АНОТАЦІЯ

Аль-Зірджаві Фарах Джавад Галі Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах, які є інваріантними відносно дії операторних напівгруп. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика. — ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", Івано-Франківськ, 2020.

Аналітичні відображення на нескінченновимірних банахових просторах є невід'ємною частиною сучасного функціонального аналізу. Останнім часом зріс інтерес до дослідження дії операторних груп та напівгруп у просторах аналітичних функцій нескінченновимірного банахового простору X. При цьому виникає питання про інваріантні підпростори аналітичних функцій на X, їх алгебраїчні та топологічні структури. У багатьох випадках такі підпростори є алгебрами відносно поточкових операцій додавання та множення, а їх спектр (множина максимальних ідеалів) містить важливу інформацію про дію даної напівгрупи операторів на просторі X.

Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах та їх спектри досліджувались в роботах Л. Нахбіна, Т. Гамеліна, Т. Корна, Б. Коула, Дж. Мухіки. Пізніше, Р. Арон, Б. Коул та Т. Гамелін розглянули алгебру $H_b(X)$ аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі X і запропонували досліджувати спектр такої алгебри за допомогою так званого продовження Арона-Бернера аналітичних функцій обмеженого типу у другий спряжений простір X^{**} до простору X. Цей підхід було застосовано у багатьох працях. Зокрема, Р. Арон, П. Галіндо, Д. Гарсіа і М. Маестре описали структури аналітичного многовиду над X^{**} на спектрі алгебри $H_b(X)$. У роботах А.В. Загороднюка було узагальнено цей метод і використано продовження Арона-Бернера для поліномів на топологічних тензорних добутках.

Симетричні поліноми на банаховому просторі досліджувались в роботах А.С. Немировського, С.М. Семенова, М. Гонзалеса, Р. Гонзало, Х. Харамілло, Р. Аленкара, Р. Арона, П. Галіндо, А. Загороднюка, М. Маестре, Д. Гарсія, П. Хаєка, І. Чернеги, Т. Василишина, В. Кравців та інших. Встановлено, що спектр алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на деякому банаховому просторі суттєво залежить як від вибору простору так і від вибору групи або напівгрупи симетрії. Наприклад, як показано у роботі П. Галіндо, Т. Василишина і А. Загороднюка, у випадку, коли $X = L_\infty[0,1]$, і група симетрії складається з групи вимірних автоморфізмів відрізка $[0,1]$, спектр алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу повністю описується функціоналами значень в точках простору X. Проте, як показано у роботах І. Чернеги, П. Галіндо та А. Загороднюка, у випадку, коли $X = \ell_p$, $1 \le p < \infty$, і група G є групою перестановок базисних векторів, спектр алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу є ширшим, ніж множина функціоналів значень в точках. У цьому випадку, на спектрі існують природні алгебраїчні операції, які утворюють структуру комутативного напівкільця з одиницею.

У першому розділі здійснено огляд літератури за темою дисертаційної роботи та подано основні результати дисертації.

У другому розділі наведено основні означення та сформульовано відомі результати, які використовуються в основних розділах дисертаційної роботи. Зокрема, наведено означення поліноміального відображення та аналітичної функції на банаховому просторі, сформульовано основні властивості цих об'єктів (поляризаційна формула, локальна обмеженість, радіус збіжності аналітичної функції та ін.) Також, наведено означення і описано основні властивості симетричних поліномів та аналітичних функцій на просторі абсолютно збіжних послідовностей. Крім того, у другому розділі наведено означення і властивості алгебри Фреше та її спектру (множини комплексних гомоморфізмів).

У підрозділі 3.1 отримано доведено, що спектр алгебри нарізно симетричних аналітичних функцій обмеженого типу можна подати у вигляді декартового степеня спектра алгебри симетричних аналітичних функцій. Це дало можливість продовжити операції “$\bullet$” та “$\diamond$” на спектр алгебри нарізно симетричних аналітичних функцій та описати їх властивості. Також, побудовано зображення спектру у вигляді мультиплікативної підгрупи в просторі аналітичних функцій експоненціального типу від багатьох комплексних змінних.

У підрозділі 3.2 досліджено алгебру нарізно симетричних аналітичних функцій обмеженого типу $H_{bss}(\ell_1^{(X)})$ на топологічній прямій сумі $\ell_1^{(X)}$ банахових просторів, асоційованій з деяким банаховим простором X. У цьому випадку, спектр вказаноъ алгебри має досить складну структуру. Зокрема, у підрозділі 3.2 показано, що існує сюр'єктивний ізоморфізм такої алгебри в алгебру $H_b(X)$ цілих функцій обмеженого типу на деякому банаховому просторі X. З цього факту зроблено висновок про те, що спектр алгебри $H_{bss}(\ell_1^{(X)})$ містить спектр алгебри $H_b(X)$, зокрема, поточкову копію другого спряженого простору X^{**} до простору X.

У четвертому розділі розглянуто алгебру H_b^{sup} аналітичних функцій обмеженого типу, породжених суперсиметричними поліномами на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$, де $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. У підрозвілі 4.1 описано деякі алгебраїчні базиси підалгебри суперсиметричних поліномів і відповідні твірні функції. Такий опис важливий для вивчення спектру (сукупності комплекснозначних гомоморфізмів) H_b^{sup}. Зокрема, покозано, що кожен комплекснозначних гомоморфізм значення в точці може бути представлений як співвідношення двох цілих функцій експоненціального типу. Також побудувано приклад комплекснозначного гомоморфізму, який не є функціоналом значення і точці. У дисертації показано, що спектр алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ може бути неперервно вкладений в спектр алгебри H_b^{sup}. Проте, це вкладення не є сюр'єктивним.

Результати підрозділу 4.2 показують, що спектр H_b^{sup} допускає алгебраїчну структуру комутативного кільця (яке не є лінійним простором) відносно операцій "$\bullet$" та "$\diamond$", які грають ролі додавання та множення на підмножині $\mathcal{M} \subset M_b^{sup}$. Використовуючи ці операції та ℓ_1-норму, введено природну метрику ρ на $\mathcal{M}$ і доведено, що $(\mathcal{M}, \rho)$ — повний метричний (не сепарабельний) простір.

У підрозділі 4.3 поширено операцію "$\bullet$" до комутативної операції згортки на множині характерів M_b^{sup}. Крім того, побудовано гаусдорфову топологію на M_b^{sup} відносно якої вказана операція згортки є неперервною.

У підрозділі 4.4 досліджено умови оборотності елементів кільця $\mathcal{M}$, гомоморфізми з $\mathcal{M}$ в себе та побудовано нетривіальні приклади підкілець в $\mathcal{M}$.

Алгебраїчна структура $\mathcal{M}$ дуже близька до структури банахової алгебри, але $\mathcal{M}$ не є банаховою алгеброю, оскільки вона не є лінійним простором. Отже, виникає природне запитання: які властивості банахових алгебр можна поширити на кільце $\mathcal{M}$? Наприклад, ми можемо побачити, що якщо елемент є близьким до одиниці, то він є оборотним. Але ми не знаємо: чи $\mathcal{M}$ містить розривні комплекснозначні гомомомрфізми? Також нами було досліжено гомомомрфізми $\mathcal{M}$, його підкільця, та оператори на $\mathcal{M}$.

У підрозділі 4.5 досліджено адитивні оператори на $\mathcal{M}$, наведено приклади. Отже, отримані результати можуть бути цікавими як для теорії комутативних топологічних абгебр, так і для алгебр аналітичних функцій на банахових просторах. Серед адитивних операторів вибрано такі, що, додатково, зберігають операцію множення на константу. Ці відображення, в дисертації, названо лінійними операторами (зауважимо, $\mathcal{M}$ не є лінійним простором). Також, повністю описано лінійні оператори на $\mathcal{M}$ як оператори множення на деякий елемент з $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$ та досліджено їх властивості.

У п'ятому розділі узагальноно деякі результати, отримані у четвертому розділі для простору Λ_1^ω який можна подати у вигляді зваженої суми просторів $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$.

У підрозділі 5.1, також, досліджено напівгрупу симетій $\mathcal{S}_{1/n}$ відносно якої всі функції з алгебри $H_{bs}^{1/n}$ є інваріантними. Проте, ми не знаємо, чи кожен $\mathcal{S}_{1/n}$-інваріантний поліном належить алгебрі $H_{bs}^{1/n}$.

У підрозділі 5.2 досліджено лінійні оператори, гомоморфізми та напівнорми алгебри $\mathcal{M}^{1/N}$. Зокрема, описано один клас лінійних операторів, породжених функціями з так званого класу Ω. Крім того, показано, що на $\mathcal{M}^{1/N}$ існує природна структура локально опуклого метризовного простору.

Ключові слова: нелінійний функціональний аналіз, поліноми на нескінченновимірних просторах, аналітичні функції на банаховому просторі, спектр алгебр аналітичних функцій, симетричні аналітичні функції, оператори на банахових просторах.

ABSTRACT

Al-Zirjawi Farah Jawad Gali Algebras of analytic functions on Banach spaces, which are invariant with respect operator semigroups. — Qualifying scientific work as a manuscript.

A Thesis for a Philosophy Doctor Degree in Mathematics, speciality 111 Mathematics. — Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2020.

Analytic mappings on infinite-dimensional Banach spaces is an important part of contemporary functional analysis. The interest to actions of operator groups and semi-groups in spaces of analytic functions on an infinite-dimensional Banach space X increases during last years. The reasonable question here is about invariant subspaces of analytic functions on X and their algebraic and topological structures. In many cases such subspaces may have the structure of algebra with pointwise addition and multiplication and their spectra (sets of maximal ideals) has an important information about action of the given operator semi-group on X.

Algebras of analytic functions on Banach spaces and their spectra were invistigated by L. Nachbin, T. Gamelin, T. Corn, B. Cole, J. Mujica. Later, R. Aron, B. Cole and T, Gamelin considered the algebra $H_b(X)$ of analytic functions of bounded type on a complex Banach space X and proposed to investigate the spectrum of a such algebra with using so-called the Aron-Berner extension of analytic functions of bounded type to the second dual space X^{**} to X. This approach was used later by many authors. In particular, R. Aron, P. Galindo, D. Garcıa and M. Maestre described the structures of analytic manifold over X^{**} on the spectrum of $H_b(X)$. This method was generalized in works of A.V. Zagorodnyuk and the Aron-Berner extension was used for polynomials on topological tensor products.

Symmetric polynomials on a Banach space were investigated by A. Nimerovski, S. Semenov, M. Gonzalez, R. Gonzalo, J, Jaramillo, R. Alencar, R. Aron, P. Galindo, A. Zagorodnyuk, M. Maestre, D. Garcıa, P. Hajek, I. Chernega, T. Vasylyshyn, v. Kravtsiv and others. It is known that the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions of bounded type on a Banach space is depending on the space and on the group or semi-group of symmetry. For example, P.Galindo, T. Vasylyshyn and A. Zagorodnyuk proved that if $X = L_\infty[0,1]$, and the group of symmetry consists of measurable automorphisms of the interval $[0,1]$, then the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions of bounded type can be completely described by point evaluation functionals at points of X. On the other hand, I. Chernega, P. Galindo and A. Zagorodnyuk show that if $X = \ell_p$, $1 \le p < \infty$, and the group G is the group of all permutations of basis vectors, then the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions of bounded type is larger than the set of point evaluation functionals. In this case, there are natural algebraic operation on the spectrum which form a unital commutative semi-ring structure.

In the first section there is a survey of the related literature, and formulated principal results of the dissertation investigation.

In Section 2 there are some basic definitions and preliminary results which are used in next sections. In particular, the concepts of polynomial mappings and analytic functions on a Banach space are considered and are indicated basic properties of these objects as the Polarization formula, local boundedness, the radius of the convergence of an analytic function, others. Also, definitions and basic properties of symmetric polynomials and analytic functions on the space of absolutely summing sequences are given. In addition, the second section contains definitions and properties of the Fréchet algebra and its spectrum (the set of complex homomorphisms).

In Subsection 3.1 it i proved that the spectrum of the algebra of separately symmetric analytic functions of bounded type can be represented as a Cartesian degree of the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions. It allows us to extend the operations "$\bullet$" and "$\diamond$" to the spectrum of the algebra of separately symmetric analytic functions of bounded type and describe their properties. In addition, some representation of the spectrum by analytic functions of exponential type of several variables is constructed.

In Subsection 3.2 algebras of separately symmetric analytic functions of bounded type $H_{bss}(\ell_1^{(X)})$ on the topological direct sum $\ell_1^{(X)}$ of Banach spaces ℓ_1 which is associated with a Banach space X are investigated. In this case, the spectra of such algebras may have a very complicated structure.In particular, it is shown that there exists a surjective isomorphism of a such algebra onto the algebra $H_b(X)$ of entire functions of bounded type on some Banach space X. From this fact it follows that the spectrum of $H_{bss}(\ell_1^{(X)})$ contains the spectrum of $H_b(X)$, in particular, it contains the copy of the second dual space X^{**} to X.

In the forth section the algebra H_b^{sup} of analytic functions of bounded type, generated by supersymmetric polynomials on $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$, where $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, is considered. Some algebraic bases of the subalgebra of supersymmetric polynomials and corresponding generating functions are described in Subsection 4.1. Such description is important for the investigation of the spectrum (the set of complex homomorphisms) of H_b^{sup}. In particular, it is shown that every complex point evaluation homomorphism can be represented as a ratio of two functions of exponential type. In addition, it is shown that the spectrum of $H_{bs}(\ell_1)$ can be continuously embedded into the spectrum of H_b^{sup}. However, this embedding is not onto.

From results of subsection 4.2 it follows that the spectrum of H_b^{sup} admits an algebraic structure of commutative semiring (which is not a linear space) with respect to operations "$\bullet$" and "$\diamond$" that play roles of addition and multiplication on the subset $\mathcal{M} \subset M_b^{sup}$. Using these operations and the ℓ_1-norm, it is introduced a natural metric ρ on $\mathcal{M}$ and proved, that $(\mathcal{M}, \rho)$ is a complete metric nonseparable space.

In subsection 4.3 the operation "$\bullet$" is extended to a commutative convolution on the set of complex homomorphisms M_b^{sup}. In addition, a Hausdorff topology on M_b^{sup} is constructed and the operation is continuous with respect to this topology.

Conditions of invertibility of elements of the ring $\mathcal{M}$ and homomorphisms from $\mathcal{M}$ to itself are investigated in Subsection 4.4. Nontrivial examples of subrings in $\mathcal{M}$ are constructed.

The algebraic structure of $\mathcal{M}$ is very close to the Banach algebra structure but $\mathcal{M}$ is not a Banach algebra because it is not a linear space. So we have a natural question: what properties of Banach algebras can be extended to the ring $\mathcal{M}$? For example, we can see that if an element is close to te unit, then it is invertible. But we do not know: do $\mathcal{M}$ contains discontinuous complex homomorphisms? Also, it was investigated homomorphisms of $\mathcal{M}$, its subrings and operators on $\mathcal{M}$.

In Subsection 4.5 additive operators on $\mathcal{M}$ are investigated and some examples are constructed. The obtained results may be applied in the theory commutative topological algebras and in algebras of analytic functions on Banach spaces as well.

Among of additive operators there are operators which preserve the multiplication by constants. Such mappings are called linear operators (notice that $\mathcal{M}$ is not a linear space). In additions all linear operators on $\mathcal{M}$ are described as operators of multiplication by an element in $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$. Properties of linear operators are investigated.

In Section 5 there are generalisations of some results, obtained in Section 4, for the space Λ_1^{ω} which can be represented as a weighted sum of spaces $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$.

The symmetry semi-group $\mathcal{S}_{1/n}$ such that all functions in algebra $H_{bs}^{1/n}$ are invariant are investigated in Subsection 5.1. But we do not know: does every $\mathcal{S}_{1/n}$-invariant polynomial belongs to $H_{bs}^{1/n}$.

In Subsection 5.2 linear operators, homomorphisms and seminorms of the algebra $\mathcal{M}^{1/N}$ are investigated. In particular a class of linear operators generated by functions in so-called class Ω is described. In addition, it is shown that $\mathcal{M}^{1/N}$ admits a natural structure of a locally convex space.

Key words: nonlinear functional analysis, polynomials on infinite-dimensional spaces, analytic functions on Banach spaces, spectra of algebras of analytic functions, symmetric analytic functions, operators on Banach spaces.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Jawad F. *Note on separately symmetric polynomials on the Cartesian product of ℓ_1* // Mat. Stud. 2018, **50** (2), 204–210. doi:10.15330/ms.50.2.204-210

2. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Supersymmetric Polynomials on the Space of Absolutely Convergent Series* // Symmetry, 2019, **11** (9), 1111, (19 p.). doi: 10.3390/sym11091111.

3. Jawad F., Karpenko H., Zagorodnyuk A., *Algebras generated by special symmetric polynomials on ℓ_1* // Carpathian Math. Publ. 2019, **11** (2), 335–344. doi:10.15330/cmp.11.2.335-344

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

4. Zagorodnyuk A., Jawad F. *Problems related to symmetric analytic functions on Banach spaces* // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach. Book of abstracts. - Lviv. 18–23 September 2017. – 33.

5. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Supersymmetric Polynomials on the Space of Absolutely Converges Series* // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. - Ворохта. 25 лютого – 1 березня, 2019. – 37.

6. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Symmetric and supersymmetric analytic functions on Banach spaces* // International conference "Banach Spaces and their Applications" dedicated to 70th anniversary of Professor Anatolij M. Plichko. Book of abstracts. - Lviv, 26–29 June 2019. – 52.

7. Jawad F. *Separately symmetric polynomials on the Cartesian product of* ℓ_1 // International Conference "Infinite-Dimensional Analysis and Topology" dedicated to 70th anniversary of Professor O. Lopushansky. Book of abstracts. - Ivano-Frankivsk, October 16–20, 2019 – 24.

8. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Quotient of a weighted sum of* ℓ_1*-spaces associated with supersymmetric polynomials* // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. - Ворохта. 26 лютого – 1 березня, 2020. – 11–12.