кола буде

$$R_k=|G_k-C_k|=\frac{|\alpha_k|}{2\tilde{q}_{k-1}}.$$

Отже,

$$\frac{\alpha_k}{1+V_{k-1}}=B_k,\ \text{де}\ B_k=\left\{z\in\mathbb{C}:|z-C_k|\leq R_k\right\},\ n=3,4,\ldots,n.$$

Покажемо, що цей круг міститься у півплощині V_k, тобто виконується включення (3.30). Для того, щоб $B_k\subset V_k,\ k=2,3,\ldots,n$, необхідно і достатньо, щоб

(а) $C_k\in V_k$

і

(б) відстань від межі області V_k до центра кола перевищувала радіус кола, R_k.

Перевіримо виконання умови (а). Вона еквівалентана нерівності

$$\Re\left(C_k e^{-i\psi_k}\right)\geq-\left(\cos\psi_k-\tilde{q}_k\right),$$

або

$$-\Re\left(\alpha_k e^{-i(\psi_{k-1}+\psi_k)}\right)\leq 2\tilde{q}_{k-1}\left(\cos\psi_k-\tilde{q}_k\right).$$

Остання нерівність виконується, бо $\alpha_k\in P_k,\ k=2,3,\ldots,n$, де P_k визначено у (3.29). Таким чином, умова (а) справджується.

Для перевірки умови (б) знайдемо відстань від центра кола B_k до межі області V_k. Для цього опустимо перпендикуляр з точки C_k на пряму $\Re\left(ze^{-i\psi_k}\right) = -\cos\psi_k + \tilde{q}_k$. Основою перпендикуряра буде точка

$$D_k = e^{i\psi_k}\left(-\left(\cos\psi_k - \tilde{q}_k\right) + i\Im\left(C_k e^{-i\psi_k}\right)\right).$$

Відстань від центру кола до межі півплощини рівна

$$|D_k - C_k| = \left|e^{i\psi_k}\left(-\left(\cos\psi_k - \tilde{q}_k\right) + i\Im\left(C_k e^{-i\psi_k}\right)\right) - \frac{\alpha_k e^{-i\psi_{k-1}}}{2\tilde{q}_{k-1}}\right| =$$

$$= \cos\psi_k - \tilde{q}_k + \frac{\Re\left(\alpha_k e^{-i(\psi_{k-1}+\psi_k)}\right)}{2\tilde{q}_{k-1}}.$$

Ця величина повинна бути меншою за радіус кола, R_k, тобто повинна виконуватися нерівність

$$\cos\psi_k - \tilde{q}_k + \frac{\Re\left(\alpha_k e^{-i(\psi_{k-1}+\psi_k)}\right)}{2\tilde{q}_{k-1}} \geq \frac{|\alpha_k|}{2\tilde{q}_{k-1}},$$

яка еквівалентна умові

$$\frac{|\alpha_k|}{2\tilde{q}_{k-1}} - \frac{\Re\left(\alpha_k e^{-i(\psi_{k-1}+\psi_k)}\right)}{2\tilde{q}_{k-1}} \leq \cos\psi_k - \tilde{q}_k,$$

що винонується, бо $\alpha_k \in P_k$, де P_k визначено у (3.29).

Таким чином, доведено правильність включення (3.30), тобто, що $F_n \in V_n$. Звідси випливає, що

$$1 + F_n \in W_n,\ W_n = \left\{z \in \mathbb{C} : \Re\left(ze^{-i\psi_n}\right) \geq \tilde{q}_n\right\}. \tag{3.31}$$

Враховуючи умову (3.24), можна показати, аналогічно до того як було доведено, що $\alpha_k \in P_k,\ k = \overline{2, n}$, що $\dfrac{a_{n+1}}{b^*_{n+1} b_n} \in P^*_{n+1}$, де

$$P^*_{n+1} = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| - \Re\left(ze^{-i\left(\psi_n + \psi^*_{n+1}\right)}\right) \leq 2\tilde{q}_n\left(\cos\psi^*_{n+1} - \tilde{q}^*_{n+1}\right)\right\}, \tag{3.32}$$

причому $\tilde{q}^*_{n+1} = \dfrac{q_{n+1}}{\left|b^*_{n+1}\right|}$, $\psi^*_{n+1} = \phi_{n+1} - \arg b^*_{n+1}$. Із умови (3.26) випливає, що $\cos\psi^*_{n+1} \geq \tilde{q}^*_{n+1}$.

Величина $\dfrac{a_{n+1}}{b^*_{n+1}b_n}$ обмежена, оскільки

$$\left|\frac{a_{n+1}}{b^*_{n+1}b_n}\right| \le \frac{|a_{n+1}|}{\Re(b^*_{n+1})\Re(b_n)} \le \frac{|a_{n+1}|}{q_{n+1}q_n},$$

а послідовність (3.25) за умовою леми обмежена. Таким чином, існує стала M, $M>0$, таке, що $\dfrac{a_{n+1}}{b^*_{n+1}b_n} \in K$, де $K=\{z\in\mathbb{C} : |z|\le M\}$.

Покажемо, що знаменник другого множника (3.28)

$$\frac{a_{n+1}}{b^*_{n+1}b_n} + 1 + F_n$$

відокремлений від нуля. Для довільних z_1 та z_2 таких, що $z_1 \in P^*_{n+1}\cap K$, а $z_2\in W_n$, де P^*_{n+1} і W_n визначені згідно з (3.31) і (3.32), оцінимо $|z_1+z_2|$. Очевидно, що $z_1+z_2 = z_1-\widetilde{z}_2$, де $z_1\in P^*_{n+1}\cap K$, а $\widetilde{z}_2\in\widetilde{W}_n$, причому $\widetilde{W}_n = \left\{z\in\mathbb{C} : \Re\left(ze^{-i\psi_n}\right)\le -\tilde{q}_n\right\}$. Застосуємо лему 3.1, поклавши $\beta_1=\psi_n$, $\beta_2=\psi^*_{n+1}$, $s_1=\tilde{q}_n$, $s_2=\tilde{q}^*_{n+1}$, отримаємо, що $P^*_{n+1}\subset\mathbb{C}\setminus\widetilde{W}$, оскільки у нашому випадку $P=P^*_{n+1}$, $V'=\mathbb{C}\setminus\widetilde{W}$. Таким чином, $(P^*_{n+1}\cap K)\cap\widetilde{W}=\emptyset$. Отже, вираз $|z_1-\widetilde{z}_2|$ не менший ніж відстань між замкненою обмеженою множиною $P^*_{n+1}\cap K$ і прямою, що є межею півплощини $\widetilde{W}_n$. Ця віддаль є неперервною функцією і досягає, за другою теоремою Вейєрштрасса, свого мінімального значення d, причому $d>0$.

Отже, використовуючи обмеженість області звідки береться елемент $\dfrac{a_{n+1}}{b^*_{n+1}b_n}$, та попередні міркування, маємо, що для довільного n, $n\ge 2$,

$$\left|\frac{a_{n+1}/\left(b^*_{n+1}b_n\right)}{a_{n+1}/\left(b^*_{n+1}b_n\right)+1+F_n}\right| \le \frac{M}{d}.$$

Оскільки для неперервного дробу (3.23) виконуються умови теореми Трона і Джоунса, то він збігається, тобто для довільного ε, $\varepsilon>0$, існує n_0, $n_0\in\mathbb{N}$ таке, що для довільного n, $n\ge n_0$ виконується нерівність

$$|f_{n-1}-f_n| < \frac{d}{M}\varepsilon.$$

Отже, для довільного $n,\ n \geq \max\{2, n_0\}$ маємо

$$|f_n - f^*_{n+1}| = |f_{n-1} - f_n| \cdot \left| \frac{a_{n+1}/\left(b^*_{n+1}b_n\right)}{a_{n+1}/\left(b^*_{n+1}b_n\right) + 1 + F_n} \right| < \varepsilon.$$

■

Теорема 3.3 *Нехай елементи двовимірного ГЛД спеціального вигляду* (3.21) *задовольняють умови:*

$$\left|a_{1[n]}\right| - \Re\left(a_{1[n]}e^{-i(\psi_n+\psi_{n-1})}\right) \leq 2p_{n-1}\left(\Re\left(b_{1[n]}e^{-i\psi_n}\right) - p_n\right),\ n = 1, 2, \ldots; \tag{3.33}$$

$$\left|a_{2[k],1[n]}\right| - \Re\left(a_{2[k],1[n]}e^{-i(\psi_k+\psi_{k-1})}\right) \leq 2s_{k,n-1}\left(\Re\left(b_{2[k],1[n]}e^{-i\psi_k}\right) - s_{k,n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots; \tag{3.34}$$

$$\Re\left(b_{2[n]}e^{-i(\arg a_{2[n],1} - \psi_n)}\right) \geq q_n,\ n = 1, 2, \ldots; \tag{3.35}$$

і при деяких $l_k,\ l_k \in \mathbb{Z}$,

$$\arg a_{2[k],1} + \arg a_{2[k+1],1} - \arg a_{2[k+1]} = \psi_k + \psi_{k+1} + 2\pi l_k,\ k = 1, 2, \ldots, \tag{3.36}$$

де ψ_k *– дійсні числа,* $p_n,\ s_{k,n},\ q_n,\ n = 0, 1, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots,$ *— деякі додатні сталі такі, що кожна з послідовностей*

$$\left\{\frac{a_{1[n]}}{p_n p_{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty},\ \left\{\frac{a_{2[k],1[n]}}{s_{k,n}s_{k,n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty},\ k = 1, 2, \ldots,\ \left\{\frac{a_{2[n]}}{q_n, q_{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

є обмеженою. Тоді ГЛД (3.21) *збігається.*

Д о в е д е н н я. Враховуючи нерівності (3.33), (3.34), обмеженість послідовностей $\left\{\frac{a_{1[n]}}{p_n p_{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\frac{a_{2[k],1[n]}}{s_{k,n}s_{k,n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots,$ маємо, що для елементів неперервних дробів

$$\mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty}\frac{a_{1[n]}}{b_{1[n]}},\ \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2[k],1[n]}}{b_{2[k],1[n]}},\ k = 1, 2, \ldots,$$

виконуються умови теореми Трона і Джоунса. Таким чином, ці неперервні дроби збігаються. Позначимо їх значення відповідно $b'_0,\ b'_{2[k]},\ k = 1, 2, \ldots$.

Згідно із тією ж теоремою, значення цих дробів та їх підхідних дробів належать відповідним півплощинам

$$H_0' = \left\{ v \in \mathbb{C} : \Re \left(v e^{i(\psi_1 - \arg a_1)} \right) \geq 0 \right\},$$

$$H_k' = \left\{ v \in \mathbb{C} : \Re \left(v e^{i(\psi_k - \arg a_{2[k],1})} \right) \geq 0 \right\}, \ k = 1, 2, \dots \ .$$

Тоді значення неперервних дробів

$$b_{2[k]}^{(1)} = b_{2[k]} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2[k],1[n]}}{b_{2[k],1[n]}}, \ k = 1, 2, \dots, \tag{3.37}$$

і їх підхідних дробів з урахуванням умови (3.35) належать півплощинам

$$H_k = \left\{ v \in \mathbb{C} : \Re \left(v e^{-i(\arg a_{2[k],1} - \psi_k)} \right) \geq q_k \right\}, \ k = 1, 2, \dots,$$

відповідно.

Розглянемо неперервний дріб

$$b_0' + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2[k]}}{b_{2[k]}^{(1)}}. \tag{3.38}$$

Враховуючи умови (3.35) і (3.36), а також, що

$$\Re \left(b_{2[k]}^{(1)} e^{-i(\arg a_{2[k],1} - \psi_k)} \right) = \Re \left(b_{2[k]} e^{-i(\arg a_{2[k],1} - \psi_k)} \right) + \Re \left(b_{2[k]}' e^{-i(\arg a_{2[k],1} - \psi_k)} \right) \geq$$

$$\geq \Re \left(b_{2[k]} e^{-i(\arg a_{2[k],1} - \psi_k)} \right) \geq q_k, \ k = 1, 2, \dots,$$

маємо, що

$$\left| a_{2[k]} \right| - \Re \left(a_{2[k]} e^{-i(\arg a_{2[k],1} - \psi_k + \arg a_{2[k-1],1} - \psi_{k-1})} \right) = \left| a_{2[k]} \right| - \Re \left(a_{2[k]} e^{-i(\arg a_{2[k]})} \right) = 0 \leq$$

$$\leq 2q_{k-1} \left(\Re \left(b_{2[k]}^{(1)} e^{-i(\arg a_{2[k],1} - \psi_k)} \right) - q_k \right), \ k = 1, 2, \dots \ .$$

Таким чином, беручи до уваги обмеженість послідовності $\left\{ \dfrac{a_{2[n]}}{q_n q_{n-1}} \right\}_{n=1}^{\infty}$, маємо, що елементи неперервного дробу (3.38) задовольняють умовам теореми Трона і Джоунса, тобто неперервний дріб (3.38) збігається, тобто ГЛД (3.21) є $\mathcal{C}_1$-фігурно збіжним.

Доведемо тепер, що із збіжності неперервного дробу (3.38) випливає збіжність ГЛД спеціального вигляду (3.21).

Нехай

$$\widehat{f}_r = b_0' + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{r} \frac{a_{2[k]}}{b_{2[k]}^{(1)}},\ r \geq 1,$$

— r-й підхідний дріб неперервного дробу (3.38), а

$$f_r = \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{r} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}},\ r \geq 1,$$

— r-й підхідний дріб ГЛД (3.21). Враховуючи особливості структури ГЛД (3.21), маємо, що f_r можна записати у вигляді

$$f_r = b_0^{(1,r)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{r} \frac{a_{2[k]}}{b_{2[k]}^{(1,r-k)}},\ r \geq 1,$$

де

$$b_0^{(1,r)} = \mathop{\mathrm{D}}_{l=1}^{r} \frac{a_{1[l]}}{b_{1[l]}},\ b_{2[r]}^{(1,0)} = b_{2[r]},\ b_{2[k]}^{(1,r-k)} = b_{2[k]} + \mathop{\mathrm{D}}_{l=1}^{r-k} \frac{a_{2[k],1[l]}}{b_{2[k],1[l]}},\ k = \overline{1, r-1}.$$

Покажемо, що для довільного $\varepsilon,\ \varepsilon > 0$, існує натуральне число μ таке, що для довільних натуральних $r,\ r \geq \mu$, виконується нерівність

$$\left| \widehat{f}_r - f_r \right| < \varepsilon, \tag{3.39}$$

тобто покажемо, що із $\mathcal{C}_1$-фігурної збіжності випливає звичайна збіжність. Очевидно, що для довільних $n,\ n \geq 1$, і $r,\ r \geq n+1$,

$$\left| \widehat{f}_r - f_r \right| \leq \left| \widehat{f}_r - h_{r,n} \right| + \left| f_r - h_{r,n} \right|, \tag{3.40}$$

де

$$h_{r,n} = b_0^{(1)} + \frac{a_{2[1]}}{b_{2[1]}^{(1)}} + \cdots + \frac{a_{2[n]}}{b_{2[n]}^{(1)}} + \frac{a_{2[n+1]}}{b_{2[n+1]}^{(1,r-n-1)}} + \cdots + \frac{a_{2[r]}}{b_{2[r]}^{(1,0)}}.$$

Розглянемо перший доданок правої частини нерівності (3.40). Для довільних $n,\ n \geq 1$, і $r,\ r \geq n+1$, маємо

$$\left| \widehat{f}_r - h_{r,n} \right| \leq \left| \widehat{f}_r - \widehat{f}_n \right| + \left| \widehat{f}_n - h_{r,n} \right|. \tag{3.41}$$

Оскільки неперервний дріб (3.38) збігається, то враховуючи, що $\widehat{f}_m,\ m \geq 1,$ – його підхідні дроби, маємо, що для довільного $\varepsilon,\ \varepsilon > 0$, існує натуральне число n_0 таке, що для довільних натуральних $n,\ n \geq n_0$, і $r,\ r \geq n$, виконується нерівність

$$\left|\widehat{f}_r - \widehat{f}_n\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.42}$$

Для оцінки другого доданку правої частини нерівності (3.41) застосуємо лему 3.3. Нехай

$$b^*_{2[n+1]} = b^{(1,0)}_{2[n+1]} = b_{2[n+1]},\ \text{якщо}\ r = n+1,$$

$$b^*_{2[n+1]} = b^{(1,r-n-1)}_{2[n+1]} + \mathop{\mathrm{D}}_{l=n+2}^{r} \frac{a_{2[l]}}{b^{(1,r-l)}_{2[l]}},\ \text{якщо}\ r \geq n+2.$$

Знайдемо область значень останнього дробу. Як було показано вище, елементи $b^{(1,r-l)}_{2[l]},\ l = \overline{n+1,r}$, як підхідні дроби неперервних дробів (3.37) належать множинам $H_l, l = \overline{n+1,r}$, відповідно. Враховуючи умови (3.35) і (3.36), нерівності

$$\Re\left(b^{(1,r-l)}_{2[l]} e^{-i(\arg a_{2[l],1} - \psi_l)}\right) \geq \Re\left(b_{2[l]} e^{-i(\arg a_{2[l],1} - \psi_l)}\right) \geq q_l,\ l = \overline{n+1,r},$$

легко показати, що

$$\left|a_{2[l]}\right| - \Re\left(a_{2[l]} e^{-i(\arg a_{2[l],1} - \psi_l + \arg a_{2[l-1],1} - \psi_{l-1})}\right) = 0 \leq$$

$$\leq 2q_{l-1}\left(\Re\left(b^{(1,r-l)}_{2[l]} e^{-i(\arg a_{2[l],1} - \psi_l)}\right) - q_l\right),\ l = \overline{n+1,r}.$$

Оскільки послідовність $\left\{\dfrac{a_{2[n]}}{q_n q_{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена, то для дробу $b^*_{2[n+1]},\ r \geq n+2$, виконуються умови теореми Трона і Джоунса. Тому, враховуючи, що $b^{(1,r-n-2)}_{2[n+2]} \in H_{n+2}$, маємо, що значення неперервного дробу $\mathop{\mathrm{D}}\limits_{l=n+2}^{r} \dfrac{a_{2[l]}}{b^{(1,r-l)}_{2[l]}}$, належить півплощині

$$H = \left\{v \in \mathbb{C} : \Re\left(v e^{i(\arg a_{2[n+2],1} - \psi_{n+2} - \arg a_{2[n+2]})}\right) \geq 0\right\}.$$

Враховуючи (3.36), отримуємо, що $H = H_{n+1}$. Оскільки $b^{(1,r-n-1)}_{2[n+1]} \in H_{n+1}$, то $b^*_{2[n+1]} \in H_{n+1},\ r \geq n+1$.

Також, використовуючи міркування, аналогічні до приведених вище, легко показати, що

$$\Re\left(b^*_{2[n+1]}e^{-i(\arg a_{2[n+1],1}-\psi_{n+1})}\right) \geq \Re\left(b_{2[n+1]}e^{-i(\arg a_{2[n+1],1}-\psi_{n+1})}\right) \geq q_{n+1},$$

а це, з урахуванням умови (3.36), означає, що виконується нерівність

$$\left|a_{2[n+1]}\right| - \Re\left(a_{2[n+1]}e^{-i(\arg a_{2[n+1],1}-\psi_{n+1}+\arg a_{2[n],1}-\psi_n)}\right) = 0 \leq$$

$$\leq 2q_n\left(\Re\left(b^*_{2[n+1]}e^{-i(\arg a_{2[n+1],1}-\psi_{n+1})}\right) - q_{n+1}\right).$$

Тобто для неперервного дробу (3.38) та $b^*_{2[n+1]}$ виконуються умови леми 3.3, де

$$\widehat{f}^*_{n+1} = b_0^{(1)} + \frac{a_{2[1]}}{b^{(1)}_{2[1]}} + \cdots + \frac{a_{2[n]}}{b^{(1)}_{2[n]}} + \frac{a_{2[n+1]}}{b^*_{2[n+1]}},$$

$\phi_n = \arg a_{2[n],1} - \psi_n$, а замість b^*_{n+1} взято $b^*_{2[n+1]}, n = 2, 3, \ldots$.

Отже, враховуючи, що $\widehat{f}^*_{n+1} = h_{r,n},\ r \geq n+1$, для вже заданого ε існує натуральне число n_1, таке, що для усіх $n,\ n \geq n_1$, справджується нерівність

$$\left|\widehat{f}_n - h_{r,n}\right| = \left|\widehat{f}_n - \widehat{f}^*_{n+1}\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.43}$$

Нехай $\nu = \max\{n_0, n_1\}$. Тоді при $n = \nu$ отримаємо одночасне виконання нерівностей (3.42) та (3.43). Покладемо у нерівності (3.41) $n = \nu$ і $r \geq \nu + 1$. Отримаємо, що для раніше заданого ε виконується нерівність

$$\left|\widehat{f}_r - h_{r,\nu}\right| < \frac{2\varepsilon}{3},\ r \geq \nu + 1.$$

Оскільки нерівність (3.40) виконується для довільних натуральних n і $r \geq n+1$, то вона буде виконуватися і для фіксованого $n = \nu$ і довільних $r \geq \nu + 1$, тобто

$$\left|\widehat{f}_r - f_r\right| \leq \left|\widehat{f}_r - h_{r,\nu}\right| + \left|f_r - h_{r,\nu}\right|. \tag{3.44}$$

Встановимо оцінку зверху для другого доданку правої частини нерівності (3.44). Нехай $Q^{(r)}_{2[s]}, \widehat{Q}^{(r)}_{2[s]},\ s = 1, 2, ..., r,$ – залишки неперервних дробів f_r та

$h_{r,\nu}$ відповідно, тобто

$$Q_{2[s]}^{(r)} = b_{2[s]}^{(1,r-s)} + \frac{a_{2[s]}}{Q_{2[s+1]}^{(r)}},\ s = 1, 2, \ldots, r-1,\ Q_{2[r]}^{(r)} = b_{2[r]}^{(1,0)},$$

$$\widehat{Q}_{2[s]}^{(r)} = \begin{cases} b_{2[s]}^{(1)} + \dfrac{a_{2[s]}}{\widehat{Q}_{2[s+1]}^{(r)}},\ s = 1, 2, \ldots, \nu, \\ Q_{2[s]}^{(r)},\ s = \nu+1, \nu+2,\ \ldots, r. \end{cases}$$

Використовуючи міркування, аналогічні до того, як було показано, що $b_{2[n+1]}^{*} \in H_{n+1}$, легко довести, що

$$Q_{2[s]}^{(r)} \in H_s \text{ і } \widehat{Q}_{2[s]}^{(r)} \in H_s,\ s = 1, 2, \ldots, r. \tag{3.45}$$

Враховуючи, що

$$f_r - h_{r,\nu} = b_0^{(1,r)} - b_0^{(1)} + \frac{a_{2[1]}}{Q_{2[1]}^{(r)}} - \frac{a_{2[1]}}{\widehat{Q}_{2[1]}^{(r)}},$$

після елементарних перетворень з використанням рекурентних співвідношень для залишків неперервних дробів f_r і $h_{r,\nu}$ та методику доведення формули для різниці підхідних дробів [32] можна показати, що

$$|f_r - h_{r,\nu}| \le \left| b_0^{(1,r)} - b_0^{(1)} \right| + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\left| b_{2[k]}^{(1,r-k)} - b_{2[k]}^{(1)} \right|}{\prod\limits_{s=1}^{k} \left| \widehat{Q}_{2[s]}^{(r)} Q_{2[s]}^{(r)} \right|} \left| a_{2[1]} a_{2[2]} \ldots a_{2[k]} \right|. \tag{3.46}$$

Із співвідношень (3.45) після елементарних перетворень отримуємо, що для довільного $s,\ 1 \le s \le \nu$, виконуються нерівності

$$\left| \widehat{Q}_{2[s]}^{(r)} \right| \ge \Re\left(\widehat{Q}_{2[s]}^{(r)} e^{-i(\arg a_{2[s],1} - \psi_s)} \right) \ge q_s,\ \left| Q_{2[s]}^{(r)} \right| \ge \Re\left(Q_{2[s]}^{(r)} e^{-i(\arg a_{2[s],1} - \psi_s)} \right) \ge q_s.$$

Покладемо $\delta = \min\limits_{1 \le s \le \nu} \{q_s\}$. Таким чином,

$$\left| \widehat{Q}_{2[s]}^{(r)} \right| \ge \delta,\ \left| Q_{2[s]}^{(r)} \right| \ge \delta,\ s = 1, 2, \ldots, \nu. \tag{3.47}$$

Розглянемо добутки

$$\prod_{s=1}^{k} \left| \frac{a_{2[s]}}{\widehat{Q}_{2[s]}^{(r)} Q_{2[s]}^{(r)}} \right|,\ k = 1, 2, ..., \nu,$$

у нерівності (3.46).

Якщо $k=1$, то, враховуючи (3.47) маємо

$$\left|\frac{a_2}{\widehat{Q}_2^{(r)}Q_2^{(r)}}\right|\le\frac{|a_2|}{\delta^2}.$$

Якщо $k=2l+1,\ l\ge1$, тоді

$$\prod_{s=1}^{2l+1}\left|\frac{a_{2[s]}}{\widehat{Q}_{2[s]}^{(r)}Q_{2[s]}^{(r)}}\right|=\left|\frac{a_2}{\widehat{Q}_2^{(r)}Q_{2[2l+1]}^{(r)}}\right|\prod_{s=1}^{l}\left|\frac{a_{2[2s+1]}}{\widehat{Q}_{2[2s]}^{(r)}\widehat{Q}_{2[2s+1]}^{(r)}}\right|\prod_{s=1}^{l}\left|\frac{a_{2[2s]}}{Q_{2[2s-1]}^{(r)}Q_{2[2s]}^{(r)}}\right|\le$$

$$\le\frac{|a_2|}{q_2q_{2l+1}}\prod_{s=1}^{l}\frac{\left|a_{2[2s+1]}\right|}{q_{2s}q_{2s+1}}\prod_{s=1}^{l}\frac{\left|a_{2[2s]}\right|}{q_{2s-1}q_{2s}}.$$

З обмеженості послідовності $\left\{\dfrac{a_{2[n]}}{q_nq_{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ маємо, що існує стала $M,\ M>0$, така, що $\dfrac{\left|a_{2[n]}\right|}{q_nq_{n-1}}\le M,\ n\ge1$. Таким чином,

$$\prod_{s=1}^{2l+1}\left|\frac{a_{2[s]}}{\widehat{Q}_{2[s]}^{(r)}Q_{2[s]}^{(r)}}\right|\le\frac{|a_2|}{\delta^2}M^{2l}.$$

Якщо $k=2l,\ l\ge1$, то враховуючи (3.47) і використовуючи аналогічні міркування, отримуємо

$$\prod_{s=1}^{2l}\left|\frac{a_{2[s]}}{\widehat{Q}_{2[s]}^{(r)}Q_{2[s]}^{(r)}}\right|=\left|\frac{a_2}{\widehat{Q}_2^{(r)}\widehat{Q}_{2[2l]}^{(r)}}\right|\prod_{s=1}^{l-1}\left|\frac{a_{2[2s+1]}}{\widehat{Q}_{2[2s]}^{(r)}\widehat{Q}_{2[2s+1]}^{(r)}}\right|\prod_{s=1}^{l}\left|\frac{a_{2[2s]}}{Q_{2[2s-1]}^{(r)}Q_{2[2s]}^{(r)}}\right|\le\frac{|\ a_2|}{\delta^2}M^{2l-1}.$$

Отже,

$$\prod_{s=1}^{k}\left|\frac{a_{2[s]}}{\widehat{Q}_{2[s]}^{(r)}Q_{2[s]}^{(r)}}\right|\le\frac{|a_2|}{\delta^2}M^{k-1}\le\frac{|a_2|}{\delta^2}K^{\nu-1},\ 1\le k\le\nu,$$

де $K=\max\{M,1\}$.

Оцінимо вирази у чисельниках (3.46). Як було раніше показано, неперервні дроби (3.37) є збіжними. Тому для раніше заданого ε існують номери $r_1,\ r_2,\ldots,r_\nu$ такі, що для довільного $r\ge\max\limits_{1\le k\le\nu}\{r_k\}$ виконуються нерівності

$$\left|b_{2[k]}^{(1,r-k)}-b_{2[k]}^{(1)}\right|<\frac{\varepsilon\delta^2}{3K^{\nu-1}\left|a_2\right|(\nu+1)},\ 1\le k\le\nu, \tag{3.48}$$

як модуль різниці між значенням нескінченного неперервного дробу і його $(r-k)$-м підхідним дробом. Аналогічно, існує r_0, таке, що для довільних $r,\ r \geq r_0$

$$\left|b_0^{(1,r)} - b_0^{(1)}\right| < \frac{\varepsilon}{3(\nu+1)}. \tag{3.49}$$

Нехай

$$\mu = \max_{0\leq k\leq \nu}\{r_k\}$$

Таким чином, використавши оцінки (3.48) та (3.49) для довільних $r,\ r \geq \mu = \max\limits_{0\leq k\leq \nu}\{r_k\}$. і заданого раніше ν справджується нерівність

$$|f_r - h_{r,\nu}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отже, для заданого ε існує натуральне число μ таке, що для усіх $r,\ r \geq \mu$, виконується нерівність (3.39), із якої випливає, що ГЛД (3.21) збігається, оскільки неперервний дріб (3.38) збігається. ■

3.3. Дослідження збіжності багатовимірних S-дробів з нерівнозначними змінними

Застосування наслідку 3.2 продемонструємо при дослідженні областей збіжності багатовимірного S-дробу

$$\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}\right)^{-1}, \tag{3.50}$$

де $a_{i(k)} > 0, i(k) \in \mathcal{I},\ z_{i_k} \in \mathbb{C},\ i_k = \overline{1, N}$.

Підхідні дроби $f_n\left(\mathbf{z}\right)$ цих ГЛД є багатовимірними дробово-раціональними функціями. В наступній теоремі досліджується питання збіжності цієї послідовності функцій.

Теорема 3.4 *Нехай ряди, складені з коефіцієнтів багатовимірного S-дробу* *з нерівнозначними змінними* (3.50)

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{m[p]}^{-1/2}, \ m=1,2,\dots,N,$$
$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{i(n),m[p]}^{-1/2}, \ m=1,2,\dots,N-1, \tag{3.51}$$

для довільних $i(n), \ i(n) \in \mathcal{I}^{(m+1)}$, *є розбіжними. Тоді*

1) якщо $\sup\left(a_{i(k)}, \ i(k) \in \mathcal{I}\right) = \infty$, *то ГЛД* (3.50) *збігається в кожній точці* $\mathbf{z} \in G$, *де*

$$G = \underbrace{G(\gamma) \times G(\gamma) \times \dots \times G(\gamma)}_{N} \subset \mathbb{C}^N,$$

$$G(\gamma) = \{w \in \mathbb{C} : \arg w = 2\gamma\}, |\gamma| < \frac{\pi}{2};$$

2) якщо $\sup\left(a_{i(k)} i_{k-1}, i(k) \in \mathcal{I}\right) = A$, *то ГЛД* (3.50) *збігається в області* P, *де*

$$P = P_1(\gamma) \times P_2(\gamma) \times \dots \times P_N(\gamma) \subset \mathbb{C}^N,$$
$$P_k(\gamma) = \left\{ z_k \in \mathbb{C} : |z_k| - \Re\left(z_k e^{-2i\gamma}\right) \le \frac{2D_k}{A} \cos^2\gamma \right\}, \ k = \overline{1,N},$$

де D_k *визначені в наслідку 3.2.*

Д о в е д е н н я. 1) Оскільки ряди (3.51) розбігаються, то для довільного $\mathbf{z} \in G$ розбіжними будуть і ряди

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left|a_{m[p]} z_m\right|^{-1/2}, \ m=1,2,\dots,N,$$
$$\sum_{p=1}^{\infty} \left|a_{i(n),m[p]} z_m\right|^{-1/2}, \ m=1,2,\dots,N-1, \tag{3.52}$$

для довільних $i(n) \in \mathcal{I}^{(m+1)}$. Якщо $\mathbf{z} \in G$, то $\left|a_{i(k)} z_{i_k}\right| - \Re\left(a_{i(k)} z_{i_k} e^{-2i\gamma}\right) = 0 \le \dfrac{2D_k(1-\varepsilon)}{i_{k-1}} \cos^2\gamma$. Таким чином, на основі наслідку 3.2 ГЛД (3.50) збігається в кожній точці $\mathbf{z} \in G$.

2) Нехай $\{f_n(\mathbf{z})\}$ – послідовність підхідних дробів ГЛД (3.50). Беручи до уваги те, що $\sup\left(a_{i(k)} i_{k-1}, i(k) \in \mathcal{I}\right) = A$, отримуємо

$$\left|a_{i(k)} z_{i_k}\right| - \Re\left(a_{i(k)} z_{i_k} e^{-2i\gamma}\right) \le \frac{2D_k}{i_{k-1}} \cos^2\gamma.$$

Із леми 3.1 випливає, що область значень підхідних дробів

$$1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{a_{i(k)}z_{i_k}}{1}$$

є область

$$H\left(\gamma\right)=\left\{z\in\mathbb{C}:\Re\left(ze^{-i\gamma}\right)\geq(1-d)\cos\gamma\right\}.$$

Тоді підхідні дроби ГЛД (3.50) є голоморфними функціями в області P і їх значення належать кругу

$$\mathcal{K}\left(\gamma\right)=\left\{w\in\mathbb{C}:\left|w-\frac{e^{-i\gamma}}{2\left(1-d\right)\cos\gamma}\right|\leq\frac{1}{2\left(1-d\right)\cos\gamma}\right\}.$$

Отже, послідовність $\{f_n\left(\mathbf{z}\right)\}$ є обмеженою в P.

Нехай

$$\Delta=\{w\in\mathbb{C}:\arg w=2\gamma,\ r<|w|<R\}.$$

Очевидно, що $\Delta^N\subset P$. Тоді для довільного $\mathbf{z}\in\Delta^N$, маємо

$$\left|a_{i(k)}z_{i_k}\right|-\Re\left(a_{i(k)}z_{i_k}e^{-2i\gamma}\right)=0\leq\frac{2D_k(1-\varepsilon)}{i_{k-1}}\cos^2\gamma.$$

Оскільки ряди (3.52) є розбіжними, то згідно з наслідком 3.2 ГЛД (3.50) збігається, якщо $\mathbf{z}\in\Delta^N$. На підставі теореми 1.18 багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінніми (3.50) збігається в області P. При чому збіжність буде рівномірною на компактах цієї області. ■

Висновки до розділу 3. Цей розділ присвячений дослідженню збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з комплексними елементами.

Досліджено параболічні множини умовної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду. При формулюванні додаткових умов на елементи гіллястого ланцюгового дробу суттєво враховано доведені у другому розділі достатні ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з додатними елементами.

Встановлено багатовимірний аналог параболічної теореми. При цьому частинні знаменники гіллястого ланцюгового дробу беруться із зовнішностей деяких кругів, а частинні чисельники із параболічних множин вигляд яких залежить від вибраних і зафіксованих значень частинних знаменників. Із отриманого результату випливає багатовимірний аналог теореми Трона про спарені множини умовної збіжності неперервних дробів.

Для двовимірних гіллястих ланцюгових дробів встановлено багатовимірний аналог теореми Джоунса і Трона про параболічні множини збіжності неперервних дробів. При обґрунтуванні цієї теореми суттєво використовується попередньо доведена лема про стійкість до збурень неперервного дробу.

Використовуючи встановлені теореми, досліджено збіжність багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними за умов, що ряди, складені із коефіцієнтів цього дробу, розбігаються, а значення змінних належать параболам, або деяким їх підмножинам.

Результати, наведені у цьому розділі, опубліковані в таких працях: [16, 24, 25, 107, 111–113].

РОЗДІЛ 4
КУТОВІ МНОЖИНИ УМОВНОЇ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

4.1. Багатовимірний аналог ознаки збіжності Ван Флека

Використовуючи багатовимірне узагальнення критерію Зейделя (теорема 2.1) можна встановити багатовимірний аналог теореми Ван Флека.

Теорема 4.1 *Нехай частинні знаменники ГЛД спеціального вигляду*

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{b_{i(k)}} \tag{4.1}$$

належать області

$$G(\varepsilon) = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq 0, |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right\}, \tag{4.2}$$

де $\varepsilon-$ *довільне додатне число,* $0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$.

Тоді

1) кожне n*-те наближення* f_n *ГЛД* (4.1) *належить області* (4.2)*;*

2) існують скінченні границі парних і непарних підхідних дробів;

3) ГЛД (4.1) *збігається, якщо для кожного* m, $1 \le m \le N$, *розбігаються ряди*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left| b_{m[p]} \right|,$$

а також для кожного m, $1 \le m \le N-1$, *і кожного мультиіндексу* $i(n)$, $i(n) \in \mathcal{I}^{(m+1)}$, *розбігаються ряди*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left| b_{i(n),m[p]} \right|.$$

Д о в е д е н н я. Враховуючи опуклість області $G(\varepsilon)$ і її симетричність відносно дійсної осі, одержимо, що якщо $b_{i(k)} \in G(\varepsilon)$, $i(k) \in \mathcal{I}$, то при згортанні n-го підхідного дробу f_n, отримаємо

$$\frac{1}{b_{i(n)}} \in G(\varepsilon), \ \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{1}{b_{i(n)}} \in G(\varepsilon), \ b_{i(n-1)} + \sum_{i_k=1}^{i_{n-1}} \frac{1}{b_{i(n)}} \in G(\varepsilon) \ \text{і т. д.}$$

Отже, $f_n \in G(\varepsilon)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Для доведення другого пункту розглянемо функціональний ГЛД

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{b_{i(k)}(z)}, \tag{4.3}$$

де функції $b_{i(k)}(z) = \left|b_{i(k)}\right| e^{i \arg b_{i(k)} z}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, визначені в області

$$D(\varepsilon) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\Re(z)| < 1 + \frac{\varepsilon}{\pi - 2\varepsilon}, \ |\Im(z)| < 1 \right\}.$$

Оскільки

$$b_{i(k)}(z) = \left|b_{i(k)}\right| e^{-\arg b_{i(k)} \Im(z)} e^{i \arg b_{i(k)} \Re(z)},$$

то

$$\arg b_{i(k)}(z) = \arg b_{i(k)} \cdot \Re(z).$$

Отже,

$$\left|\arg b_{i(k)}(z)\right| = \left|\arg b_{i(k)}\right| |\Re(z)| < \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{\pi - 2\varepsilon}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2},$$

тобто $b_{i(k)}(z) \in G\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, якщо $z \in D(\varepsilon)$.

Для послідовності голоморфних функцій $\{f_n(z)\}$ виконуються умови аналогу теореми Стільтьєса – Віталі (теорема 1.18), де

$$\Delta = \{ z \in \mathbb{C} : |\Re(z)| = 0, \ |\Im(z)| < 1 \}.$$

Нехай $z \in \Delta$, тоді ГЛД (4.3) можемо записати у вигляді

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{\widetilde{b}_{i(k)}}, \tag{4.4}$$

де $\widetilde{b}_{i(k)} = \left|b_{i(k)}\right| e^{-\arg b_{i(k)} \Im(z)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$.

Із властивості "вилки" для ГЛД спеціального вигляду з додатними елементами (4.4) слідує, що його парні і непарні підхідні дроби мають границі. Тому за теоремою Стільтьєса – Віталі, існують скінченні границі парних і непарних підхідних дробів ГЛД (4.1).

Із умов 3) випливає, що для кожного $m,\ 1 \le m \le N$, розбігаються ряди $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \tilde{b}_{m[p]}$, а також для кожного $m,\ 1 \le m \le N-1$, і кожного мультиіндексу $i(n),\ i(n) \in \mathcal{I}^{(m+1)}$, розбігаються ряди $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \tilde{b}_{i(n),m[p]}$. Отже, за теоремою 2.2 ГЛД (4.4) збігається, тобто послідовність функцій $f_n(z)$ збігається в кожній точці $z \in \Delta$. Використавши теорему 1.18, заключаємо, що ГЛД (4.4) рівномірно збігається на компактах області $D(\varepsilon)$ зокрема в точці $z = 1$, що рівносильно тому, що ГЛД (4.1) збігається. ■

4.2. Оцінки швидкості збіжності гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду на підмножинах кутових областей

Встановимо оцінки швидкості збіжності ГЛД спеціального вигляду

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{b_{i(k)}} \tag{4.5}$$

де $b_0, b_{i(k)} \in \mathbb{C},\ i(k) \in \mathcal{I}$.

Теорема 4.2 *Нехай елементи ГЛД спеціального вигляду* (4.5) *задовольняють умови: для довільного мультиіндекса* $i(k),\ i(k) \in \mathcal{I}$,

$$b_{i(k)} \neq 0,\ \left|\arg b_{i(k)}\right| \le \theta,\ \theta < \frac{\pi}{2}; \tag{4.6}$$

нескінченний добуток

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\cos\theta} (1 - \nu_k) \right)$$

розбігається до нуля, де

$$\nu_k = \min_{i(k) \in \mathcal{I}_k} \left\{ \frac{\Re\left(b_{i(k)}\right)}{\left|b_{i(k)}\right| + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{1}{\Re\left(b_{i(k+1)}\right)}} \right\}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.7}$$

$$\mathcal{I}_k = \{ i(k) = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \ :\ 1 \le i_k \le i_{k-1} \le \cdots \le i_1 \le N \},\ k = 1, 2, \ldots . \tag{4.8}$$

Тоді ГЛД (4.5) збігається і справджується оцінка швидкості збіжності

$$|f - f_p| \le \frac{2N}{\min\limits_{1\le i_1\le N} \Re(b_{i_1})} \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{2s} \prod_{k=1}^{2s} (1-\nu_k)\,,\ s = \left[\frac{p}{2}\right], \tag{4.9}$$

де f – значення ГЛД (4.5).

Д о в е д е н н я. Із теореми 4.1, з урахуванням умови (4.6), слідує, що для аргументів залишків n-х підхідних дробів (4.5)

$$Q^{(n)}_{i(n)} = b_{i(n)},\ n \ge 1,$$

$$Q^{(n)}_{i(k)} = b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{1}{Q^{(n)}_{i(k+1)}},\ n \ge 2,\ k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

справджується оцінка

$$\left|\arg Q^{(n)}_{i(k)}\right| \le \theta,\ n \ge 1,\ k = 1, 2, \ldots, n;\ i(k) \in \mathcal{I}_k.$$

Таким чином,

$$\left|Q^{(n)}_{i(k)}\right| \ge \Re\left(Q^{(n)}_{i(k)}\right) \ge \Re\left(b_{i(k)}\right) + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{\cos\theta}{\left|Q^{(n)}_{i(k+1)}\right|}, \tag{4.10}$$

$$n \ge 2,\ k = 1, 2, \ldots, n-1;\ i(k) \in \mathcal{I}_k.$$

Для модуля різниці підхідних дробів ГЛД (4.5), з урахуванням формули (1.19) у випадку $n > 2m$ маємо таку оцінку

$$|f_n - f_{2m}| \le \sum_{i_1=1}^{i_k} \frac{1}{\left|Q^{(n)}_{i(1)}\right|} \times$$

$$\times \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_{2m}=1}^{i_{2m-1}} \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{m-1} \left|Q^{(n)}_{i(2k)} Q^{(n)}_{i(2k+1)}\right| \prod\limits_{k=1}^{m} \left|Q^{(2m)}_{i(2k-1)} Q^{(2m)}_{i(2k)}\right|} \sum_{i_{2m+1}=1}^{i_{2m}} \frac{1}{\left|Q^{(n)}_{i(2m)} Q^{(n)}_{i(2m+1)}\right|}. \tag{4.11}$$

Використовуючи нерівності (4.10), а також монотонне зростання функції $f(x) = \dfrac{x}{b+x}$, $b \geq 0$, при додатних значеннях змінної x, отримаємо

$$\sum_{i_{2m+1}=1}^{i_{2m}} \frac{1}{\left|Q_{i(2m)}^{(n)} Q_{i(2m+1)}^{(n)}\right|} = \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\sum\limits_{i_{2m+1}=1}^{i_{2m}} \dfrac{\cos\theta}{\left|Q_{i(2m+1)}^{(n)}\right|}}{\left|Q_{i(2m)}^{(n)}\right|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\left|Q_{i(2m)}^{(n)}\right| - \Re\left(b_{i(2m)}\right)}{\left|Q_{i(2m)}^{(n)}\right|} \leq \frac{1}{\cos\theta} \left(1 - \frac{\Re\left(b_{i(2m)}\right)}{\left|b_{i(2m)}\right| + \sum\limits_{i_{2m+1}=1}^{i_{2m}} \dfrac{1}{\Re\left(b_{i(2m+1)}\right)}} \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\cos\theta} \left(1 - \nu_{2m}\right),$$

де ν_{2m} визначається співвідношенням (4.7).

Провівши аналогічні міркування для оцінки сум

$$\sum_{i_j=1}^{i_{j-1}} \frac{1}{\left|Q_{i(j-1)}^{(s)} Q_{i(j)}^{(s)}\right|}, \ j = 2m, 2m-1, ..., 2,$$

де $s = 2m$, якщо j – парне, і $s = n$, якщо j – непарне, з урахуванням того, що

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{1}{\left|Q_{i(1)}^{(n)}\right|} \leq \frac{N}{\min\limits_{1 \leq i_1 \leq N} \Re\left(b_{i_1}\right)},$$

отримуємо

$$|f_n - f_{2m}| \leq \frac{N}{\min\limits_{1 \leq i_1 \leq N} \Re\left(b_{i_1}\right)} \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{2m} \prod_{k=1}^{2m} \left(1 - \nu_k\right), \ \ n > 2m.$$

Звідси, спрямувавши n до безмежності, і враховуючи, що

$$|f - f_p| \leq |f - f_{2m}| + |f_p - f_{2m}|,$$

одержимо оцінку (4.9). З умов теореми випливає, що $|f - f_p| \to 0$, при $p \to \infty$. ∎

Встановимо іншу оцінку швидкості збіжності, звузивши область вибору елементів, але накладаючи відмінні від попередніх умови на елементи ГЛД (4.5).

Теорема 4.3 *Нехай елементи ГЛД спеціального вигляду* (4.5) *задовольняють умови: для довільного мультиіндекса* $i(k),\ i(k) \in \mathcal{I}$,

$$b_{i(k)}) \neq 0,\ \left|\arg b_{i(k)}\right| < \theta,\ \theta < \frac{\pi}{3};$$

при деякому $k_0 \in \mathbb{N},\ k_0 \geq 2$,

$$\mu_k > \frac{N\,(1-\cos\theta)\cos\theta}{2\cos\theta - 1},\ k = k_0, k_0+1, \ldots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\mu_k}{\mu_k + N\cos\theta}\right),$$

де

$$\mu_k = \min_{i(k)\in\mathcal{I}_k}(\Re(b_{i(k)})\Re(b_{i(k-1)})),\ k = 2, 3, \ldots\ , \tag{4.12}$$

$\mathcal{I}_k$, *визначаєтьса згідно із* (4.8). *Тоді ГЛД* (4.5) *збігаєтьса і справджуєтьса оцінка швидкості збіжності*

$$|f - f_m| \leq \frac{2N}{\min\limits_{1\leq i_1\leq N}\Re\left(b_{i_1}\right)}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{2s}\prod_{k=1}^{2s}\left(1 - \frac{1}{\dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{N}{\mu_{k+1}}}\right),\ s = \left[\frac{m}{2}\right],$$

де f – *значення ГЛД* (4.5).

Д о в е д е н н я. Аналогічно як і в попередній теоремі, доводяться оцінки

$$\left|\arg Q_{i(k)}^{(n)}\right| \leq \theta,\ n \geq 1,\ k = 1, 2, \ldots, n;\ i(k) \in \mathcal{I}_k.$$

і, як наслідок, оцінки (4.10). Використовуючи формули (4.11) для модуля різниці підхідних дробів ГЛД (4.5),

$$\sum_{i_{2m+1}=1}^{i_{2m}}\frac{1}{\left|Q_{i(2m)}^{(n)}Q_{i(2m+1)}^{(n)}\right|} \leq \frac{1}{\cos\theta}\left(1 - \frac{\Re\left(b_{i(2m)}\right)}{\left|b_{i(2m)}\right| + \sum\limits_{i_{2m+1}=1}^{i_{2m}}\dfrac{1}{\Re\left(b_{i(2m+1)}\right)}}\right) \leq$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}\left(1 - \frac{1}{\dfrac{\left|b_{i(2m)}\right|}{\Re\left(b_{i(2m)}\right)} + \sum\limits_{i_{2m+1}=1}^{i_{2m}}\dfrac{1}{\Re\left(b_{i(2m+1)}\right)\Re\left(b_{i(2m)}\right)}}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\cos\theta}\left(1-\frac{1}{\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{N}{\mu_{2m}}}\right)$$

маємо

$$|f-f_{2m}|\leq \frac{2N}{\min\limits_{1\leq i_1\leq N}\Re\left(b_{i_1}\right)}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{2m}\prod_{k=1}^{2m}\left(1-\frac{1}{\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{N}{\mu_{k+1}}}\right),$$

де μ_k визначається співвідношенням (4.12). ∎

Оцінки швидкості збіжності ГЛД спеціального вигляду у кутових областях погіршуються, коли частинні знаменники близькі до нуля. Проте, якщо накласти обмеження на швидкість їх прямування до нуля (при прямуванні номера поверху звідки береться елемент до нескінченності), то можна отримати наступні теореми.

Теорема 4.4 *Нехай елементи ГЛД спеціального вигляду* (4.5) *задовольняють умови*

$$\left|\arg b_{i(k)}\right|\leq\theta,\ \theta<\frac{\pi}{4},\ i(k)\in\mathcal{I}, \tag{4.13}$$

$$\begin{gathered}\Re(b_{i(n)})\geq\delta,\ \Re(b_{1[s]})\geq\frac{\delta}{s^{\beta}},\ \Re(b_{i(n),1[s]})\geq\frac{\delta}{s^{\beta}},\\ s\geq 1,\ 0<\delta<1,\ 0\leq\beta\leq\frac{1}{2},\ i(n)\in\mathcal{I}^{(2)},\end{gathered} \tag{4.14}$$

де $\mathcal{I}^{(2)}=\left\{i(n)=(i_1,i_2,\ldots,i_n):2\leq i_n\leq i_{n-1}\leq...\leq i_0;\ n\geq 1;\ i_0=N\right\}.$
Тоді ГЛД (4.5) *збігається і справджується оцінка швидкості збіжності*

$$|f_m-f_{Nn}|<\frac{M_N}{\ln\left(1+\dfrac{\alpha}{1-\beta}\left((n+1)^{1-\beta}-1\right)\right)},\ m\geq Nn,\ n\in\mathbb{N}, \tag{4.15}$$

де α *і* M_N *– додатні сталі, що не залежать від* n *і* m,

$$\alpha=\min\left\{\delta^3\cos\theta,\delta\cos^3\theta\right\},$$

$$\begin{gathered}M_N=\frac{2+\delta}{\delta\cos\theta}K_N,\ K_1=1,\ K_j=2(2AK_{j-1}+1),\ j=2,3,\ldots,N,\\ A=\left(1+\frac{1}{\delta^2}\right)\left(1+\frac{1}{\delta^4\cos 2\theta+2\delta^2\cos 2\theta}\right),\end{gathered} \tag{4.16}$$

Д о в е д е н н я. Доведемо оцінку (4.15) використовуючи метод математичної індукції за розмірністю N ГЛД спеціального вигляду (4.5).

При $N=1$ дріб (4.5) вироджується у неперервний дріб

$$b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_{11}} + \frac{1}{b_{111}} + \ldots. \tag{4.17}$$

Нехай $f_k,\ k \geq 0,$ — його k-ий підхідний дріб. Із умови (4.13) випливає виконання умов теореми 1.6 для дробу (4.17). Як наслідок цієї теореми отримуємо оцінку:

$$|f_m - f_n| \leq \frac{1}{d_{n+1}} < \frac{1}{\mu_n},\ m > n,$$

де

$$\mu_n = \frac{\Re(b_1)}{2+\Re(b_1)} \cos\theta \ln\left(1 + (\Re(b_1))^2 \min\left\{1, \frac{1}{|b_1|^2}\right\} \cos\theta \sum_{k=1}^{n} \left|b_{1[k]}\right|\right),\ n \geq 1.$$

Очевидно, що

$$\frac{\Re(b_1)}{2+\Re(b_1)} \geq \frac{\delta}{2+\delta}.$$

Враховуючи умови (4.13), (4.14), маємо

$$(\Re(b_1))^2 \min\left\{1, \frac{1}{|b_1|^2}\right\} = \min\left\{(\Re(b_1))^2, \cos^2(\arg b_1)\right\} \geq \min\left\{\delta^2, \cos^2\theta\right\}$$

і

$$\sum_{k=1}^{n} \left|b_{1[k]}\right| \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta}{k^\beta} \geq \delta \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\beta} = \delta \cdot \frac{(n+1)^{1-\beta} - 1}{1-\beta},$$

оскільки функція $f(x) = \dfrac{1}{x^\beta}$ монотонно спадає при $x > 0$.

Отже,

$$|f_m - f_n| < \frac{2+\delta}{\delta\cos\theta} \frac{1}{\ln\left(1 + \dfrac{\alpha}{1-\beta}\left((n+1)^{1-\beta} - 1\right)\right)},\ m \geq n+1,$$

Тобто виконується нерівність (4.15) при $N=1$, тут $M_1 = \dfrac{2+\delta}{\delta\cos\theta} K_1,\ K_1 = 1.$

Припустимо, що виконується оцінка (4.15) для ГЛД розмірності $N,\ N = r-1$. Доведемо, що вона справджується для $N = r$. Розглянемо r-вимірний

ГЛД спеціального вигляду (4.5), де $i_0 = r$. Запишемо його n-й підхідний дріб у вигляді

$$f_n = b_0^{(r-1,n)} + \overset{n}{\underset{k=1}{D}} \frac{1}{b_{r[k]}^{(r-1,n-k)}},\ n \geq 1,$$

де

$$b_0^{(r-1,n)} = b_0 + \overset{n}{\underset{l=1}{D}} \sum_{i_l=1}^{i_{l-1}} \frac{1}{b_{i(l)}},\ b_{r[n]}^{(r-1,0)} = b_{r[n]},\ b_{r[k]}^{(r-1,n-k)} = b_{r[k]} + \overset{n-k}{\underset{l=1}{D}} \sum_{i_l=1}^{i_{l-1}} \frac{1}{b_{r[k],i(l)}}$$

— підхідні дроби відповідних $(r-1)$-вимірних ГЛД, що входять в структуру n-го підхідного дробу ГЛД (4.5), $k = 1, 2, \ldots, n-1,\ i_0 = r-1$.

Запишемо нерівність трикутника

$$|f_m - f_{rn}| \leq \left| f_m - \widehat{f}_n \right| + \left| f_{rn} - \widehat{f}_n \right|,\ m \geq rn,$$

де

$$\widehat{f}_n = b_0^{(r-1)} + \overset{n}{\underset{k=1}{D}} \frac{1}{b_{r[k]}^{(r-1)}}$$

— n-й підхідний дріб неперервного дробу, утвореного в результаті згортання всіх $(r-1)$-вимірних ГЛД у дробі (4.5), тобто

$$b_0^{(r-1)} = b_0 + \overset{\infty}{\underset{l=1}{D}} \sum_{i_l=1}^{i_{l-1}} \frac{1}{b_{i(l)}},\ b_{r[k]}^{(r-1)} = b_{r[k]} + \overset{\infty}{\underset{l=1}{D}} \sum_{i_l=1}^{i_{l-1}} \frac{1}{b_{r[k],i(l)}}, \tag{4.18}$$

$$i_0 = r-1,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Ці дроби є збіжними згідно з аналогом ознаки збіжності неперервних дробів Ван Флека для ГЛД спеціального вигляду (теорема 4.1).

Оцінимо величини $\left| f_p - \widehat{f}_n \right|,\ p \geq rn.$

Розглянемо скінченний неперервний дріб вигляду

$$h_{p,n} = b_0^{(r-1)} + \frac{1}{b_{r[1]}^{(r-1)}} + \cdots + \frac{1}{b_{r[n]}^{(r-1)}} + \frac{1}{b_{r[n+1]}^{(r-1,p-n-1)}} + \cdots + \frac{1}{b_{r[p]}^{(r-1,0)}},$$

з елементами, що визначаються за формулами, (4.18). Очевидно, що

$$\left| f_p - \widehat{f}_n \right| \leq |f_p - h_{p,n}| + \left| h_{p,n} - \widehat{f}_n \right|. \tag{4.19}$$

Оцінимо зверху кожен із доданків правої частини нерівності (4.19). Аналогічно до того, як була встановлена оцінка (3.46) для неперервних дробів, елементами яких були значення скінченних або нескінченних неперервних дробів, встановлюється подібна оцінка для неперервних дробів елементами яких значення $(r-1)$-вимірних скінченних або нескінченних ГЛД спеціального вигляду

$$|f_p - h_{p,n}| \leq \left| b_0^{(r-1)} - b_0^{(r-1,p)} \right| + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left| b_{r[k]}^{(r-1)} - b_{r[k]}^{(r-1,p-k)} \right|}{\prod\limits_{s=1}^{k} \left| \widetilde{Q}_{r[s]}^{(p)} Q_{r[s]}^{(p)} \right|}, \qquad (4.20)$$

де $\widetilde{Q}_{r[s]}^{(p)}$, $Q_{r[s]}^{(p)}$ – s-ті залишки неперервних дробів $h_{p,n}$ і f_p, відповідно, $s = \overline{1,k}$.

Розглянемо добутки в знаменниках останнього співвідношення. Якщо $k = 2l,\ l \geq 1$, то

$$\prod_{s=1}^{2l} \left| \widetilde{Q}_{r[s]}^{(p)} Q_{r[s]}^{(p)} \right| = \prod_{s=1}^{l} \left(\left| \widetilde{Q}_{r[2s-1]}^{(p)} \widetilde{Q}_{r[2s]}^{(p)} \right| \cdot \left| Q_{r[2s-1]}^{(p)} Q_{r[2s]}^{(p)} \right| \right).$$

Враховуючи, що

$$\Re(b_{r[k]}^{(r-1)}) = \Re(b_{r[k]}) + \Re(\mathop{\mathrm{D}}_{l=1}^{\infty} \sum_{i_l=1}^{i_{l-1}} \frac{1}{b_{r[k],i(l)}}) > \Re(b_{r[k]}) \geq \delta,\ k = \overline{1,n},$$

оцінимо кожен з множників добутку окремо

$$\left| \widetilde{Q}_{r[2s-1]}^{(p)} \widetilde{Q}_{r[2s]}^{(p)} \right| = \left| \widetilde{Q}_{r[2s]}^{(p)} \left(b_{r[2s-1]}^{(r-1)} + \frac{1}{\widetilde{Q}_{r[2s]}^{(p)}} \right) \right| \geq \Re\left(b_{r[2s-1]}^{(r-1)} \widetilde{Q}_{r[2s]}^{(p)} + 1 \right) =$$

$$= \Re\left(b_{r[2s-1]}^{(r-1)} \left(b_{r[2s]}^{(r-1)} + \frac{1}{\widetilde{Q}_{r[2s+1]}^{(p)}} \right) \right) + 1 \geq \Re\left(b_{r[2s-1]} b_{r[2s]} \right) + 1 \geq \delta^2 \cos 2\theta + 1.$$

Для множників $\left| Q_{r[2s-1]}^{(p)} Q_{r[2s]}^{(p)} \right|,\ s = \overline{1,l}$, встановлюється аналогічна оцінка.

Таким чином,

$$\prod_{s=1}^{2l} \left| \widetilde{Q}_{r[s]}^{(p)} Q_{r[s]}^{(p)} \right| \geq \left(\delta^2 \cos 2\theta + 1 \right)^{2l}.$$

Якщо $k = 2l+1,\ l \geq 1$, то

$$\prod_{s=1}^{2l+1} \left| \widetilde{Q}_{r[s]}^{(p)} Q_{r[s]}^{(p)} \right| = \left| \widetilde{Q}_{r[1]}^{(p)} Q_{r[1]}^{(p)} \right| \prod_{s=1}^{l} \left(\left| \widetilde{Q}_{r[2s]}^{(p)} \widetilde{Q}_{r[2s+1]}^{(p)} \right| \cdot \left| Q_{r[2s]}^{(p)} Q_{r[2s+1]}^{(p)} \right| \right) \geq$$

$$\geq \left(\Re \left(b_{r[1]} \right) \right)^2 \prod_{s=1}^{l} \left(\Re \left(b_{r[2s]} b_{r[2s+1]} \right) + 1 \right)^2 \geq \delta^2 \left(\delta^2 \cos 2\theta + 1 \right)^{2l}.$$

Отже,

$$\prod_{s=1}^{k} \left| \widetilde{Q}_{r[s]}^{(p)} Q_{r[s]}^{(p)} \right| \geq \delta^{1-(-1)^k} \left(\delta^2 \cos 2\theta + 1 \right)^{2\left[\frac{k}{2}\right]},\ 1 \leq k \leq n,$$

де $\left[\dfrac{k}{2}\right]$ — ціла частина $\dfrac{k}{2}$, бо, крім того, при $k=1$ $\left| \widetilde{Q}_{r}^{(p)} Q_{r}^{(p)} \right| \geq \delta^2$.

Оцінимо величини чисельників $\left| b_{r[k]}^{(r-1)} - b_{r[k]}^{(r-1,p-k)} \right|$, $1 \leq k \leq n$, нерівності (4.20). Оскільки за припущенням індукції твердження теореми справедливе, для $(r-1)$-вимірних ГЛД спеціального вигляду, що задовольняють умови теореми, то виконуються нерівності

$$\left| b_{r[k]}^{(r-1,p-k)} - b_{r[k]}^{(r-1,(r-1)n)} \right| < \frac{2+\delta}{\delta \cos\theta} \frac{K_{r-1}}{\ln \left(1 + \dfrac{\alpha}{1-\beta} \left((n+1)^{1-\beta} - 1 \right) \right)},$$

як оцінка різниці між $(p-k)$-м і $((r-1)n)$-м підхідними дробами $(r-1)$-вимірного ГЛД спеціального вигляду, $k = 1, 2, \ldots, n;\ p-k \geq (r-1)n$. Здійснивши в останній нерівності граничний перехід при $p \to \infty$, враховуючи факт збіжності усіх $(r-1)$-вимірних ГЛД спеціального вигляду, що входять у структуру ГЛД (4.5), маємо

$$\left| b_{r[k]}^{(r-1)} - b_{r[k]}^{((r-1),(r-1)n)} \right| \leq \frac{2+\delta}{\delta \cos\theta} \frac{K_{r-1}}{\ln \left(1 + \dfrac{\alpha}{1-\beta} \left((n+1)^{1-\beta} - 1 \right) \right)}, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким чином, беручи до уваги нерівність

$$\left| b_{r[k]}^{(r-1)} - b_{r[k]}^{(r-1,p-k)} \right| \leq \left| b_{r[k]}^{(r-1)} - b_{r[k]}^{((r-1),(r-1)n)} \right| + \left| b_{r[k]}^{(r-1,p-k)} - b_{r[k]}^{((r-1),(r-1)n)} \right|,$$

отримуємо

$$\left|b_{r[k]}^{(r-1)} - b_{r[k]}^{(1,p-k)}\right| < \frac{2+\delta}{\delta\cos\theta}\frac{2K_{r-1}}{\ln\left(1+\frac{\alpha}{1-\beta}\left((n+1)^{1-\beta}-1\right)\right)},$$

де $k = 1, 2, \ldots, n,\ p \geq rn$. Аналогічна оцінка справджується і для першого доданку правої частини нерівності (4.20).

Таким чином,

$$|f_p - h_{p,n}| < \frac{2+\delta}{\delta\cos\theta}\frac{2K_{r-1}}{\ln\left(1+\frac{\alpha}{1-\beta}\left((n+1)^{1-\beta}-1\right)\right)}\cdot$$

$$\left(1+\frac{1}{\delta^2}+\frac{1}{\left(\delta^2\cos\theta+1\right)^2}+\frac{1}{\delta^2\left(\delta^2\cos\theta+1\right)^2}+\cdots+\frac{1}{\delta^{1-(-1)^n}\left(\delta^2\cos 2\theta+1\right)^{2\left[\frac{n}{2}\right]}}\right) <$$

$$< \frac{2+\delta}{\delta\cos\theta}\frac{2K_{r-1}}{\ln\left(1+\frac{\alpha}{1-\beta}\left((n+1)^{1-\beta}-1\right)\right)}\cdot\left(1+\frac{1}{\delta^2}\right)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\delta^2\cos 2\theta+1\right)^{-2k} =$$

$$= \frac{(2+\delta)}{\delta\cos\theta}\frac{2K_{r-1}A}{\ln\left(1+\frac{\alpha}{1-\beta}\left((n+1)^{1-\beta}-1\right)\right)},\ p \geq rn,$$

де A визначається за формулою (4.16).

Використовуючи теорему 1.6, оцінимо другий доданок у правій частині нерівності (4.19) $\left|h_{p,n} - \widehat{f}_n\right|$, що є різницею підхідних дробів деякого неперервного дробу із елементами, що належать області (1.8). За аналогією з (1.9), маємо

$$\left|h_{p,n} - \widehat{f}_n\right| \leq \frac{1}{\nu_n},\ n \geq 1,$$

де

$$\nu_n = \frac{\Re\left(b_r^{(r-1)}\right)}{2+\Re\left(b_r^{(r-1)}\right)}\cos\theta\times$$

$$\times\ln\left(1+\left(\Re\left(b_r^{(r-1)}\right)\right)^2\min\left\{1,\frac{1}{\left|b_r^{(r-1)}\right|^2}\right\}\cos\theta\sum_{s=1}^{n}\left|b_{r[s]}^{(r-1)}\right|\right).$$

Оскільки $\Re\left(b_{r[k]}^{(r-1)}\right) \geq \delta,\ k = 1, 2, \ldots$, то, проводячи аналогічні міркування як при доведенні випадку $N = 1$, маємо

$$\nu_n \geq \frac{\delta \cos\theta}{2+\delta} \ln\left(1 + \alpha n\right),\ n \geq 1.$$

Тоді

$$\left|h_{p,n} - \widehat{f_n}\right| < \frac{(2+\delta)}{\delta\cos\theta} \frac{1}{\ln\left(1+\alpha n\right)}.$$

З урахуванням оцінок доданків правої частини нерівності (4.19), отримуємо

$$\left|f_p - \widehat{f_n}\right| < \frac{2+\delta}{\delta\cos\theta} \cdot \frac{2K_{r-1}A + 1}{\ln\left(1 + \frac{\alpha}{1-\beta}\left((n+1)^{1-\beta} - 1\right)\right)},\ p \geq rn,$$

оскільки при заданих обмеженнях на β $\left(0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}\right)$

$$n \geq \frac{1}{1-\beta}\left((n+1)^{1-\beta} - 1\right).$$

Для $m \geq rn$, взявши у попередній нерівності $p = m$, $p = rn$, маємо

$$|f_m - f_{rn}| \leq \left|f_m - \widehat{f_n}\right| + \left|f_{rn} - \widehat{f_n}\right| <$$

$$< \frac{2+\delta}{\delta\cos\theta} \frac{2\left(2K_{r-1}A + 1\right)}{\ln\left(1 + \frac{\alpha}{1-\beta}\left((n+1)^{1-\beta} - 1\right)\right)} =$$

$$= \frac{M_r}{\ln\left(1 + \frac{\alpha}{1-\beta}\left((n+1)^{1-\beta} - 1\right)\right)},$$

де

$$M_r = \frac{(2+\delta)}{\delta\cos\theta} \cdot K_r,\ K_r = 2\left(2K_{r-1}A + 1\right).$$

Отже, для підхідних дробів f_k N-вимірних ГЛД (4.5), де N – довільне фіксоване натуральне число, справджується оцінка

$$|f_m - f_{Nn}| < \frac{2+\delta}{\delta\cos\theta} \frac{K_N}{\ln\left(1 + \frac{\alpha}{1-\beta}\left((n+1)^{1-\beta} - 1\right)\right)},\ m \geq Nn.$$

∎

Зауваження 4.1 *Твердження теореми 4.4 залишається правильним, якщо умови* (4.13) *замінити умовами:*

$$\left|\arg b_{i(k)}\right| \leq \theta,\ \theta < \frac{\pi}{2},\ i(k) \in \mathcal{I},$$

і

$$\begin{cases} \Im\left(b_{i(2l)}\right) \geq 0, \\ \Im\left(b_{i(2l-1)}\right) \leq 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \Im\left(b_{i(2l)}\right) \leq 0, \\ \Im\left(b_{i(2l-1)}\right) \geq 0, \end{cases}$$

$l = 1, 2, \ldots\ ,\ i(2l) \in \mathcal{I}$.

Покладаючи у формулюванні теореми 4.4 $\beta = 0$, отримуємо наступний результат.

Наслідок 4.1 *Нехай елементи ГЛД спеціального вигляду* (4.5) *задовольняють умови:*

$$\Re(b_{i(k)}) \geq \delta,\ 0 < \delta < 1,\ \left|\arg b_{i(k)}\right| < \theta,\ \theta \leq \frac{\pi}{4},\ i(k) \in \mathcal{I}.$$

Тоді ГЛД (4.5) *збігається і справджується оцінка швидкості збіжності*

$$|f_m - f_{Nn}| < \frac{M_N}{\ln\left(1 + \alpha n\right)},\ m \geq Nn,$$

де M_N і α — деякі додатні сталі, що не залежать від n і m.

4.3. Оцінка швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду у спарених кутових множинах

Теорема 4.5 *Нехай елементи ГЛД*

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \tag{4.21}$$

задовольняють умови

$$\Im\left(b_{i(2p-1)}\right) \geq 0,\ \Im\left(b_{i(2p)}\right) \leq 0,\ i(2p) \in \mathcal{I}, \tag{4.22}$$

$$\Re\left(b_{i(k)}\right) \geq \delta,\ i(k) \in \mathcal{I}, \tag{4.23}$$

$$0 < a_{i(k)} \leq M,\ i(k) \in \mathcal{I}, \tag{4.24}$$

де δ, M *– деякі додатні сталі. Тоді ГЛД* (4.21) *збігається і для швидкості збіжності справджується оцінка*

$$|f_m - f_{Nn}| < D_N \left(\frac{\sqrt{\delta^2 + 4M} - \delta}{\sqrt{\delta^2 + 4M} + \delta}\right)^n,\ m \geq Nn, \tag{4.25}$$

де D_N *– додатна стала, що не залежить від* m *і* n, *яка визначається згідно з рекурентним співвідношенням*

$$\begin{gathered} D_1 = \frac{2M}{\delta},\ D_r = 4\left(D_{r-1}S + \frac{M}{\delta}\right),\ r = 2, 3, \ldots, N, \\ S = 1 + \frac{M\sqrt{M^2 + \delta^4}}{\delta^2\left(\sqrt{M^2 + \delta^4} - M\right)}. \end{gathered} \tag{4.26}$$

Д о в е д е н н я. Зі співвідношень (4.22)–(4.24) випливає, що елементи ГЛД (4.21) задовольняють умови теореми 1.16. Отже, ГЛД (4.21) збігається.

Доведення оцінки (4.25) проведемо, використовуючи метод матичної індукції за вимірністю ГЛД спеціального вигляду.

Нехай $N = 1$. Тоді ГЛД (4.21) вироджується у неперервний дріб

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_{1[2]}}{b_{1[2]}} + \cdots + \frac{a_{1[k]}}{b_{1[k]}} + \ldots,$$

для елементів якого виконуються умови (4.23) і (4.24). Цей неперервний дріб задовольняє умови теореми 1.7, згідно якої

$$|f_m - f_n| < 2\alpha_1 \prod_{k=1}^{n+1} \frac{\sqrt{1 + 4\alpha_k} - 1}{\sqrt{1 + 4\alpha_k} + 1},\ m \geq n,$$

де $\alpha_1 = \dfrac{a_1}{\Re(b_1)},\ \alpha_k = \dfrac{a_{1[k]}}{\Re(b_{1[k]})\Re(b_{1[k-1]})},\ k = 2, 3, \ldots, n+1$. Оскільки

$$\alpha_1 \leq \frac{M}{\delta},\ \alpha_k \leq \frac{M}{\delta^2},\ k = 2, 3, \ldots, n+1,$$

і функція

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+4x}-1}{\sqrt{1+4x}+1}$$

монотонно зростає при $x > 0$, то

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{\sqrt{1+4\alpha_k}-1}{\sqrt{1+4\alpha_k}+1} \le \left(\frac{\sqrt{\delta^2+4M}-\delta}{\sqrt{\delta^2+4M}+\delta} \right)^n .$$

Таким чином, враховуючи позначення (4.26), маємо

$$|f_m - f_n| < D_1 \rho^n, \ m \ge n,$$

де

$$\rho = \frac{\sqrt{\delta^2+4M}-\delta}{\sqrt{\delta^2+4M}+\delta}. \tag{4.27}$$

Припустимо, що оцінка (4.25) виконується для довільних $(r-1)$-вимірних ГЛД (4.21), $r > 3$, елементи яких задовольняють умови (4.22)-(4.24), тобто

$$\left| f_m - f_{(r-1)n} \right| < D_{r-1} \rho^n, \ m \ge (r-1)n, \ n = 1, 2, \dots .$$

Доведемо, що виконується оцінка (4.25) при $N = r$, тобто для ГЛД

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^{r} \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}. \tag{4.28}$$

Його q-й підхідний дріб можна записати у вигляді

$$f_q = b_0^{(r-1,q)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{q} \frac{b_{r[k]}}{a_{r[k]}^{(r-1,q-k)}}, \ q \ge 1, \tag{4.29}$$

де

$$b_0^{(r-1,q)} = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{l=1}^{q} \sum_{i_l=1}^{i_{l-1}} \frac{a_{i(l)}}{b_{i(l)}}, \ b_{r[q]}^{(r-1,0)} = b_{r[q]}, \ b_{r[k]}^{(r-1,q-k)} = b_{r[k]} + \mathop{\mathrm{D}}_{l=1}^{q-k} \sum_{i_l=1}^{i_{l-1}} \frac{a_{r[k],i(l)}}{b_{r[k],i(l)}}, \tag{4.30}$$

$$k = 1, 2, \dots, q-1, \ i_0 = r-1,$$

— підхідні дроби всеможливих $(r-1)$-вимірних ГЛД, що входять у структуру ГЛД (4.28).

Для підхідних дробів ГЛД (4.28) запишемо нерівність трикутника

$$|f_m - f_{rn}| \le \left|f_m - \widehat{f}_n\right| + \left|f_{rn} - \widehat{f}_n\right|, \ m \ge rn, \tag{4.31}$$

де

$$\widehat{f}_n = b_0^{(r-1)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \frac{a_{r[k]}}{b_{r[k]}^{(r-1)}}, \ n \ge 1,$$

– n-й підхідний дріб неперервного дробу, утвореного в результаті згортання всіх $(r-1)$-вимірних ГЛД, з яких складається ГЛД (4.28), тобто

$$b_0^{(r-1)} = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{l=1}^{\infty} \sum_{i_l=1}^{i_{l-1}} \frac{a_{i(l)}}{b_{i(l)}}, \ b_{r[k]}^{(r-1)} = b_{r[k]} + \mathop{\mathrm{D}}_{l=1}^{\infty} \sum_{i_l=1}^{i_{l-1}} \frac{a_{r[k],i(l)}}{b_{r[k],i(l)}}, \tag{4.32}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n; \quad i_0 = r-1.$$

ГЛД (4.32) є збіжними, оскільки для них виконуються умови теореми 1.16. Таким чином, запропоновані позначення мають зміст.

Для оцінки величини $\left|f_p - \widehat{f}_n\right|$, $p \ge rn$, у правій частині нерівності (4.32) розглянемо скінченний неперервний дріб

$$g_{p,n} = b_0^{(r-1)} + \frac{a_{r[1]}}{b_{r[1]}^{(r-1)}} + \cdots + \frac{a_{r[n]}}{b_{r[n]}^{(r-1)}} + \frac{a_{r[n+1]}}{b_{r[n+1]}^{(r-1,p-n-1)}} + \cdots + \frac{b_{r[p]}}{b_{r[p]}^{(r-1,0)}},$$

елементи якого визначаються з урахуванням позначень (4.30), (4.32).

Очевидно, що

$$\left|f_p - \widehat{f}_n\right| \le |f_p - g_{p,n}| + \left|g_{p,n} - \widehat{f}_n\right|. \tag{4.33}$$

Встановимо оцінку зверху для кожного з доданків правої частини цієї нерівності. Нехай $Q_{r[s]}^{(p)}, \widehat{Q}_{r[s]}^{(p)}$,$s = 1, 2, \ldots, p$, – залишки неперервних дробів f_p та $g_{p,n}$, відповідно,

$$Q_{r[p]}^{(p)} = b_{r[p]}^{(r-1,0)}, \ Q_{r[s]}^{(p)} = b_{r[s]}^{(r-1,p-s)} + \frac{a_{r[s]}}{Q_{r[s+1]}^{(p)}}, \ s = 1, 2, \ldots, p-1;$$

$$\widehat{Q}_{r[s]}^{(p)} = \begin{cases} b_{r[s]}^{(r-1)} + \dfrac{a_{r[s+1]}}{\widehat{Q}_{r[s+1]}^{(p)}}, \ s = 1, 2, \ldots, n, \\ Q_{r[s]}^{(p)}, \ s = n+1, n+2, \ \ldots, p. \end{cases}$$

Використовуючи міркування, що були наведені при доведенні нерівності (3.46), маємо

$$|f_p - g_{p,n}| \leq \left|b_0^{(r-1,p)} - b_0^{(r-1)}\right| + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|b_{r[k]}^{(r-1,p-k)} - b_{r[k]}^{(r-1)}\right|}{\prod\limits_{s=1}^{k} \left|\widehat{Q}_{r[s]}^{(p)} Q_{r[s]}^{(p)}\right|} a_{r[1]} a_{r[2]} \ldots a_{r[k]}. \quad (4.34)$$

Оцінимо величини

$$\left|b_{r[k]}^{(r-1,p-k)} - b_{r[k]}^{(r-1)}\right|, \ 1 \leq k \leq n,$$

як модулі різниці між значеннями $(r-1)$-вимірного ГЛД спеціального вигляду і його $(p-k)$-м підхідним дробом, $p-k \geq (r-1)n$. Враховуючи припущення індукції, позначення (4.27), а також те, що елементи ГЛД (4.32) задовольняють умови теореми, отримаємо

$$\left|b_{r[k]}^{(r-1,p-k)} - b_{r[k]}^{(r-1,(r-1)n)}\right| \leq D_{r-1}\rho^n, \ p \geq rn, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Здійснивши граничний перехід, при $p \to \infty$, отримуємо

$$\left|b_{r[k]}^{(r-1)} - b_{r[k]}^{(r-1,(r-1)n)}\right| \leq D_{r-1}\rho^n, \ n \geq 1.$$

Отже, для $p \geq rn, \ k = 1, 2, \ldots, n,$, маємо

$$\left|b_{r[k]}^{(r-1,p-k)} - b_{r[k]}^{(r-1)}\right| \leq \left|b_{r[k]}^{(r-1,p-k)} - b_{r[k]}^{(r-1,(r-1)n)}\right| + \left|b_{r[k]}^{(r-1)} - b_{r[k]}^{(r-1,(r-1)n)}\right| \leq 2D_{r-1}\rho^n.$$

Аналогічно для першого доданка правої частини нерівності (4.34) маємо

$$\left|b_0^{(r-1,p)} - b_0^{(r-1)}\right| \leq 2D_{r-1}\rho^n, \ p \geq rn.$$

Розглянемо добутки

$$\prod_{s=1}^{k} \frac{a_{r[s]}}{\left|\widehat{Q}_{r[s]}^{(p)} Q_{r[s]}^{(p)}\right|}$$

у нерівності (4.34). Якщо $k=1$, то, враховуючи, що $\Re\left(Q_r^{(p)}\right) \geq \delta$, $\Re\left(\widehat{Q}_r^{(p)}\right) \geq \delta$, маємо

$$\frac{a_r}{\left|\widehat{Q}_r^{(p)} Q_r^{(p)}\right|} \leq \frac{M}{\delta^2}.$$

Якщо $k = 2l + 1,\ l \geq 1$, тоді маємо

$$\prod_{s=1}^{2l+1} \frac{a_{r[s]}}{\left|\widehat{Q}^{(p)}_{r[s]} Q^{(p)}_{r[s]}\right|} = \frac{a_r}{\left|\widehat{Q}^{(p)}_{r} Q^{(p)}_{r[2l+1]}\right|} \prod_{s=1}^{l} \frac{a_{r[2s+1]}}{\left|\widehat{Q}^{(p)}_{r[2s]} \widehat{Q}^{(p)}_{r[2s+1]}\right|} \prod_{s=1}^{l} \frac{a_{r[2s]}}{\left|Q^{(p)}_{r[2s-1]} Q^{(p)}_{r[2s]}\right|}.$$

Із виконання для елементів ГЛД (4.21) умов (4.22)-(4.24) випливає, що для елементів (4.30) і (4.32) неперервних дробів (4.29) і (4.31) умови (1.26) і (1.27) теореми 1.16 виконуються при $L = \dfrac{M}{\delta^2}$. Тому для дробів $g_{p,n}$ і f_n справджується оцінка (1.28), де

$$\frac{L^2}{L^2+1} = \frac{M^2}{M^2+\delta^4}.$$

Тоді

$$\frac{a_{r[2s+1]}}{\left|\widehat{Q}^{(p)}_{r[2s]} \widehat{Q}^{(p)}_{r[2s+1]}\right|} \leq \tau,\ \ \frac{a_{r[2s]}}{\left|Q^{(p)}_{r[2s+1]} Q^{(p)}_{r[2s]}\right|} \leq \tau,\ \ s = 1, 2, \ldots, \tag{4.35}$$

де $\tau = \dfrac{M}{\sqrt{M^2+\delta^4}}$.

Тому

$$\prod_{s=1}^{2l+1} \frac{a_{2[s]}}{\left|\widehat{Q}^{(p)}_{2[s]} \widehat{Q}^{(p)}_{2[s]}\right|} \leq \frac{M}{\delta^2}\tau^{2l}.$$

Якщо $k = 2l,\ l \geq 1$, то враховуючи (4.35), отримуємо

$$\prod_{s=1}^{2l} \frac{a_{r[s]}}{\left|\widehat{Q}^{(p)}_{r[s]} Q^{(p)}_{r[s]}\right|} = \frac{a_r}{\left|\widehat{Q}^{(p)}_{r} Q^{(p)}_{r[2l]}\right|} \prod_{s=1}^{l-1} \frac{a_{r[2s+1]}}{\left|\widehat{Q}^{(p)}_{r[2s]} \widehat{Q}^{(p)}_{r[2s+1]}\right|} \prod_{s=1}^{l} \frac{a_{r[2s]}}{\left|Q^{(p)}_{r[2s+1]} Q^{(p)}_{r[2s]}\right|} \leq \frac{M}{\delta^2}\tau^{2l-1}.$$

Отже,

$$\prod_{s=1}^{k} \frac{a_{r[s]}}{\left|\widehat{Q}^{(p)}_{r[s]} Q^{(p)}_{r[s]}\right|} < \frac{M}{\delta^2}\tau^{k-1}. \tag{4.36}$$

Із нерівностей (4.34) та (4.36) з урахуванням отриманих оцінок маємо

$$|f_p - g_{p,n}| \leq 2D_{r-1}\rho^n \left(1 + \frac{M}{\delta^2} + \frac{M}{\delta^2}\tau + \ldots \frac{M}{\delta^2}\tau^{n-1}\right) < 2D_{r-1}S\rho^n,$$

де S визначено у позначеннях (4.26).

Оцінимо другий доданок у правій частині нерівності (4.33), що є модулем різниці між n-м і $(n+1)$-м підхідними дробами деякого неперервного дробу, елементи якого задовольняють умови теореми 1.7. Тому маємо

$$|f_p - g_{p,n}| \le \frac{2M}{\delta}\rho^n, \ p \ge rn,$$

де ρ визначається згідно із позначенням (4.27).

Враховуючи оцінки доданків правої частини нерівності (4.33), отримуємо

$$\left|f_p - \widehat{f}_n\right| < 2\left(D_{r-1}S + \frac{M}{\delta}\right)\rho^n, \ p \ge rn.$$

Покладемо в останній нерівності $p = m$, $p = rn$. Оскільки за умовою $m \ge rn$, то

$$|f_m - f_{rn}| \le \left|f_m - \widehat{f}_n\right| + \left|f_{rn} - \widehat{f}_n\right| < D_r\rho^n, \ m \ge rn,$$

де D_r визначається співвідношеннями (4.26). ■

Зауваження 4.2 *Твердження теореми залишається правильним, якщо умову* (4.22) *замінити умовою*

$$\Im\left(b_{i(2p-1)}\right) \le 0, \ \Im\left(b_{i(2p)}\right) \ge 0, \ i(2p) \in \mathcal{I}.$$

4.4. Дослідження збіжності багатовимірних S-дробів з нерівнозначними змінними

Розглянемо ГЛД з нерівнозначними змінними

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)}z_{i_k}}{b_{i(k)}}, \ i_0 = N. \tag{4.37}$$

Теорема 4.6 *ГЛД* (4.37) *з нерівнозначними змінними збігається у кожній точці* $\boldsymbol{z}_0 = (z_{10}, z_{20}, \ldots, z_{N0}) \in \mathbb{C}^N$, *якщо виконуються умови*

$$\Im\left(b^*_{i(2p-1)}\right) \ge 0, \ \Im\left(b^*_{i(2p)}\right) \le 0, \ i(2p) \in \mathcal{I},$$

або

$$\Im\left(b^*_{i(2p-1)}\right) \le 0, \ \Im\left(b^*_{i(2p)}\right) \ge 0, \ i(2p) \in \mathcal{I},$$

і

$$\Re\left(b^*_{i(k)}\right) \geq \delta,\ \delta > 0,\ 0 < c_{i(k)} \leq c,\ i\,(k) \in \mathcal{I},$$

де

$$b^*_{i(k)} = b_{i(k)} \exp\left(i \sum_{p=1}^{k} (-1)^{k+p-1} \arg z_{i_p 0}\right).$$

Справджується оцінка швидкості збіжності ГЛД (4.37) *в точці* $\boldsymbol{z}_0$

$$|f_m(\boldsymbol{z}_0) - f_{Nn}(\boldsymbol{z}_0)| < D_N \left(\frac{\sqrt{\delta^2 + 4M} - \delta}{\sqrt{\delta^2 + 4M} + \delta}\right)^n,\ m \geq Nn, \tag{4.38}$$

де $M = c \max\limits_{1 \leq m \leq N} |z_{m0}|$.

Д о в е д е н н я. Здійснимо еквівалентні перетворення ГЛД (4.37) покладаючи у співвідношеннях (1.22)

$$\rho_{i(k)} = \prod_{p=1}^{k} (-1)^{k+p-1} \exp\left(i \arg z_{i_p}\right).$$

Отримаємо еквівалентний йому ГЛД

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)} |z_{i_k}|}{b_{i(k)}(\mathbf{z})}, \tag{4.39}$$

де

$$b_{i(k)}(\mathbf{z}) = b_{i(k)} \exp\left(i \sum_{p=1}^{k} (-1)^{k+p-1} \arg z_{i_p}\right).$$

Для елементів ГЛД (4.39) виконуються умови теореми 4.7. Як наслідок, отримаємо оцінку (4.38). ■

Зауваження 4.3 *Послідовність*

$$\left\{\sum_{p=1}^{k} (-1)^{k+p-1} \arg z_{i_p 0}\right\}_{i(k) \in \mathcal{I}},$$

з урахуванням структури множини $\mathcal{I}$, $\mathcal{I} = \{i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k\ : 1 \leq i_k \leq i_{k-1} \leq ... \leq i_0;\ k \geq 1;\ i_0 = N\}$. *містить* 2^N *елементів, де* N *— вимірність ГЛД. Наприклад, при* N=2 *це множина*

$$\{-\arg z_{10}, -\arg z_{20}, \arg z_{20}, -\arg z_{10}, 0\}.$$

Розглянемо багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними вигляду

$$d_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)} z_{i_k}}{1},\ i_0 = N. \tag{4.40}$$

Теорема 4.7 *Нехай елементи ГЛД* (4.40) *задовольняють умову*

$$0 < c_{i(k)} < c,\ i(k) \in \mathcal{I}.$$

Тоді ГЛД (4.40) *рівномірно збігається на кожному компакті області*

$$G = \left\{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\} : -\frac{\pi}{2} < \arg z_N \le \arg z_{N-1} \le \cdots \le \arg z_1 < 0 \right\}$$

до голоморфної у цій області функції і для швидкості збіжності справджується оцінка

$$|f_m(\boldsymbol{z}) - f_{Nn}(\boldsymbol{z})| < D_N \left(\frac{\sqrt{\delta^2 + 4M} - \delta}{\sqrt{\delta^2 + 4M} + \delta} \right)^n,\ m \ge Nn,\ n \ge 1,$$

де

$$M = c \max_{\boldsymbol{z} \in K, 1 \le m \le N} |z_m|, \delta = \cos \left(\max_{\boldsymbol{z} \in K} |\arg z_N| \right),$$

а стала D_N визначаєтьмя згідно із співвідношеннями (4.26).

Д о в е д е н н я. Здійснивши еквівалентні перетворення, зведемо ГЛД (4.40) до вигляду

$$d_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)} |z_{i_k}|}{d_{i(k)}(\mathbf{z})} \tag{4.41}$$

де

$$d_{i(k)}(\mathbf{z}) = \exp \left(i \sum_{p=1}^{k} (-1)^{k+p-1} \arg z_{i_p} \right).$$

Використовуючи співвідношення

$$d_{i(k)}(\mathbf{z}) = \frac{1}{d_{i(k-1)}(\mathbf{z}) \exp(\arg z_{i_k})},\ k \ge 2,\ i(k) \in \mathcal{I},$$

і враховуючи, що $\mathbf{z} \in G$, методом математичної індукції легко довести, що справджуються нерівності

$$0 < \arg d_{i(2s-1)}(\mathbf{z}) < \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} < \arg d_{i(2s)}(\mathbf{z}) \le 0,\ i(2s) \in \mathcal{I}. \tag{4.42}$$

Справді, при $s=1$, $\arg d_{i_1}(\mathbf{z})=-\arg z_{i_1}$, тобто

$$0<\arg d_{i_1}(\mathbf{z})<\frac{\pi}{2},\ i_1=\overline{1,N}. \tag{4.43}$$

При $k=2$, $\arg d_{i(2)}(\mathbf{z})=\arg z_{i_1}-\arg z_{i_2}$. Оскільки $i_1\geq i_2$ і $\mathbf{z}\in G$, то $\arg d_{i(2)}(\mathbf{z})\leq 0$. А враховуючи (4.43), маємо $\arg d_{i(2)}(\mathbf{z})=-\arg d_{i(1)}(\mathbf{z})-\arg z_{i_2}>-\frac{\pi}{2}$. Таким чином,

$$-\frac{\pi}{2}<\arg d_{i(2)}(\mathbf{z})\leq 0,\ i(2)\in\mathcal{I}.$$

Припустимо, що нерівності (4.42) виконуються при $s=l$, тобто

$$0<\arg d_{i(2l-1)}(\mathbf{z})<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<\arg d_{i(2l)}(\mathbf{z})\leq 0.$$

Доведемо, що вони справджуються і при $s=l+1$. Нехай $s=l+1$, тоді, враховуючи, що $i_1\geq i_2\geq\cdots\geq i_{2s+1}$ і $\mathbf{z}\in G$, маємо

$$\arg d_{i(2l+1)}(\mathbf{z})=(-\arg z_{i_1}+\arg z_{i_2})+\cdots+\big(-\arg z_{i_{2l-1}}+\arg z_{i_{2l}}\big)-\arg z_{i_{2l+1}}>0,$$

оскільки вирази в дужках правої частини є додатними величинами і справедлива нерівність (4.43). Якщо згрупувати доданки іншим чином, отримаємо

$$\arg d_{i(2l+1)}(\mathbf{z})=-\arg d_{i(2l)}(\mathbf{z})-\arg z_{i_{2l+1}}<\frac{\pi}{2}.$$

Отже, для довільних $\mathbf{z}\in G$, $0<\arg d_{i(2s+1)}(\mathbf{z})<\frac{\pi}{2}$, $i(2s+1)\in\mathcal{I}$. Аналогічно доводиться нерівність $-\frac{\pi}{2}<\arg d_{i(2s+2)}(\mathbf{z})\leq 0$, $\mathbf{z}\in G$, $i(2s+2)\in\mathcal{I}$.

Таким чином, виконуються умови леми 1.1, тому для залишків $Q^{(n)}_{i(k)}(\mathbf{z})$, $k=1,\ldots,n$, $n\geq 1$, n-го підхідного дробу ГЛД (4.41) справджується співвідношення

$$\left|Q^{(n)}_{i(k)}(\mathbf{z})\right|\geq\left|d_{i(k)}(\mathbf{z})\right|=1,\ k=1,\ldots,n,\ \mathbf{z}\in G.$$

Враховуючи еквівалентність ГЛД (4.40) і (4.41), для n-го підхідного дробу ГЛД (4.40) у кожній точці $\mathbf{z}\in G$ маємо оцінку

$$|f_n(\mathbf{z})|\leq|d_0|+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{|c_{i_1}|\,|z_{i_1}|}{\left|Q^{(n)}_{i_1}(\mathbf{z})\right|}\leq|d_0|+cN\max_{1\leq m\leq N}|z_m|\,.$$

Отже, $f_n(\mathbf{z}), n \geq 1,$ — голоморфні функції в області G і послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}$ рівномірно обмежена в області G.

Нехай

$$\Delta = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \arg z_r = -\frac{\pi}{4}, 0 < |z_r| < 1,\ r = 1, \ldots, N\right\}.$$

Очевидно, що $\Delta \subset G$. Для довільного $\mathbf{z} \in \Delta$ і довільного $i(2p),\ i(2p) \in \mathcal{I}$, аналогічно як і при доведенні співвідношень (4.42), отримуємо, що

$$\arg d_{i(2p-1)}(\mathbf{z}) = \frac{\pi}{4},\ \arg d_{i(2p)}(\mathbf{z}) = 0,\ p \geq 1.$$

Отже,

$$\Re(d_{i(k)}(\mathbf{z})) \geq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

тобто для елементів $d_{i(k)}(\mathbf{z})$ виконуються умови (4.22) і (4.23). Оскільки $0 < c_{i(k)} \left|z_{i_k}\right| \leq c$ для довільного $\mathbf{z} \in \Delta$ то для дробу (4.41) справджується умова (4.24). Отже, елементи ГЛД (4.41) задовольняють умови теореми 4.5. Тому цей дріб і еквівалентний йому ГЛД (4.40) збігаються на множині Δ. Таким чином, за теоремою 1.18 функціональний ГЛД (4.40) рівномірно збігається на кожному компакті області G до голоморфної функції в цій області.

Нехай K — довільний компакт області G. Для кожного $\mathbf{z} \in K$ маємо

$$0 < c_{i(k)} \left|z_{i_k}\right| \leq c \max_{\mathbf{z} \in K, 1 \leq m \leq N} |z_m|.$$

Нехай $\alpha = \max\limits_{\mathbf{z} \in K} |\arg z_N|$. Тоді використовуючи метод математичної індукції, аналогічно як і при доведенні співвідношень (4.42), легко показати, що

$$\left|\arg d_{i(k)}(\mathbf{z})\right| \leq \alpha.$$

Отже,

$$\Re(d_{i(k)}(\mathbf{z})) \geq \cos\alpha,\ i(k) \in \mathcal{I}$$

і тому для ГЛД (4.40) виконуються умови теореми 4.5, якщо $\mathbf{z} \in K$. Отже,

$$|f_m(\mathbf{z}) - f_{Nn}(\mathbf{z})| < D_N \left(\frac{\sqrt{\delta^2 + 4M} - \delta}{\sqrt{\delta^2 + 4M} + \delta}\right)^n,\ m \geq Nn,\ n \geq 1,$$

де

$$\mathbf{z} \in K, M = c \max_{\mathbf{z} \in K, 1 \le m \le N} |z_m|, \delta = \cos\left(\max_{\mathbf{z}} |\arg z_N|\right),$$

а стала D_N визначаєтьмя згідно із співвідношеннями (4.26). ∎

Зауваження 4.4 *Твердження теореми 4.7 залишається правильним, якщо область G замінити областю*

$$G = \left\{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\} : 0 < \arg z_1 \le \arg z_2 \le \cdots \le \arg z_N < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Висновки до розділу 4. Цей розділ присвячений дослідженню збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду у кутових областях.

У результаті досліджень встановлено достатню ознаку збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з частинними чисельниками рівними одиниці і комплексними частинними знаменниками, яка є аналогом теореми Ван Флека.

Отримано оцінки швидкості збіжності у різних частинах кутових областей, зокрема, коли частинні знаменники задовольняють певні співвідношення, що неявно віддаляють їх від початку координат, коли частинні знаменники рівномірно віддалені від початку координат, коли деякі елементи гіллястого ланцюгового дробу прямують до нуля із заданою швидкістю.

Встановлено оцінки швидкості збіжності гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду у випадку дійсних додатних частинних чисельників і частинних знаменників взятих із спарених кутових множин.

Використовуючи оцінки швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду отримано оцінки швидкості збіжності багатовимірних S-дробів з нерівнозначними змінними.

Результати, наведені у цьому розділі, опубліковані в таких працях: [14, 15, 18–23, 26–28, 106, 112].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню необмежених множин умовної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду, зокрема, дослідженню умов збіжності та встановленню оцінок похибок апроксимації їх підхідними дробами, застосуванню отриманих результатів до дослідження збіжності багатовимірних S-дробів з нерівнозначними змінними

У роботі отримано такі результати:

1. Встановлено багатовимірне узагальнення критерію Зейделя збіжності неперервних дробів з додатними елементами; доведено ефективні ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з додатними елементами, зокрема, багатовимірне узагальнення теореми Прінгсхайма та багатовимірний аналог теореми Зейделя – Штерна.
2. Обґрунтовано формули розвинення відношення лінійно-незалежних розв'язків чотиричленного лінійного однорідного рекурентного рівняння у гіллястий ланцюговий дріб з двома гілками розгалуження, доведено достатні умови збіжності цього дробу, встановлено умови його виродження у двовимірний гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду.
3. Доведено параболічні теореми для гіллястих ланцюгових дробів із комплексними елементами; встановлено багатовимірний аналог теореми Трона про спарені параболічні множини збіжності;
4. Встановлено для двовимірних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду узагальнення ознаки збіжності Трона – Джоунса про параболічні множини збіжності для неперервних дробів.
5. Отримано багатовимірний аналог теореми Ван Флека про кутову множину збіжності неперервних дробів для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду; доведено різні оцінки швидкості збіжності цих

дробів, при умові, що їх частинні знаменники належать деяким підмножинам кутових областей.

6. Встановлено багатовимірний аналог оцінок швидкості збіжності неперервних дробів, сформульованих В. Б. Ґраґґом та Д. Д. Ворнером, для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з дійсними частинними чисельниками і комплексними частинними знаменниками.
7. Застосовано отримані результати при дослідженні збіжності багатовимірних S-дробів з нерівнозначними змінними та встановлено оцінки швидкості їх рівномірної і поточкової збіжності.

Для доведення отриманих результатів розроблено два нових методи дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду, що ґрунтуються на особливості структури досліджуваного об'єкта. Суттєво враховано той факт, що N-вимірний гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду можна розглядати як $(N-1)$-вимірний гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду елементами якого є неперервні дроби, або ж як неперервний дріб елементами якого є $(N-1)$-вимірні гіллясті ланцюгові дроби спеціального вигляду. При використанні цих методів для доведення збіжності враховується розмірність дробу, а при встановленні оцінок швидкості збіжності — відомі оцінки похибок апроксимації підхідними дробами неперервних дробів.

Результати дисертаційної роботи є внеском в аналітичну теорію неперервних та гіллястих ланцюгових дробів і можуть бути застосовані для наближення аналітичних функцій багатьох комплексних змінних.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Антонова Т. М. Багатовимірне узагальнення теореми про параболічні області збіжності неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. — Т. 42, № 4. — С. 7–12.
2. Антонова Т. М. Достатні ознаки збіжності і стійкості інтегральних ланцюгових дробів: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. — Львів, 1996. — 141 с.
3. Антонова Т. М. Про прості кругові множини абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Карпат. мат. публікації. – 2012. — Т. 4, № 2. — С. 165–174.
4. Антонова Т. М. Швидкість збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Волинський матем. вісн. — 1999. — Вип. 6. — С. 3–8.
5. Антонова Т. М., Сусь О. М. Про парні множини збіжності для двовимірних неперервних дробів із комплексними елементами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2007. — Т. 50, № 3. — С. 94–101.
6. Аптекарев А. И., Буслаев В. И., Мартинес–Финкельштейн А., Суетин С. П. Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены // Успехи мат. наук. — 2011. — Т. 66 (402), № 6. — С. 37–122.
7. Баран О. Є. Аналог ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1996. — Т. 39, № 2. — С. 35–38. (Переклад: Baran O. E. An analog of the Vorpits'kii convergence criterion for branched continued fractions of special form // J. Math. Sci. — 1998. — Vol. 90, № 5. — P. 2348–2351.)
8. Баран О. Є. Деякі властивості спарених множин значень та спарених множин елементів для гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду // Мат. вісник НТШ. — 2012. — Т. 9. — С. 5–14.
9. Баран О. Є. Деякі кругові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — Т. 56, № 3. — С. 7–14.

10. Баран О. Є. Деякі області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Карпатські мат. публікації. — 2013. — Т. 5, № 1. — С. 4–13.

11. Баран О. Є. Наближення функцій багатьох змінних гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. — 166 с.

12. Баран О. Є., Боднар Д. І. Розвинення кратного степеневого ряду у багатовимірний C-дріб з нерівнозначними змінними // Волинський математичний вісник. — 1999. — Вип. 6. — С. 15–20.

13. Бейкер Дж. мл., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде / [пер. с англ. Е. А. Рахманова и С. П. Суетина под. редакцией А. А. Гончара]. – М. : Мир, 1986. – 502 с.

14. Біланик І. Б. Оцінка швидкості збіжності двовимірних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду у деяких кутових областях // Міжнар. конф. молодих математиків (Київ, 6–8 червня 2019 р.): тези допов. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2019. — С. 102.

15. Біланик І. Б. Оцінка швидкості поточкової збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Конференція молодих вчених "Підстригачівські читання – 2020" (Львів, 26–28 травня 2020 р.) — Електрон. текст. дані. — URL: http://iapmm.lviv.ua/chyt2020/abstracts/Bilanyk.pdf (дата звернення: 16.05.2021).

16. Біланик І. Б. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів у параболічних областях // Конференція молодих вчених "Підстригачівські читання — 2019" (Львів, 27–29 травня 2019 р.): тези допов. — Електрон. текст. дані. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України. — 2019. — Т. 3. — URL : http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2019/abstracts/Bilanyk.pdf (дата звернення: 16.05.2021).

17. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Критерій збіжності гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами // Всеукраїнська наук. конф. "Сучасні

проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.): тези допов. - Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2017. — С. 54.

18. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Кутові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // VI Всеукраїнська наукова конференція ім. Б. В. Василишина "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 26–28 вересня 2018 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Вид-во Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника, 2018. — С. 8.
19. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Оцінка швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Всеукраїнська наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 26 лютого – 1 березня 2020 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2020. — С. 35–36.
20. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Оцінка швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях", присвяч. 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету ім. Ю. Федьковича (Чернівці, 17–19 вересня 2018 р.): тези допов. — Чернівці: Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича. — 2018. — С. 167.
21. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Оцінки швидкості поточкової та рівномірної збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2019. — Т. 62, № 4. — С. 72–82
22. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду в кутових областях // Міжнар. наук. конференція "Функціональні методи теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV" присвячена 100-річчю з дня народження В. К. Дзядика (Світязь, 20 - 26 червня 2019 р.): тези допов. — Київ: Ін-т математики НАН України. — 2019. — С. 33.
23. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів у кутових областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2017. — Т. 60,

№ 3. — С. 60–69. (Те саме: Bilanyk I. B., Bodnar D. I. On the convergence of branched continued fractions of a special form in angular domains // J. Math. Sci. — 2020. — Vol. 246. — P. 188–200.)

24. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Параболічні області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Всеукраїнська наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 4–27 лютого 2016 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2016. — С. 57.

25. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Про параболічні області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Міжнар. наук. конф. "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяч. 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, проф. О. І. Степанця (Слов'янськ, 28 травня – 3 червня 2017 р.): тези допов. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2017. — С. 43.

26. Біланик І. Б., Боднар Д. І., Чорний В. З. Оцінка швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду у кутових областях // Всеукраїнська наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2018. — С. 37.

27. Біланик І. Б., Боднар Д. І., Чорний В. З. Про оцінку швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Міжнар. наук. конференція "Сучасні проблеми механіки та математики" (Львів, 22 – 25 травня 2018 р.): тези допов. — Електрон. текст. дані. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України. — 2018. — Т. 3. — URL: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018 (дата звернення: 16.05.2021).

28. Біланик І. Б., Боднар Д. І., Бубняк М. М. Деякі області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Міжнар. конф. молодих математиків, присвяч. 100-річчю з дня народження академіка НАН України, проф. Ю. О. Митропольського (Київ, 7–10 червня 2017 р.): тези допов. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2017. — С. 40.

29. Боднар Д. І. Багатовимірні узагальнення неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2003. — Т. 46, № 3. — С. 32–39.

30. Боднар Д. І. Багатовимірні C-дроби // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1996. — Т. 39, № 2. — С. 39–46.

31. Боднар Д. И. Аналог признака сходимости Ворпицкого для ветвящихся цепных дробей // Математический сборник. — К. : Наук. думка, 1976. — С. 40–43.

32. Боднар Д. И. Ветвящиеся цепные дроби. — К. : Наук. Думка, 1986. — 176 с.

33. Боднар Д. И. Исследование сходимости одного класса ветвящихся цепных дробей // В кн. : Цепные дроби и их применения. — К. : Изд. Ин-та матем. АН УССР, 1976. — С. 41–44.

34. Боднар Д. І., Бубняк М. М. Багатовимірне узагальнення овальної теореми для періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2014. — Т. 11, № 4. — С. 54–67.

35. Боднар Д. І., Бубняк М. М. Деякі параболічні області збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. — 2012. — Т. 9. — С. 4–8.

36. Боднар Д. І., Бубняк М. М. Оцінки швидкості поточкової та рівномірної збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — Т. 56, № 4. — С. 24–32. (Те саме: Bodnar D. I., Bubnyak M. M. Estimates of the rate of pointwise and uniform convergence for one-periodic branched continued fractions of a special form // J. Math. Sci. — 2015. — Vol. 208, Iss. 3. — P. 289–300.)

37. Боднар Д. І., Гладун В. Р. Деякі області стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами // Вісник Чернівецького університету. Серія "Математика". — Чернівці. — 206. — Вип. 288. — С. 18–27.

38. Боднар Д. І., Гладун В. Р. Достатні умови стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — Львів. — 2002. — 45, №1. — С. 22–27.

39. Боднар Д. І., Гладун В. Р. Параболічні області обчислювальної стійкості гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами // Вісник НУ "Львівська політехніка". Серія "Прикладна математика". — Львів. — 2000. — № 411. — С. 44–48.

40. Боднар Д. І., Гладун В. Р. Про стійкість до збурень гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами // Мат. студії. — 2006. — Т. 25, № 2. — С.207–212.

41. Боднар Д. І., Гоєнко Н. П. Наближення відношення функцій Лаурічелли F_D гіллястим ланцюговим дробом // Мат. студії. — 2003. — Т. 20, № 2. — С. 210–214.

42. Боднар Д. І., Заторський Р. А. Узагальнення неперервних дробів. I // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2011. — Т. 54, No 1. — С. 57–64.

43. Боднар, Д. І. Заторський Р. А. Узагальнення неперервних дробів. II // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2011. — №2. — С. 43–50.

44. Боднар Д. І., Кучмінська Х. Й. Аналог теореми Ван Флека для двовимірних неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1999. — Т. 42, № 4. — С. 55–61.

45. Боднар Д. І., Кучмінська Х. Й. Параболічна область збіжності для двовимірних неперервних дробів // Мат. студії. – 1995. – Т. 4. – С. 29–36.

46. Боднар Д. І., Кучмінська Х. Й. Розвиток теорії гіллястих ланцюгових дробів у 1996-2016 роках // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2016. — Т. 59, № 2. — С. 7–18.

47. Боднар Д. И. Соответсвующие ветвящиеся цепные дроби с линейными частными числителями для двойного степенного ряда // Укр. мат. журнал. – 1991. — Т. 43, № 4. – С. 474–482.

48. Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. — К. : Наук. думка, 1974. — 272 с.

49. Болтарович Е. А. Аналог признака сходимости Лейтона–Уолла для ветвящихся цепных дробей // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов: Сб. науч. тр. — К.: Наук. Думка, 1989. — С. 32–36.

50. Буслаев В. И., Гончар А. А., Суетин С. П. О сходимости подпоследовательностей m-й строки таблицы Паде // Мат. сб. — 1983. — Т. 120 (162), № 4. — С. 540–545.

51. Возна С. М. Інтерполяційна формула типу Ньютона-Тіле у вигляді двовимірного неперервного дробу з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2004. — Т. 47, № 4 — С. 36–42.

52. Возна М. С., Кучмінська Х. Й. Апроксимаційна формула у вигляді приєднаного неперервного дробу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2007. — Т. 50, № 1. — С. 7–15.

53. Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. — Киев: Изд-во АН УССР, 1952. — Т. 1. — 400 с.

54. Гладун В. Р. Умови збіжності та стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів із від'ємними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2003. — Т. 46, № 4. — С. 16–26.

55. Гоєнко Н. П. Збіжність розвинення відношення функцій Лаурічелли F_D у гіллястий ланцюговий дріб // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2002. — Т. 45, № 4. — С. 52–57.

56. Гоєнко Н. П. Принцип відповідності та збіжність послідовностей аналітичних функцій багатьох змінних // Мат. вісник НТШ. — 2007. — Т. 4. — С. 42–48.

57. Гоєнко Н. П., Гладун В. Р., Манзій О. С. Про нескінченні залишки гіллястого ланцюгового дробу Ньорлунда для гіпергеометричних функцій Аппеля // Карпат. мат. публікації. — 2014. — Т. 6, № 1. — С. 11–25.

58. Голуб А. П, Чернецька Л. О. Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних // Укр. мат. журн. — 2013. — Т. 65, № 8. — С. 1035–1058.

59. Голуб А. П. Узагальнені моментні зображення та багатоточкові апроксимації Паде // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 7. — С. 991–995.

60. Гончар А. А. О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде // Мат. сб. — 1982. — Т. 118 (160),№ 3. — С. 535–556.

61. Дзядык В. К. Об асимптотике диагональных апроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ // Математический сборник. — 1979. — Т. 108 (150), Вып. 2. — С. 247–267.

62. Дзядык В. К. Обобщенная проблема моментов и аппроксимации Паде // Укр. мат. журн. — 1983. — Т. 35, № 3. — С. 297–302.

63. Дзядык В. К., Философ Л. И. О скорости сходимости аппроксимаций Паде для некоторых элементарных функций // Мат. сб. — 1978. — Т. 107 (149), № 3. — С. 347–363.

64. Долженко Е. П. Скорость приближения рациональными дробями и своймтва функций // Мат. сб. — 1962. — Т. 56(98), №4. — С. 403–432.

65. Дмитришин Р. І. Деякі класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними і кратні степеневі ряди: дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.01.01. — Київ: Інститут математики НАН України, 2019. — 340 с.

66. Дмитришин Р. І. Оцінки похибок наближень для багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними // Буковинський мат. журн. — 2018. — Т. 6, № 1–2. — С. 56–59.

67. Дмитришин Р. І. Приєднані гіллясті ланцюгові дроби з двома нерівнозначними змінними // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, № 9. — С. 1175–1184. (Те саме: Dmytryshyn R. I. Associated branched continued fractions with two independent variables // Ukr. Math. J. — 2015. — Vol. 66, No. 9. — P. 1312–1323.)

68. Дмитришин Р. І. Про розвинення деяких функцій у двовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2010. — Т. 53, № 4. — С. 28–34. (Те саме: Dmytryshyn R. I. On the expansion of some functions in a two-dimensional g-fraction with independent variables // J. Math. Sci. — 2012. — Vol. 181, № 3. — P. 320–327.)

69. Дмитришин Р. І., Баран О. Є. Деякі типи гіллястих ланцюгових дробів, відповідних до кратних степеневих рядів // Теорія наближення функцій

та її застосування. Праці Ін-ту математики НАН України. — 2000. — Т. 31. — С. 82–92.

70. Круковський Б. В. До теорії нескінченних неперервних дробів 2-го класу // Журн. Ін-ту математики УАН. — 1933. — №1. — С. 195–206.

71. Кучмінська Х. Й. Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 7. – С. 614–618.

72. Кучмінська Х. Й. Двовимірні неперервні дроби. — Львів: Інститут прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. — 218 с.

73. Кучмінська Х. Й., Сусь О. М., Возна С. М. Апроксимативні властивості двовимірних неперервних дробів // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, №1. — С. 30–44.

74. Макаров В. Л., Демків І. І. Інтегральний інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тілле// Доп. НАН України. — 2016. — №1. — С. 12–18.

75. Макаров В. Л., Хлобыстов В. В. Основы теории полиномиального операторного интерполирования. — К.: Інститут математики НАН України. – 278 с.

76. Макаров В. Л., Хлобистов В. В., Михальчук Б. Р. Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, №4. — С. 479–488.

77. Манзій О. С. Про збіжність розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля F_3 у гіллястий ланцюговий дріб у деякій необмеженій області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1999. — Т. 42, № 2. — С. 7–11.

78. Михальчук Р. И., Сявавко М. С. Континуальный аналог цепных дробей // Укр. мат. журн. — 1982. — Т. 4, №5. — С. 559–564.

79. Монтель П. Нормальные семейства аналитических функций [пер. с франц. проф. В. М. Шепелева]. — М. : Ленинград : ОНТИ, 1936. — 240 с.

80. Недашковський М. О. Збіжність і обчислювальна стійкість гіллястих ланцюгових дробів з елементами, що задовольняють умовам типу Прінгсгейма // В кн. : Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. — К. : ІМ АН УРСР. – 1978. – С. 43–44.

81. Недашковський М. О. Ознаки збіжності матричних матричних гіллястих ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2003. — Т. 46, № 4. — С. 50–56.

82. Никишин Е. М. О сходимости диагональных аппроксимаций Паде для некоторых функций // Мат. сборник. — 1976. — Т. 101, № 2. — С. 280–292.

83. Пагіря М. М. Наближення функцій ланцюговими дробами. — Ужгород: Ґражда, 2016. — 412 с.

84. Пекарский А. А. Наилучшие рациональные приближения в комплексной области // Труды Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — Т. 190. — С. 222–233.

85. Подсыпанин Е. В. Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей, связанном с алгоритмом Вигго Бруна // Зап. науч. семинаров ЛОМИ: Исследования по теории чисел. — 1977. — 67. — С. 184–194.

86. Рахманов Е. А. О сходимости диагональных аппроксимаций Паде // Мат. сборник. — 1977. — Т. 104 (146), № 2. — С. 271–291.

87. Ровба Е. А. Рациональная интерполяция дифференцируемых функций с r-ой производной ограниченной вариации // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. наук. — 1999. — № 2. — С. 8–13.

88. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. — Минск : Изд-во Белорусск. ун-та, 1979. — 176 с.

89. Скоробогатько В. Я. та ін. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування // II наук. конф. молодих математиків України. — Київ: Наук. думка, 1966. — С. 561–565.

90. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и её применение в вычислительной математике. — Москва: Наука, 1983. — 312 с.

91. Слешинскій И. В. Дополненіе къ замѣткѣ о сходимости непрерывныхъ дробей // Матем. сб. — 1889. — Т. 14, № 3. — С. 436–438.

92. Слешинскій И. В. Къ вопросу о сходимости непрерывныхъ дробей // Там же. — С. 337–343.

93. Слешинській И. В. О сходимости непрерывныхъ дробей // Записки мат. отдѣл. Новороссійскаго об-ва естествоиспытателей. — 1888. — Т. VIII. — С. 97–127.

94. Слешинській И. В. О сходимости непрерывныхъ дробей // Записки мат. отдѣл. Новороссійскаго об-ва естествоиспытателей. — 1889. — Т. X. — С. 201–256.

95. Сусь О. М. Про оцінку швидкості збіжності двовимірних неперервних дробів з комплексними елементами // Прикл. проблеми механіки і математики. — 2008. —Вип. 6. — С. 115–123.

96. Сявавко М. С. Інтегральні ланцюгові дроби. — Київ: Наук. думка, 1994. — 205 с.

97. Стилтьес Т. И. Исследования о непрерывных дробях: пер. с франц. под редакцией Н. И. Ахиезера. — Харьков, Киев : ОНТИ, 1936. — 155 с.

98. Терских В. П. Метод цепных дробей в применении к исследованию колебаний механических систем — т.2 . — Л. : Судпромгиз, 1955. — 331 с.

99. Хинчин А. Я. Цепные дроби. — Москва, Физматлит, 1960. — 112 с.

100. Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. — М. : Гостехиздат, 1956. — 203 с.

101. Чебышев П. Л. Избранные математические труды. — М. : Гостехиздат, 1946. — 199 с.

102. Akbaba ?., De?er A. The Generating Functions for Special Pringsheim Continued Fractions // Communications in Advanced Mathematical Sciences. — 2020. — Vol. 3 (2). — P. 74–81.

103. Antonova T., Dmytryshyn R. Truncation error bounds for branched continued fraction whose partial denominators are equal to unity // Mat. Stud. — 2020. — Vol. 54, 1. — P. 3–14.

104. Antonova, T.M., Dmytryshyn, R.I. Truncation error bounds for the branched continued fraction $\sum_{i_{1=1}}^{N}\frac{a_{i(1)}}{1}+\sum_{i_{2=1}}^{i_1}\frac{a_{i(2)}}{1}+\sum_{i_{3=1}}^{i_2}\frac{a_{i(3)}}{1}+\cdots$ // Ukr. Math. J. — 2021. — Vol. 72. — P. 1018–1029.

105. Antonova T., Dmytryshyn R., Kravtsiv V. Branched continued fraction expansions of Horn's hypergeometric function H_3 ratios // Math. — 2021. — Vol. 9 (2), 148.

106. Bilanyk I. A truncation error bound for some branched continued fractions of the special form // Mat. Stud. — 2019. — Vol. 52, Iss.2. — 115–123.

107. Bilanyk I., Bodnar D. Convergence criterion for branched continued fractions of the special form with positive elements // Carpathian Math. Publ. — 2017. — Vol. 9, No. 1. — P. 13–21.

108. Bodnar D. I. Bilanyk I. B. On convergence of branched continued fractions of the special form with positive elements // International Conference "Infinite Dimentional Analysis and Topology" dedicated to the 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky (Ivano-Frankivsk, October 16–20, 2019). — P. 7.

109. Bilanyk I., Bodnar D., Buyak L. Representation of a quotient of solutions of a four-term linear recurrence relation in the form of a branched continued fraction // Carpathian Math. Publ. — 2019. — Vol. 11, No. 1. — P. 33–41.

110. Bilanyk I., Bodnar D., Buyak L, Voznyak O. Representation of a quotient of solutions of a linear recurrence relation in the form of a branched continued fraction // Всеукраїнська наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2019 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2019. — С. 22.

111. Bilanyk I., Bodnar D., Voznyak O. Multidimensional analogue of Thron's Theorem About Twin Parabolic Convergence Regions For Continued Fractions // International Online Workshop on Approximation Theory (Ivano-Frankivsk, Ukraine, March 19–21, 2021). — P. 8–9.

112. Bodnar D. I. Bilanyk I. B. Voznyak O. G. Some unlimited convergence domains of branched continued fractions of the special form // Всеукраїнська наук. конф. "Теорія наближень і її застосування" з нагоди 70-річчя В. Ф. Бабенка (Дніпро, 3–5 жовтня 2019 р.): тези допов. — Дніпро: ДНУ ім. О. Гончара, 2019. — С. 52.

113. Bilanyk I., Voznyak O. On the convergence of multidimensional S-fractions with independent variables // 11th International Skorobohatko mathematical conference (Lviv, Ukraine, October 26–30, 2020): Abstracts of talks. — P. 14.

114. Bodnar D. I., Dmytryshyn R. I. On the convergence of multidimensional g-fraction // Mat. Stud. — 2001. — Vol. 15, No. 2. — P. 115–126.

115. Bodnar O. S., Dmytryshyn R. I. On the convergence of multidimensional S-fractions with independent variables // Carpathian Math. Publ. — 2018. — Vol. 10, No. 1. — P. 58–64.

116. Bodnar O., Dmytryshyn R., Sharyn S. On the convergence of multidimensional S-fractions with independent variables // Carpathian Math. Publ. — 2020. — Vol. 12 (2). — P. 353–359.

117. Bodnar D. I., Bubniak M. M. On convergence (2,1,...,1)-periodic branched continued fraction of the special form // Carpathian Math. Publ. — 2015. — Vol. 7, No. 2. — P. 148–154.

118. Brezinski C. History of continued fraction and Padé approximants. — Berlin : Springer-Verlag. — 1991. — 547 p.

119. Brun V. Algorithmes Euclidieuns pour trios et quatre nombres // XIII Congr. Math. Scand. — 1957. — P. 45–64.

120. Cuyt A., Brevik Petersen V.,Verdonk B., Waadeland H., Jones W. B. Handbook of Continued Fractions for Special Functions. — Dordrecht: Springer, 2008. — xvi+431 p.

121. Cuyt A., Verdonk B. A review of branched continued fraction theory for the construction of multivariate rational approximations // Appl. Numerical Mathematics. — 1988. — Vol. 4. — P. 263–271.

122. Cuyt A., Verdonk B. Multivariate rational interpolation // Computing. — 1985. — Vol. 34. — P. 41–61.

123. Demkiv I., Ivasiuk I., Kopach M. Interpolation integral continued fraction with twofold node // Math. Model. Comput. — 2019. — Vol.6, No.1, P. 1–13.

124. Dmytryshyn R. I. Convergence of some branched continued fractions with independent variables // Mat. Stud. — 2017. — Vol. 47, No. 2. — P. 150–159.

125. Dmytryshyn R. I. On the convergence criterion for branched continued fractions with independent variables // Carpathian Math. Publ. — 2017. — Vol. 9, No. 2. — P. 120–127.

126. Dmytryshyn R. I. The multidimensional generalization of g-fractions and their application // J. Comput. Appl. Math. — 2004. — Vol. 164–165. — P. 265–284.

127. Dmytryshyn R. The two-dimensional g-fraction with independent variables for double power series // Journal of Approximation Theory. — 2012. — Vol. 164, No. 12. — P. 1520–1539.

128. Dmytryshyn R. I. Multidimensional regular C-fraction with independent variables corresponding to formal multiple power series // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 2020 . — Vol. 150 (4), P. 1853–1870.

129. Dmytryshyn R.I. Convergence of multidimensional A- and J-fractions with independent variables // Comput. Methods Funct. Theory. — 2021.

130. Euler L. De Fractionibus continuis: Dissertatio // Comment. Acad. Sci. Imp. Petropolitanae: (MDCCXXXVII). — Petropoli: Typis Acad., MDCCXLIV. — Tom. IX. — P. 98–137.

131. Frobenius G. Ueber Relationen zwischem den Näherungsbrüchen von Potenzreihen // Journal für die reine und angewandte Mathematik. — 1881. — Vol. 90. — P. 1–17.

132. F?rshtenau E. ?ber Kettenbr?che h?herer Ordnung // Jahrbuch ?ber die Fortschritte der Mathematik. — 1876. — S. 133–135.

133. Gauss C. F. Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+3)}x^3$+etc // Commentat. Soc. Reg. Sci. Gott. Recent.: (MDCCCXI-XIII), Cl. Math.: (MDCCCXII). — Gottingae: H. Dieterich, MDCCCXIII. — Vol. II. — P. 3–46.

134. Goy T., Sharyn S. A note on Pell-Padovan numbers and their connection with Fibonacci numbers // Carpathian Math. Publ. — 2020. — Vol. 12, No. 2. — P. 280–288.

135. Goy T. Horadam sequence through recurrent determinants of tridiagonal matrix // Kragujevac J. Math. — 2018. — Vol. 42, No. 2. — P. 527–532.

136. Goy T., Zatorsky R. Infinite linear recurrence relation and superposition of linear recurrence equations // J. Integer Seq. — 2017. — Vol. 20, No. 5. — 17.5.3.

137. Gragg W. B. Warner D. D. Two constructive results in continued fractions // SCIAM J. Numer. Anal. — 1983. — Vol. 20, No. 3. — P. 1187–1197.

138. Henrici P. Applied and Computational Complex Analysis: in 2 vol. Vol. 1: Power series, Integration, Conformal sapping, Location of zeros. — New York; London; Sydney; Toronto: Wiley-Interscience publ., 1974. — xviii+682 p.
139. Holub A. P., Chernetska L. O. Two-dimensional generalized moment representations and rational approximations of functions of two variables // Ukr. Math. J.. — 2014. — Vol. 65. — P. 1155–1179.
140. Holub A.P., Lysenko L.O. Pad?-type approximants for some classes of multivariate functions // Ukr. Math. J. — 2017. — Vol. 69, No. 5. — P. 734–745.
141. Holub A.P., Pozharskiy O.A., Chernetska L.O. Generalized moment representations and multivariate multipoint Pad? approximant // Ukr. Math. J. — 2020. — Vol. 71, No. 10. — P. 1522–1540.
142. Note sur une nouvelle application de l'analyse des fonctions elliptiques à l'algébre // J. Reine Angew. Math. — 1831. — Bd. 7. — S. 41–43.
143. Jacobi C. G. J. ?ber die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebroche rationale Function // J. f?r Reine und Angew. Math. — 1846. — 30. — S. 127–156.
144. Jensen J. L. W. V. Bidrag til Kaedebrekernes Teori // Festskrift til H. G. Zeuthen. — 1909. — P. 78-87
145. Jones W. B., Thron W. J. Convergence of continued fractions // Canad. J. Math. — 1968. — Vol. 20. — P. 1037–1055.
146. Jones W. B., Thron W. J. Continued Fractions: Analytic Theory and Applications. — London; Amsterdam; Don Mills; Ontario; Sydney; Tokyo: Addison-Wesley Pub. Co., Inc, 1980. — xxviii+428 p. — (Series "Encyclopedia of Mathematics and its Applications": in 12 vol.; vol. 11).
147. Komatsu T. Continued fraction expansions of the generating functions of Bernoulli and related numbers // Indag. Math. — 2020. — Vol. 31, No. 4, P. 695–713.
148. Komatsu T. Some recurrence relations of poly-Cauchy numbers // J. Nonlinear Sci. Appl. — 2019. — Vol. 12. — P. 829–845.

149. Krafft M. ?ber ein Eulershes Verfahren zur Wurzelberechnung // Monatshefte f?r Math. und Phys. — 1941. — 49. — S. 312–315.

150. Kuchminskaya Kh., Siemaszko W. Rational Approximation and Interpolation of Functions by Branched Continued Fractions // Rational approximation and its applications in Mathematics and Physics. Lecture Notes in Math. Ed. by J. Gilewicz, M. Pindor, W. Siemaszko. – Springer – Verlag. – 1987. — 1237. — P. 24–40.

151. Lange L., Thron W. A two-parameter family of best twin convergence regions for continued fractions // Math. Zeitschr. – 1960. – Vol. 73. – P. 295–311.

152. Lange L. J. Strip convergence regions for continued fractions / L. J. Lange // Continued Fractions and Orthogonal Functions. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Ed. by S. Clement Cooper and W. J. Thron. — Marcel — Dekker. — 1994. — 154. — P. 211–231.

153. Lascu D., Sebe G.I. A Gauss-Kuzmin-Levy theorem for Renyi-type continued fractions // Acta Arith. — 2020. — Vol. 193, No. 3. — P. 283–292.

154. Lascu D., Sebe G.I. A Lochs-type approach via entropy in comparing the efficiency of different continued fraction algorithms // Math. — 2021. — Vol. 9, No. 3: 255.

155. Lopushansky A., Lopushansky O, Sharyn S. Nonlinear inverse problem of control diffusivity parameter determination for a space-time fractional diffusion equation // Appl. Math. Comput. — 2021. — Vol. 390: 125589.

156. Lorentzen L. Continued fractions. – Vol. 1 : Convergence theory / L. Lorentzen, H. Waadeland. – Amsterdam – Paris : Atlantis Press/World Scientific, 2008. – 308 p.

157. Lorentzen L., Waadeland H. Continued fractions with applications. — Amsterdam : Elsevier Publishers B. V., 1992. — 606 p.

158. Lorentzen L. Continued fractions with circular twin value sets // Trans. Amer. Math. Soc. — 2008. — Vol. 360. — P. 4287–4304.

159. Lorentzen L. Convergence criteria for continued fractions $K(a_n/1)$ based on value sets // Contemporary Mathematics. — 1999. — Vol. 236. — P. 205–255.

160. Lorey W. ?ber ein Eulershes Verfahren zur Wurzelberechnung // Monatshefte f?r Math. und Phys. — 1939. — 48. — S. 190–197.

161. Makarov V.L., Demkiv I.I. Abstract interpolating fraction of the Thiele type // Ukr. Math. Visnyk. — 2018. — Vol. 231, No. 4. — P. 536–546.

162. Milne-Thomson L. M. On the operational solution of the homogeneous linear equation of finite differences, by generalized continued fractions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. A. — 1931. — Vol. 51. — P. 91.

163. Murphy J. A., O'Donohoe M. R. A class of algorithms for obtaining rational approximants to functions defined by power series // J. Appl. Math. Phys. — 1977. — Vol. 28, Iss. 6. — P. 1121–1131.

164. Murphy J. A., O'Donohoe M. R. A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fraction // J. Comput. Appl. Math. — 1978. — Vol. 4, Iss. 3. — P. 181–190.

165. M?ller M. ?ber ein Eulershes Verfahren zur Wurzelberechnung // Math. Z. — 1948. — Vol. 51, No. 4. — S. 474–496.

166. O'Donohoe M. Applications of continued fractions in one and more variables: Ph. D. Thesis. — Brunel: Brunel University, 1974. — 178 p.

167. Padé H. Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationelles // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Sér. 3. – 1892. – supplement, 9. – P. 3–93.

168. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. — Leipzig; Berlin: Druck und verlag von B. G. Teubner, 1913. — xii+520 s. — (Reihe "B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen": in 64 bd.; bd. 36)

169. Perron O. Die Lehre von der Kettenbrühen / O. Perron. — Stuttgart : Teubner, 1957. — Bd. 2. — 524 s.

170. Pratje I. Iteration der Joukowski-Abbildung und ihre Streckenkomplexe // Mitt. aus dem Math. Seminar der Univ. Giessen. — Giessen: Selbstverlag des Math. Seminars, 1954. — Heft 48. — 54 s.

171. Pringsheim A. Über die Convergenz unendlicher Kettenbrüche // Sitzungsber. d. Math.-Phys. Cl. d. Königl. Bayer. Akad. d. Wiss. zu München. — 1899. — Bd. XXVIII, Jahrg. 1898. — S. 295–324.
172. Scott W. T., Wall H. S. A convergence theorem for continued fractions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1940. — Vol. 47, No. 1. — P. 155–172.
173. Sebe G.I., Lascu D. Convergence rate for Renyi-type continued fraction expansions // Period. Math. Hung. — 2020. — Vol. 81, No. 2. — P. 239–249.
174. Seidel L. Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Kettenbrüche: Akad. Abh., eingereicht pro impetranda venia legendi bei d. philosoph. Fak. d. Königl. Ludwigs-Maximilians-Universität. — München: Gedruckt bei Georg Franz, 1846. — 16 s.
175. Siemaszko W. Branched continued fractions for double power series // J. Comp. and Appl. Math. — 1980. — Vol. 6, No. 2. – P. 121–125.
176. Siemaszko W. On some conditions for convergence of branched continued fractions // Padé Approx. and its Appl., Amsterdam 1980: Proc. of a Conf. Held in Amsterdam, The Netherlands, Oct. 29-31, 1980: Lecture Notes in Math. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1981. — Vol. 888. — P. 363–370.
177. Siemaszko W. Thiele-type branched continued fractions for two-variable functions // Journal of Computational and Applied Mathematics. Noth–Holland. – 1983. – No. 9. – P. 137–153.
178. Stern M. A. Über die Kennzeichen der Konvergenz eines Kettenbrüchs // J. Reine Angew. Math. — 1848. — Bd. 37. — S. 255–272.
179. Stieltjes T. -J. Recherches sur les fractions continues // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. — 1894. — Vol. 8, No. 4. — P. J1–J122.
180. Szekeres G. Multidimensional continued fraction // Ann. Univ. Sci. Budapest. Rolando E?tvos nominatae. Sec. Math. — 1970. — Vol. 13. — P. 113–140
181. Thiele T. N. Interpolationsrechnung / T. N. Thiele. – Stuttgart. — Teubner, 1909. — 175 s.

182. Thron W. Convergence regions for the general continued fraction // Bull. Amer. Math. Soc. — 1943. — Vol. 49. — P. 913–916.

183. Thron W. J. On parabolic convergence regions for continued fractions // Math. Zeitschr. — 1958. — Bd. 69, Iss. 1. — S. 173–182.

184. Thron W. J. Two families of twin convergence regions for continued fractions // Duke Math. J. — 1943. — Vol. 10, No. 4. — P. 677–685.

185. Van Vleck E. B. On the convergence of continued fractions with complex elements// Trans. Amer. Math. Soc. — 1901. — Vol. 2, No. 3. — P. 215–233.

186. Waadeland H. Worpitzky boundary theorem for N-branched continued fractions // Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 1993. — Vol. 2. — P .24–29.

187. Wall H. S. Analytic TheorAy of Continued Fractions. — New York, N. Y.: D. Van Nostrand Co., Inc, 1948. — xiii+433 p. — (Series "The University series in higher mathematics"; vol. 1).

188. Wallis J. Arithmetica infitorium, sive nova methodus inquirendi in curvilineoram, aliaque difficiliora matheseos problemata. — Oxford, 1655.

189. Worpitzky J. Untersuchungen über die Entwickelung der monodromen und monogenen Funktionen durch Kettenbrüche: Jahresabericht, womit zu der öffentlichen Prüfung der Schüler am 10. April 1865; Friedrichs-Gymnasium und Realschule. — Berlin: Buchdruckerei von G. Lange, 1865. — S. 3–39.

ДОДАТКИ

Список публікацій за темою дисертації

1. Bilanyk I., Bodnar D. Convergence criterion for branched continued fractions of the special form with positive elements // Carpathian Math. Publ. — 2017. — Vol. 9, № 1. — P. 13–21.
2. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів у кутових областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2017. — Т. 60, № 3. — С. 60–69. (Те саме: Bilanyk I. B., Bodnar D. I. On the convergence of branched continued fractions of a special form in angular domains // J. Math. Sci. — 2020. — Vol. 246. — P. 188–200.
3. Bilanyk I., Bodnar D., Buyak L. Representation of a quotient of solutions of a four-term linear recurrence relation in the form of a branched continued fraction // Carpathian Math. Publ. — 2019. — Vol. 11, № 1. — P. 33–41.
4. Bilanyk I. A truncation error bound for some branched continued fractions of the special form // Mat. Stud. — 2019. — Vol. 52, Iss.2. — 115–123.
5. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Оцінки швидкості поточкової та рівномірної збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2019. — Т. 62, № 4. — С. 72–82.
6. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Параболічні області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Всеукраїнська наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 4–27 лютого 2016 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2016. — С. 57.
7. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Критерій збіжності гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами // Всеукраїнська наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.): тези допов. - Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2017. — С. 54.
8. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Про параболічні області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Міжнар. наук. конф. "Те-

орія наближення функцій та її застосування", присвяч. 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, проф. О. І. Степанця (Слов'янськ, 28 травня – 3 червня 2017 р.): тези допов. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2017. — С. 43.

9. Біланик І. Б., Боднар Д. І., Бубняк М. М. Деякі області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Міжнар. конф. молодих математиків, присвяч. 100-річчю з дня народження академіка НАН України, проф. Ю. О. Митропольського (Київ, 7–10 червня 2017 р.): тези допов. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2017. — С. 40.
10. Біланик І. Б., Боднар Д. І., Чорний В. З. Оцінка швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду у кутових областях // Всеукраїнська наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2018. — С. 37.
11. Біланик І. Б., Боднар Д. І., Чорний В. З. Про оцінку швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Міжнар. наук. конференція "Сучасні проблеми механіки та математики" (Львів, 22 – 25 травня 2018 р.): тези допов. — Електрон. текст. дані. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України. — 2018. — Т. 3. — URL : www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018 (дата звернення: 16.05.2021).
12. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Оцінка швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях", присвяч. 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету ім. Ю. Федьковича (Чернівці, 17–19 вересня 2018 р.): тези допов. — Чернівці: Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича. — 2018. — С. 167.
13. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Кутові області збіжності гіллястих ланцю-

гових дробів спеціального вигляду // VI Всеукраїнська наукова конференція ім. Б. В. Василишина “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ, 26–28 вересня 2018 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Вид-во Прикарп. нац. ун-ту ім. В.Стефаника, 2018. — С. 8.

14. Bilanyk I., Bodnar D., Buyak L, Voznyak O. Representation of a quotient of solutions of a linear recurrence relation in the form of a branched continued fraction // Всеукраїнська наук. конф. “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2019 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2019. — С. 22.
15. Біланик І. Б. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів у параболічних областях // Конференція молодих вчених “Підстригачівські читання — 2019” (Львів, 27–29 травня 2019 р.): тези допов. — Електрон. текст. дані. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України. — 2019. — Т. 3. — URL : http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2019/abstracts/Bilanyk.pdf (дата звернення: 16.05.2021).
16. Біланик І. Б. Оцінка швидкості збіжності двовимірних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду у деяких кутових областях // Міжнар. конф. молодих математиків (Київ, 6–8 червня 2019 р.): тези допов. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2019. — С. 102.
17. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду в кутових областях // Міжнар. наукова конференція “Функціональні методи теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV” присвячена 100-річчю з дня народження В. К. Дзядика (Світязь, 20 - 26 червня 2019 р.): тези допов. — Київ: Ін-т математики НАН України. — 2019. — С. 33.
18. Bodnar D. I. Bilanyk I. B. Voznyak O. G. Some unlimited convergence domains of branched continued fractions of the special form // Всеукраїнська наук. конф. “Теорія наближень і її застосування” з нагоди 70-річчя

В. Ф. Бабенка (Дніпро, 3–5 жовтня 2019 р.): тези допов. — Дніпро: ДНУ ім. О. Гончара, 2019. — С. 52.

19. Bodnar D. I. Bilanyk I. B. On convergence of branched continued fractions of the special form with positive elements // International Conference "Infinite Dimentional Analysis and Topology" dedicated to the 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky (Ivano-Frankivsk, October 16–20, 2019). — P. 7.
20. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Оцінка швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Всеукраїнська наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 26 лютого – 1 березня 2020 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2020. — С. 35–36.
21. Біланик І. Б. Оцінка швидкості поточкової збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Конференція молодих вчених "Підстригачівські читання – 2020" (Львів, 26–28 травня 2020 р.) — Електрон. текст. дані. — URL: http://iapmm.lviv.ua/chyt2020/abstracts/Bilanyk.pdf (дата звернення: 16.05.2021).
22. Bilanyk I., Voznyak O. On the convergence of multidimensional S-fractions with independent variables // 11th International Skorobohatko mathematical conference (Lviv, Ukraine, October 26–30, 2020): Abstracts of talks. — P. 14.
23. Bilanyk I., Bodnar D., Voznyak O. Multidimensional analogue of Thron's Theorem About Twin Parabolic Convergence Regions For Continued Fractions // International Online Workshop on Approximation Theory (Ivano-Frankivsk, Ukraine, March 19–21, 2021). — P. 8–9.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на таких конференціях і наукових семінарах:

1. Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 24–27 лютого 2016 р.).
2. Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.).
3. Міжнародна конференція “Теорія наближення функцій та її застосування”, присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007) (Слов’янськ, 28 травня – 3 червня 2017 р.).
4. Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України, проф. Ю. О. Митропольського (7–10 червня 2017 р., Київ).
5. Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.).
6. Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики”, присвячена 90-річчю від дня народження академіка НАН України Ярослава Степановича Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України (Львів, 22–25 травня 2018 р.).
7. Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях”, присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Чернівці, 17–19 вересня 2018 р.).
8. VI всеукраїнська наукова конференція імені Б. В. Василишина “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ – Микуличин, 26–28 вересня 2018 р.).
9. Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2019 р.).
10. Конференція молодих вчених “Підстригачівські читання — 2019” (Львів, 27–29 травня 2019 р.).

11. Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 6–8 червня 2019 р.).
12. Міжнародна наукова конференція "Функціональні методи теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV", присвячена 100-річчю з дня народження В. К. Дзядика (Світязь, 20–26 червня 2019 р.).
13. Всеукраїнська наукова конференція "Теорія наближень і її застосування" з нагоди 70-річчя В. Ф. Бабенка (Дніпро, 3–5 жовтня 2019 р.).
14. International Conference "Infinite Dimentional Analysis and Topology" dedicated to the 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky (Ivano-Frankivsk, October 16–20, 2019).
15. Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 26 лютого – 1 березня 2020 р.).
16. Конференція молодих вчених "Підстригачівські читання — 2020" (Львів, 26–28 травня 2020 р.).
17. 11th International Skorobohatko mathematical conference (Lviv, October 26–30, 2020).
18. International Online Workshop on Approximation Theory (Ivano-Frankivsk, March 19–21, 2021).
19. Науковий семінар з аналітичної теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (Львів, 6 травня 2019 р., 14 травня 2021 р., керівники семінару: д. ф.-м.н., проф. Д. І. Боднар, д. ф.-м.н., ст. н. с. Х. Й. Кучмінська).
20. Науковий семінар ім. В. Я. Скоробогатька Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (Львів, 17 травня 2021 р., керівники семінару: д. ф.-м.н.б ст. н. с. В.О. Пелих, к.ф.-м.н., ст. н. с. М. М. Симотюк).