ДВНЗ “ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА”
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДВНЗ “ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА”
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Аль-Зірджаві Фарах Джавад Галі

УДК 517.98

ДИСЕРТАЦІЯ

Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах, які є інваріантними відносно дії операторних напівгруп

111 — Математика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ____________________________ Аль-Зірджаві Фарах Джавад Галі

Науковий керівник
Загороднюк Андрій Васильович,
доктор фізико-математичних наук, професор

ІВАНО-ФРАНКІВСЬК — 2021

АНОТАЦІЯ

Аль-Зірджаві Фарах Джавад Галі Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах, які є інваріантними відносно дії операторних напівгруп. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика. — ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”, Івано-Франківськ, 2021. ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”, Івано-Франківськ, 2021.

Аналітичні відображення на нескінченновимірних банахових просторах є невід’ємною частиною сучасного функціонального аналізу. Останнім часом зріс інтерес до дослідження дії операторних груп та напівгруп у просторах аналітичних функцій нескінченновимірного банахового простору X. При цьому виникає питання про інваріантні підпростори аналітичних функцій на X, їх алгебраїчні та топологічні структури. У багатьох випадках такі підпростори є алгебрами відносно поточкових операцій додавання та множення, а їх спектр (множина максимальних ідеалів) містить важливу інформацію про дію даної напівгрупи операторів на просторі X.

Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах та їх спектри досліджувались в роботах Л. Нахбіна, Т. Гамеліна, Т. Корна, Б. Коула, Дж. Мухіки. Пізніше, Р. Арон, Б. Коул та Т. Гамелін розглянули алгебру $H_b(X)$ аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі X і запропонували досліджувати спектр такої алгебри за допомогою так званого продовження Арона-Бернера аналітичних функцій обмеженого типу у другий спряжений простір X^{**} до простору X. Цей підхід було застосовано у багатьох працях. Зокрема, Р. Арон, П.

Галіндо, Д. Гарсіа і М. Маестре описали структури аналітичного многовиду над X^{**} на спектрі алгебри $H_b(X)$. У роботах А.В. Загороднюка було узагальнено цей метод і використано продовження Арона-Бернера для поліномів на топологічних тензорних добутках.

Симетричні поліноми на банаховому просторі досліджувались в роботах А.С. Немировського, С.М. Семенова, М. Гонзалеса, Р. Гонзало, Х. Харамілло, Р. Аленкара, Р. Арона, П. Галіндо, А. Загороднюка, М. Маестре, Д. Гарсія, П. Хаєка, І. Чернеги, Т. Василишина, В. Кравців та інших. Встановлено, що спектр алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на деякому банаховому просторі суттєво залежить як від вибору простору так і від вибору групи або напівгрупи симетрії. Наприклад, як показано у роботі П. Галіндо, Т. Василишина і А. Загороднюка, у випадку, коли $X = L_\infty[0, 1]$, і група симетрії складається з групи вимірних автоморфізмів відрізка $[0, 1]$, спектр алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу повністю описується функціоналами значень в точках простору X. Проте, як показано у роботах І. Чернеги, П. Галіндо та А. Загороднюка, у випадку, коли $X = \ell_p$, $1 \le p < \infty$, і група G є групою перестановок базисних векторів, спектр алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу є ширшим, ніж множина функціоналів значень в точках. У цьому випадку, на спектрі існують природні алгебраїчні операції, які утворюють структуру комутативного напівкільця з одиницею.

У першому розділі здійснено огляд літератури за темою дисертаційної роботи та подано основні результати дисертації.

У другому розділі наведено основні означення та сформульовано відомі результати, які використовуються в основних розділах дисертаційної роботи. Зокрема, наведено означення поліноміального відображення та аналітичної функції на банаховому просторі, сформульовано основні властивості цих об'єктів (поляризаційна формула, локальна обмеженість, радіус збіжності аналітичної функції та ін.) Також, наведено означення і описано основні властивості симетричних поліномів та аналітичних функцій на просторі абсолютно збіжних послідовностей. Крім того, у другому розділі наведено означення і властивості алгебри Фреше та її спектру (множини комплексних гомоморфізмів).

У підрозділі 3.1 доведено, що спектр алгебри нарізно симетричних аналітичних функцій обмеженого типу можна подати у вигляді декартового степеня спектра алгебри симетричних аналітичних функцій. Це дало можливість продовжити операції "$\bullet$" та "$\diamond$" на спектр алгебри нарізно симетричних аналітичних функцій та описати їх властивості. Також, побудовано зображення спектру у вигляді мультиплікативної підгрупи в просторі аналітичних функцій експоненціального типу від багатьох комплексних змінних.

У підрозділі 3.2 досліджено алгебру нарізно симетричних аналітичних функцій обмеженого типу $H_{bss}(\ell_1^{(X)})$ на топологічній прямій сумі $\ell_1^{(X)}$ банахових просторів, асоційованій з деяким банаховим простором X. У цьому випадку, спектр вказаної алгебри має досить складну структуру. Зокрема, у підрозділі 3.2 показано, що існує сюр'єктивний ізоморфізм такої алгебри в алгебру $H_b(X)$ цілих функцій обмеженого типу на деякому банаховому просторі X. З цього факту зроблено висновок про те, що спектр алгебри $H_{bss}(\ell_1^{(X)})$ містить спектр алгебри $H_b(X)$, зокрема, поточкову копію другого спряженого простору X^{**} до простору X.

У четвертому розділі розглянуто алгебру H_b^{sup} аналітичних функцій обмеженого типу, породжених суперсиметричними поліномами на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$, де $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. У підрозділі 4.1 описано деякі алгебраїчні базиси підалгебри суперсиметричних поліномів і відповідні твірні функції. Такий опис важливий для вивчення спектру (сукупності комплекснозначних гомоморфізмів) H_b^{sup}. Зокрема, показано, що кожен комплекснозначний гомоморфізм значення в точці може бути представлений як співвідношення двох цілих функцій експоненціального типу. Також, побудовано приклад комплекснозначного гомоморфізму, який не є функціоналом значення у точці. У дисертації показано, що спектр алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ може бути неперервно вкладений в спектр алгебри H_b^{sup}. Проте, це вкладення не є сюр'єктивним.

Результати підрозділу 4.2 показують, що спектр H_b^{sup} допускає алгебраїчну структуру комутативного кільця (яке не є лінійним простором) відносно операцій "$\bullet$" та "$\diamond$", які грають ролі додавання та множення на підмножині $\mathcal{M} \subset M_b^{sup}$. Використовуючи ці операції та ℓ_1-норму, введено природну метрику ρ на $\mathcal{M}$ і доведено, що $(\mathcal{M}, \rho)$ — повний метричний (не сепарабельний) простір.

У підрозділі 4.3 поширено операцію "$\bullet$" до комутативної операції згортки на множині характерів M_b^{sup}. Крім того, побудовано гаусдорфову топологію на M_b^{sup} відносно якої вказана операція згортки є неперервною.

У підрозділі 4.4 досліджено умови оборотності елементів кільця $\mathcal{M}$, гомоморфізми з $\mathcal{M}$ в себе та побудовано нетривіальні приклади підкілець в $\mathcal{M}$.

Алгебраїчна структура $\mathcal{M}$ дуже близька до структури банахової алгебри, але $\mathcal{M}$ не є банаховою алгеброю, оскільки вона не є лінійним простором. Отже, виникає природне запитання: які властивості банахових алгебр можна поширити на кільце $\mathcal{M}$? Наприклад, ми можемо побачити, що якщо елемент є близьким до одиниці, то він є оборотним. Але ми не знаємо чи $\mathcal{M}$ містить розривні комплекснозначні гомоморфізми. Також, нами було досліджено гомоморфізми $\mathcal{M}$, його підкільця, та оператори на $\mathcal{M}$.

У підрозділі 4.5 досліджено адитивні оператори на $\mathcal{M}$ та наведено приклади. Отже, отримані результати можуть бути цікавими як для теорії комутативних топологічних алгебр, так і для алгебр аналітичних функцій на банахових просторах. Серед адитивних операторів вибрано такі, що, додатково, зберігають операцію множення на константу. В дисертації ці відображення названо лінійними операторами (зауважимо, $\mathcal{M}$ не є лінійним простором). Також, повністю описано лінійні оператори на $\mathcal{M}$ як оператори множення на деякий елемент з $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$ та досліджено їх властивості.

У п'ятому розділі узагальнено деякі результати, отримані у четвертому розділі, для простору Λ_1^ω, який можна подати у вигляді зваженої суми просторів $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$.

У підрозділі 5.1, також, досліджено напівгрупу симетрій $\mathcal{S}_{1/n}$ відносно якої всі функції з алгебри $H_{bs}^{1/n}$ є інваріантними. Проте ми не знаємо чи кожен $\mathcal{S}_{1/n}$-інваріантний поліном належить алгебрі $H_{bs}^{1/n}$.

У підрозділі 5.2 досліджено лінійні оператори, гомоморфізми та напівнорми алгебри $\mathcal{M}^{1/N}$. Зокрема, описано один клас лінійних операторів, породжених функціями з так званого класу Ω. Крім того, показано, що на $\mathcal{M}^{1/N}$ існує природна структура локально опуклого метризовного простору.

Ключові слова: нелінійний функціональний аналіз, поліноми на нескінченновимірних просторах, аналітичні функції на банаховому просторі, спектр алгебр аналітичних функцій, симетричні аналітичні функції, оператори на банахових просторах.

ABSTRACT

Al-Zirjawi Farah Jawad Ghali Algebras of analytic functions on Banach spaces, which are invariant with respect operator semigroups. — Qualifying scientific work as a manuscript.

A Thesis for a Philosophy Doctor Degree in Mathematics, speciality 111 Mathematics. — Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2021. Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2021.

Analytic mappings on infinite-dimensional Banach spaces is an important part of contemporary functional analysis. The interest to actions of operator groups and semi-groups in spaces of analytic functions on an infinite-dimensional Banach space X increases during last years. The reasonable question here is about invariant subspaces of analytic functions on X and their algebraic and topological structures. In many cases such subspaces may have the structure of algebra with pointwise addition and multiplication and their spectra (sets of maximal ideals) has an important information about action of the given operator semi-group on X.

Algebras of analytic functions on Banach spaces and their spectra were invistigated by L. Nachbin, T. Gamelin, T. Corn, B. Cole, J. Mujica. Later, R. Aron, B. Cole and T, Gamelin considered the algebra $H_b(X)$ of analytic functions of bounded type on a complex Banach space X and proposed to investigate the spectrum of a such algebra with using so-called the Aron-Berner extension of analytic functions of bounded type to the second dual space X^{**} to X. This approach was used later by many authors. In particular, R. Aron, P. Galindo, D. Garcıa and M. Maestre described the structures of analytic manifold over X^{**} on the spectrum of $H_b(X)$. This method was

generalized in works of A.V. Zagorodnyuk and the Aron-Berner extension was used for polynomials on topological tensor products.

Symmetric polynomials on a Banach space were investigated by A. Nimerovski, S. Semenov, M. Gonzalez, R. Gonzalo, J, Jaramillo, R. Alencar, R. Aron, P. Galindo, A. Zagorodnyuk, M. Maestre, D. Garcıa, P. Hajek, I. Chernega, T. Vasylyshyn, V. Kravtsiv and others. It is known that the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions of bounded type on a Banach space is depending on the space and on the group or semi-group of symmetry. For example, P.Galindo, T. Vasylyshyn and A. Zagorodnyuk proved that if $X = L_\infty[0,1]$, and the group of symmetry consists of measurable automorphisms of the interval $[0,1]$, then the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions of bounded type can be completely described by point evaluation functionals at points of X. On the other hand, I. Chernega, P. Galindo and A. Zagorodnyuk show that if $X = \ell_p$, $1 \le p < \infty$, and the group G is the group of all permutations of basis vectors, then the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions of bounded type is larger than the set of point evaluation functionals. In this case, there are natural algebraic operation on the spectrum which form a unital commutative semi-ring structure.

In the first section there is a survey of the related literature, and formulated principal results of the dissertation investigation.

In Section 2 there are some basic definitions and preliminary results which are used in next sections. In particular, the concepts of polynomial mappings and analytic functions on a Banach space are considered and are indicated basic properties of these objects as the Polarization formula, local boundedness, the radius of the convergence of an analytic function, others. Also, definitions and basic properties of symmetric polynomials and analytic functions on the space of absolutely summing sequences are given. In addition, the second section contains definitions and properties of the Fréchet algebra and its spectrum (the set of complex homomorphisms).

In Subsection 3.1 it i proved that the spectrum of the algebra of separately symmetric analytic functions of bounded type can be represented as a Cartesian degree of the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions. It allows us to extend the operations "$\bullet$" and "$\diamond$" to the spectrum of the algebra of separately symmetric analytic functions of bounded type and describe their properties. In addition, some representation of the spectrum by analytic functions of exponential type of several variables is constructed.

In Subsection 3.2 algebras of separately symmetric analytic functions of bounded type $H_{bss}(\ell_1^{(X)})$ on the topological direct sum $\ell_1^{(X)}$ of Banach spaces ℓ_1 which is associated with a Banach space X are investigated. In this case, the spectra of such algebras may have a very complicated structure.In particular, it is shown that there exists a surjective isomorphism of a such algebra onto the algebra $H_b(X)$ of entire functions of bounded type on some Banach space X. From this fact it follows that the spectrum of $H_{bss}(\ell_1^{(X)})$ contains the spectrum of $H_b(X)$, in particular, it contains the copy of the second dual space X^{**} to X.

In the forth section the algebra H_b^{sup} of analytic functions of bounded type, generated by supersymmetric polynomials on $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$, where $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, is considered. Some algebraic bases of the subalgebra of supersymmetric polynomials and corresponding generating functions are described in Subsection 4.1. Such description is important for the investigation of the spectrum (the set of complex homomorphisms) of H_b^{sup}. In particular, it is shown that every complex point evaluation homomorphism can be represented as a ratio of two functions of exponential type. In addition, it is shown that the spectrum of $H_{bs}(\ell_1)$ can be continuously embedded into the spectrum of H_b^{sup}. However, this embedding is not onto.

From results of subsection 4.2 it follows that the spectrum of H_b^{sup} admits an algebraic structure of commutative semiring (which is not a linear space) with respect to operations "$\bullet$" and "$\diamond$" that play roles of addition and multiplication on the subset $\mathcal{M} \subset M_b^{sup}$. Using these operations and the ℓ_1-norm, it is introduced a natural metric ρ on $\mathcal{M}$ and proved, that $(\mathcal{M}, \rho)$ is a complete metric nonseparable space.

In subsection 4.3 the operation "$\bullet$" is extended to a commutative convolution on the set of complex homomorphisms M_b^{sup}. In addition, a Hausdorff topology on M_b^{sup} is constructed and the operation is continuous with respect to this topology.

Conditions of invertibility of elements of the ring $\mathcal{M}$ and homomorphisms from $\mathcal{M}$ to itself are investigated in Subsection 4.4. Nontrivial examples of subrings in $\mathcal{M}$ are constructed.

The algebraic structure of $\mathcal{M}$ is very close to the Banach algebra structure but $\mathcal{M}$ is not a Banach algebra because it is not a linear space. So we have a natural question: what properties of Banach algebras can be extended to the ring $\mathcal{M}$? For example, we can see that if an element is close to the unit, then it is invertible. But we do not know: do $\mathcal{M}$ contains discontinuous complex homomorphisms? Also, it was investigated homomorphisms of $\mathcal{M}$, its subrings and operators on $\mathcal{M}$.

In Subsection 4.5 additive operators on $\mathcal{M}$ are investigated and some examples are constructed. The obtained results may be applied in the theory commutative topological algebras and in algebras of analytic functions on Banach spaces as well.

Among of additive operators there are operators which preserve the multiplication by constants. Such mappings are called linear operators (notice that $\mathcal{M}$ is not a linear space). In additions all linear operators on $\mathcal{M}$ are described as operators of multiplication by an element in $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$. Properties of linear operators are investigated.

In Section 5 there are generalizations of some results, obtained in Section 4, for the space Λ_1^ω which can be represented as a weighted sum of spaces $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$.

The symmetry semi-group $\mathcal{S}_{1/n}$ such that all functions in algebra $H_{bs}^{1/n}$ are invariant are investigated in Subsection 5.1. But we do not know: does every $\mathcal{S}_{1/n}$-invariant polynomial belongs to $H_{bs}^{1/n}$.

In Subsection 5.2 linear operators, homomorphisms and seminorms of the algebra $\mathcal{M}^{1/N}$ are investigated. In particular a class of linear operators generated by functions in so-called class Ω is described. In addition, it is shown that $\mathcal{M}^{1/N}$ admits a natural structure of a locally convex space.

Key words: nonlinear functional analysis, polynomials on infinite-dimensional spaces, analytic functions on Banach spaces, spectra of algebras of analytic functions, symmetric analytic functions, operators on Banach spaces.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Jawad F. *Note on separately symmetric polynomials on the Cartesian product of ℓ_1* // Mat. Stud. 2018, **50** (2), 204–210. doi:10.15330/ms.50.2.204-210

2. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Supersymmetric Polynomials on the Space of Absolutely Convergent Series* // Symmetry, 2019, **11** (9), 1111, (19 p.). doi: 10.3390/sym11091111.

3. Jawad F., Karpenko H., Zagorodnyuk A., *Algebras generated by special symmetric polynomials on ℓ_1* // Carpathian Math. Publ. 2019, **11** (2), 335–344. doi:10.15330/cmp.11.2.335-344

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

4. Zagorodnyuk A., Jawad F. *Problems related to symmetric analytic functions on Banach spaces* // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach. Book of abstracts. - Lviv. 18–23 September 2017. – 33.

5. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Supersymmetric Polynomials on the Space of Absolutely Converges Series* // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. - Ворохта. 25 лютого – 1 березня, 2019. – 37.

6. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Symmetric and supersymmetric analytic functions on Banach spaces* // International conference "Banach Spaces and their Applications" dedicated to 70th anniversary of Professor Anatolij M. Plichko. Book of abstracts. - Lviv, 26–29 June 2019. – 52.

7. Jawad F. *Separately symmetric polynomials on the Cartesian product of* ℓ_1 // International Conference "Infinite-Dimensional Analysis and Topology" dedicated to 70th anniversary of Professor O. Lopushansky. Book of abstracts. - Ivano-Frankivsk, October 16–20, 2019 – 24.

8. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Quotient of a weighted sum of* ℓ_1*-spaces associated with supersymmetric polynomials* // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. - Ворохта. 26 лютого – 1 березня, 2020. – 11–12.

ЗМІСТ

СПИСОК ПОЗНАЧЕНЬ

$H_b(X)$ —	алгебра цілих аналітичних функцій обмеженого типу на X
$H_{bs}(\ell_1)$ —	алгебра цілих симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на ℓ_1
$H_{bss}(\ell_1^{(n)})$ —	алгебра цілих нарізно симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на $\ell_1^{(n)}$
H_b^{sup} —	алгебра цілих суперсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$
M_b —	спектр алгебри $H_b(X)$, тобто множина усіх неперервних комплекснозначних гомоморфізмів $H_b(X)$.
M_{bss} —	спектр алгебри $H_{bss}(\ell_1^{(n)})$
M_b^{sup} —	спектр алгебри H_b^{sup}
$\mathcal{P}(X)$ —	простір неперервних комплекснозначних поліномів на X.
$\mathcal{P}(^nX)$ —	простір всіх неперервних n-однорідних комплекснозначних поліномів на X
$\delta_x(f)$ —	функціонал значення в точці x
$\mathbb{Z}_0$ —	множина цілих чисел за винятком точки 0.

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. Аналітичні відображення на нескінченновимірних банахових просторах є невід'ємною частиною сучасного функціонального аналізу. Останнім часом зріс інтерес до дослідження дії операторних груп та напівгруп у просторах аналітичних функцій нескінченновимірного банахового простору X. При цьому виникає питання про інваріантні підпростори аналітичних функцій на X, їх алгебраїчні та топологічні структури. У багатьох випадках такі підпростори є алгебрами відносно поточкових операцій додавання та множення, а їх спектр (множина максимальних ідеалів) містить важливу інформацію про дію даної напівгрупи операторів на просторі X. Ці дослідження можна розглядати, як рух у напрямку побудови нескінченновимірного аналогу класичної теорії інваріантів, яку започаткував Д. Гільберт на початку минулого століття досліджуючи кільця інваріантних поліномів відносно дії деякої групи лінійних відображень скінченновимірного простору.

Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах та їх спектри досліджувались в роботах Л. Нахбіна, Т. Гамеліна, Т. Корна, Б. Коула, Дж. Мухіки. Пізніше, Р.Арон, Б. Коул та Т. Гамелін розглянули алгебру $H_b(X)$ аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі X і запропонували досліджувати спектр такої алгебри за допомогою так званого продовження Арона-Бернера аналітичних функцій обмеженого типу у другий спряжений простір X'' до простору X. Цей підхід було застосовано у багатьох працях. Зокрема, Р. Арон, П. Галіндо, Д. Гарсіа і М. Маестре описали структури аналітичного многовиду над X'' на спектрі алгебри $H_b(X)$. У роботах А.В. Загороднюка було узагальнено цей метод і використано продовження Арона-Бернера для поліномів на топологічних тензорних добутках.

Симетричні поліноми на банаховому просторі досліджувались в роботах А.С. Немировського, С.М. Семенова, М. Гонзалеса, Р. Гонзало, Х. Харамілло, Р. Аленкара, Р. Арона, П. Галіндо, А. Загороднюка, М. Маестре, Д. Гарсія, П. Хаєка, І. Чернеги, Т. Василишина, В. Кравців та інших. Встановлено, що спектр алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на деякому банаховому просторі суттєво залежить як від вибору простору так і від вибору групи або напівгрупи симетрії. Наприклад, як показано у роботі П. Галіндо, Т. Василишина і А. Загороднюка, у випадку, коли $X = L_\infty[0,1]$, і група симетрії складається з групи вимірних автоморфізмів відрізка $[0,1]$, спектр алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу повністю описується функціоналами значень в точках простору X. Проте, як показано у роботах І. Чернеги, П. Галіндо та А. Загороднюка, у випадку, коли $X = \ell_p$, $1 \leq p < \infty$, і група G є групою перестановок базисних векторів, спектр алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу є ширшим, ніж множина функціоналів значень в точках. У цьому випадку, на спектрі існують природні алгебраїчні операції, які утворюють структуру комутативного напівкільця з одиницею.

У даній дисертаційній роботі продовжено дослідження алгебр симетричних аналітичних функцій обмеженого типу та їх спектрів на деякому банаховому просторі послідовностей. Зокрема розглянуто випадки напівгруп симетрії, які дозволяють отримати достатньо багату алгебраїчну структуру на спектрах цих алгебр. Так, у випадку алгебри так званих суперсиметричних аналітичних функцій на просторі ℓ_1 отримано і досліджено кільце характерів яке є спектром цієї алгебри. Зауважимо, що суперсиметричні поліноми мають застосування у статистичній квантовій фізиці і отримані в дисертації результати також можуть бути застосованими в цьому контексті. Також, в дисертаційній роботі описано спектри алгебр симетричних аналітичних функцій для загальніших і складніших випадків.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, що складають основу дисертації, проводились на кафедрі математичного і функціонального аналізу ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" в рамках науководослідної теми "Алгебри симетричних аналітичних функцій на банахових просторах. Алгебраїчні та аналітичні структури на спектрах" (номер державної реєстрації 0119U100063).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є опис структури алгебр аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі, інваріантних відносно дії деякої групи або напівгрупи перетворень цього простору, дослідження структури спектрів таких алгебр, зокрема, множини функціоналів значень в точках вихідного простору.

Основними *завданнями дослідження* є:

1. Описати алгебраїчні базиси і дати характеристику спектра алгебри нарізно симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на скінченному декартовому степені простору ℓ_1. Дослідити випадок нескінченної топологічної суми просторів ℓ_1.
2. Описати алгебраїчні базиси алгебри суперсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу на двосторонньому просторі ℓ_1. Дослідити гомоморфізми цієї алгебри в алгебру симетричних аналітичних функцій.

3. Описати алгебраїчні та топологічні структури підмножини спектра алгебри суперсиметричних аналітичних функцій, яка складається з функціоналів значень у точках вихідного простору.

4. Описати властивості спектра алгебри суперсиметричних аналітичних функцій.

5. Побудувати напівгрупу симетрій на топологічній прямій сумі просторів ℓ_1 таким чином, щоб функціонали значень в точках утворювали топологічну алгебру відносно природних операцій. Дослідити властивості цієї алгебри.

Об'єктом дослідження є алгебри аналітичних функцій обмеженого типу, які є інваріантними відносно дії деякої напівгрупи аналітичних відображень, зокрема, алгебри симетричних, нарізно симетричних, суперсиметричних аналітичних функцій та їх узагальнення.

Предметом дослідження є алгебраїчні базиси в алгебрах суперсиметричних поліномів, алгебраїчні та топологічні структури на спектрах алгебр аналітичних функцій обмеженого типу, які є інваріантними відносно дії деякої напівгрупи аналітичних відображень, оператори, які зберігають ці структури.

Методи дослідження. В роботі використано методи теорії аналітичних функцій на нескінченновимірних банахових просторах, теорії симетричних аналітичних функцій, методи загальної топології, теорії топологічних алгебр, зокрема, алгебр Фреше, методи комбінаторики.

Наукова новизна отриманих результатів. Усі результати, отримані у дисертації, є новими. У роботі вперше отримано наступні результати:

— Описано алгебраїчні базиси алгебри нарізно симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на скінченному декартовому степені простору ℓ_1. Доведено, що спектр цієї алгебри є декартовим добутком спектрів алгебр симетричних аналітичних функцій на просторах ℓ_1.

— Описано алгебраїчні базиси алгебри суперсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу на двосторонньому просторі ℓ_1. Знайдено зображення відповідних генеруючих функцій у вигляді мероморфних функцій однієї комплексної змінної. Побудовано неперервний ін'єктивний гомоморфізм з щільним образом цієї алгебри в алгебру симетричних аналітичних функцій на ℓ_1.

— Встановлено, що спектр алгебри суперсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу містить нелінійне комутативне кільце $\mathcal{M}$, яке складається з функціоналів значень у точках вихідного простору. Це кільце є повним несепарабельним метричним простором у деякій природній метриці. Досліджено оборотність елементів цього кільця, гомоморфізми. Повністю описано гомоморфізми кільця $\mathcal{M}$, які додатково, зберігають операцію множення на константу.

— Описано слабко поліноміальну топологію на спектрі алгебри суперсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу, та показано, що адитивну операцію кільця $\mathcal{M}$ можна продовжити на спектр до комутативної згортки.

— Отримано узагальнення деяких результатів про суперсиметричні аналітичні функції на алгебри аналітичних $\mathcal{S}_\omega$-суперсиметричних функцій обмеженого типу на деякій топологічній прямій сумі просторів ℓ_1. Напівгрупа симетрії $\mathcal{S}_\omega$ побудована таким чином, щоб функціонали значень в точках утворювали топологічну алгебру відносно природних операцій. Досліджено гомоморфізми і топологічні властивості цієї алгебри.

Практичне значення отриманих результатів. Результати, отримані у дисертаційній роботі, носять теоретичний характер. Вони можуть бути використані в нескінченновимірному комплексному аналізі, в теорії операторів, квантовій статистичній механіці, теорії алгебр Фреше. Ці результати знайдуть застосування у наукових дослідженнях, які проводяться у ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", Інституті прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України, Львівському національному університеті імені Івана Франка, Інституті математики НАН України, Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича, Національному університеті імені Т. Г. Шевченка та інших наукових установах і вищих навчальних закладах України.

Особистий внесок здобувача. Всі основні результати, висвітлені в дисертації, отримано здобувачем самостійно. У спільних роботах з науковим керівником, керівнику належить постановка задачі і перевірка правильності висновків. У статті [35] співавтор Г. Карпенко надавала консультації щодо правильності використання англомовної термінології та проводила остаточну коректуру тексту.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи були представлені на таких конференціях та семінарах:

— International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (Lviv, 18–23 September 2017);

— Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2019. р.);

— International conference “Banach Spaces and their Applications” dedicated to 70th anniversary of Professor Anatolij M. Plichko (Lviv, 26–29 June 2019);

— International Conference “Infinite-Dimensional Analysis and Topology” dedicated to 70th anniversary of Professor O. Lopushansky (Ivano-Frankivsk, October 16–20, 2019);

— Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 26 лютого – 1 березня 2020. р.);

— наукових семінарах кафедри математичного і функціонального аналізу “Прикладний нелінійний аналіз ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника” (керівник – д. фіз.-мат. н., проф. А. В. Загороднюк)(2017, 2018, 2019 рр.).

Публікації. Результати дисертаційного дослідження опубліковано в 8 працях, серед яких 3 журнальні статті у фахових міжнародних виданнях, що входять до наукометричних баз Scopus та Web of Science.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, п’ятьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації 136 сторінки. Список використаних джерел займає 8 сторінок та містить 66 найменувань. Додатки займають 3 сторінки і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

У вступі обгрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету та завдання дослідження, описано наукову новизну отриманих результатів.

У першому розділі здійснено огляд літератури за темою дисертаційної роботи та подано основні результати дисертації.

У другому розділі наведено основні означення та сформульовано відомі результати, які використовуються в основних розділах дисертаційної роботи. Зокрема, наведено означення поліноміального відображення та аналітичної функції на банаховому просторі, сформульовано основні властивості цих об'єктів (поляризаційна формула, локальна обмеженість, радіус збіжності аналітичної функції та ін.) Також, наведено означення і описано основні властивості симетричних поліномів та аналітичних функцій на просторі абсолютно збіжних послідовностей. Крім того, у другому розділі наведено означення і властивості алгебри Фреше та її спектру (множини комплексних гомоморфізмів).

У підрозділі 3.1 доведено, що спектр алгебри нарізно симетричних аналітичних функцій обмеженого типу можна подати у вигляді декартового степеня спектра алгебри симетричних аналітичних функцій. Це дало можливість продовжити операції "$\bullet$" та "$\diamond$" на спектр алгебри нарізно симетричних аналітичних функцій та описати їх властивості. Також, побудовано зображення спектру у вигляді мультиплікативної підгрупи в просторі аналітичних функцій експоненціального типу від багатьох комплексних змінних.

У підрозділі 3.2 досліджено алгебру нарізно симетричних аналітичних функцій обмеженого типу $H_{bss}(\ell_1^{(X)})$ на топологічній прямій сумі $\ell_1^{(X)}$ банахових просторів, асоційованій з деяким банаховим простором X. У цьому випадку, спектр вказаної алгебри має досить складну структуру. Зокрема, у підрозділі 3.2 показано, що існує сюр'єктивний ізоморфізм такої алгебри в алгебру $H_b(X)$ цілих функцій обмеженого типу на деякому банаховому просторі X. З цього факту зроблено висновок про те, що спектр алгебри $H_{bss}(\ell_1^{(X)})$ містить спектр алгебри $H_b(X)$, зокрема, поточкову копію другого спряженого простору X^{**} до простору X.

У четвертому розділі розглянуто алгебру H_b^{sup} аналітичних функцій обмеженого типу, породжених суперсиметричними поліномами на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$, де $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Описано деякі алгебраїчні базиси підалгебри суперсиметричних поліномів і відповідні твірні функції. Такий опис важливий для вивчення спектру (сукупності комплекснозначних гомоморфізмів) H_b^{sup}. Зокрема, показано, що кожен комплекснозначний гомоморфізм значення в точці може бути представлений як співвідношення двох цілих функцій експоненціального типу. Також, побудовано приклад комплекснозначного гомоморфізма, який не є функціоналом значення і точці. У дисертації показано, що спектр алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ може бути неперервно вкладений в спектр алгебри H_b^{sup}. Проте, це вкладення не є сюр'єктивним.

У підрозділі 4.1 показано, що H_b^{sup} цілком відрізняється від $H_{bs}(\ell_1)$. Наприклад, гомоморфізм визначений $T_k \mapsto -T_k$ неперервний у H_b^{sup}, тоді як $F_k \mapsto -F_k$ розривний у $H_{bs}(\ell_1)$.

Результати підрозділу 4.2 показують, що спектр H_b^{sup} допускає цікаву алгебраїчну структуру комутативного кільця (яке не є лінійним простором) відносно операцій "$\bullet$" та "$\diamond$", які грають ролі додавання та множення на підмножині $\mathcal{M} \subset M_b^{sup}$. Використовуючи ці операції та ℓ_1-норму, ми ввели природну метрику ρ на $\mathcal{M}$ і довели, що $(\mathcal{M}, \rho)$ — повний метричний (не сепарабельний) простір.

Оскільки $\mathcal{M}$ можна розглядати як підмножину множини характерів M_b^{sup}, природно виникає питання чи можна поширити структури, визначені на $\mathcal{M}$ на множину M_b^{sup}. У підрозділі 4.3 поширено операцію "$\bullet$" до комутативної операції згортки на множині характерів M_b^{sup}. Крім того, побудовано гаусдорфову топологію на M_b^{sup} відносно якої вказана операція згортки є неперервною.

У підрозділі 4.4 досліджено умови оборотності елементів кільця $\mathcal{M}$, гомоморфізми з $\mathcal{M}$ в себе та побудовано нетривіальні приклади підкілець в $\mathcal{M}$.

Алгебраїчна структура $\mathcal{M}$ дуже близька до структури банахової алгебри, але $\mathcal{M}$ не є банаховою алгеброю, оскільки вона не є лінійним простором. Отже, виникає природне запитання: які властивості банахових алгебр можна поширити на кільце $\mathcal{M}$? Наприклад, ми можемо побачити, що якщо елемент є близьким до одиниці, то він є оборотним. Але ми не знаємо чи $\mathcal{M}$ містить розривні комплекснозначні гомомомрфізми. Також нами було досліджено гомомомрфізми $\mathcal{M}$, його підкільця, та адитивні оператори $\mathcal{M}$.

У підрозділі 4.5 досліджено адитивні оператори на $\mathcal{M}$, наведено приклади. Отже, отримані результати можуть бути цікавими як для теорії комутативних топологічних алгебр, так і для алгебр аналітичних функцій на банахових просторах. Серед адитивних операторів вибрано такі, що, додатково, зберігають операцію множення на константу. Ці відображення, в дисертації, названо лінійними операторами (зауважимо, $\mathcal{M}$ не є лінійним простором). Також, повністю описано лінійні оператори на $\mathcal{M}$ як оператори множення на деякий елемент з $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$ та досліджено їх властивості.

У п'ятому розділі узагальнено деякі результати, отримані у четвертому розділі для простору Λ_1^{ω}, який можна подати у вигляді зваженої суми просторів $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$.

У підрозділі 5.1, також, досліджено напівгрупу симетрій $\mathcal{S}_{1/n}$ відносно якої всі функції з алгебри $H_{bs}^{1/n}$ є інваріантними. Проте, ми не знаємо, чи кожен $\mathcal{S}_{1/n}$-інваріантний поліном належить алгебрі $H_{bs}^{1/n}$.

У підрозділі 5.2 досліджено лінійні оператори, гомоморфізми та напівнорми алгебри $\mathcal{M}^{1/N}$. Зокрема, описано один клас лінійних операторів, породжених функціями з так званого класу Ω. Крім того, показано, що на $\mathcal{M}^{1/N}$ існує природна структура локально опуклого метризовного простору.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ, ВИБІР МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Класична теорія інваріантів сформувалась в середині XIX століття для класифікації геометричних об'єктів алгебраїчними методами. Якщо деяка група G діє на лінійному просторі $\mathbb{C}^n$ або $\mathbb{R}^n$, то важливим питанням даної теорії є опис алгебри інваріантних поліномів відносно дії цієї групи. У 1880 році Д. Гільберт розв'язав основну проблему класичної теорії інваріантів, показавши, що для інваріантів n-арних форм скінченого степеня спеціальної лінійної групи $SL_n(\mathbb{C})$ існує скінчений базис. В 30-их роках XX-го століття класична теорія інваріантів увійшла, в значній мірі, у склад теорії зображень класичних груп (див. монографію [1]). Також, з класичної теорії інваріантів виникла алгебраїчна геометрія та теорія алгебр Лі. У випадку, коли група G є групою перестановок базисних векторів, відповідні інваріантні поліноми називаються симетричними. Симетричні поліноми на скінченновимірних просторах відіграють важливу роль в комбінаториці і мають застосування у квантовій механіці (див. [48]).

Дослідження симетричних поліномів на банахових просторах ℓ_p та L_p розпочалось з роботи А.С. Немировского і С.М. Семенова [2]. У цій роботі автори розглянули степеневі базиси в алгебрах симетричних поліномів на ℓ_p та L_p, $1 \le p < \infty$ і встановили умови за яких симетрична неперервна функція на кулі простору ℓ_2 рівномірно апроксимується симетричними поліномами. Пізніше, ці результати було узагальнено М. Гонзалезом, Р. Гонзало та Х. Харамілло для переставно інваріантних банахових просторів [28]. У роботі [2] було, також, зауважено, що на просторах ℓ_p природно розглядати напівгрупу зсувів, породжену операторами $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, \ldots) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0, x_n, \ldots)$ та поліноми, які є інваріантними відносно цієї напівгрупи. В подальшому, в літературі такі поліноми отримали назву *субсиметричні*. Для нас приклад субсиметричних поліномів цікавий тим, що в цьому випадку розглядається, власне, напівгрупа симетрій. У роботах [20], [29], [30] було досліджено лінійні базиси в алгебрах субсиметричних поліномів на просторах ℓ_p, алгебраїчна незалежність твірних елементів та застосування субсиметричних поліномів для дослідження алгебр аналітичних функцій на банаховому просторі.

Алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу, та їх спектри (множини лінійних мультиплікативних функціоналів) було досліджено вперше у роботі Р. Арона, Р. Аленкара, П. Галіндо, А. Загороднюка [3]. Зауважимо, що дослідження алгебр аналітичних функцій банахового простору, на той час, вже мало довгу історію. Поліноми та аналітичні відображення від нескінченної кількості змінних розглядались в роботах Р. Гато [27] та М. Фреше [21], [22]. Пізніше, теорія полілінійних та поліноміальних відображень на нормованих просторах була розвинена математиками Львівської математичної школи, що знайшло своє відображення у роботах С. Банаха, С. Мазура, В. Орліча, а також, у статтях у статтях М.А. Цорна, А.Е. Тейлора та інших [8], [50], [51], [61], [62], [65], [66]. Багато задач з цього періоду увійшли до відомого збірника задач “Шотландська книга” [49]. Також, підсумок досліджень цього часу можна знайти у додатку до монографії [32], написаного М. Цорном. Вивчення аналітичних функцій на банаховому просторі, зокрема цілих функцій обмеженого типу можна знайти в роботі Й. Бохнака і Й. Сісяка [9]. Топологічна структура просторів аналітичних функцій на банахових просторах була досліджена у монографії Л. Нахбіна [56]. Далі, теорія аналітичних відображень на банахових та топологічних лінійних просторах розвивалась у різних напрямках. Аналог теорії аналітичних функцій нескінченної кількості змінних викладено в монографіях [54] (для банахових просторів), [18], [19], [31] (для локально опуклих просторів). У [52] побудовано аналог теорії аналітичних многовидів над нескінченновимірними локально опуклими просторами. Систематичне дослідження спектру алгебри $H_b(X)$ цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі X розпочалось з робіт Р. Арона, Б. Коула, Т. Гамеліна, А. Давіє та ін. [5], [6], [24], [17], [25]. Аналітичні структури на спектрі алгебри $H_b(X)$ було описано Р. Ароном, П. Галіндо, Д. Гарсія та М. Маестре у статті [7]. При цьому було використано так зване продовження Арона-Бернера. У [4] Р. Арон та П. Бернер показали, що існує неперервний оператор продовження аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі X у другий спряжений простір X'' і цей оператор є гомоморфізмом алгебр аналітичних функцій обмеженого типу. У роботах А.В. Загороднюка [63], [64] було застосовано продовження Арона-Бернера для аналітичних функцій на проективних симетричних тензорних добутках банахових просторів і використано отримані результати для явного опису спектра алгебри $H_b(X)$. Алгебри симетричних аналітичних функцій породжені зліченною системою однорідних поліномів, які утворюють алгебраїчний базис. Тому техніка дослідження спектру таких алгебр відрізняється від випадку $H_b(X)$.

У роботі [3] показано, що кожен лінійний мультиплікативний функціонал (характер) алгебри $H_{bs}(\ell_p)$ симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ повністю визначається значеннями на так званих степеневих симетричних поліномах F_k, $k \geq \lceil p \rceil$, які утворюють алгебраїчний базис в підалгебрі поліномів $\mathcal{P}_s(\ell_p) \subset H_{bs}(\ell_p)$

$$F_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k,$$

де $\lceil p \rceil$ – найменше натуральне число, яке більше за p і

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n x_n \in \ell_p.$$

З іншого боку, для наперед заданої послідовності комплексних чисел $(\xi_n) \subset \mathbb{C}$, $n \geq \lceil p \rceil$, можна визначити характер алгебри $\mathcal{P}_s(\ell_p)$ симетричних поліномів на ℓ_p поклавши $\varphi(F_k) = \xi_k$, $k \geq \lceil p \rceil$ і продовживши його за лінійністю і мультиплікативністю на $\mathcal{P}_s(\ell_p)$. Проте, у багатьох випадках, цей характер не буде неперервним в топології рівномірної збіжності на обмежених множинах простору ℓ_p і тому, не буде мати продовження до функціоналу на алгебрі Фреше $H_{bs}(\ell_p)$.

У [12] описано множину характерів алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ у вигляді підмножини простору цілих функцій експоненціального типу від однієї комплексної змінної. Для цього розглянуто так званий алгебраїчний базис елементарних симетричних поліномів $\{G_k\}$ алгебри $H_{bs}(\ell_1)$, які визначаються формулою

$$G_k(x) = \sum_{n_1 < n_2 < \cdots < n_k} x_{n_1} x_{n_2} \ldots x_{n_k},$$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_1$. Після цього, для кожного характера φ алгебри $H_{bs}(\ell_1)$, розглянуто генеруючу функцію послідовності $\varphi(G_k)$:

$$\mathcal{G}(\varphi)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \varphi(G_k),$$

де $G_0 = 1$, $t \in \mathbb{C}$. Оскільки послідовність поліномів $\{G_k\}$ є алгебраїчним базисом, множина характерів (спектр) алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ знаходиться у взаємно-однозначній відповідності з множиною генеруючих функцій. У [12] показано, що кожна така функція є функцією експоненціального типу, яка в нулі дорівнює одиниці. При цьому функціонали значень в точках простору ℓ_1 описуються добутками Адамара. Крім того, серед характерів алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ є однопараметрична група функціоналів, які не породжуються значеннями в точках простору ℓ_1. Цим характерам відповідають генеруючі функції $e^{\lambda t}$, для довільного фіксованого комплексного параметра λ.

Метод генеруючих функцій можна застосувати для випадку довільної алгебри аналітичних функцій обмеженого типу, яка породжена зліченною сім'єю поліномів. Так, у [16], зокрема, показано, що якщо деяка підалгебра алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ породжена послідовністю поліномів $\{P_k\}$, $\deg P_k = k$, $\|P_k\| = 1/k!$, то спектр цієї підалгебри перебуває у взаємно-однозначній відповідності з множиною генеруючих функцій послідовностей $\varphi(P_k)$, яка є підмножиною (не обов'язково власною) простору цілих функцій експоненціального типу.

У роботах [11], [12] введено і досліджено алгебраїчні операції на спектрі алгебри $H_{bs}(\ell_1)$, які відіграють роль додавання та множення. У [14] показано, що спектр алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ з цими операціями буде комутативним напівкільцем з одиницею.

Серед алгебр, породжених зліченною сім'єю поліномів, є так звані алгебри блочно-симетричних аналітичних функцій. Блочно-симетричні поліноми на просторах $\ell_p(\mathbb{C}^n) \simeq \underbrace{\ell_p \times \ldots \times \ell_p}_{n}$ визначаються як інваріантні поліноми відносно перестановок "блоків" — n-вимірних підпросторів в $\ell_p(\mathbb{C}^n)$. Алгебри блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторах $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ були досліджені в роботах [43],[44], [45].

У дисертаційній роботі використано результати та техніку теорії блочно-симетричних аналітичних функцій для опису спектра алгебри нарізно симетричних аналітичних функцій на декартових добутках простору ℓ_1. Крім того, досліджено алгебру суперсиметричних аналітичних функцій і перенесено на спектр цієї алгебри операції, які були введені для випадку симетричних аналітичних функцій. Слід відзначити, що спектр алгебри суперсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу є комутативним кільцем з одиницею (яке не є лінійним простором) відносно цих операцій. У дисертаційній роботі досліджено структуру цього кільця та його гомоморфізми. Також, отримано деякі узагальнення для ширшого класу алгебр аналітичних функцій.

РОЗДІЛ 2
ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ І ВЛАСТИВОСТІ

2.1. Поліноми та аналітичні функції на банаховому просторі

Нехай X – комплексний банахів простір. (Неперервне) відображення $P\colon X \to \mathbb{C}$ називається (неперервним) n-однорідним поліномом, якщо існує (неперервне) n-лінійне відображення $B_P\colon X^n \to \mathbb{C}$ таке, що $P(x) = B_P(x, \ldots, x)$. 0-однорідним поліномом є лише стала функція. Скінченна сума однорідних поліномів є поліномом.

Поліноми на банаховому просторі є природним узагальненням лінійних функціоналів і мають деякі подібні властивості. Зокрема, неперервність полінома еквівалентна його обмеженості на обмежених множинах. Крім того, з неперевності хоча б в одній точці банахового простору випливає неперервність в кожній точці цього простору, а обмеженість на деякій кулі ненульвого радіуса еквівалентна обмеженості на довільній обмеженій підмножині.

Зауважимо, що для кожного n-однорідного полінома на X існує єдине симетричне n-лінійне відображення $B_P\colon X^n \to \mathbb{C}$ асоційоване з P, тобто таке, що $P(x) = B_P(x, \ldots, x)$. “Симетричне” тут означає, що

$$B_P(x_1, \ldots, x_n) = B_P(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}), \quad x_1, \ldots, x_n \in X$$

для довільної підстановки σ на множині $\{1, \ldots, n\}$. Зв’язок між поліномом P і відповідним симетричним n-лінійним відображенням B_P задається відомою поляризаційною формулою:

$$B_P(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{2^n n!}\sum_{\epsilon_i=\pm 1}\epsilon_1\ldots\epsilon_n P\left(\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j x_j\right).$$

При цьому, неперервність полінома P еквівалентна неперервності відповідного відображення B_P. Позначимо через $\mathcal{P}(^nX)$ простір усіх неперервних n-однорідних поліномів на X та через $\mathcal{P}(X)$ простір усіх поліномів на X. Зауважимо, що $\mathcal{P}(^nX)$ є банаховим простором відносно будь-якої з норм

$$\|P\|_r=\sup_{\|x\|\le r}|P(x)|, \qquad r>0. \tag{2.1.1}$$

З поляризаційної формули випливає двостороння оцінка на норми P та B_P:

$$\|P\|_1\le\|B_P\|\le\frac{n^n}{n!}\|P\|_1,$$

де

$$\|B_P\|=\sup_{\|x_1\|\le 1,\ldots,\|x_n\|\le 1}|B_P(x_1,\ldots,x_n)|.$$

В загальному випадку константу $\frac{n^n}{n!}$ покращити не вдається. Цій проблемі — проблемі пошуку найкращої константи c, такої що $\|B_P\|\le c\|P\|$, присвячено багато робіт, $P\in\mathcal{P}(^nX)$. В окремих випадках цю оцінку, яка залежить від n і від геометрії простору X, вдалося вдосконалити. Так, у випадку коли X є гільбертовим простором, $\|B_P\|=\|P\|$ для довільного n і довільного n-однорідного полінома $P\colon X\to\mathbb{K}$, де $\mathbb{K}$ — поле дійсних або комплексних чисел. Однак, у випадку полінома $P\colon \ell_1\to\mathbb{K}$ такого, що $P(x)=x_1\ldots x_n$ маємо, що $\|B_P\|=\frac{n^n}{n!}\|P\|$.

Нехай X,Y — банахові простори. Відображення $P\colon X\to Y$ називається неперервним поліноміальним відображенням, якщо для кожного лінійного функціонала $\phi\in Y^*$, $\phi\circ P$ буде поліномом на X.

Нагадаємо, що топологічним базисом (або базисом Шаудера) в банаховому просторі X називається послідовність лінійно незалежних векторів (e_m), $m \in \mathbb{N}$ така, що кожен елемент $x \in X$ однозначно подається у вигляді

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m e_m, \quad x_m \in \mathbb{C}$$

і $\|x - x_m\| \to 0$ при $m \to \infty$. Зрозуміло, що якщо X має топологічний базис, то X — сепарабельний (проте, навпаки не правильно).

Теорема 2.1.1. *Нехай банахів простір X має топологічний базис (e_m) і $P \in \mathcal{P}(^n X)$. Тоді*

$$P(x) = P\left(\sum_{m=1}^{\infty} x_m e_m\right) = \sum_{i_1,\ldots,i_n \in \mathbb{N}} B_P(x_{i_1} \ldots x_{i_n}),$$

де B_P — n-лінійне відображення, асоційоване з P.

Поліном P на банаховому просторі X називається *поліномом скінченного типу*, якщо P є скінченною агебраїчною комбінацією лінійних функціоналів. Поліноми скінченного типу утворюють підалгебру в алгебрі всіх поліномів. Поліном P називається *апроксимовним*, якщо P можна наблизити поліномами скінченного типу рівномірно на обмежених підмножинах простору X. Зауважимо, що в просторі c_0 всі поліноми є апроксимовними. Проте, в просторі ℓ_p, $p \geq 1$ існують неапроксимовні поліноми.

Підалгебра скалярнозначних поліномів називається *факторіальною* якщо з того, що деякий поліном належить цій підалгебрі випливає, що всі дільники цього полінома належать цій підалгебрі. Добре відомо, що скалярнозначні поліноми розкладаються єдиним чином на незвідні співмножники (з точністю до мультиплікативної константи) і алгебра неперервних поліномів є факторіальною підалгеброю в алгебрі всіх поліномів.

Також, алгебра апроксимовних поліномів є факторіальною в алгебрі всіх неперервних поліномів.

Відомості, наведені у цьому підрозділі, можна знайти, зокрема, в монографіях [18], [19], [54].

2.2. Аналітичні функції на банаховому просторі

Безпосереднім узагальненням поняття аналітичного відображення на випадок нескінченновимірних просторів є поняття G-аналітичного відображення.

Нехай X — банахів простір, $U \subset X$ — деяка скінченновідкрита множина в X, тобто така, що для будь-якого скінченновимірного підпростору $Z \subset X$ множина $Z \cap U$ є відкритою в Z.

Функція $f\colon U \to \mathbb{C}$ називається G-аналітичною, якщо для кожного $x \in X$ існує набір однорідних (не обов'язково неперервних) поліномів $(f_n)_{n=0}^{\infty}$, $f_n\colon X \to \mathbb{C}$, $\deg f_n = n$ такий, що

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(h) \tag{2.2.1}$$

для кожного $h \in X$ такого, що $x + h \in U$.

Неперервна G-аналітична функція, визначена на відкритій множині U називається аналітичною функцією на U. Поліноми f_n називають поліномами Тейлора функції f, а ряд (2.2.1) є розкладом функції f у ряд Тейлора в околі точки x. Поліноми f_n визначаються єдиним чином рівністю

$$\frac{1}{n!} f_n(h) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} f(x + e^{in\theta} h) d\theta.$$

Нехай f — аналітична функція на відкритій підмножині U в X і $x \in U$. *Радіус рівномірної збіжності* $\varrho_x(f)$ функції f в точці x визначається як супремум тих λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, що $x + \lambda B \subset U$ і ряд Тейлора функції f в околі точки x збігається до f рівномірно на множині $x + \lambda B$, де B — одинична куля в X. *Радіус обмеженості* f в точці x визначається як супремум тих λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, що f є обмеженою функцією на множині $x + \lambda B$.

Теорема 2.2.1. *Радіус рівномірної збіжності функції f в точці x збігається з радіусом обмеженості f в x і якщо $f \in H(X)$, то*

$$\varrho_0(f) := \left(\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|^{1/n}\right)^{-1},$$

де — поліноми Тейлора функції f.

Теорема 2.2.2. *Нехай U — відкрита підмножина в X і f — аналітична функція з U в $\mathbb{C}$. Тоді:*

(а) *f є неперервною;*

(б) *f є локально обмеженою, тобто f є обмеженою в деякому околі кожної точки з U.*

Наслідок 2.2.1. *Нехай U — зв'язна відкрита підмножина з X і f — аналітична функція з U в $\mathbb{C}$. Якщо f не є сталою функцією на U, тоді $f(V)$ є відкритою підмножиною з $\mathbb{C}$ для кожної відкритої підмножини V з U.*

Аналітична функція, визначена на всьому просторі X називається цілою аналітичною функцією. Простір цілих аналітичних функцій на X позначають $H(X)$.

Наслідок 2.2.2. *(теорема Ліувілля) Якщо функція $f \in H(X)$ є обмеженою на X, тоді f є постійним відображенням на X.*

Теорема 2.2.3. *Нехай U — відкрита підмножина в X і f — аналітична функція в U. Нехай $a \in U$, $t \in X$ і $r > 0$ такі, що $a + \zeta t \in U$ для всіх $\zeta \in \overline{\triangle}(0; r)$. Тоді для кожного $\lambda \in \triangle(0; r)$ будемо мати інтегральну формулу Коші*

$$f(a + \lambda t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(a + \zeta t)}{\zeta - \lambda} d\zeta.$$

Як було відзначено, кожна функція $f \in H(X)$ є локально обмеженою. Тобто, для кожної точки $x \in X$ існує деякий окіл цієї точки в якому функція f є обмеженою. Проте f не обов'язково обмежена на всіх обмежених підмножинах простору X. Так, наприклад, функція

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^n,$$

$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_p$, $1 \le p < \infty$ є цілою аналітичною функцією, але f не обмежена на обмеженій послідовності $y_i = (\underbrace{0, \ldots, 0, 2}_{i}, 0, \ldots)$. Більше того, відомо, що на кожному нескінченновимірному банаховому просторі існує ціла аналітична функція, яка не є обмеженою на всіх обмежених множинах.

Нехай τ_b – топологія на $\mathcal{P}(X)$, рівномірно збіжна на обмежених підмножинах X. Дана топологія породжена зліченною сім'єю норм (2.1.1) для додатних раціональних чисел r, а тому є метризовною. Позначимо через $H_b(X)$ доповнення $(\mathcal{P}(X), \tau_b)$. Отже, $H_b(X)$ – алгебра Фреше, яка складається з цілих аналітичних функцій на X, які обмежені на всіх обмежених підмножинах (так звані цілі функції обмеженого типу). Тобто, радіус обмеженості кожної функції $f \in H_b(X)$ дорівнює нескінченності.

Відомо, що в загальному випадку, не існує повного аналогу теореми Гана-Банаха про продовження для поліномів та аналітичних функцій. Проте, існує можливість продовжувати аналітичні функції обмеженого типу з банахового простору X у другий спряжений простір X^{**} (тут ми розуміємо, що простір X ізометрично вкладений у X^{**}).

Теорема 2.2.4. *Нехай $f \in H_b(X)$. Тоді існує продовження $\widetilde{f} \in H_b(X^{**})$ функції f у другий спряжений простір X^{**}. При цьому, оператор продовження $f \mapsto \widetilde{f}$ є топологічним гомоморфізмом з алгебри*

$H_b(X)$ в алгебру $H_b(X^{**})$. Тобто

$$\widetilde{f} + \lambda\widetilde{g} = \widetilde{f + \lambda g},$$

$$\widetilde{f}\widetilde{g} = \widetilde{fg}, \quad f, g \in H_b(X), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Крім того, $\|\widetilde{P}\| = \|P\|$ для довільного полінома P.

Оператор продовження $f \mapsto \widetilde{f}$ називається *продовженням Арона-Бернера* [4], [17].

Нехай $\varphi \in H_b^*(X)$ — лінійний неперервний функціонал на $H_b(X)$. Позначимо φ_n — звуження φ на простір n-однорідних поліномів $\mathcal{P}(^n X)$. Оскільки $\mathcal{P}(^n X)$ є банаховим простором, ми можемо знайти норму $\|\varphi_n\|$ функціонала φ_n на цьому просторі. В [5] показано, що величина

$$R(\varphi) = \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n\|^{1/n}$$

є завжди скінченною і невід'ємною та є найбільшою нижньою гранню чисел r таких, що φ є неперервним відносно норми рівномірної збіжності на кулі з центром в нулі і радіусом r. $R(\varphi)$ називають *радіус функцією* функціонала φ. Навпаки, якщо для деякого лінійного функціонала φ на $H_b(X)$ радіус функція $R(\varphi) < \infty$, то φ є неперервним. Крім того, виконується наступна теорема:

Теорема 2.2.5. *Нехай $\varphi_n \in \mathcal{P}^*(^n X)$ для $n \geq 0$ і для норм функціоналів φ_n виконується нерівність*

$$\|\varphi_n\| \leq cs^n$$

для деяких констант $c, s > 0$. Тоді існує єдиний функціонал $\varphi \in H_b^*(X)$ звуження якого на $\mathcal{P}(^n X)$ збігається з φ_n, $n \geq 0$.

Серед функціоналів на $H_b(X)$ є функціонали значень в точках x простору X: $\delta_x(f) = f(x)$, $f \in H_b(X)$. Зауважимо, що $R(\delta_x) = \|x\|$ і $R(\varphi) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\varphi = \delta_0$.

Для детальнішої інформації про поліноми та аналітичні функції на банахових просторах ми перенаправляємо читача на [19]. Спектри (множини неперервних комплексних гомоморфізмів = множини характерів) $H_b(X)$ та його підалгебри досліджували багато авторів (див., наприклад, [5], [6], [55], [63]).

2.3. Симетричні аналітичні функції

Нехай G — деяка напівгрупа лінійних неперервних операторів на X. Позначимо через $H_{bG}(X)$ підалгебру $H_b(X)$, яка складається з G-інваріантних аналітичних функцій. Такі алгебри розглядаються в загальному випадку в [26, 28].

Нагадаємо, що алгебраїчним базисом деякої алгебри A з одиницею e називається така зліченна множина елементів $\{a_i\} \subset A$, що

(1) Множина $\{a_i\}$ є алгебраїчно незалежною. Тобто, якщо для будь якого скінченного набору $a_1, a_2, \ldots, a_m$ і полінома q від m змінних $q(a_1, a_2, \ldots, a_m) = 0$, то $q \equiv 0$.

(2) Кожен елемент з A можна подати у вигляді скінченної алгебраїчної комбінації (скінченної суми скінченних добутків) елементів з $\{a_i\}$ та одиничного елемента e.

Для деяких спеціальних випадків напівгрупи симетрій G існує послідовність G-симетричних однорідних поліномів $\{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$, $\deg P_n = n$, що утворює алгебраїчний базис алгебри G-симетричних поліномів $\mathcal{P}_G(X)$. Наприклад, якщо $G = s$ — група всіх перестановок базисних векторів у ℓ_p, $1 \le p < \infty$, то функції

$$F_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k, \qquad k \ge \lceil p \rceil$$

утворюють алгебраїчний базис $\mathcal{P}_s(\ell_p)$ [28], де $\lceil p \rceil$ — стеля числа p, тобто найменше натуральне число, яке більше або дорівнює p. Базис $\{F_k\}$ часто називають базисом степеневих симетричних поліномів.

Навпаки, якщо деяка підалгебра $\mathcal{P}_{\mathbf{P}}$ алгебри $\mathcal{P}(X)$ породжена деякою зліченною множиною однорідних алгебраїчно незалежних поліномів $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$, $\deg P_n = n$, то існує напівгрупа аналітичних відображень обмеженого типу $G_{\mathbf{P}}$ простору X для якої всі поліноми з $\mathcal{P}_{\mathbf{P}}$ будуть $G_{\mathbf{P}}$-симетричними [16]. Множина поліномів $\mathbf{P}$ називається *симетрично повною*, якщо алгебра $\mathcal{P}_{\mathbf{P}}$ містить всі $G_{\mathbf{P}}$-симетричні поліноми. Відомо ([16]), що $\{F_k\}$ є симетрично повним базисом в $\mathcal{P}_s(\ell_p)$.

На банаховому просторі X можна ввести наступне відношення еквівалентності, пов'язане з множиною поліномів $\mathbf{P}$:

$$x \sim y \Leftrightarrow P(x) = P(y), \quad P \in \mathcal{P}_{\mathbf{P}}.$$

Тоді напівгрупа $G_{\mathbf{P}}$ складається з усіх аналітичних відображень обмеженого типу A на X, що $A(x) \sim x$. Ми будемо використовувати позначення $X/\sim$ для множини класів еквівалентності.

ТЕОРЕМА 2.3.1. ([16]). *Нехай $\mathbf{P}$ — симетрично повна послідовність в банаховому просторі X і $F\colon X \to X$ — аналітичне відображення обмеженого типу таке, що з $x \sim y$ випливає $F(x) \sim F(y)$, $x, y \in X$. Тоді оператор композиції $C_F\colon f \mapsto f \circ F$ є неперервним гомоморфізмом алгебри $H_{b\mathbf{P}}$ в себе.*

ТЕОРЕМА 2.3.2. ([3]). *Нехай $x, y \in \ell_p$, $1 \le p < \infty$. Якщо існує натуральне m, таке, що $F_n(x) = F_n(y)$ для всіх $n > m$, то $x \sim y$. Зокрема, якщо $F_n(x) = 0$ для всіх $n > m$, то $x = 0$.*

Для $x, y \in \ell_p$ позначимо $x \bullet y = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ і $x \diamond y$ — послідовність, яка складається з чисел $x_i y_j$, $i, j \in \mathbb{N}$ пронумерованих у деякому фіксованому порядку. Тоді на множині $\ell_p/\sim$ можна ввести наступні алгебраїчні операції:

$$[x] \bullet [y] = [x \bullet y] \quad \text{i} \quad [x] \diamond [y] = [x \diamond y].$$

ТЕОРЕМА 2.3.3. ([14]). *Множина $(\ell_p/\sim, \bullet, \diamond)$ є комутативним напівкільцем з одиницею. Тобто $(\ell_p/\sim, \bullet, \diamond)$ є комутативною напівгрупою* *відносно кожної операції та виконується дистрибутивний закон*

$$z \diamond ([x] \bullet [y]) = ([z] \diamond [x]) \bullet ([z] \diamond [y]).$$

Мультиплікативною одиницею в цьому напівкільці є $[(1, 0, 0 \ldots)]$.

У випадку, коли $p = 1$ є важливими наступні базиси в $\mathcal{P}_s(\ell_1)$: базис елементарних симетричних поліномів

$$G_n(x) = \sum_{i_1 < \cdots < i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$$

та базис повних симетричних поліномів

$$H_n(x) = \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}.$$

Нехай $\mathcal{F}(x)(t)$, $\mathcal{G}(x)(t)$ та $\mathcal{H}(x)(t)$ — формальні ряди

$$\mathcal{F}(x)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} F_n(x),$$

$$\mathcal{G}(x)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n(x), \qquad G_0 = 1$$

та

$$\mathcal{H}(x)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(x), \qquad H_0 = 1,$$

які також називаються твірними функціями для відповідних послідовностей базисних поліномів.

З комбінаторних міркувань відомо [48, ст. 3], що

$$\mathcal{G}(x)(t) = \frac{1}{H(-x)(t)} \tag{2.3.1}$$

та

$$\mathcal{G}(x)(t) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{F_n(-x)}{n}\right) = \exp\left(-\int_0^t \mathcal{F}(-x)(\xi) d\xi\right), \tag{2.3.2}$$

де рівність виконується для кожного $x \in \ell_1$ і кожного t у спільній області збіжності. В [12] показано, що кожний комплексний гомоморфізм φ з $H_{bs}(\ell_1)$ повністю визначається його значенням на $\mathcal{G}(x)(t)$ і

$$g(t) = \varphi\big(\mathcal{G}(t)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi(G_n) \tag{2.3.3}$$

є функцією експоненціального типу з $g(0) = 1$. Більше того, якщо $\varphi = \delta_x$ є функціоналом значення в точці при $x \in \ell_1$ (тобто $\delta_x(f) = f(x)$, $f \in H_b(\ell_1)$), то

$$\delta_x\big(\mathcal{G}(t)\big) = \mathcal{G}(x)(t) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + x_k t). \tag{2.3.4}$$

Зауважимо, що (2.3.4) є абсолютно збіжним добутком Адамара — ціла функція, що повністю визначається своїми нулями $a_n = 1/(-x_n)$ для $x_n \neq 0$. Також згідно [11, 12] існує сім'я ψ_λ, $\lambda \in \mathbb{C}$ у спектрі $H_b(\ell_1)$ така, що

$$\psi_\lambda\big(\mathcal{G}(t)\big) = e^{\lambda t}.$$

У [11] показано, що існує функція експоненціального типу γ з $\gamma(0) = 1$, але її неможливо подати у вигляді (2.3.3). Спектри алгебр $H_{bs}(\ell_p)$ досліджувались також в [3], [23]. Поліноми, симетричні відносно деяких інших груп перестановок натуральних чисел, розглянуті в [33], [42], [43].

У дисертаційній роботі розглянуто підалгебру цілих функцій обмеженого типу, яка породжена так званими суперсиметричними поліномами. Алгебри суперсиметричних поліномів на скінченновимірних просторах розглянуто у [57, 58, 60]. У розділі 4 ми розглянемо деякі важливі базиси алгебри суперсиметричних поліномів. Підрозділ 4.1 присвячений спектрам алгебри суперсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу. Зокрема, ми покажемо, що множину функціоналів значення в точці на алгебрі можна описати як метричне кільце, яке не є лінійним простором. Також досліджуються деякі оператори на цьому кільці.

2.4. Комутативні алгебри Фреше

Топологічною алгеброю (над полем комплексних чисел) ми називаємо топологічний лінійний простір $\mathcal{A}$ (над полем комплексних чисел) на якому крім операцій додавання і множення на константу визначено, також, операцію множення векторів "$\cdot$" таку, що $(\mathcal{A}, +, \cdot\,)$ є кільцем з одиницею і всі вказані операції є неперервними в топології простору $\mathcal{A}$. Якщо $\mathcal{A}$ — банахів простір, то умова неперевності множення рівносильна існуванню еквівалентної норми такої, що $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.

Простором Фреше називається локально опуклий повний метризовний простір. Лінійно опуклий простір буде метризовним тоді і тільки тоді, коли його топологія породжується деякою зліченною системою напівнорм (p_n), $n \in \mathbb{N}$. Алгебра $(\mathcal{A}, +, \cdot\,)$ називається алгеброю Фреше, якщо $\mathcal{A}$ є простором Фреше і систему напівнорм (p_n) можна вибрати так, що $p_n(xy) \leq p_n(x)p_n(y)$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, що кожна алгебра Фреше є топологічною алгеброю, а кожна банахова алгебра є алгеброю Фреше.

Нехай $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ — дві алгебри Фреше. Відображення $\Phi\colon \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ називається гомоморфізмом алгебр, якщо

$$\Phi(a + \lambda b) = \Phi(a) + \lambda\Phi(b) \text{ і } \Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b), \quad a, b \in \mathcal{A}_1, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Гомоморфізм алгебри $\mathcal{A}$ в поле комплексних чисел називається характером цієї алгебри (також вживають терміни "мультиплікативний функціонал", "комплексний гомоморфізм").

Теорема 2.4.1. *Нехай $\mathcal{A}$ — банахова алгебра. Тоді кожен характер алгебри $\mathcal{A}$ є неперервним.*

В загальному випадку, для алгебр Фреше не відомо чи кожен характер є автоматично неперервний. Це питання складає відому проблему

Майкла 1952 року [53]. Множину всіх ненульових неперервних характерів алгебри Фреше $\mathcal{A}$ називають спектром цієї алгебри і позначають $M(\mathcal{A})$.

Ядро (множина нулів) довільного гомоморфізма алгебри Фреше є деяким ідеалом цієї алгебри. Ядро характера є завжди максимальним ідеалом (відносно порядку, породженого включенням). Навпаки, якщо $\mathcal{A}$ — комутативна алгебра Фреше, то кожен максимальний ідеал цієї алгебри є ядром деякого характера. Радикалом алгебри називають перетин всіх її максимальних ідеалів. Алгебра називається напівпростою, якщо її ідеал складається з однієї точки 0. Комутативна алгебра буде напівпростою тоді і тільки тоді, коли для довільної точки $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$ існує характер $\varphi \in M(\mathcal{A})$ такий, що $\varphi(a) \neq 0$.

Важливим для нас прикладом алгебри Фреше є алгебра аналітичних функцій обмеженого типу $H_b(X)$ на комплексному банаховому просторі X. Очевидно, що ця алгебра є комутативною і напівпростою.

Згідно теорії Гельфанда кожна комутативна напівпроста алгебра Фреше $\mathcal{A}$ може бути зображена як алгебра неперервних функцій на її спектрі $M(\mathcal{A})$ (див., наприклад, [54, 217 ст., 231 ст.]). А саме, кожній точці $a \in \mathcal{A}$ ставимо у відповідність функцію $\widehat{a}$, яка визначається так званим перетворенням Гельфанда:

$$\widehat{a}(\varphi) = \varphi(a), \quad \varphi \in M(\mathcal{A}).$$

Найслабша топологія на спектрі, відносно якої всі такі функції будуть неперервними, називається топологією Гельфанда. Зауважимо, що якщо $\mathcal{A}$ — банахова алгебра, то $M(\mathcal{A})$ є компактним топологічним простором в топології Гельфанда.

Якщо $\mathcal{A}$ складається з аналітичних функцій на банаховому просторі X, то для кожного $x \in X$ функціонал значення в точці δ_x, $\delta_x(f) = f(x)$, $f \in H_b(X)$ належить $M(\mathcal{A})$. Відображення $x \mapsto \delta_x$ є ін'єктивним тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{A}$ відокремлює точки X, наприклад, якщо $\mathcal{A} = H_b(X)$ – алгебра всіх аналітичних функцій обмеженого типу на X. Зауважимо, що в загальному випадку $M_b = M(H_b(X))$ має складні топологічну і алгебраїчну структури (див. [63, 7]), які можна описати лише неявно за участю таких інструментів, як розширення Арона-Бернера, топологічного тензорного добутку, компактифікації Стоуна-Чеха, тощо. У [6] доведено, що для кожного характера φ алгебри $H_b(X)$ існує напрямленість $(x_\alpha) \subset X$ така, що

$$\varphi(x) = \lim_{\alpha} P(x_\alpha), \quad \forall P \in \mathcal{P}(X).$$

З іншого боку, для застосування зручно мати алгебри аналітичних функцій від нескінченної кількості змінних, спектри яких допускають явні описи. Якщо підалгебра $\mathcal{A}$ з $H_b(X)$ має алгебраїчний базис поліномів $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, то кожен $\varphi \in M(\mathcal{A})$ повністю визначається своїми значеннями на цьому базисі $\xi_1 = \varphi(P_1), \xi_2 = \varphi(P_2), \ldots, \xi_n = \varphi(P_n), \ldots$. Таким чином, ми можемо описати $M(\mathcal{A})$ як підмножину простору послідовностей $\{(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots) \colon \xi_j \in \mathbb{C}\}$. Більше того, якщо $\|P_n\| = 1$ і $\deg P_n = n$, то не важко перевірити, що послідовності (ξ_n) задовольняють наступну умову

$$\sup_n |\xi_n|^{1/n} < \infty. \tag{2.4.1}$$

Зауважимо, що для алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на $L_\infty[0,1]$ умова (2.4.1) є достатньою [23], але для алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ не є [11].

У роботі ми використовуємо такий підхід для алгебри нарізно симетричних аналітичних функцій на декартовому степені простору ℓ_1 та на алгебрі H_b^{sup}, що є підалгеброю $H_b(\ell_1(\mathbb{Z}_0))$ породженою поліномами $T_1, T_2, \ldots$, де $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$ — простір абсолютно сумовних послідовностей

$(z_i) \subset \mathbb{Z}_0$, $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, а поліноми T_k визначаються наступним чином:

$$T_k = \sum_{i>0} z_i^k - \sum_{j<0} z_j^k.$$

Поліноми з алгебри H_b^{sup} називаються суперсиметричними поліномами і виникають в задачах статистичної квантової механіки.

РОЗДІЛ 3
НАРІЗНО СИМЕТРИЧНІ ПОЛІНОМИ НА ДЕКАРТОВОМУ ДОБУТКУ ℓ_1

3.1. Випадок скінченного декартового добутку

У цьому підрозділі ми розглянемо найпростіше узагальнення симетричних поліномів на декартовий степінь простору ℓ_1. Позначимо через

$$\ell_1^{(n)} = \underbrace{\ell_1 \times \cdots \times \ell_1}_{n}$$

декартів добуток n копій ℓ_1 з

$$\|x\| = \|x^{(1)}\| + \cdots + \|x^{(n)}\|, \quad \text{де} \quad x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \in \ell_1^{(n)}$$

і кожен вектор $x^{(j)}$ має вигляд

$$x^{(j)} = \Big(x_1^{(j)}, \ldots, x_m^{(j)}, \ldots\Big) \in \ell_1.$$

ОЗНАЧЕННЯ 3.1.1. *Поліном $P \colon \ell_1^{(n)} \to \mathbb{C}$ є нарізно симетричним, якщо для всіх перестановок $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ на $\mathbb{N}$*

$$P\Big(\sigma_1(x^{(1)}), \ldots, \sigma_n(x^{(n)})\Big) = P\Big(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\Big),$$

де

$$\sigma_i\Big(x^{(j)}\Big) = \Big(x_{\sigma_i(1)}^{(j)}, \ldots, x_{\sigma_i(m)}^{(j)}, \ldots\Big).$$

Групу операторів на $\ell_1^{(n)}$ яка діє

$$\Big(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\Big) \mapsto \Big(\sigma_1(x^{(1)}), \ldots, \sigma_n(x^{(n)})\Big)$$

будемо позначати G_{ss}.

Означення 3.1.2. *Поліном* $P\colon \ell_1^{(n)} \to \mathbb{C}$ *є блочно-симетричним чи симетричним поліномом Макмахона, якщо для кожної перестановки* σ *на* $\mathbb{N}$

$$P\Big(\sigma(x^{(1)}),\ldots,\sigma(x^{(n)})\Big) = P\Big(x^{(1)},\ldots,x^{(n)}\Big).$$

Позначимо через $\mathcal{P}_{ss}(\ell_1^{(n)})$ алгебру всіх нарізно симетричних поліномів на $\ell_1^{(n)}$. Зауважимо, що простір $\ell_1^{(n)}$ ізометрично ізоморфний до ℓ_1. Дійсно, відображення, що визначається наступним чином:

$$I^{(n)}\Big(x^{(1)},\ldots,x^{(n)}\Big) = \Big(x_1^{(1)},\ldots,x_1^{(n)},x_2^{(1)},\ldots,x_2^{(n)},\ldots,x_k^{(1)},\ldots,x_k^{(n)},\ldots\Big)$$

є ізоморфізмом $\ell_1^{(n)}$ на ℓ_1. Якщо P — симетричний поліном на ℓ_1, тоді $P \circ I^{(n)}$ є нарізно симетричним поліномом на $\ell_1^{(n)}$. Отже, відображення $P \mapsto P \circ I^{(n)}$ є гомоморфізмом алгебри всіх симетричних поліномів на ℓ_1, $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ на $\mathcal{P}_{ss}(\ell_1^{(n)})$. Зауважимо, що це не сюр'єкція. Наприклад, поліном

$$Q(x,y) = \sum_{i<j} x_i x_j + \sum_{i<j} y_i y_j$$

є нарізно симетричним на $\ell_1^{(2)}$, але поліном P на ℓ_1 визначений $P(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n,\ldots) = Q(x,y)$ не є симетричним.

Зрозуміло, що кожен нарізно симетричний поліном є блочно-симетричним поліномом. Загальні алгебраїчні властивості блочно-симетричних поліномів від скінченної кількості змінних можна знайти в [47]. Алгебри породжені блочно-симетричними поліномами на ℓ_1 та їх спектри були досліджені в [43], [45], [44].

Казатимемо, що $x \sim y$ для деяких $x,y \in \ell_1^{(n)}$, якщо $P(x) = P(y)$ для кожного $P \in \mathcal{P}_{ss}(\ell_1^{(n)})$. Для даного $x \in \ell_1^{(n)}$ і $1 \le j \le n$ позначимо носій $x^{(j)}$ через

$$\operatorname{supp}_j(x) = \operatorname{supp}\big(x^{(j)}\big) = \{m \in \mathbb{N}\colon x_m^{(j)} \neq 0\}.$$

Лема 3.1.1. *Для кожного* $x \in \ell_1^{(n)}$ *існує* $y \sim x$ *такий, що* $\operatorname{supp}_i(y) \cap \operatorname{supp}_j(y) = \emptyset$ *для всіх* $1 \le i < j \le n$.

Доведення. По-перше, зауважимо, що якщо $z \in \ell_1^{(n)}$ такий, що для деяких $1 \le l \le n$,

$$z^{(l)} = (0, x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \ldots, x_k^{(l)}, \ldots)$$

і $z^{(j)} = x^{(j)}$ для всіх $j \ne l$, то $z \sim x$. Справді, нехай $P \in \mathcal{P}_{ss}(\ell_1^{(n)})$. Позначимо через $P_l(z^{(l)})$ поліном $P(z)$ для фіксованих $z^{(j)}$, $j \ne l$. Тоді P_l є симетричним поліномом на ℓ_1 і, добре відомо, що для симетричних поліномів

$$P_l(z^{(l)}) = P_l(0, x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \ldots, x_k^{(l)}, \ldots) = P_l(x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \ldots, x_k^{(l)}, \ldots) = P_l(x^{(l)}).$$

Отже, $P(z) = P(x)$.

Тепер досить покласти

$$y^{(j)} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1}, x_1^{(j)}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, x_2^{(j)}, \ldots, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, x_k^{(j)}, \ldots), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$\square$

Теорема 3.1.1. *Поліноми*

$$F_k^{(j)}(x) = F_k(x^{(j)}) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(x_m^{(j)}\right)^k, \quad j = 1, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots$$

утворюють алгебраїчний базис в $\mathcal{P}_{ss}(\ell_1^{(n)})$.

Доведення. Як бачимо, будь-який нарізно симетричний поліном P є блочно-симетричним поліномом і тому його можна зобразити за допомогою наступного алгебраїчного базису в алгебрі блочно-симетричних поліномів на декартовому степені простору ℓ_1 (див. [44]):

$$F_{k_1 \ldots k_n}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(x_m^{(1)}\right)^{k_1} \cdots \left(x_m^{(n)}\right)^{k_n}, \quad k_1, \ldots k_n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.1.1}$$

Зауважимо, що поліноми (3.1.1) є нарізно симетричними тільки тоді, коли лише одне з невід'ємних цілих чисел $k_1, \ldots, k_n$ більше за нуль. Причому, для кожного $x \in \ell_1^{(n)}$ ми можемо знайти $y \sim x$, як у лемі 3.1.1 і оскільки $y^{(j)}$ мають взаємно неперетинні носії, $F_{k_1 \ldots k_n}(y) = 0$, якщо для деяких двох різних чисел i і l, $k_i \neq 0$ і $k_l \neq 0$. Отже, $P(y)$ можна зобразити як алгебраїчну (насправді, лінійну) оболонку $F_k^{(j)}(y)$, $1 \le j \le n$, $k \in \mathbb{N}$. Але $P(x) = P(y)$ і $F_k^{(j)}(x) = F_k^{(j)}(y)$. Таким чином, P є алгебраїчною (лінійною) оболонкою нарізно симетричних поліномів $F_k^{(j)}(y)$, $1 \le j \le n$, $k \in \mathbb{N}$. Також, очевидно, що $F_k^{(j)}$ — алгебраїчно незалежні, оскільки звуження поліномів $F_k^{(j)}$ на j-ту компоненту простору $\ell_1^{(n)}$ збігається з поліномами F_k, які, як відомо, є алгебраїчно незалежними. Тому поліноми $F_k^{(j)}$ утворюють алгебраїчний базис в алгебрі $\mathcal{P}_{ss}(\ell_1^{(n)})$.

$\square$

Твердження 3.1.1. *Нехай P_k, $k \in \mathbb{N}$ — деякий алгебраїчний базис в алгебрі симетричних поліномів на ℓ_1. Тоді $P_k^{(j)}$, $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ є алгебраїчним базисом в алгебрі нарізно симетричних поліномів на $\ell_1^{(n)}$, де*

$$P_k^{(j)}(x) = P_k\big(x^{(j)}\big).$$

Доведення. Очевидно, що поліноми $P_k^{(j)}$ є алгебраїчно незалежними, оскільки такими є поліноми P_k, $k \in \mathbb{N}$. З іншого боку, кожен поліном $F_k^{(j)}$ можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів $P_k^{(j)}$, оскільки кожен F_k можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів P_k.

$\square$

Позначимо через $H_{bss}(\ell_1^{(n)})$ поповнення $\mathcal{P}_{ss}(\ell_1^{(n)})$ відносно топології рівномірної збіжності на обмежених підмножинах $\ell_1^{(n)}$. Тобто, $H_{bss}(\ell_1^{(n)})$ є замиканням алгебри $\mathcal{P}_{ss}(\ell_1^{(n)})$ в $H_b(\ell_1^{(n)})$. Зрозуміло, що $H_{bss}(\ell_1^{(n)})$ є рівномірною алгеброю Фреше як замкнена підалгебра алгебри $H_b(\ell_1^{(n)})$ цілих функцій обмеженого типу на $\ell_1^{(n)}$.

Ми показали, що всі нарізно симетричні поліноми (тобто поліноми, які є інваріантними відносно дії групи операторів G_{ss} на $\ell_1^{(n)}$) подаються у вигляді алгебраїчної комбінації базисних елементів $F_k^{(j)}(x)$, $k \in \mathbb{N}$. Навпаки, кожна алгебраїчна комбінація цих базисних елементів є G_{ss}-інваріантним поліномом на $\ell_1^{(n)}$. Тому алгебраїчний базис $F_k^{(j)}(x)$, $k \in \mathbb{N}$ є симетрично повним. Використовуючи Теорему 2.3.1, отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 3.1.1. *Нехай* $F\colon \ell_1^{(n)} \to \ell_1^{(n)}$ *— аналітичне відображення обмеженого типу таке, що з* $x \sim y$ *випливає* $F(x) \sim F(y)$, $x, y \in X$. *Тоді оператор композиції* $C_F\colon f \mapsto f \circ F$ *є неперервним гомоморфізмом алгебри* $H_{bss}(\ell_1^{(n)})$ *в себе.*

Нагадаємо, що спектр алгебри Фреше — це множина всіх ненульових неперервних комплексних гомоморфізмів. Відомо, що спектр алгебри $H(\mathbb{C}^n)$ цілих функцій на $\mathbb{C}^n$ складається з функціоналів значення в точці δ_z, $z \in \mathbb{C}^n$, $\delta_z(f) = f(z)$. Спектри алгебр $H_b(X)$ цілих функцій на банахових просторах X значно складніші. Зокрема, у [5] було показано, що спектри містять (але не обмежуються ними) функціонали значення в точці на елементах спряженого до X простору X^{**}. У [63] спектри були описані з використанням спряженого простору для симетричних проективних тензорних добутків X. Спектри алгебр симетричних функцій на ℓ_p були досліджені в [3], [13], [11], [12]. Було показано, що якщо $x, y \in \ell_p$ і $x = \sigma(y)$ для деякої перестановки σ, тоді $\delta_x = \delta_y$. З іншого боку, спектр $H_{bs}(\ell_p)$ містить сім'ю елементів ψ_λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, що не належать множині функціоналів значення в точці. Позначимо через $M_{bss}^{(n)}$ спектр $H_{bss}(\ell_1^{(n)})$.

Теорема 3.1.2. *Спектр* $M_{bss}^{(n)}$ *алгебри* $H_{bss}(\ell_1^{(n)})$ *є декартовим добутком* n *копій спектра* $H_{bs}(\ell_1)$.

Доведення. Нехай φ неперервний комплексний гомоморфізм $H_{bss}(\ell_1^{(n)})$. Оскільки $\{F_k^{(j)}\}$ утворює алгебраїчний базис $H_{bss}(\ell_1^{(n)})$, то φ повністю визначається його значеннями на елементах базису,

$$\xi_k^{(j)} = \varphi\left(F_k^{(j)}\right), \quad j = 1, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.1.2}$$

Для будь-якого фіксованого j, формула (3.1.2) визначає комплексний гомоморфізм $\varphi^{(j)}$ на $H_{bs}(\ell_1)$. Отже, φ визначається сукупністю $(\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)})$. І навпаки, кожна така сукупність однозначно визначає елемент у $M_{bss}^{(n)}$.

□

Операції "$\bullet$" і "$\diamond$", визначені на просторі ℓ_1 в [12], [13] (див. підрозділ 2.3) можуть бути продовжені на простір $\ell_1^{(n)}$ природним чином у "покоординатний" спосіб:

$$x \bullet y = \big(x^{(1)} \bullet y^{(1)}, \ldots, x^{(n)} \bullet y^{(n)}\big),$$

$$x \diamond y = \big(x^{(1)} \diamond y^{(1)}, \ldots, x^{(n)} \diamond y^{(n)}\big).$$

Вказані операції зберігають відношення еквівалентності "$\sim$", тобто, якщо $x \sim x'$ і $y \sim y'$, то $x \bullet y \sim x' \bullet y'$ і $x \diamond y \sim x' \diamond y'$. Це випливає з того факту, що аналогічні співвідношення виконуються для кожної з координат $x^{(j)}$ та $y^{(j)}$ відповідно ([12], [13]). Таким чином, використовуючи наслідок 3.1.1, ми можемо продовжити операції "$\bullet$" і "$\diamond$" на спектр $M_{bss}^{(n)}$ алгебри $H_{bss}(\ell_1^{(n)})$. Ми будемо використовувати ті самі позначення для продовжених операцій.

Теорема 3.1.3. *Існує продовження операцій “$\bullet$” і “$\diamond$” до комутативних операцій на спектрі $M_{bss}^{(n)}$ алгебри $H_{bss}(\ell_1^{(n)})$ (які ми будемо позначати тими ж символами) і $(M_{bss}^{(n)}, \bullet, \diamond)$ є комутативним напівкільцем.*

Доведення. Для кожного фіксованого $y \in \ell_1^{(n)}$ $x \mapsto x \bullet y$ та $x \mapsto x \diamond y$ є неперервними аналітичними відображеннями обмеженого типу. Тому, за наслідком 3.1.1, функції $f(x \bullet y)$ та $f(x \diamond y)$ належать до $H_{bss}(\ell_1^{(n)})$ для кожної функції $f \in H_{bss}(\ell_1^{(n)})$. Нехай, $\varphi, \theta \in M_{bss}^{(n)}$. Визначимо

$$\varphi \bullet \theta(f) = \varphi\big(\theta(f(x \bullet y))\big),$$

$$\varphi \diamond \theta(f) = \varphi\big(\theta(f(x \diamond y))\big),$$

де θ діє на $f(x \bullet y)$ як на функцію від y і φ діє на $f(x \bullet y)$ як на функцію від x. Аналогічно для $f(x \diamond y)$.

Згідно з теоремою 3.1.2, $\varphi = (\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)})$, $\theta = (\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(n)})$, де $\varphi^{(j)}$, $\theta^{(j)}$ є елементами спектра $H_{bs}(\ell_1)$, $1 \leq j \leq n$. Функціонали $\varphi^{(j)}$, $\theta^{(j)}$ визначаються звуженнями на j-ті компоненти декартового степеня $\ell_1^{(n)}$, тобто, на відповідні копії простору ℓ_1. Тому

$$\varphi \bullet \theta = (\varphi^{(1)} \bullet \theta^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)} \bullet \theta^{(n)}),$$

$$\varphi \diamond \theta = (\varphi^{(1)} \diamond \theta^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)} \diamond \theta^{(n)}).$$

З робіт [12], [13], [14] ми знаємо, що для характерів алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ операції “$\bullet$” і “$\diamond$” є комутативними, асоціативними і пов’язані між собою дистрибутивним законом. Тому, це залишається правильним і для цих операцій на $\ell_1^{(n)}$. Отже, $(M_{bss}^{(n)}, \bullet, \diamond)$ є комутативним напівкільцем.

$\square$

Відповідно до результатів [12], кожен характер φ алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ можна зобразити у вигляді функції експоненціального типу на $\mathbb{C}$,

$$\mathcal{G}(\varphi)(t) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m \varphi(G_m), \quad t \in \mathbb{C},$$

де

$$G_m(x) = \sum_{i_1<\cdots<i_m} x_{i_1} \cdots x_{i_m}$$

і $G_0 = 1$. При цьому,

$$\mathcal{G}(\varphi \bullet \theta)(t) = \mathcal{G}(\varphi)(t)\mathcal{G}(\theta)(t).$$

Враховуючи це факт, отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 3.1.2. *Кожному характеру* $\varphi = (\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}) \in M_{bss}^{(n)}$ *можна однозначно поставити у відповідність функцію експоненціального типу на* $\mathbb{C}^n$

$$\mathcal{G}(\varphi)(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{\infty} t_k^m \varphi(G_m), \quad (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{C}^n$$

і, при цьому,

$$\mathcal{G}(\varphi \bullet \theta)(t_1, \ldots, t_n) = \mathcal{G}(\varphi)(t_1, \ldots, t_n)\mathcal{G}(\theta)(t_1, \ldots, t_n),$$

$\varphi, \theta \in M_{bss}^{(n)}$.

3.2. Випадок нескінченної прямої суми

У цьому підрозділі розглянемо випадок нескінченних прямих сум. Нагадаємо, що послідовність $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ з банахового простору X називається безумовним (лінійним топологічним) базисом, якщо вона лінійно незалежна і кожен $a \in X$ можна подати у вигляді

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

такий, що ряд є безумовно збіжним.

Для даного банахового простору X з безумовним базисом $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, розглянемо банахів простір $\ell_1^{(X)}$, визначений наступним чином. Якщо $x \in \ell_1^{(X)}$, тоді

$$x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots),$$

де кожен $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots) \in \ell_1$ і

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x^{(n)}\|_{\ell_1} e_n \in X$$

з

$$\|x\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x^{(n)}\|_{\ell_1} e_n \right\|_X .$$

Зауважимо, що якщо $X = \ell_1$, тоді $\ell_1^{(\ell_1)}$ ізометрично ізоморфний проективному тензорному добутку $\ell_1 \widehat{\bigotimes} \ell_1$.

Поліном P на $\ell_1^{(X)}$ є нарізно симетричним, якщо для кожної послідовності перестановок на $\mathbb{N}$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots)$ маємо

$$P(\sigma(x)) = P(\sigma_1(x^{(1)}), \ldots, \sigma_n(x^{(n)}), \ldots) = P(x)$$

для всіх $x \in \ell_1^{(X)}$. Зрозуміло, що поліноми

$$F_m^{(j)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(j)})^m, \quad j, m = 1, 2, \ldots$$

є нарізно симетричними та алгебраїчно незалежними. Однак вони, як ми побачимо, в загальному випадку, не утворюють алгебраїчний базис в алгебрі всіх нарізно симетричних поліномів $\mathcal{P}_{ss}(\ell_1^{(X)})$.

Лема 3.2.1. *Для кожного* $a \in X$, $a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$ *існує неперервний комплексний гомоморфізм* ψ_a *на* $H_{bss}(\ell_1^{(X)})$ *такий, що* $\psi_a(F_1^{(j)}) = a_j$ *і* $\psi_a(F_m^{(j)}) = 0$ *для всіх* $m > 1$ *і* $j \in \mathbb{N}$.

Доведення. Використовуючи ідею з [3], визначимо послідовність $v_n \in \ell_1^{(X)}$ наступним чином:

$$v_n = \sum_{j=1}^{\infty} (v^{(j)})_n e_j,$$

де $(v^{(j)})_n$ належить j-й копії ℓ_1 і

$$(v^{(j)})_n = \Big(\underbrace{\frac{a_j}{n}, \ldots, \frac{a_j}{n}}_{n \text{ раз}}, 0, 0, \ldots\Big).$$

Тоді

$$\|v_n\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \|(v^{(j)})_n\|_{\ell_1} e_j \right\|_X = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| e_j \right\|_X \leq 2K \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j \right\|_X = 2K\|a\|_X,$$

де K — безумовна стала базису $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ (див. [46, 19 ст.]). Отже, послідовність $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена. Оскільки обмежені підмножини спектрів алгебр Фреше є відносно компактними, то відповідна послідовність комплексних гомоморфізмів значення в точці $\{\delta_{v_n}\}_{n=1}^{\infty}$ повинна мати граничну точку ψ_a. Оскільки $F_1^{(j)}(v_n) = a_j$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, $\psi_a(F_1^{(j)}) = a_j$. З іншого боку

$$F_m^{(j)}(v_n) = \frac{a_j^m}{n^{m-1}} \to 0$$

при $n \to \infty$ і тому $\psi_a(F_m^{(j)}) = 0$ для всіх $m > 1$ і $j \in \mathbb{N}$.

$\square$

Позначимо через $M_{bss}^{(X)}$ спектр $H_{bss}(\ell_1^{(X)})$. Нехай $\Psi\colon X\to H_{bss}(\ell_1^{(X)})$, $\Psi(a)=\psi_a$.

Теорема 3.2.1. *Існує сюр'єктивний гомоморфізм C_Ψ з $H_{bss}(\ell_1^{(X)})$ на $H_b(X)$ визначений формулою*

$$C_\Psi(f)=\hat f\circ\Psi,$$

де $\hat f$ — перетворення Гельфанда, $f\in H_{bss}(\ell_1^{(X)})$.

Доведення. Нехай

$$g(a)=C_\Psi(f)=\hat f\circ\Psi(a)=\psi_a(f),$$

$a\in X$. Тобто g є коректно визначеним на X. Якщо P_n — n-однорідний поліном на X, тоді $C_\Psi(P_n)$ — n-однорідний поліном на X і

$$|C_\Psi(P_n)(a)|\le\sup_m|P_n(v_m)|\le\|P_n\|\sup_m\|v_m\|^n=$$

$$=\|P_n\|\left\|\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|e_j\right\|_X^n\le\|P_n\|(2K)^n\|a\|_X^n.$$

Таким чином

$$\|C_\Psi(P_n)\|\le(2K)^n\|P_n\|,$$

де K — бузумовна стала топологічного базису в X. Отже,

$$g(a)=\sum_{n=0}^{\infty}C_\Psi(P_n)(a).$$

Тому, для радіуса обмеженості функції g в нулі можна записати:

$$\varrho_0(g)=\frac{1}{2K}\varrho_0(f)=\infty.$$

Отже, $g\in H_b(X)$.

І навпаки, нехай $g \in H_b(X)$ і

$$g(a) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(a)$$

представлення функції g рядом однорідних поліномів. Оскільки X має безумовний базис, для $n > 0$

$$Q_n(a) = Q_n\Big(\sum_{m=1}^{\infty} a_m e_m\Big) = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{\infty} c_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1} \cdots a_{i_n},$$

для деяких сталих $c_{i_1,\dots,i_n}$. Покладемо $P_0 = Q_0$ і

$$P_n(x) = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{\infty} c_{i_1,\dots,i_n} F_1^{(i_1)}(x) \cdots F_1^{(i_n)}(x).$$

Оскільки $\|F_1^{(j)}\| = 1$, $|F_1^{(j)}(x)| \le \|x^{(j)}\|$, то $\|P_n\| \le \|Q_n\|$. Отже, якщо ми визначимо

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x), \qquad x \in \ell_1^{(X)},$$

то $\varrho_0(f) \ge \varrho_0(g) = \infty$ і тому $f \in H_{bss}(\ell_1^{(X)})$. Відповідно до визначення Ψ і лемою 3.2.1, $C_\Psi(f) = g$, звідси C_Ψ є сюр'єктивним.

$\square$

Зауважимо, що в загальному випадку $H_b(X)$ не є сепарабельним і не може бути породженим зліченним алгебраїчним базисом. Тому, як було зауважено на початку цього підрозділу, поліноми $F_m^{(j)}$, в загальному випадку, не утворюють алгебраїчного базису у відповідній алгебрі нарізно симетричних поліномів.

Наслідок 3.2.1. *Спектр $M_{bss}^{(X)}$ алгебри $H_{bss}(\ell_1^{(X)})$ містить копію спектру алгебри $H_b(X)$, зокрема, він містить копію простору X^{**} як підмножину.*

Доведення. Кожному характеру ϕ алгебри $H_b(X)$ поставимо у відповідність характер φ алгебри $H_{bss}(\ell_1^{(X)})$ за формулою

$$\varphi = \phi \circ C_\Psi.$$

Нехай $\phi_1 \neq \phi_2$. Тоді знайдеться функція $f \in H_b(X)$ така, що $\phi_1(f) \neq \phi_2(f)$. З сюр'єктивності C_Ψ випливає, що знайдеться функція $g \in H_{bss}(\ell_1^{(X)})$ для якої $C_\Psi(g) = f$. Отже

$$\varphi_1(g) = \phi_1(f) \neq \phi_2(f) = \varphi_2(g).$$

Тому, відображення $\phi \mapsto \varphi$ є ін'єктивним. Це і означає, що $M_{bss}^{(X)}$ містить копію спектру алгебри $H_b(X)$. Крім того, як ми знаємо, завдяки продовженню Арона-Бернера, існує вкладення другого спряженого простору X^{**} у спектр алгебри $H_b(X)$.

$\square$

3.3. Висновки до третього розділу

У цьому розділі було розглянуто відносно прості узагальнення симетричних аналітичних функцій — нарізно симетричні аналітичні функції на деякому декартовому степені простору абсолютно збіжних послідовностей. У підрозділі 3.1 отримано цілком очікуваний результат про те, що спектр алгебри нарізно симетричних аналітичних функцій обмеженого типу можна подати у вигляді декартового степеня спектра алгебри симетричних аналітичних функцій. Це дало можливість продовжити операції "$\bullet$" та "$\diamond$" на спектр алгебри нарізно симетричних аналітичних функцій та описати їх властивості. Також, побудовано зображення спектру у вигляді мультиплікативної підгрупи в просторі аналітичних функцій експоненціального типу від багатьох комплексних змінних.

Проте, у підрозділі 3.2 ми бачимо, що якщо замінити скінченний декартів добуток топологічною нескінченною прямою сумою $\ell_1^{(X)}$ банахових просторів то алгебра нарізно симетричних аналітичних функцій обмеженого типу $H_{bss}(\ell_1^{(X)})$, в цьому випадку, має досить складну структуру. Зокрема, у підрозділі 3.2 показано, що існує сюр'єктивний ізоморфізм такої алгебри в алгебру $H_b(X)$ цілих функцій обмеженого типу на деякому банаховому просторі X. З цього факту зроблено висновок про те, що спектр алгебри $H_{bss}(\ell_1^{(X)})$ містить спектр алгебри $H_b(X)$, зокрема, поточкову копію другого спряженого простору X^{**} до простору X.

Результати цього розділу опубліковано у [33, 36, 39].

РОЗДІЛ 4
СУПЕРСИМЕТРИЧНІ АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ НА ПРОСТОРІ ℓ_1

4.1. Базиси суперсиметричних поліномів

Будемо використовувати позначення $\mathbb{N}$ для множини натуральних чисел, а $\mathbb{Z}$ для множини цілих чисел. Також, покладемо $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus 0$ і позначимо через $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$ банахів простір всіх абсолютно сумовних комплексних послідовностей, занумерованих числами з $\mathbb{Z}_0$. Символ $\ell_1 = \ell_1(\mathbb{N})$ позначає класичний банахів простір абсолютно сумовних комплексних послідовностей. Будь-який елемент $z \in \ell_1(\mathbb{Z}_0)$ можна подати у вигляді

$$z = (\ldots, z_{-n}, \ldots, z_{-2}, z_{-1}, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots)$$

$$= (y|x) = (\ldots, y_n, \ldots, y_2, y_1|x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

з

$$\|z\| = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |z_i|,$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ і $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ належать ℓ_1, $z_n = x_n$, $z_{-n} = y_n$ для $n \in \mathbb{N}$ і

$$x \longmapsto (0|x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \text{ і } y \longmapsto (\ldots, y_{-n}, \ldots, y_{-2}, y_{-1}|0)$$

є природними ізометричними вкладеннями копій ℓ_1 в $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$.

Визначимо наступні поліноми на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$:

$$T_k(z) = F_k(x) - F_k(y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k - \sum_{i=1}^{\infty} y_i^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Означення 4.1.1. *Поліном P на просторі $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$ називається суперсиметричним, якщо його можна представити як алгебраїчну комбінацію поліномів $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$. Іншими словами, P — скінченна сума скінченних добутків $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ і сталих. Позначимо через $\mathcal{P}_{sup}$ алгебру всіх суперсиметричних поліномів на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$.*

Перш за все відмітимо, що поліноми T_k є алгебраїчно незалежними, оскільки такими є F_k. Отже, послідовність поліномів $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ утворює алгебраїчний базис $\mathcal{P}_{sup}$.

Скажемо, що $z \sim w$, для деяких $z, w \in \ell_1(\mathbb{Z}_0)$, якщо $T_k(z) = T_k(w)$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Позначимо через $\mathcal{M}$ фактор-множину $\ell_1(\mathbb{Z}_0)/\sim$, яка є природною областю визначення для суперсиметричних поліномів. Для даного $z \in \ell_1(\mathbb{Z}_0)$ позначимо $[z] \in \mathcal{M}$ — клас еквівалентності, який містить елемент z.

Аналогічно, як для випадку симетричних поліномів (див. [12]), введемо операцію "$\bullet$" на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$:

$$z \bullet w = (y \bullet v|x \bullet u) = (\ldots, v_n, y_n, \ldots, v_1, y_1|x_1, u_1, \ldots, x_n, u_n, \ldots),$$

де $z = (y|x)$ і $w = (v|u)$. Також позначимо $z^- = (y|x)^- = (x|y)$. Зрозуміло, що $(z^-)^- = z$ і $z \bullet z^- \sim (0|0)$. Ці операції можна природно визначити на $\mathcal{M}$:

$$[z] \bullet [w] = [z \bullet w] \text{ і } [z]^- = [z^-]. \tag{4.1.1}$$

Теорема 4.1.1. *Справедливі наступні твердження:*

1. *$T_k(z \bullet w) = T_k(z) + T_k(w)$ для кожного $k \in \mathbb{N}$.*

2. *Операції в (4.1.1) коректно визначені, тобто не залежать від вибору представників.*

3. *$(\mathcal{M}, \bullet, [z] \mapsto [z]^-)$ — комутативна група з нулем $0 = (0|0)$.*

4. $z \sim 0$ *тоді і тільки тоді, коли існують* $d, s \in \ell_1$ *такі, що* $z = (d|s)$ *і* $F_k(d) = F_k(s)$ *для всіх* $k \in \mathbb{N}$. *Це рівносильно тому, що всі ненульові координати* d *збігаються з ненульовими координатами* s *з точністю до перестановки.*

Доведення. Твердження (1) є прямим наслідком означень операцій та поліномів T_k. Якщо $z' \sim z$ і $w' \sim w$, то

$$T_k(z' \bullet w') = T_k(z') + T_k(w') = T_k(z) + T_k(w) = T_k(z \bullet w), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому $[z'] \bullet [w'] = [z] \bullet [w]$, тобто операція "$\bullet$" не залежить від вибору представника. Аналогічно, для кожного $k \in \mathbb{N}$,

$$T_k(z'^-) = -T_k(z') = -T_k(z) = T_k(z^-).$$

Отже, $[z']^- = [z]^-$. Аксіоми комутативної групи для операцій (4.1.1) перевіряються безпосередньо.

У [3] доведено, що для даних $d, s \in \ell_1$, $F_k(d) = F_k(s)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ тоді і тільки тоді, коли всі ненульові координати d збігаються з ненульовими координатами s з точністю до перестановки. З цього факту безпосередньо випливає (4).

$\square$

Нехай $\mathcal{P}_1$ і $\mathcal{P}_2$ — деякі алгебри поліномів на лінійних просторах X і Y відповідно, такі, що $\mathcal{P}_1$ породжений алгебраїчним базисом $\{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$, а $\mathcal{P}_2$ породжений алгебраїчним базисом $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots\}$ з $\deg P_n = \deg Q_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді відображення, визначене на базисних векторах $P_n \longmapsto Q_n$ і продовжено на $\mathcal{P}_1$ за лінійністю та мультиплікативністю, очевидно, є алгебраїчним ізоморфізмом з $\mathcal{P}_1$ в $\mathcal{P}_2$, який зберігає степені поліномів.

Позначимо через Λ ізоморфізм з $\mathcal{P}_s = \mathcal{P}_s(\ell_1)$ в $\mathcal{P}_{sup}$ такий, що

$$\Lambda\colon F_n \longmapsto T_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Твердження 4.1.1. *Якщо $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ є алгебраїчним базисом $\mathcal{P}_s$, то $\{\Lambda(P_n)\}_{n=1}^{\infty}$ є алгебраїчним базисом $\mathcal{P}_{sup}$.*

Доведення. Доведення випливає з загального факту, що область значень будь-якого алгебраїчного базису при ізоморфізмі є алгебраїчним базисом. Справді, $\Lambda(P_n)$, $n \in \mathbb{N}$ алгебраїчно незалежні, оскільки P_n, $n \in \mathbb{N}$ є такими і Λ є ін'єктивним. Також кожен $Q \in \mathcal{P}_{sup}$ належать до алгебраїчної комбінації $\{\Lambda(P_n)\}_{n=1}^{\infty}$, оскільки $\Lambda^{-1}(Q)$ належать до алгебраїчної комбінації $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ і Λ є сюр'єктивним [3].

$\square$

Нехай H_b^{sup} поповнення $\mathcal{P}_{sup}$ відносно топології рівномірної збіжності на обмежених підмножинах. Іншими словами, H_b^{sup} — мінімальний замкнений підпростір $H_b(\ell_1(\mathbb{Z}_0))$, який містить $\mathcal{P}_{sup}$. Елементи H_b^{sup} називаються суперсиметричними аналітичними або цілими функціями на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$.

Твердження 4.1.2. *Відображення Λ^{-1} є неперервним і може бути продовжено до неперервного гомоморфізма з H_b^{sup} в $H_{bs} = H_{bs}(\ell_1)$ з щільною областю значень. Відображення Λ є розривним і щільно визначеним на H_{bs}.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що $\Lambda^{-1}(P)$ — звуження $P \in \mathcal{P}_{sup}$ на замкнений підпростір $\{(0|x)\colon x \in \ell_1\}$. Оператор звуження, очевидно, є неперервним на H_b^{sup} і є продовженням Λ^{-1}. Область значень Λ^{-1} є щільною, оскільки містить усі симетричні многочлени на ℓ_1. З іншого боку, у [12] доведено, що гомоморфізм $\Lambda_-\colon \mathcal{P}_s \to \mathcal{P}_s$ такий, що

$\Lambda_- F_k = -F_k$, $k \in \mathbb{N}$ є розривним на $(\mathcal{P}_s, \tau_b)$. Крім того, у [15] побудовано функцію $g(x) \in H_{bs}$ таку, що $\Lambda_-(g) \notin H_{bs}$. Якщо Λ є неперервним, то його можна продовжити на ввесь простір H_{bs} і тому $\Lambda g(x|0) = (\Lambda_- g)(x)$. А це приводить до суперечності: з лівого боку маємо обмежену функцію на всіх обмежених підмножинах, а в правій частині це не так.

$\square$

Для даного $y \in \ell_1$ позначимо $\Lambda_y P(x) = (\Lambda P)(y|x)$, $P \in \mathcal{P}_s$. Легко бачити, що

$$\Lambda_y P(x \bullet y) = (\Lambda P)(y|x \bullet y) = (\Lambda P)(0|x) = P(x).$$

Теорема 4.1.2. *Нехай* $\Lambda G_n = W_n$. *Тоді*

$$W_n(y|x) = \sum_{k=0}^{n} G_k(x) H_{n-k}(-y), \qquad n \in \mathbb{N} \tag{4.1.2}$$

і

$$\mathcal{W}(y|x)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n W_n(y|x) = \frac{\mathcal{G}(x)(t)}{\mathcal{G}(y)(t)}, \tag{4.1.3}$$

де рівність справедлива на спільній області збіжності.

Доведення. У роботі [12] доведено, що

$$\mathcal{G}(x \bullet y)(t) = \mathcal{G}(x)(t)\mathcal{G}(y)(t), \qquad x, y \in \ell_1. \tag{4.1.4}$$

Отже, для фіксованого $y \in \ell_1$

$$\Lambda_y\big(\mathcal{G}(x \bullet y)(t)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n (\Lambda G_n)(y|x) \sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n(y) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n W_n(y|x) \sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n(y).$$

З іншого боку,

$$\Lambda_y\big(\mathcal{G}(x \bullet y)(t)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n(x).$$

Так

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n W_n(y|x) \sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n(y) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n(x). \tag{4.1.5}$$

З (4.1.5) маємо

$$\mathcal{W}(y|x)(t)\mathcal{G}(y)(t) = \mathcal{G}(x)(t)$$

і так отримуємо (4.1.3) . Враховуючи формулу (2.3.1), отримуємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n W_n(y|x) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n(x) \sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(-y) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n} G_k(x) H_{n-k}(-y).$$

Звідси випливає (4.1.2).

□

Наслідок 4.1.1.

$$\mathcal{W}((y|x) \bullet (d|b))(t) = \mathcal{W}(y|x)(t)\mathcal{W}(d|b)(t), \quad x, y, b, d \in \ell_1.$$

Доведення. Дане твердження негайно випливає з поєднання формул (4.1.4) і (4.1.3). □

Наслідок 4.1.2. *Для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $x, y, b, d \in \ell_1$ маємо*

$$W_n((y|x) \bullet (d|b)) = \sum_{k=0}^{n} W_k(y|x) W_{n-k}(d|b),$$

$$G_n(x \bullet b) = \sum_{k=0}^{n} G_k(x) G_{n-k}(b)$$

і

$$H_n(y \bullet d) = \sum_{k=0}^{n} H_k(y) H_{n-k}(d).$$

Доведення. За наслідком 4.1.1 маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n W_n((y|x) \bullet (d|b)) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k W_k(y|x) \sum_{j=0}^{\infty} t^j W_j(d|b).$$

Прирівнявши коефіцієнти при степенях t^n, отримаємо першу рівність. Щоб отримати другу рівність зауважимо, що $G_n(x) = W_n(0|x)$ і тому

$$G_n(x \bullet b) = W_n((0|x) \bullet (0|b)) = \sum_{k=0}^{n} W_k(0|x) W_{n-k}(0|b) = \sum_{k=0}^{n} G_k(x) G_{n-k}(b)$$

для довільного натурального n. Третю рівність можна отримати, використовуючи аналогічні міркування враховуючи, що $H_n(y) = W_n(y|0)$.

$\square$

Зрозуміло, що $(y\bullet a|x\bullet a) \sim (y|x)$ для всіх $x, y, a \in \ell_1$. Будемо казати, що $(y|x)$ є незвідним зображенням $u \in \mathcal{M}$, якщо $[(y|x)] = u$ і для кожного $x_n \neq 0$ і кожного k, $x_n \neq y_k$.

Твердження 4.1.3. $(y|x)$ *є незвідним тоді і тільки тоді, коли* $\mathcal{G}(x)(t)$ *і* $\mathcal{G}(y)(t)$ *не мають спільних нулів.*

Доведення. Згідно з (2.3.4), для ненульових елементів x_k і y_k числа $(-x_k)^{-1}$ і $(-y_k)^{-1}$ є нулями функцій $\mathcal{G}(x)(t)$ та $\mathcal{G}(y)(t)$, відповідно. Тому функції $\mathcal{G}(x)(t)$ та $\mathcal{G}(y)(t)$ не мають спільних нулів тоді і тільки тоді, коли множини чисел $\{x_k\}$ і $\{y_k\}$ не мають спільних елементів.

$\square$

Наслідок 4.1.3. *Нехай* $u \in \mathcal{M}$. *Тоді елемент* u *повністю визначається функцією* $\mathcal{W}(u)(t) = \mathcal{W}(y|x)(t)$. *При цьому,* $\mathcal{W}(y|x)(t)$ *є мероморфною функцією вигляду* $f(t)/g(t)$ *де,* f, g *— цілі функції експоненціального типу з умовою* $f(0) = 1$ *і* $g(0) = 1$, *та* $(y|x) \in u$. *Більше того, нехай* (α_k) *і* (β_k) *— нулі функцій* f *і* g *відповідно, то* $(1/\alpha_k)$ *і* $(1/\beta_k)$ *належать до* ℓ_1,

$$f(t) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{t}{\alpha_k}\right) \quad i \quad g(t) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{t}{\beta_k}\right),$$

і

$$\left(\ldots, -\frac{1}{\beta_n}, \ldots, -\frac{1}{\beta_2}, -\frac{1}{\beta_1}\middle| -\frac{1}{\alpha_1}, -\frac{1}{\alpha_2}, \ldots, -\frac{1}{\alpha_n}, \ldots\right)$$

є незвідними зображеннями u.

Доведення. Оскільки поліноми W_n утворюють алгебраїчний базис в алгебрі суперсиметричних поліномів, кожен поліном T_k можна зобразити у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів W_n, $n \leq k$. Тому, з рівності $W_n(u) = W_n(v)$, $n \in \mathbb{N}$ випливає $T_k(u) = T_k(v)$, $k \in \mathbb{N}$, що рівносильно тому, що $u = v$. Тобто елемент $u \in \mathcal{M}$ повністю визначається послідовністю $\{W_n(u)\}$ або функцією

$$\mathcal{W}(u)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n W_n(u).$$

Інша частина наслідку випливає з явного зображення функції $\mathcal{W}(u)(t)$.

$\square$

Нехай $x \in \ell_1$. Позначимо через $\operatorname{supp} x$ носій x, тобто

$$\operatorname{supp} x = \{n \in \mathbb{N} \colon x_n \neq 0\}.$$

Наслідок 4.1.4. *Нехай $(y|x)$ і $(y'|x')$ — два незвідні зображення елемента u. Тоді існують бієкції $i\colon \operatorname{supp} x \to \operatorname{supp} x'$ та $j\colon \operatorname{supp} y \to \operatorname{supp} y'$ такі, що $x_n = x'_{i(n)}$ і $y_m = y'_{j(m)}$ для всіх $n \in \operatorname{supp} x$ і $m \in \operatorname{supp} y$.*

Доведення. З наслідку 4.1.3 маємо, що

$$\mathcal{W}(y|x)(t) = \frac{f(t)}{g(t)} = \mathcal{W}(y'|x')(t) = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

Оскільки зображення $(y|x)$ і $(y'|x')$ є незвідними, то $f(t) = f'(t)$ і $g(t) = g'(t)$. Тому вектори x і x' та y і y' відповідно, співпадають, з точністю до перестановки ненульових координат. Це і означає, що існують бієкції між носіями $i\colon \operatorname{supp} x \to \operatorname{supp} x'$ та $j\colon \operatorname{supp} y \to \operatorname{supp} y'$ такі, що $x_n = x'_{i(n)}$ і $y_m = y'_{j(m)}$ для всіх $n \in \operatorname{supp} x$ і $m \in \operatorname{supp} y$.

$\square$

Твердження 4.1.4. *Для кожного $u = [(y|x)] \in \mathcal{M}$ у спільній області збіжності виконується наступна рівність*

$$\mathcal{W}(u)(t) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{T_n(-u)}{n}\right) = \exp\left(-\int_0^t \mathcal{T}(-u)(\xi)d\xi\right), \qquad (4.1.6)$$

де $-u = [(-y| - x)]$ *і*

$$\mathcal{T}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n t^{n-1}.$$

Доведення. З (4.1.3) і (2.3.4) випливає, що $\mathcal{W}(u)(t)$ збігається для кожного $t \in \mathbb{C}$, якщо $y = 0$ і в кулі $|t| < r$, де

$$r = \min_{|y_n| \neq 0} |y_n|^{-1}$$

якщо $y \neq 0$. Оскільки Λ^{-1} — неперервний гомоморфізм, то з (2.3.2) маємо, що для кожного $t \in \mathbb{C}$ такого, що $\mathcal{W}(u)(t)$ збігається

$$\Lambda^{-1}\mathcal{W}(u)(t) = \mathcal{G}(x)(t) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{F_n(-x)}{n}\right).$$

Оскільки $\|F_n\| = 1$, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{F_n(-x)}{n}$$

збігається, якщо $|t| < \|x\|$. Також, $\|T_n\| = 1$ і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{T_n(-u)}{n}$$

збігається, якщо $|t| < \|u\|$. Тож область збіжності

$$\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{F_n(-x)}{n}\right)$$

знаходиться в області визначення оператора Λ і

$$\mathcal{W}(u)(t) = \Lambda\mathcal{G}(x)(t) = \Lambda \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{F_n(-x)}{n}\right).$$

Також, в області визначення

$$\Lambda^{-1}\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{T_n(-u)}{n}\right) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{F_n(-x)}{n}\right).$$

□

Теорема 4.1.3. *Нехай $u \in \mathcal{M}$ і $u \neq 0$. Для даного $\lambda \in \mathbb{C}$ існує $v \in \mathcal{M}$ такий, що $T_k(v) = \lambda T_k(u)$ тоді і тільки тоді, коли λ — ціле число.*

Доведення. Нехай $\lambda = m \in \mathbb{Z}$. Якщо $n = 0$, то $v = 0$. Якщо $n > 0$, то $v = \underbrace{u \bullet \cdots \bullet u}_{n}$. Якщо $n < 0$, тоді $v = \underbrace{u^- \bullet \cdots \bullet u^-}_{n}$.

Тепер нехай $\lambda \notin \mathbb{Z}$. Згідно з (4.1.6)

$$\mathcal{W}(v)(t) = (\mathcal{W}(u)(t))^{\lambda}.$$

Але це суперечить зображенню (4.1.3) для v.

□

Очевидно, що кожен суперсиметричний поліном є нарізно симетричним на просторі $\ell_1 \times \ell_1 \simeq \ell_1(\mathbb{Z}_0)$. Навпаки невірно. З результатів третього розділу випливає, що поліноми

$$\{F_k^+, F_j^-\}_{k=1,\, j=1}^{\infty,\, \infty}, \text{ де } F_k^+(y|x) = F_k(x) \text{ і } F_k^-(y|x) = F_k(y)$$

утворюють алебраїчний базис в просторі нарізно симетричних поліномів на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$, проте, вони не є суперсиметричними, оскільки їх неможливо подати у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів T_k, $k \in \mathbb{N}$.

З означення суперсиметричних поліномів випливає, що кожен суперсиметричний поліном є інваріантним відносно дії мінімальної напівгрупи операторів G_{sup} на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$, яка включає перестановки базисних векторів окремо для додатних індексів $(y|x) \mapsto (y|x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, \ldots)$, окремо для від'ємних індексів $(y|x) \mapsto (\ldots, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(1)}|x)$ та операторів вигляду

$$A_\lambda \colon (y|x) \mapsto (y, \lambda|x, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Твердження 4.1.5. *Базис* $\mathbf{T} = \{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ *є симетрично повним. Тобто всі поліноми на* $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$, *які є інваріантними відносно дії напівгрупи операторів* G_{sup} *є суперсиметричними.*

Доведення. Нехай P — G_{sup}-інваріантний поліном на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$. Тоді P є нарізно симетричним і $P \circ A_\lambda = P$ для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$. Нехай $\deg P = m$. Ми можемо записати

$$P(y|x) = \sum_{\substack{k_1 + 2k_2 + \cdots + ik_i + \\ n_1 + 2n_2 + \cdots jn_j = 0}}^{m} c_{k_1 \dots k_i n_1 \dots n_j} F_1^+(x)^{k_1} \cdots F_i^+(x)^{k_i} F_1^-(y)^{n_1} \cdots F_j^-(y)^{n_j}$$

для деяких констант $c_{k_1 \dots k_i n_1 \dots n_j}$.

Очевидно, що $T_k = F_k^+ - F_k^-$. Позначимо $Q_k = F_k^+ + F_k^-$. Тоді існує поліном $q \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ такий, що

$$P(y|x) = q(T_1(y|x), \dots, T_m(y|x), Q_1(y|x), \dots, Q_m(y|x)).$$

Згідно з нашим припущенням, $P(y \bullet a|x \bullet a) = P(y|x)$, $a \in \ell_1$. Також,

$$T_k(y \bullet a|x \bullet a) = T_k(y|x) \quad \text{і} \quad Q_k(y \bullet a|x \bullet a) = Q_k(y|x) + 2F_k(a)$$

для кожного натурального k. Оскільки для довільного $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$ існує елемент $a \in \ell_1$ такий, що $F_n(a) = \lambda_n$, $1 \le n \le m$ (див. наприклад [3]), то для кожного $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$

$$q(T_1(y|x), \dots, T_m(y|x), Q_1(y|x), \dots, Q_m(y|x))$$

$$= q(T_1(y|x), \dots, T_m(y|x), Q_1(y|x) + \lambda_1, \dots, Q_m(y|x) + \lambda_m).$$

Але це означає, що q не залежить від змінних $Q_1, \dots, Q_m$. Тому P є суперсиметричним. $\square$

В [16] доведено теорему (див. Теорема 2.3.1) про те, що якщо $\mathbf{P}$ — симетрично повна послідовність в банаховому просторі X і $F\colon X \to X$ — аналітичне відображення обмеженого типу таке, що з $x \sim x'$ випливає $F(x) \sim F(x')$, то оператор композиції $C_F\colon f \mapsto f \circ F$ є неперервним гомоморфізмом алгебри $H_{b\mathbf{P}}$ в себе. Тому, ми можемо записати наступний наслідок.

Наслідок 4.1.5. *Нехай* $F\colon \ell_1(\mathbb{Z}_0) \to \ell_1(\mathbb{Z}_0)$ — *аналітичне відображення обмеженого типу таке, що з* $(y|x) \sim (y'|x')$ *випливає* $F(y|x) \sim F(y'|x')$. *Тоді оператор композиції* $C_F\colon f \mapsto f \circ F$ *є неперервним гомоморфізмом алгебри* H_b^{sup} *в себе.*

Наслідок 4.1.6. *Для кожного фіксованого* $(d|b) \in \ell_1(\mathbb{Z}_0)$ *відображення*

$$f(y|x) \mapsto f((y|x) \bullet (d|b))$$

та

$$f(y|x) \mapsto f((y|x) \diamond (d|b))$$

є неперервними гомоморфізмами алгебри H_b^{sup} *в себе.*

Доведення. Доведення випливає з того факту, що вказані відображення є операторами композиції з неперервними відображеннями з $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$ в себе: $(y|x) \mapsto (y|x) \bullet (d|b)$ та $(y|x) \mapsto (y|x) \bullet (d|b)$, які, очевидно, є аналітичними відображеннями обмеженого типу, оскільки $(y|x) \mapsto (y|x) \bullet (d|b)$ — афінний оператор, а $(y|x) \mapsto (y|x) \bullet (d|b)$ — лінійний оператор.

$\square$

В [16] показано, що якщо $\mathbf{P}$ — симетрично повна послідовність в банаховому просторі X і S_a є неперервним гомоморфізмом алгебри $H_{b\mathbf{P}}$

в себе, $a \in X$ такий, що $S_a(P_n) = P_n + P_n(a)$ і послідовність $(P_n(a))$ містить ненульові елементи, то оператор S_a є гіперциклічним. Нагадаємо, що лінійний неперервний оператор S на банаховому просторі X називається гіперциклічним, якщо існує такий елемент x_0 простору X, що орбіта точки x_0 під дією оператора S буде щільною підмножиною в X. Добре відомо, що у кожному сепарабельному нескінченновимірному банаховому просторі існує гіперциклічний оператор. Таким чином, ми можемо записати наступний наслідок.

Наслідок 4.1.7. *Нехай* $(d|b)$ *— такий елемент в* $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$*, що* $[(d|b)] \neq 0$ *в* $\mathcal{M}$*. Тоді*

$$S_{(d|b)}(f) = f((y|x) \bullet (d|b))$$

є гіперциклічним в просторі H_b^{sup}.

Доведення. З наслідку 4.1.6 маємо, що $S_{(d|b)}$ — неперервний оператор. З того, що $[(d|b)] \neq 0$ в $\mathcal{M}$ випливає, що $T_m(d|b) \neq 0$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. Крім того,

$$S_{(d|b)}(T_k)(y|x) = T_k(y|x) + T_k(d|b), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому, ми можемо застосувати результат з [16], про який згадано вище.

□

4.2. Структура нормованого кільця $\mathcal{M}$

Розглянемо більш детально множину $\mathcal{M}$. Нехай $\mathcal{M}_+ = \{u \in \mathcal{M} \colon u = [(0|x)], x \in \ell_1\}$. Відповідно до [11] введемо операцію '$\diamond$' на $\mathcal{M}_+$ і продовжимо її на $\mathcal{M}$.

Нехай $x, y \in \ell_1$. Тоді $x \diamond y$ — послідовність, яка складається з чисел $x_i y_j$, $i, j \in \mathbb{N}$ пронумерованих у деякому фіксованому порядку. Якщо $u = [(0|x)]$ і $v = [(0|y)]$, то $u \diamond v = [(0|x \diamond y)]$. З [11, 14] ми знаємо, що операція на $\mathcal{M}_+$ є комутативною, асоціативною і $[y \diamond (x \bullet d)] = [(y \diamond x) \bullet (y \diamond d)]$. Визначимо

$$u \diamond v = [((y \diamond b) \bullet (x \diamond d)|(y \diamond d) \bullet (x \diamond b))].$$

Твердження 4.2.1. *Для кожного* $k \in \mathbb{N}$, $T_k(u \diamond v) = T_k(u)T_k(v)$, $u, v \in \mathcal{M}$.

Доведення. З [11] ми знаємо, що для всіх $x, z \in \ell_1$, $F_k(x \diamond z) = F_k(x)F_k(z)$. Нехай $u = [(y|x)]$ і $v = [(d|b)]$. Тоді

$$T_k(u \diamond v) = F_k((y \diamond d) \bullet (x \diamond b)) - F_k((y \diamond b) \bullet (x \diamond d))$$

$$= F_k(y)F_k(d) + F_k(x)F_k(b) - F_k(y)F_k(b) - F_k(x)F_k(d) = T_k(u)T_k(v).$$

$\square$

Теорема 4.2.1. $(\mathcal{M}, \bullet, \diamond)$ — *комутативне кільце з нулем* $0 = [(0|0)]$ *і одиницею* $\mathbb{I} = [(0|1, 0, \ldots)]$.

Доведення. Ми вже знаємо, що $(\mathcal{M}, \bullet)$ — комутативна група, а для довільного елемента $u = [(y|x)] \in \mathcal{M}$, елемент $u^- = [(y|x)^-] = [(x|y)]$

є оберненим (протилежним) до u. Асоціативність, комутативність множення і дистрибутивність були доведені в [11] для випадку $\mathcal{M}_+$. Ці ж міркування можна використати і в загального випадку. Справді, для будь-якого натурального k маємо:

$$T_k(u \diamond v) = T_k(u)T_k(v) = T_k(v \diamond u).$$

Отже, $u \diamond v = v \diamond u$, $u, v \in \mathcal{M}$. Аналогічно можна перевірити асоціативність і дистрибутивність.

□

Зауважимо, що на $\mathbb{C} \times \mathcal{M}$ визначена операція множення на константу

$$\lambda[(y|x)] = [(\lambda y|\lambda x)], \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad [(y|x)] \in \mathcal{M}.$$

Зрозуміло, що

$$\lambda(u \bullet v) = \lambda u \bullet \lambda v \quad \text{і} \quad \lambda(u \diamond v) = (\lambda u) \diamond v = u \diamond (\lambda v) \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad u, v \in \mathcal{M}.$$

Але, в загальному випадку,

$$(\lambda_1 + \lambda_2)u \neq \lambda_1 u \bullet \lambda_2 u.$$

Отже, $(\mathcal{M}, \bullet, (\lambda, u) \mapsto \lambda u)$ не є лінійним простором над $\mathbb{C}$. Тому $(\mathcal{M}, \bullet, \diamond)$ не є алгеброю. Іншими словами, ми можемо казати, що $(\mathcal{M}, \bullet, \diamond)$ є нелінійним кільцем, в якому визначено операцію множення на константу з $\mathbb{C}$. Для введення топології на $\mathcal{M}$ ми можемо використати стандартну норму на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$.

Означення 4.2.1. *Нехай $u \in \mathcal{M}$. Визначимо норму u наступним чином:*

$$\|u\| = \|x\| + \|y\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|,$$

де $(y|x)$ — незвідне зображення u.

З наслідку 4.1.4 випливає, що означення норми $\|\cdot\|$ не залежить від незвідного зображення.

Зауважимо, що визначена норма не є нормою у загальноприйнятому сенсі, оскільки $\mathcal{M}$ не є лінійним простором. Проте, наступне твердження показує, що, як і в лінійному просторі, норма має природні властивості.

Твердження 4.2.2. *Нехай $u, v \in \mathcal{M}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Виконуються наступні властивості:*

1. $\|u\| \geq 0$ *і* $\|u\| = 0$ *тоді і тільки тоді, коли* $u = 0$.
2. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$.
3. $\|u\| = \min\limits_{(y|x) \in u} (\|x\| + \|y\|)$.
4. $\|u \bullet v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
5. $\|u \diamond v\| \leq \|u\| \|v\|$.
6. $\|u^-\| = \|u\|$.

Доведення. Пункти 1, 2 і 6 є очевидними. Перевіримо пункт 3. Нехай $(y|x)$ деяке зображення елемента u. Ми можемо записати з точністю до перестановки, що $(y|x) = (y' \bullet a | x' \bullet a)$ для деякого $a \in \ell_1$ і незвідного $(y'|x')$. Тому

$$\|u\| = \|x'\| + \|y'\| \leq \|x\| + \|y\|$$

для кожного $(y|x) \in u$. З іншого боку,

$$\|u\| = \|x\| + \|y\|,$$

якщо $(y|x)$ — незвідне зображення елемента u. Тому

$$\|u\| = \min_{(y|x) \in u} (\|x\| + \|y\|).$$

Перевіримо пункт 4. Нехай $(y|x)$ — незвідне зображення елемента u, а $(d|b)$ — незвідне зображення елемента v. Тоді, згідно пункту 3,

$$\|u \bullet v\| = \|(y \bullet d|x \bullet b)\| \leq \|y \bullet d\| + \|x \bullet b\| = \|x\| + \|d\| + \|y\| + \|b\| = \|u\| + \|v\|.$$

□

Визначимо метрику ρ на $\mathcal{M}$, природним чином асоційовану з нормою. Нехай $u, v \in \mathcal{M}$. Покладемо

$$\rho(u, v) = \|u \bullet v^-\|.$$

Легко перевірити, що ρ є метрикою, використовуючи ті ж аргументи, що і в класичному випадку лінійних нормованих просторів, оскільки в означенні метрики не використовується множення на константу.

Твердження 4.2.3. *Множення на $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \mapsto \lambda u$ для фіксованого $u \in \mathcal{M}$ загалом є розривним у кожній ненульовій точці $\mathbb{C}$ та неперервним в нулі. Тут ми розглядаємо стандартну топологію на $\mathbb{C}$ і топологію на $\mathcal{M}$, породжену метрикою ρ.*

Доведення. Нехай ε_n — послідовність у $\mathbb{C}$ така, що $\varepsilon_n \neq 0$, $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, $\lambda \neq 0$ і $u = [(\ldots, 0, y_1|x_1, 0, \ldots)]$, де $x_1 \neq 0$ або $y_1 \neq 0$ і $x_1 \neq y_1$. Тоді

$$\rho(\lambda(1+\varepsilon_n)u, \lambda u) = \|[(\ldots, 0, \lambda y_1, \lambda(1+\varepsilon_n)x_1|\lambda x_1, \lambda(1+\varepsilon_n)y_1, 0, \ldots)]\|$$

$$= \|\lambda x_1\| + \|\lambda y_1\| + \|\lambda(1+\varepsilon_n)x_1\| + \|\lambda(1+\varepsilon_n)y_1\| > |\lambda|\|u\| > 0,$$

тоді як $\lambda(1+\varepsilon_n) \to \lambda$ при $n \to \infty$.

Нехай тепер $\lambda = 0$, $u \in \mathcal{M}$ і $(y|x)$ — незвідне зображення u. Тоді

$$\rho(\varepsilon_n u, 0) = \|\varepsilon_n u\| = |\varepsilon_n|\|x\| + |\varepsilon_n|\|y\| \to 0.$$

□

Теорема 4.2.2. *Операції '$\bullet$' і '$\diamond$' є сукупно неперервними на* $(\mathcal{M}, \rho)$.

Доведення. Легко перевірити, що якщо $\rho(u, u') < \varepsilon_1$ і $\rho(v, v') < \varepsilon_2$, то

$$\rho(u \bullet v, u' \bullet v') < \|(u \bullet v) \bullet (u' \bullet v')^-\| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

і

$$\rho(u \diamond v, u' \diamond v') < \varepsilon_1\|u\| + \varepsilon_2\|v\| + \varepsilon_1\varepsilon_2.$$

□

Твердження 4.2.4. *Метричний простір* $(\mathcal{M}, \rho)$ *є несепарабельним.*

Доведення. Розглянемо наступну множину

$$S_1 = \{u_\lambda = \lambda\mathbb{I} = (0|\lambda, 0, 0\ldots)\colon \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}.$$

Якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$\rho(u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}) = \|(\ldots, 0, 0, \lambda_2|\lambda_1, 0, 0\ldots)\| = 2.$$

Отже, одинична сфера метричного простору $(\mathcal{M}, \rho)$ містить незліченну множину S_1 таку, що відстань між кожною парою різних точок S_1 дорівнює 2.

□

Теорема 4.2.3. *Метричний простір* $(\mathcal{M}, \rho)$ *є повним.*

Доведення. Нехай u і v є елементами $\mathcal{M}$, $\rho(u, v) = \|u \bullet v^-\| < \varepsilon$ і $(y|x)$ — незвідне зображення u. Тоді існує $(d|b)$ — незвідне зображення v таке, що $\|(y|x) - (d|b)\| < \varepsilon$. Справді, з нерівності $\|u \bullet v^-\| < \varepsilon$ і означення норми випливає, що існує елемент $w \in \mathcal{M}$ такий, що $u = u' \bullet w$, $v = v' \bullet w$ і $\|u'\| + \|v'\| < \varepsilon$. Розглянемо $(d|b)$ — зображення елемента v таке, що елемент w в $(d|b)$ представлений тим самим вектором, що і в $(y|x)$. Нехай

$(y'|x')$ є незвідним зображення u' в $(y|x)$ і $(d'|b')$ — незвідне зображення v' в $(d|b)$. Тоді

$$\|(y|x) - (d|b)\| = \|(y'|x') - (d'|b')\| \leq \|u'\| + \|v'\| < \varepsilon.$$

Нехай $u^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$ — фундаментальна послідовність в $(\mathcal{M}, \rho)$. Перейшовши до підпослідовності, якщо потрібно, ми можемо вважати, що якщо $n \geq N$ і $m \geq N$, то

$$\rho(u^{(m)}, u^{(n)}) < 1/2^{N+1}.$$

Виберемо $(y^{(m)}|x^{(m)})$ — незвідні зображення $u^{(m)}$ такі, що

$$\|(y^{(m+1)}|x^{(m+1)}) - (y^{(m)}|x^{(m)})\| = \rho(u^{(m+1)}, u^{(m)}) < 1/2^{m+1}.$$

Отже, якщо $n \geq N$ і $m \geq N$, то

$$\|(y^{(m)}|x^{(m)}) - (y^{(n)}|x^{(n)})\| < 1/2^N.$$

Таким чином, $(y^{(m)}|x^{(m)})$, $m \in \mathbb{N}$ — послідовність Коші в $\ell_1(\mathbb{Z})$ і тому вона має граничну точку $z^{(0)} = (y^{(0)}|x^{(0)}) \in \ell_1(\mathbb{Z})$, оскільки простір $\ell_1(\mathbb{Z})$ є повним.

Нехай $z_i^{(m)}$ — i-та координата $z^{(m)} = (y^{(m)}|x^{(m)})$, $i \in \mathbb{Z}_0$, тобто $z_i^{(m)} = x_i^{(m)}$, якщо $i > 0$ і $z_i^{(m)} = y_{-i}^{(m)}$, якщо $i < 0$. Очевидно, що $z_i^{(m)} \to z_i^{(0)}$ при $m \to \infty$. Ми стверджуємо, що якщо $z_i^{(0)} = c \neq 0$, то існує число N таке, що для кожного $m > N$, $z_i^{(m)} = c$. Справді, якщо це не так, тоді для кожних $n, m > N$, $\rho(u^{(m)}, u^{(n)}) > c$ і ми отримаємо суперечність.

Для даного $\varepsilon > 0$ позначимо через z^ε вектор у $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$ такий, що z^ε має скінченний носій і для координат цього вектора z_i^ε виконуються умови: $z_i^\varepsilon = z_i^{(0)}$ або $z_i^\varepsilon = 0$ і

$$\rho(z^\varepsilon, z^{(0)}) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Зауважимо, що в цьому випадку $\rho(z^\varepsilon, z^{(0)}) = \|z^\varepsilon - z^{(0)}\|$. Нехай N — натуральне число, таке, що для кожного $n > N$, $z_i^\varepsilon = z_i^{(n)}$ для всіх $i \in \operatorname{supp} z^\varepsilon$ та $\|z^{(n)} - z^{(0)}\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тоді

$$\rho(z^{(n)}, z^\varepsilon) = \|z^\varepsilon - z^{(n)}\| \leq \|z^\varepsilon - z^{(0)}\| + \|z^{(n)} - z^{(0)}\| < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Таким чином,

$$\rho(z^{(n)}, z^{(0)}) \leq \rho(z^{(n)}, z^\varepsilon) + \rho(z^\varepsilon, z^{(0)}) < \varepsilon.$$

Тобто, послідовність $z^{(n)}$ прямує до точки $z^{(0)} \in \mathcal{M}$. Отже, послідовність $u^{(m)}$ має граничну точку $z^{(0)} \in \mathcal{M}$. Оскільки метричний простір є гаусдорфовим, то ця точка єдина, що доводить повноту простору $\mathcal{M}$.

$\square$

4.3. Спектр алгебри H_b^{sup}

Позначимо через M_b^{sup} спектр H_b^{sup}, тобто множину всіх неперервних ненульових комплексних гомоморфізмів (характерів) H_b^{sup}. Зрозуміло, що для кожної точки $(y|x) \in \ell_1(\mathbb{Z}_0)$ існує характер $\delta_{(y|x)} \in M_b^{sup}$ (так званий функціонал значення в точці), такий, що $\delta_{(y|x)}(f) = f((y|x)))$, $f \in H_b^{sup}$. Крім того, $\delta_{(y|x)} = \delta_{(d|b)}$ тоді і тільки тоді, коли $(y|x) \sim (d|b)$. В цьому сенсі, можна сказати, що $\mathcal{M} \subset M_b^{sup}$.

Оскільки поліноми $\{W_n\}$ утворюють алгебраїчний базис в H_b^{sup}, то будь-який характер $\varphi \in M_b^{sup}$ повністю визначається його значеннями на W_n, $n \in \mathbb{N}$. Іншими словами, кожен характер φ може бути зображений формальним степеневим рядом

$$\varphi(\mathcal{W}(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi(W_n). \tag{4.3.1}$$

Зауважимо, що якщо $\varphi = \delta_u$ для деякого $u \in \mathcal{M}$, то $\varphi(\mathcal{W}(t))$ може бути описаний наслідком 4.1.3. В цьому випадку функція є мероморфною і має особливості в точках $t_n = -1/y_n$ та нулі в точках $t_n = -1/x_n$, де $(y|x)$ — незвідне зображення u.

Використовуючи ідеї з [3, 11] можна побудувати характер, який не є функціоналом значення в точці. Нехай λ і μ — комплексні числа. Розглянемо

$$u_n = \Big(0, \ldots, 0, \frac{\mu}{n}, \ldots, \frac{\mu}{n} \Big| \frac{\lambda}{n}, \ldots, \frac{\lambda}{n}, 0, \ldots, 0\Big).$$

З компактності, отримуємо, що $\{\delta_{u_n}\}$ має граничну точку $\psi_{\lambda,\mu}$ в M_b^{sup}.

Таким чином

$$\psi_{\lambda,\mu}(\mathcal{W}(t)) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} t^k G_k(\lambda/n, \ldots, \lambda/n, 0, \ldots, 0)}{\sum_{k=0}^{\infty} t^k G_k(\mu/n, \ldots, \mu/n, 0, \ldots, 0)}.$$

Враховуючи [12], що

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} t^k G_k(\lambda/n,\ldots,\lambda/n,0,\ldots,0)=e^{\lambda t}$$

маємо

$$\psi_{\lambda,\mu}(\mathcal{W}(t))=e^{(\lambda-\mu)t}.$$

Порівнюючи це зображення з наслідком 4.1.3, бачимо, що $\psi_{\lambda,\mu}$ не може збігатися з функціоналом значення в точці.

На спектрі алгебри Фреше A природними є такі топології: топологія Гельфанда і топологія Глісона. Топологія Гельфанда — це найслабша топологія на спектрі $M(A)$ відносно якої всі функції, які задаються перетворенням Гельфанда $\widehat{a}(\varphi)=\varphi(a)$, $a\in A$, $\varphi\in M(A)$ будуть неперервними. З іншого боку, $M(A)$ є підмножиною топологічного спряженого простору A^*. Звуження сильної топології простору A^* на $M(A)$ називається топологією Глісона.

Твердження 4.3.1. *Існує неперервне, відносно топології Глісона, вкладення спектра M_{bs} алгебри H_{bs} у спектр M_b^{sup} алгебри H_b^{sup}.*

Доведення. Як було показано у твердженні 4.1.2, оператор Λ^{-1} є неперервним гомоморфізмом з H_b^{sup} в H_{bs} зі щільним образом. Тоді спряжений оператор $\left(\Lambda^{-1}\right)^*$ буде неперервним лінійним оператором з H_{bs}^* в $\left(H_b^{sup}\right)^*$. Позначимо Γ — звуження цього оператора на $M_{bs}\subset H_{bs}^*$. Тоді, для кожного $\varphi\in M_{bs}$, $\Gamma(\varphi)=\varphi\circ\Lambda^{-1}$. З того, що Λ^{-1} — гомоморфізм, випливає, що $\Gamma(\varphi)\in M_b^{sup}$. З неперервності $\left(\Lambda^{-1}\right)^*$ отримуємо неперервність Γ.

Покажемо, що Γ — ін'єктивне відображення. Нехай $\varphi_1,\varphi_2\in M_{bs}$, $\varphi_1\neq\varphi_2$. Тоді, знайдеться функція $f\in H_{bs}$ така, що $\varphi_1(f)\neq\varphi_2(f)$. З щільності образу оператора Λ^{-1} і неперервності φ_1,φ_2 випливає, що функцію f можна вибрати з образу оператора Λ^{-1}. Таким чином, існує функція $g \in H_b^{sup}$, така, що $g = \Lambda^{-1}(f)$ і

$$\Gamma(\varphi_1(g)) = \varphi_1(f) \neq \varphi_2(f) = \Gamma(\varphi_1(g)).$$

Тобто, Γ є ін'єктивним відображенням.

$\square$

Зауважимо, що відображення Γ не є сюр'єктивним. Зокрема в образі Γ немає елемента δ_{u_0} для $u_0 = [(0, \dots, 0, 1|0)]$. Справді, припустимо що $\delta_{u_0} = \Gamma(\varphi)$ для деякого $\varphi \in M_{bs}$. Тоді,

$$\varphi\Big(\Lambda^{-1}(g)\Big) = g(u_0)$$

для довільного $g \in \mathcal{M}$. Зокрема, для $g = T_k$ маємо

$$\varphi\Big(\Lambda^{-1}\Big)(T_k) = \varphi(F_k) = T_k(u_0) = -1$$

і ця рівність виконується для кожного натурального k. Але добре відомо, що не існує такий характер $\varphi \in M_{bs}$, що $\varphi(F_k) = -1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Нагадаємо, що у підрозділі 4.1, для довільної фіксованої точки $(d|b) \in \ell_1(\mathbb{Z}_0)$ було введено оператор

$$S_{(d|b)}(f) = f((y|x) \bullet (d|b)), \quad f \in H_b^{sup}$$

і показано, що цей оператор є неперервним гомоморфізмом в себе (наслідок 4.1.6). Тоді, спряжений оператор $S^*_{(d|b)} \colon \varphi \to \varphi \circ S_{(d|b)}$, є неперервним в просторі $(H_b^{sup})^*$ і відображає комплексні гомоморфізми в комплексні гомоморфізми, оскільки $S_{(d|b)}$ є гомоморфізмом. Позначимо

$$\varphi \circ S_{(d|b)} = \delta_{(d|b)} \bullet \varphi,$$

де $\delta_{(d|b)}$ — функціонал значення в точці $(d|b)$. Зауважимо, що

$$(\delta_{(d|b)} \bullet \varphi)(T_k) = \varphi(S_{(d|b)}T_k) = \varphi(T_k(\cdot \bullet (d|b)) = \varphi(T_k) + T_k(d|b). \quad (4.3.2)$$

У роботі [16] доведено таке загальне твердження:

Твердження 4.3.2. *Нехай F — гомоморфізм алгебри поліномів $\mathcal{P}_{\mathbf{P}}(X)$ породженої сім'єю поліномів $\mathbf{P} = \{P_n\}$ на деякому банаховому просторі X, $\|P_n\| = 1$, $\deg P_n = n$, $F\colon P_n \to P_n + a_n$ для деяких чисел a_n. Якщо існує такий характер φ алгебри $H_{b\mathbf{P}}(X)$, що*

1. *$\varphi(P_n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$;*

2. *для кожної точки $x \in X$ знайдеться характер θ алгебри $H_{b\mathbf{P}}(X)$ такий, що*

$$P_n(x) + \varphi(P_n) = \theta(P_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

тоді гомоморфізм F є неперервним і може бути продовжений до неперервного гомоморфізма алгебри $H_{b\mathbf{P}}(X)$ в себе.

Для довільної функції $f \in H_b^{sup}$ розглянемо $g((d|b)) = (\delta_{(d|b)} \bullet \varphi)(f)$ як функцію від $(d|b) \in \ell_1(\mathbb{Z}_0)$ при фіксованому $\varphi \in M_b^{sup}$.

Наслідок 4.3.1. *Функція $g((d|b)) = (\delta_{(d|b)} \bullet \varphi)(f)$ належить алгебрі H_b^{sup} і відображення $f \mapsto g$ є неперервним гомоморфізмом H_b^{sup} в себе.*

Доведення. Застосуємо твердження 4.3.2 до випадку $P_n = T_n$, $X = \ell_1(\mathbb{Z}_0)$, $\varphi \in M_b^{sup}$, $H_{b\mathbf{P}}(X) = H_b^{sup}$. Згідно з рівністю 4.3.2, $\theta = \delta_{(d|b)} \bullet \varphi$ задовольняє умову 2 твердження 4.3.2 для довільного φ. Тому відображення F_φ, визначене на базисних елементах T_n рівністю

$$F_\varphi\colon T_n \mapsto T_n + \varphi(T_n)$$

є неперервним гомоморфізмом алгебри H_b^{sup} в себе. З іншого боку, з рівності 4.3.2 бачимо, що відображення $P \mapsto (\delta_{(d|b)} \bullet \varphi)(P)$ збігається з $F_{(d|b)}$ для кожного суперсиметричного полінома P. Тому

$$g((d|b)) = (\delta_{(d|b)} \bullet \varphi)(f) = F_\varphi(f) \in H_b^{sup}$$

і відображення $f \mapsto g$ є неперервним гомоморфізмом.

$\square$

ТЕОРЕМА 4.3.1. *Існує продовження операції "$\bullet$" визначеної на множині $\mathcal{M}$ до комутативної операції на спектрі M_b^{sup} алгебри H_b^{sup}.*

ДОВЕДЕННЯ. Оскільки для довільних $\varphi \in M_b^{sup}$, $f \in H_b^{sup}$, функція $g((d|b)) = (\delta_{(d|b)} \bullet \varphi)(f) \in H_b^{sup}$, ми можемо визначити

$$(\theta \bullet \varphi)(f) = \theta(g), \quad f \in H_b^{sup}, \quad \theta \in M_b^{sup}.$$

Таким чином, операція "$\bullet$" коректно визначена на множині M_b^{sup}. Якщо $\varphi = \delta_{(y|x)}$ і $\theta = \delta_{(d|b)}$, то, згідно означення,

$$(\theta \bullet \varphi)(f) = (\delta_{(y|x)} \bullet \delta_{(d|b)})(f) = f((y|x) \bullet (d|b)).$$

Тому, операція "$\bullet$" на M_b^{sup} є продовженням операції "$\bullet$" визначеної на множині $\mathcal{M}$.

З рівності 4.3.2 маємо, що $(\theta \bullet \varphi)(T_n) = \theta(T_n) + \varphi(T_n)$ для всіх натуральних n. Отже, $\theta \bullet \varphi = \varphi \bullet \theta$ на всіх суперсиметричних поліномах. З щільності множини поліномів в алгебрі H_b^{sup} випливає, комутативність "$\bullet$" в M_b^{sup}.

$\square$

Операцію "$\bullet$" на M_b^{sup}, визначену в теоремі 4.3.1 будемо називати згорткою функціоналів з M_b^{sup}.

Крім топології Гельфанда і топології Глісона існує слабша топологія на спектрі M_b^{sup} алгебри H_b^{sup}, яку, за аналогією з симетричним випадком [12], ми будемо називати слабко поліноміальною топологією.

Позначимо w_p слабко поліноміальну топологію на M_b^{sup}, породжену наступною базою околів:

$$U_{\varepsilon,k_1,\ldots,k_n}(\psi) = \{\psi \bullet \varphi \colon \varphi \in M_b^{sup}, \text{ і } |\varphi(T_{k_j}| < \varepsilon, j = 1, \ldots, n\}.$$

Оскільки, згідно з означенням і враховуючи комутативність згортки

$$U_{\varepsilon/2,k_1,\ldots,k_n}(\psi) \bullet U_{\varepsilon/2,k_1,\ldots,k_n}(\theta) \subset U_{\varepsilon,k_1,\ldots,k_n}(\psi \bullet \theta),$$

операція згортки є неперервною в слабко поліноміальній топології M_b^{sup}.

Твердження 4.3.3. *Топологія w_p є гаусдорфовою*

Доведення. Якщо $\varphi \neq \psi$, то існує натуральне число k таке, що

$$|\varphi(T_k) - \psi(T_k)| = c > 0.$$

Покладемо $\varepsilon = c/3$. Тоді для довільних θ_1 і θ_2 в околі $U_{\varepsilon,k}(\delta_0)$

$$|(\varphi \bullet \theta_1)(T_k) - \varphi \bullet \theta_2)(T_k)| = |(\varphi(T_k) - \psi(T_k)) - (\theta_2(T_k) - \theta_1(T_k))| \geq$$

$$\geq |(\varphi(T_k) - \psi(T_k))| - |(\theta_2(T_k) - \theta_1(T_k))| \geq c/3.$$

Таким чином, околи $U_{\varepsilon,k}(\varphi)$ і $U_{\varepsilon,k}(\psi)$ не мають спільних точок.

$\square$

4.4. Оборотність і гомоморфізми

Якщо $u \in \mathcal{M}$ має обернений елемент відносно операції множення '$\diamond$', то позначимо його $u^{-1} = u^{\diamond(-1)}$, тобто

$$u \diamond u^{-1} = u^{-1} \diamond u = \mathbb{I}.$$

Твердження 4.4.1. *Нехай $u \in \mathcal{M}$ і $\|u\| < 1$. Тоді $\mathbb{I} \bullet u^{-}$ є оборотним у кільці $\mathcal{M}$. При цьому,*

$$(\mathbb{I} \bullet u^{-})^{-1} = \mathop{\bullet}_{n=0}^{\infty} u^{\diamond n},$$

де $u^{\diamond 0} = \mathbb{I}$, $u^{\diamond n} = \underbrace{u \diamond \cdots \diamond u}_{n}$, а ряд праворуч збігається в $\mathcal{M}$.

Доведення. Використовуючи основну ідею доведення аналогічного твердження для класичних банахових алгебр, отримуємо

$$\left\| \mathop{\bullet}_{n=0}^{\infty} u^{\diamond n} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u\|^n = \frac{1}{1-u} < \infty.$$

Отже, враховуючи повноту $\mathcal{M}$ маємо, що елемент $\mathop{\bullet}_{n=0}^{\infty} u^{\diamond n} \in \mathcal{M}$. Крім того,

$$(\mathbb{I} \bullet u^{-}) \diamond \left(\mathop{\bullet}_{n=0}^{\infty} u^{\diamond n} \right) = \mathbb{I}.$$

$\square$

Далі ми розглянемо гомоморфізми кільця $\mathcal{M}$ та його підкілець. Надалі ми не припускаємо, що гомоморфізми кілець зберігають множення на сталу. Зауважимо, що елемент x комутативної банахової алгебри A є оборотними тоді і тільки тоді, коли $\varphi(x) \neq 0$ для кожного характера φ з A. В $\mathcal{M}$ ситуація інша. Нехай $\mathbb{I}^{\bullet n} = \underbrace{\mathbb{I} \bullet \cdots \bullet \mathbb{I}}_{n} = (0| \underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0, \ldots)$.

Твердження 4.4.2. *Нехай φ — ненульовий гомоморфізм кілець з $\mathcal{M}$ в $\mathbb{C}$. Тоді $\varphi(\mathbb{I}^{\bullet n}) = n$, але $\mathbb{I}^{\bullet n}$ не є оборотним при $n > 1$.*

Доведення. Зрозуміло, що $\varphi(\mathbb{I}^{\bullet n}) = n\varphi(\mathbb{I}) = n$. З іншого боку, $\mathbb{I}^{\bullet n} \diamond u = u^{\bullet n} \neq \mathbb{I}$ для кожного $u \in \mathcal{M}$.

$\square$

Приклад 4.4.1. *Наведені нижче відображення є гомоморфізмами кілець з $\mathcal{M}$ в $\mathbb{C}$.*

1. *Поліноми T_n, $n \in \mathbb{N}$ є (неперервними) комплекснозначними гомоморфізмами кілець з $\mathcal{M}$, але тільки лінійний функціонал T_1 зберігає множення на сталі.*

2. *Нехай $u = [(y|x)] \in \mathcal{M}$. Визначимо*

$$\Theta(u) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|.$$

Зрозуміло, що Θ є коректно визначеним. Адитивність та мультиплікативність будуть доведені для більш загального випадку.

Як звичайно, $\mathcal{R}$ є підкільцем $\mathcal{M}$, якщо він є підмножиною $\mathcal{M}$ і кільцем відносно операцій '$\bullet$' і '$\diamond$'. Наприклад, нехай $\mathcal{M}_{00}$ складається з усіх елементів $u = [(y|x)]$ таких, що якщо $(y|x)$ є незвідним, тоді $\operatorname{supp} x$ і $\operatorname{supp} y$ є скінченними множинами. Тоді $\mathcal{M}_{00}$ є щільним підкільцем $\mathcal{M}$. Розглянемо кілька нетривіальних прикладів замкнутих підкілець $\mathcal{M}$.

Приклад 4.4.2. *Нехай $\mathcal{M}_\Delta$, $\mathcal{M}_S$ і $\mathcal{M}_1$ визначені наступним чином:*

$$\mathcal{M}_\Delta = \{u \in \mathcal{M} \colon |x_j| \le 1,\ |y_j| \le 1 \ \text{\textit{для довільних незвідних}}$$
$$\text{\textit{зображень}}\ (y|x) \in u\},$$
$$\mathcal{M}_S = \{u \in \mathcal{M} \colon |x_j| = 1 \ \text{\textit{або}}\ 0,\ |y_j| = 1 \ \text{\textit{або}}\ 0 \ \text{\textit{для довільних}}$$
$$\text{\textit{незвідних зображень}}\ (y|x) \in u\} \cup \{0\},$$
$$\mathcal{M}_1 = \{u \in \mathcal{M} \colon x_j = 1 \ \text{\textit{або}}\ 0,\ y_j = 1 \ \text{\textit{або}}\ 0 \ \text{\textit{для довільних}}$$

незвідних зображень $(y|x) \in u\} \cup \{0\}$.

Зрозуміло, що $\mathcal{M}_\Delta$, $\mathcal{M}_S$ і $\mathcal{M}_1$ є підкільцями $\mathcal{M}$ і

$$\mathcal{M}_\Delta \supset \mathcal{M}_S \supset \mathcal{M}_1.$$

Також $\mathcal{M}_1$ ізоморфний кільцю $\mathbb{Z}$ цілих чисел відносно ізоморфізму

$$[(0|\underbrace{1,\ldots,1}_{n},0,\ldots)] \mapsto n, \ \text{для } n \geq 0 \ \text{і } [(\underbrace{1,\ldots,1}_{-n},0,\ldots)|0] \mapsto n \ \text{для } n < 0$$

і звуження топології з $(\mathcal{M},\rho)$ на $\mathcal{M}_S$ і $\mathcal{M}_1$ збігається з дискретною топологією.

У загальному випадку, нехай U є підмножиною $\mathbb{C}$. Позначимо через

$$\mathcal{M}_U = \{u \in \mathcal{M} \colon x_j \in U,\, y_j \in U \ \text{ для довільних}$$

$$\text{незвідних зображень } (y|x) \in u\} \cup \{0\}.$$

Тоді $\mathcal{M}_U$ є підкільцем $\mathcal{M}$, якщо U є замкненим відносно множення на $\mathbb{C}$ і $1 \in U$.

Твердження 4.4.3. *Нехай $\gamma(t)$ — функція однієї змінної, яка коректно визначена і мультиплікативна на підмножині $U \in \mathbb{C}$. Визначимо*

$$\Theta_\gamma(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(x_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(y_n), \qquad u \in \mathcal{M},$$

де $(y|x) \in u$. Якщо U є замкненою відносно множення і $1 \in U$, тоді Θ_γ — комплекснозначний гомоморфізм кілець з $\mathcal{M}_U$.

Доведення. По-перше, зауважимо, що $\Theta_\gamma(u)$ не залежить від вибору зображення. Таким чином

$$\Theta_\gamma((y|x) \bullet (d|b)) = \Theta_\gamma(y \bullet d|x \bullet b)$$

$$= \ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(x_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(y_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(d_n) = \Theta_\gamma(y|x) + \Theta_\gamma(d|b).$$

За мультиплікативністю γ маємо

$$\Theta_\gamma((0|x)\diamond(0|b)) = \sum_{n=i,j}^{\infty}\gamma(x_i)\gamma(b_j) = \sum_{n=i}^{\infty}\gamma(x_i)\sum_{n=j}^{\infty}\gamma(b_j)$$

і $\Theta_\gamma(x|0) = -\Theta_\gamma(0|x)$. Отже,

$$\Theta_\gamma((y|x)\diamond(d|b)) = \Theta_\gamma((y\diamond b)\bullet(x\diamond d)|(x\diamond b)\bullet(y\diamond d))$$

$$= \sum_{n=i}^{\infty}\gamma(x_i)\sum_{n=j}^{\infty}\gamma(b_j)+\sum_{n=i}^{\infty}\gamma(y_i)\sum_{n=j}^{\infty}\gamma(d_j)-\sum_{n=i}^{\infty}\gamma(y_i)\sum_{n=j}^{\infty}\gamma(b_j)-\sum_{n=i}^{\infty}\gamma(x_i)\sum_{n=j}^{\infty}\gamma(d_j)$$

$$= \Theta_\gamma(y|x)\Theta_\gamma(d|b).$$

$\square$

Приклад 4.4.3. *Розглянемо деякі приклади комплекснозначних гомоморфізмів підкілець $\mathcal{M}$.*

1. *Нехай g — мультиплікативна функція з $\mathbb{N}\to\mathbb{C}$. У теорії чисел такі функції називаються цілком мультиплікативними арифметичними функціями. Тоді для $\gamma = |g|$, Θ_γ — комплекснозначні гомоморфізми кілець $\mathcal{M}_S$ і $\mathcal{M}_1$.*

2. *Нехай $\varepsilon < 1$ і $\varepsilon\Delta$ — замкнений круг в $\mathbb{C}$ радіуса ε і з центром в нулі. Тоді $\mathcal{M}_{\varepsilon\Delta}$ — ідеал $\mathcal{M}_1$. Нехай*

$$\chi_{\mathbb{C}\setminus\varepsilon\Delta}(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |t|\le\varepsilon \\ 1, & \text{якщо } |t|>\varepsilon, \end{cases}$$

то $\Theta_{\chi_{\mathbb{C}\setminus\varepsilon\Delta}}$ — комплекснозначні гомоморфізми кілець з $\mathcal{M}_1$. Зауважимо, що якщо $u\in\mathcal{M}_1\setminus\mathcal{M}_{\varepsilon\Delta}$ і $v\in\mathcal{M}_{\varepsilon\Delta}$, тоді $\rho(u,v)\ge\varepsilon$. Звідси маємо, що $\Theta_{\chi_{\mathbb{C}\setminus\varepsilon\Delta}}$ є неперервним.

Добре відомо, що кожен комплексний гомоморфізм банахової алгебри є неперервним. Для алгебр Фреше, питання про неперервність комплексних гомоморфізмів складає відому проблему Майкла 1952 року [53].

Ми не знаємо чи кожен комплекснозначний гомоморфізм з $\mathcal{M}$ або його замкненого підкільця є неперервним.

4.5. Операторне числення адитивних операторів

Нехай $\Phi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — адитивне відображення. Оскільки воно є гомоморфізмом адитивної групи $(\mathcal{M}, \bullet)$ в себе, Φ неперервне у кожній точці тоді і тільки тоді, коли воно є неперервним у деякій точці $\mathcal{M}$. Нехай $\gamma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — довільна функція. Тоді коректно визначеним є наступне адитивне відображення з $\mathcal{M}_{00}$ в себе:

$$\Phi_\gamma(u) = (\ldots, \gamma(y_n), \ldots, \gamma(y_1)|\gamma(x_1), \ldots, \gamma(x_n), \ldots).$$

Твердження 4.5.1. *Якщо існують сталі $C > 0$ і $m \in \mathbb{N}$ такі, що $|\gamma(t)| \le C|t|^m$, тоді Φ_γ є неперервним, адитивним і коректно визначеним на $\mathcal{M}$.*

Доведення. Для кожного $u \in \mathcal{M}$

$$\|\Phi_\gamma(u)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|\gamma(x_n)\| + \sum_{n=1}^{\infty} \|\gamma(y_n)\| \le C \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n|^m + |y_n|^m) < \infty.$$

Якщо $\|u\| < \varepsilon < 1$, то $\|\Phi_\gamma(u)\| < C\varepsilon$ і тому Φ_γ є неперервним в нулі. Таким чином, воно є неперервним.

$\square$

Приклад 4.5.1. *Оператори піднесення до степеня. Нехай $m \in \mathbb{N}$. Тоді $\gamma(t) = t^m$ задовольняє твердження 4.5.1 і тому відображення $\Phi_m\colon u \mapsto u^m$, де $u = [(y|x)] \in \mathcal{M}$ і*

$$u^m = (\ldots, y_n^m, \ldots, y_1^m|x_1^m, \ldots, x_n^m, \ldots)$$

є неперервними адитивними операторами на $\mathcal{M}$.

Нехай $k \in \mathbb{N}$ і

$$\sqrt[k]{a} = (a)^{1/k} = (a^{(1/k,1)}, a^{(1/k,2)}, \ldots, a^{(1/k,k)}), \qquad a \in \mathbb{C}$$

багатозначна функція кореня k-го степеня. Розглянемо

$$(a^{(1/k,1)}, a^{(1/k,2)}, \dots, a^{(1/k,k)}) = (a^{(1/k,1)}, a^{(1/k,2)}, \dots, a^{(1/k,k)}, 0, 0 \dots)$$

як елемент у ℓ_1. Тоді для кожного $u \in \mathcal{M}$ такого, що для незвідного представлення $(y|x)$ елемента u

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|x_n|^{1/k} + |y_n|^{1/k}) < \infty$$

ми можемо визначити

$$\Phi_{1/k}(u) = u^{1/k} = (\dots \bullet y_n^{1/k} \bullet \dots \bullet y_1^{1/k} | x_1^{1/k} \bullet \dots \bullet x_n^{1/k} \bullet \dots).$$

Відображення $\Phi_{1/k}$ при $k > 1$ є розривним адитивним оператором, визначеним на щільній підмножині $\mathcal{M}$. Але, якщо $m > k$, тоді ми можемо визначити адитивний оператор

$$\Phi_{1/k} \circ \Phi_m,$$

який є неперервним на $\mathcal{M}$. Зауважимо, що $\Phi_{1/k} \circ \Phi_k \neq \Phi_1$ при $k > 1$, так як Φ_1 є одиничним оператором і, крім того,

$$\Phi_{1/k} \circ \Phi_k(u) = \underbrace{u \bullet \dots \bullet u}_{k} = u \diamond \mathbb{I}^{\bullet k}.$$

Скажемо, що відображення $A\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ є лінійним оператором, якщо воно адитивне і зберігає множення на сталу, тобто $A(\lambda u) = \lambda A(u)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ і якщо $A(u^-) = (A(u))^-$ для всіх $u \in \mathcal{M}$. З твердження 4.5.1 випливає, що адитивних операторів дуже багато. Лінійні оператори, навпаки, можна описати простим способом.

Теорема 4.5.1. *Нехай A — неперервний лінійний оператор з $\mathcal{M}$ в себе. Тоді існує елемент $v \in \mathcal{M}$ такий, що*

$$A(u) = v \diamond u, \qquad u \in \mathcal{M}.$$

Доведення. Нехай $u = \mathbb{I} = [(0|1, 0, \ldots)]$ і $A(u) = [(b|a)] \in \mathcal{M}$. Покладемо $v = [(b|a)]$. Нехай тепер u — елемент у $\mathcal{M}$, який може бути представлений вектором $(y|x)$ з фінітним носієм

$$(y|x) = (\ldots, 0, y_m, \ldots, y_1|x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots).$$

Тоді ми можемо записати

$$[(y|x)] = y_1\mathbb{I}^- \bullet \cdots \bullet y_m\mathbb{I}^- \bullet x_1\mathbb{I} \bullet \cdots x_n\mathbb{I}$$

і таким чином

$$A(u) = y_1u^- \bullet \cdots \bullet y_mu^- \bullet x_1u \bullet \cdots x_nu = v \diamond u.$$

Оскільки множина $\mathcal{M}_{00}$ елементів з фінітними носіями щільна в метричному просторі $\mathcal{M}$ і A є неперервним, то $A = v \diamond u$ для кожного $u \in \mathcal{M}$.

$\square$

Позначимо через $A_v(u)$ оператор $u \mapsto v \diamond u$, $u \in \mathcal{M}$. Доведемо деякі природні властивості операторів A_v.

Твердження 4.5.2. *Оператори A_v мають наступні властивості.*

1. *Оператор A_v є бієктивним тоді і тільки тоді, коли v є оборотним у $\mathcal{M}$.*

2. *Якщо оператор A_v є сюр'єктивним, то він бієктивний.*

3. *Оператор A_v є ін'єктивним тоді і тільки тоді, коли* $\ker A_v = 0$.

4. *Якщо $u \in \ker A_v$ для деякого $u \neq 0$, тоді $T_n(v) = 0$ для деяких $n \in \mathbb{N}$.*

5. *Якщо $T_n(v) = 0$ для деякого $n \in \mathbb{N}$, то A_v не є сюр'єктивним.*

Доведення. (1) Якщо v є оборотним, то $A_{v^{-1}} = A_v^{-1}$, тому A_v — бієкція. Нехай тепер $B = A_v^{-1}$. Тоді з теореми про відкрите відображення для повних метричних груп (див. [10]) випливає, що B є неперервним. З теореми 4.5.1 маємо, що $B = A_w$ для деякого $w \in \mathcal{M}$. Тому

$$A_v \circ A_w = A_{v \diamond w} = A_{\mathbb{I}},$$

$w = v^{-1}$.

(2) Нехай A_v є сюр'єктивним. Тоді існує $u \in \mathcal{M}$ такий, що $A_v(u) = v \diamond u = \mathbb{I}$. Отже, v є оборотним і $A_u = A_v^{-1}$.

(3) Якщо A_v є ін'єктивним, то $\ker A_v = 0$. І навпаки, якщо $u, w \in \mathcal{M}$, $u \neq w$ такі, що $A_v(u) = A_v(w)$, тоді $A_v(u \bullet w^-) = 0$ і, також, $\ker A_v$ є нетривіальним.

(4) Якщо $u \in \ker A_v$, то $v \diamond u = 0$ і, також,

$$T_k(v \diamond u) = T_k(v)T_k(u) = 0, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $u \neq 0$, то існує число $n \in \mathbb{N}$ таке, що $T_n(u) \neq 0$. Отже, $T_n(v) = 0$.

(5) Якщо A_v є сюр'єктивним, то він є бієктивним і тому v буде оборотним. Але

$$1 = T_n(\mathbb{I}) = T_n(v \diamond v^{-1}) = T_n(v)T_n(v^{-1}) = 0,$$

суперечність.

$\square$

Зауважимо, що для $v = \mathbb{I}^m$ оператор A_v є ін'єктивним, але не є сюр'єктивним, оскільки

$$A_v(u) = \underbrace{u \bullet \cdots \bullet u}_{m}, \qquad u \in \mathcal{M}$$

і $T_k(v) = m > 0$ для кожного k. З іншого боку, $v = (\ldots, 0, 1, 2|3, 0 \ldots)$, $T_1(v) = 0$ і також A_v є ін'єктивним, але не є сюр'єктивним. Дійсно, легко перевірити, що $T_k(v) \neq 0$ для $k > 1$. Отже, якщо $v \diamond u = 0$ для деякого $u = (y|x) \in \mathcal{M}$, тоді $F_k(x) = F_k(y)$ для $k > 1$. Але з [3] випливає, що також

$F_1(x) = F_1(y)$ і також $T_k(u) = 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, тобто $u = 0$. Нарешті, для $v = (\ldots, 0, -1|1, 0\ldots)$, A_v має нетривіальне ядро, яке містить $u = (\ldots, 0|1, -1, 0\ldots)$.

Висновки до розділу 4. У цьому розділі ми розглянули алгебру H_b^{sup} аналітичних функцій обмеженого типу, породжених суперсиметричними поліномами на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$. Ми описали деякі алгебраїчні базиси підалгебри суперсиметричних поліномів і відповідні твірні функції. Такий опис важливий для вивчення спектру (сукупності комплекснозначних гомоморфізмів) H_b^{sup}. Зокрема, показано, що кожен комплекснозначних гомоморфізм значення в точці може бути представлений як співвідношення двох цілих функцій експоненціального типу. Також ми побудували приклад комплекснозначного гомоморфізму, який не є функціоналом значення і точці. Однак у нас немає повного опису спектра H_b^{sup}. Зокрема, незрозуміло за яких умов мероморфна функція має вигляд (4.3.1) для деяких $\varphi \in M_b^{sup}$. Зауважимо, що така проблема є відкритою і для алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ [12, 11]. У дисертації показано, що спектр алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ може бути неперервно вкладений в спектр алгебри H_b^{sup}. Проте, це вкладення не є сюр'єктивним.

Ми можемо бачити, що H_b^{sup} цілком відрізняється від $H_{bs}(\ell_1)$. Наприклад, гомоморфізм визначений $T_k \mapsto -T_k$ неперервний у H_b^{sup}, тоді як $F_k \mapsto -F_k$ розривний у $H_{bs}(\ell_1)$. З іншого боку, гомоморфізм визначений $T_k \mapsto \lambda T_k$ є розривним для $\lambda \notin \mathbb{Z}$ і тому множина послідовностей $\xi_1 = \varphi(T_1), \xi_2 = \varphi(T_2), \ldots, \xi_n = \varphi(T_n), \ldots, \varphi \in M_b^{sup}$ не витримує множення на сталі. Звідси, зокрема, можна бачити, що умова (2.4.1) недостатня для опису M_b^{sup}.

Результати розділу показують, що спектр H_b^{sup} допускає цікаву алгебраїчну структуру комутативного кільця (яке не є лінійним простором) відносно операцій "$\bullet$" та "$\diamond$", які грають ролі додавання та множення на підмножині $\mathcal{M} \subset M_b^{sup}$. Використовуючи ці операції та ℓ_1-норму, ми ввели природну метрику ρ на $\mathcal{M}$ і довели, що $(\mathcal{M}, \rho)$ — повний метричний (не сепарабельний) простір. У розділі досліджено гомоморфізми з $\mathcal{M}$ та адитивні оператори з $\mathcal{M}$ в себе. Отже, отримані результати можуть бути цікавими як для теорії комутативних топологічних алгебр, так і для алгебр аналітичних функцій на банахових просторах.

Оскільки $\mathcal{M}$ можна розглядати як підмножину множини характерів M_b^{sup}, природно виникає питання чи можна поширити структури, визначені на $\mathcal{M}$ на множину M_b^{sup}. У розділі поширено операцію "$\bullet$" до комутативної операції згортки на множині характерів M_b^{sup}. Крім того, побудовано гаусдорфову топологію на M_b^{sup} відносно якої вказана операція згортки є неперервною.

Алгебраїчна структура $\mathcal{M}$ дуже близька до структури банахової алгебри, але $\mathcal{M}$ не є банаховою алгеброю, оскільки вона не є лінійним простором. Отже, виникає природне запитання: які властивості банахових алгебр можна поширити на кільце $\mathcal{M}$? Наприклад, ми можемо побачити, що якщо елемент є близьким до одиниці, то він є оборотним. Але ми не знаємо: чи $\mathcal{M}$ містить розривні комплекснозначні гомомоморфізми? Також нами було досліджено гомомоморфізми $\mathcal{M}$, його підкільця, та адитивні оператори $\mathcal{M}$.

Попри те, що $\mathcal{M}$ не є лінійним простором, на $\mathcal{M}$ визначено операцію множення на константу (для якої не виконується дистрибутивного закону з відповідником операції додавання). Тому було розглянуто відображення з $\mathcal{M}$ у себе, які зберігають структуру кільця і, додатково, операцію множення на константу. Такі відображення названо в роботі лінійними операторами на $\mathcal{M}$. У підрозділі 4.5 повністю описано всі лінійні неперервні оператори на $\mathcal{M}$ та досліджено їх властивості.

Результати цього розділу опубліковано у працях [34, 37, 38].

РОЗДІЛ 5

ФАКТОР ЗВАЖЕНИХ СУМ ПРОСТОРІВ ℓ_1 АСОЦІЙОВАНИХ З СУПЕРСИМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ

5.1. Кільце $\mathcal{M}^\omega$

Нехай ω — додатне число, $0 < \omega \leq 1$. Позначимо через $\ell_{1,\infty}^\omega$ "зважену" версію простору ℓ_1^E. А саме, простір $\ell_{1,\infty}^\omega$ складається з елементів x вигляду

$$x = (x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots), \quad x^{(n)} = (x_k^{(n)}) \in \ell_1$$

і

$$\|x\| = \|x\|_{\ell_{1,\infty}^\omega} = \max\left(\sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \|x^{(n)}\|_{\ell_1}, \sup_{n,k} |x_k^{(n)}|\right).$$

Зауважимо, що кожен підпростір вигляду

$$X_n = \left\{x \in \ell_{1,\infty}^\omega \colon x = (0, \ldots, 0, x^{(n)}, 0, \ldots,)\right\}$$

ізоморфний до ℓ_1. Таким чином $\ell_{1,\infty}^\omega$ є перетином зваженої ℓ_1-суми банахових просторів X_n і ℓ_∞-суми просторів X_n. Тому, $\ell_{1,\infty}^\omega$ є банаховим простором.

Позначимо через Λ_1^ω пряму суму двох копій $\ell_{1,\infty}^\omega$, $\Lambda_1^\omega = \ell_{1,\infty}^\omega \bigoplus \ell_{1,\infty}^\omega$. Елементи Λ_1^ω будемо позначати $(y|x)$, $y \in \ell_{1,\infty}^\omega$, $x \in \ell_{1,\infty}^\omega$ і

$$\|(y|x)\| = \|y\|_{\ell_{1,\infty}^\omega} + \|x\|_{\ell_{1,\infty}^\omega}.$$

Іншими словами, будь-який елемент $z \in \Lambda_1^{\omega}$ може бути поданий у вигляді

$$z = (y|x) = \left(\begin{array}{ccc} \ldots y_k^{(0)} \ldots y_1^{(0)} & | & x_1^{(0)} \ldots x_k^{(0)} \ldots \\ \ldots & | & \ldots \\ \ldots y_k^{(n)} \ldots y_1^{(n)} & | & x_1^{(n)} \ldots x_k^{(n)} \ldots \\ \ldots & | & \ldots \end{array} \right)$$

або

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(n)} e_k^{(n)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(n)} e_k^{-(n)}, \tag{5.1.1}$$

де

$$x_k^{(n)} e_k^{(n)} = \left(\begin{array}{ccc} \ldots 0 \ldots 0 & | & 0 \ldots 0 \ldots \\ \ldots & | & \ldots \\ \ldots 0 \ldots 0 & | & 0 \ldots 0 \; x_k^{(n)} \; 0 \ldots \\ \ldots 0 \ldots 0 & | & 0 \ldots 0 \ldots \\ \ldots & | & \ldots \end{array} \right)$$

і

$$y_k^{(n)} e_k^{-(n)} = \left(\begin{array}{ccc} \ldots 0 \ldots 0 & | & 0 \ldots 0 \ldots \\ \ldots & | & \ldots \\ \ldots \; 0 \; y_k^{(n)} \; 0 \ldots 0 & | & 0 \ldots 0 \ldots \\ \ldots 0 \ldots 0 & | & 0 \ldots 0 \ldots \\ \ldots & | & \ldots \end{array} \right).$$

Зауважимо, що зображення (5.1.1) є формальним, тобто ряди праворуч, в загальному випадку, не збігаються. Справді, якщо $\omega < 1$, то елемент

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} e_1^{(n)}$$

належить простору Λ_1^{ω}, але послідовність скінченних сум цього ряду не збігається до z.

Позначимо через $\Lambda_1^{\omega+}$ і $\Lambda_1^{\omega-}$ підпростори $\{(0|x)\colon x \in \ell_{1,\infty}^{\omega}\}$ і $\{(y|0)\colon y \in \ell_{1,\infty}^{\omega}\}$ відповідно. Якщо $z = (y|x)$, то ми будемо використовувати також позначення $z_+ = x$ і $z_- = y$, коли це буде зручно.

Визначимо наступні многочлени на Λ_1^{ω}.

$$T_m^{\omega}(y|x) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n F_m^{(n)}(x^{(n)}) - \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n F_m^{(n)}(y^{(n)}) \tag{5.1.2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)})^m - \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{k=1}^{\infty} (y_k^{(n)})^m,$$

$(y|x) \in \Lambda_1^{\omega}$.

Твердження 5.1.1. *Для кожного $m \in \mathbb{N}$ поліном T_m^{ω} є неперервним на Λ_1^{ω} і $\|T_m\| = 1$.*

Доведення. Нехай $\|(y|x)\| \le 1$. Тоді $\|y\|_{\ell_1^{\omega}} + \|x\|_{\ell_1^{\omega}} \le 1$, і $\left|x_k^{(n)}\right| \le 1$ і $\left|y_k^{(n)}\right| \le 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ and $n \in \mathbb{Z}_+$. Таким чином

$$|T_m^{\omega}(x)| \le \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left|x_k^{(n)}\right|^m + \left|y_k^{(n)}\right|^m\right) \le \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left|x_k^{(n)}\right| + \left|y_k^{(n)}\right|\right) \le \|(y|x)\|.$$

Отже, $\|T_m\| \le 1$. Нехай тепер $(y|x)$ буде таким, що $y = 0$, $x^{(0)} = (1, 0, 0, \ldots)$, $x^{(n)} = 0$ для $n > 0$. Тоді $\|(y|x)\| = 1$ і $T_m(y|x) = 1$. Таким чином $\|T_m\| = 1$.

$\square$

Означення 5.1.1. *Будемо казати, що поліном $P\colon \Lambda_1^{\omega} \to \mathbb{C}$ є ω-суперсиметричним, якщо він є алгебраїчною комбінацією поліномів T_m^{ω}, $m \in \mathbb{N}$. Позначимо через $\mathcal{P}_s^{\omega} = \mathcal{P}_s^{\omega}(\Lambda_1^{\omega})$ алгебру всіх ω-суперсиметричних поліномів на Λ_1^{ω} і через $H_{bs}^{\omega} = H_{bs}^{\omega}(\Lambda_1^{\omega})$ її замикання в алгебрі $H_b(\Lambda_1^{\omega})$.*

Спектр M_{bs}^{ω} алгебри H_{bs}^{ω} містить функціонали значень в точках простору Λ_1^{ω}. Тобто, для кожної точки $z \in \Lambda_1^{\omega}$ існує $\delta_z \in M_{bs}^{\omega}$ такий, що $\delta_z(f) = f(z)$, $f \in H_{bs}^{\omega}$. При цьому для двох точок $z, u \in \Lambda_1^{\omega}$ рівність

$\delta_z = \delta_u$ виконується тоді і тільки тоді, коли $P(z) = P(u)$ для кожного полінома $P \in \mathcal{P}_s^\omega$. У цьому розділі ми досліджуємо властивості елементів M_{bs}^ω вигляду δ_z, $z \in \Lambda_1^\omega$.

Теорема 5.1.1. *Нехай $\omega = 1/N$ для деяких $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$. Для кожного числа $a \in \mathbb{R}$ існує елемент $z_{\{a\}} \in \Lambda_1^\omega$ такий, що*

$$\|z_{\{a\}}\| = \begin{cases} |a| & \textit{якщо } |a| \geq 1 \\ 1 & \textit{якщо } |a| < 1 \end{cases}$$

і $T_m^\omega(z_{\{a\}}) = a$ для кожного $m \in \mathbb{N}$.

Доведення. Нехай $a > 0$. Тоді ми можемо записати

$$a = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{N^j}, \quad a_j \in \mathbb{N}, \tag{5.1.3}$$

тобто, $a_0 = [a]$ — ціла частина a і $(0.a_1a_2\ldots)_N$ — представлення числа $a - [a]$ в позиційній системі числення з основою N. Нехай $z_{\{a\}}$ має вигляд $z_{\{a\}} = (0|x_{\{a\}})$, де

$$x_{\{a\}} = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\{a\}}^{(n)}$$

і

$$x_{\{a\}}^{(n)} = (\underbrace{1,\ldots,1}_{a_n}, 0, 0, \ldots) = e_1^{(n)} + e_2^{(n)} + \cdots + e_{a_n}^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Тоді для $|a| \geq 1$,

$$\|z_{\{a\}}\| = \max\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{N^n}, 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{N^n} = T_m^\omega(z_{\{a\}}) = a, \quad m \in \mathbb{N}$$

і $\|z_{\{a\}}\| = 1$ для $|a| < 1$.

У випадку, коли $a < 0$, ми покладемо $b = -a > 0$. Аналогічним чином, використовуючи (5.1.3) для b, ми можемо знайти вектор $x_{\{b\}}$. Тоді, елемент $z_{\{a\}}$ визначимо формулою $z_{\{a\}} = (x_{\{b\}}|0)$. Отже,

$$\|z_{\{a\}}\| = \begin{cases} \mu = |a|, & \text{якщо } |a| \geq 1 \\ 1, & \text{якщо } |a| < 1 \end{cases}$$

і $T_m^\omega(z_{\{a\}}) = a$ для кожного $m \in \mathbb{N}$.

$\square$

Нагадаємо, що в попередніх розділах, відповідно до [12] та [11] було розглянуто дві операції на ℓ_1 "$\bullet$" і "$\diamond$", які зберігають симетричні поліноми. Також ці операції були продовжені на простори $\ell_1^{(n)}$, так, що дія цих операцій зберігає нарізно симетричні поліноми і на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$ із збереженням суперсиметричних поліномів. Тепер ми побудуємо природне продовження цих операцій на Λ_1^ω.

Означення 5.1.2. *Нехай $z = (z_-|z_+)$ і $r = (r_-|r_+)$ належать Λ_1^ω. Будемо казати, що $h = z \bullet r$, якщо $h_-^{(n)} = z_-^{(n)} \bullet r_-^{(n)}$ і $h_+^{(n)} = z_+^{(n)} \bullet r_+^{(n)}$ для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$. Також будемо казати, що $s = z \diamond r$, якщо*

$$s_+^{(n)} = (z_+^{(0)} \diamond r_+^{(n)}) \bullet (z_+^{(1)} \diamond r_+^{(n-1)}) \bullet \cdots$$

$$\cdots \bullet (z_+^{(n)} \diamond r_+^{(0)}) \bullet (z_-^{(0)} \diamond r_-^{(n)}) \bullet (z_-^{(1)} \diamond r_-^{(n-1)}) \bullet \cdots \bullet (z_-^{(n)} \diamond r_-^{(0)})$$

та

$$s_-^{(n)} = (z_+^{(0)} \diamond r_-^{(n)}) \bullet (z_+^{(1)} \diamond r_-^{(n-1)}) \bullet \cdots$$

$$\cdots \bullet (z_+^{(n)} \diamond r_-^{(0)}) \bullet (z_-^{(0)} \diamond r_+^{(n)}) \bullet (z_-^{(1)} \diamond r_+^{(n-1)}) \bullet \cdots \bullet (z_-^{(n)} \diamond r_+^{(0)}).$$

Твердження 5.1.2. *$T_m^\omega(z \bullet r) = T_m^\omega(z) + T_m^\omega(r)$ і $T_m^\omega(z \diamond r) = T_m^\omega(z)T_m^\omega(r)$ для всіх $z, r \in \Lambda_1^\omega$ і $m \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Перша рівність безпосередньо випливає з означення T_m^ω (5.1.2). Також, ми знаємо (див. [11]), що $F_m(x \diamond y) = F_m(x)F_m(y)$,

$x, y \in \ell_1$, $m \in \mathbb{N}$. Отже, використовуючи (5.1.2) і означення 5.1.2, ми маємо для $s = z \diamond r$

$$T_m^\omega(s) = T_m^\omega(z \diamond r) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n F_m^{(n)}(s_+^{(n)}) - \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n F_m^{(n)}(s_-^{(n)})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \left(\sum_{j=0}^{n} F_m^{(n)}(z_+^{(j)} \diamond r_+^{(n-j)}) + \sum_{j=0}^{n} F_m^{(n)}(z_-^{(j)} \diamond r_-^{(n-j)}) \right)$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \left(\sum_{j=0}^{n} F_m^{(n)}(z_+^{(j)} \diamond r_-^{(n-j)}) + \sum_{j=0}^{n} F_m^{(n)}(z_-^{(j)} \diamond r_+^{(n-j)}) \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \left(\sum_{j=0}^{n} F_m^{(j)}(z_+^{(j)}) F_m^{(n-j)}(r_+^{(n-j)}) + \sum_{j=0}^{n} F_m^{(j)}(z_-^{(j)}) F_m^{(n-j)}(r_-^{(n-j)}) \right)$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \left(\sum_{j=0}^{n} F_m^{(j)}(z_+^{(j)}) F_m^{(n-j)}(r_-^{(n-j)}) + \sum_{j=0}^{n} F_m^{(j)}(z_-^{(j)}) F_m^{(n-j)}(r_+^{(n-j)}) \right)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \omega^n F_m^{(n)}(z_+^{(n)}) - \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n F_m^{(n)}(z_-^{(n)}) \right) \times$$

$$\times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \omega^n F_m^{(n)}(r_+^{(n)}) - \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n F_m^{(n)}(r_-^{(n)}) \right)$$

$$= T_m^\omega(z) T_m^\omega(r).$$

□

Наслідок 5.1.1. *Нехай $P(z) \in \mathcal{P}_s^\omega$. Тоді для кожного фіксованого $r \in \Lambda_1^\omega$ поліноми $P(z \bullet r)$ і $P(z \diamond r)$ належать $\mathcal{P}_s^\omega$.*

Доведення. Доведення випливає з того факту, що кожен поліном $P \in \mathcal{P}_s^\omega$ є алгебраїчною комбінацією поліномів T_m^ω і твердження 5.1.2.

□

Для даного $z = (y|x) \in \Lambda_1^\omega$ позначимо $z^- = (x|y)$. Зрозуміло, що відображення $z \mapsto z^-$ є неперервною інволюцією у $r \in \Lambda_1^\omega$ і $T_m^\omega(z^-) = -T_m^\omega(z)$.

Введемо наступне відношення еквівалентності на Λ_1^ω. Будемо казати, що $z \sim r$ тоді і тільки тоді, коли $T_m^\omega(z) = T_m^\omega(r)$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Позначимо через $\mathcal{M}^\omega$ фактор-множину $\Lambda_1^\omega / \sim$ і через $[z]$ — клас еквівалентності, який містить z.

Твердження 5.1.3. *Відображення $[z] \to \delta_z$ є вкладенням (в сенсі теорії множин) множини $\mathcal{M}^\omega$ в спектр M_{bs}^ω алгебри H_{bs}^ω.*

Доведення. Як було зауважено, $\delta_z = \delta_r$ тоді і тільки тоді, коли $P(z) = P(r)$ для всіх ω-суперсиметричних поліномів. Це рівносильно тому, що $T_m^\omega(z) = T_m^\omega(r)$ для всіх $m \in \mathbb{N}$, тобто $[z] = [r]$. Таким чином, кожному класу еквівалентності $[z]$ ми ставимо у відповідність єдиний характер δ_z і, отже, відображення $[z] \to \delta_z$ є вкладенням.

$\square$

Твердження 5.1.4. *Наступні операції додавання і множення коректно визначені на $\mathcal{M}^\omega \times \mathcal{M}^\omega$ і $(\mathcal{M}^\omega, +, \cdot)$ — комутативне кільце з одиницею:*

1. $[z] + [r] := [z \bullet r]$;
2. $[z][r] := [z \diamond r]$,

$z, r \in \Lambda_1^\omega$.

Доведення. Нехай $z' \in [z]$ і $r' \in [r]$. Згідно з твердженням 5.1.2 та означенням еквівалентності маємо, що для кожного $m \in \mathbb{N}$,

$$T_m^\omega(z) + T_m^\omega(r) = T_m^\omega(z') + T_m^\omega(r') = T_m^\omega(z' \bullet r')$$

і

$$T_m^\omega(z)T_m^\omega(r) = T_m^\omega(z')T_m^\omega(r') = T_m^\omega(z' \diamond r').$$

Тож операції на $\mathcal{M}^\omega$ не залежать від вибору представників.

Нехай

$$[u] = [z]([r] + [s]) \quad i \quad [v] = [z][r] + [z][s].$$

Оскільки для кожного $m \in \mathbb{N}$

$$T_m^\omega(u) = T_m^\omega(z)(T_m^\omega(r) + T_m^\omega(s)) = T_m^\omega(z)T_m^\omega(r) + T_m^\omega(z)T_m^\omega(s) = T_m^\omega(v),$$

то $[u] = [v]$ і ми отримуємо дистрибутивний закон. Очевидно, що асоціативність і комутативність множення можна довести аналогічним чином. Також, $-[z] = [z^-]$ і $\mathbb{I} = [e_1^{(0)}]$ — одиниця відносно множення. Таким чином $\mathcal{M}^\omega$ — комутативне кільце з одиницею.

□

Для будь-яких $\lambda \in \mathbb{C}$ і $z \in \mathcal{M}^\omega$ покладемо $\lambda * [z] = [\lambda z]$. Оскільки $T_m^\omega(\lambda z) = \lambda^m T_m^\omega(z)$, то операція "$*$" коректно визначена на $\mathbb{C} \times \mathcal{M}^\omega$. Але $(\mathcal{M}^\omega, +, *)$ не є лінійним простором. Справді, $z \in \Lambda_1^\omega$ і $z \neq 0$, тоді $[z]+[z] = [z \bullet z] \neq 2 * [z]$, тому що $T_m^\omega([z \bullet z]) = 2T_m^\omega(z)$, але $T_m^\omega(2z) = 2^m T_m^\omega(z)$.

Нехай $\mathcal{S}_\omega$ — максимальна напівгрупа лінійних операторів на Λ_1^ω, які зберігають ω-суперсиметричні поліноми. Ми не маємо достатньо повного опису напівгрупи $\mathcal{S}_\omega$. Проте, можна отримати більше інформації про структуру цієї напівгрупи для випадку $\omega = 1/N$ для деякого натурального $N > 1$.

Твердження 5.1.5. *Напівгрупа $\mathcal{S}_{1/N}$ містить наступні оператори на $\Lambda_1^{1/N}$.*

1. *Для кожної бієкції (перестановки) $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ і кожного $i \in \mathbb{Z}_+$ визначимо оператори*

$$S_\sigma^{+(i)}(z) = (x^{(0)}, \ldots, x^{(i-1)}, S_\sigma^{+(i)}(x^{(i)}), x^{(i+1)}, \ldots),$$

$$S_\sigma^{-(i)}(z) = (y^{(0)}, \ldots, y^{(i-1)}, S_\sigma^{-(i)}(y^{(i)}), y^{(i+1)}, \ldots),$$

де $z = (y|x)$ *і*

$$S_\sigma^{+(i)}(e_k^{(i)}) = e_{\sigma(k)}^{(i)} \quad і \quad S_\sigma^{-(i)}(e_k^{-(i)}) = e_{\sigma(k)}^{-(i)}.$$

2. *Для довільних цілих $m \geq n \geq 0$ визначимо оператори*

$$S_k^{+(n,m)}(z) = (z - x_k^{(n)} e_k^{(n)}) \bullet (\underbrace{x_k^{(n)} e_k^{(m)} \bullet \cdots \bullet (x_k^{(n)} e_k^{(m)}}_{N^{m-n}})$$

та

$$S_k^{-(n,m)}(z) = (z - y_k^{(n)} e_k^{-(n)}) \bullet (\underbrace{y_k^{(n)} e_k^{-(m)} \bullet \cdots \bullet (y_k^{(n)} e_k^{-(m)}}_{N^{m-n}}),$$

де $z = (y|x) \in \Lambda_1^{1/N}$.

3. *Для кожного елемента $a \in \Lambda_1^{1/N+}$, визначимо афінний оператор*

$$(x|y) \mapsto (x \bullet a | y \bullet a).$$

Доведення. Оператори $S_\sigma^{+(i)}$ та $S_\sigma^{-(i)}$ здійснюють перестановки координат векторів $x^{(i)}$ та $y^{(i)}$ відповідно. Оскільки всі поліноми T_k^ω є інваріантними відносно таких перетворень, то $S_\sigma^{+(i)}$ та $S_\sigma^{-(i)}$ належать $\mathcal{S}_{1/N}$.

Оператор $S_k^{+(n,m)}$ вилучає координату $x_k^{(n)}$, переносить її в позицію (m), $m > n$ і дублює її N^{m-n} раз. Тоді, для довільного натурального j,

$$T_j^{1/N}((\underbrace{x_k^{(m)} e_k^{(m)} \bullet \cdots \bullet (x_k^{(m)} e_k^{(m)}}_{N^{m-n}})) = \frac{1}{N^m} F_j^{(m)}((\underbrace{x_k^{(m)} e_k^{(m)} \bullet \cdots \bullet (x_k^{(m)} e_k^{(m)}}_{N^{m-n}})) =$$

$$= \frac{N^{n-m}}{N^n} F_j(m)(x_k^{(n)} e_k^{(m)}) = \frac{1}{N^n} F_j(n)(x_k^{(n)} e_k^{(n)}).$$

Аналогічно діє оператор $S_k^{-(n,m)}$ на компоненті у зображенні y $z = (y|x)$. Враховуючи адитивність поліномів $T_j^{1/N}$ щодо операції "$\bullet$", отримуємо, що поліномі $T_j^{1/N}$ є інваріантними відносно дії операторів $S_k^{+(n,m)}$ і $S_k^{-(n,m)}$. Тому ці оператори належать напівгрупі симетрій $\mathcal{S}_{1/N}$.

Оператори вигляду $(x|y) \mapsto (x \bullet a|y \bullet a)$ належать $\mathcal{S}_{1/N}$, оскільки, за побудовою $T_j^{1/N}$ є інваріантними відносно дії цих операторів.

$\square$

Ми не знаємо, чи кожен поліном, який є симетричним відносно дії напівгрупи $S_{1/N}$ є ω-суперсиметричним.

5.2. Оператори і напівнорми на $\mathcal{M}^{1/N}$

Для даного $z = (y|x) \in \Lambda_1^\omega$, позначимо через $\operatorname{supp} z$ носій z, тобто наступну пару наборів індексів

$$\operatorname{supp} z = (\{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}_+ \colon y_i^{(j)} \neq 0\}, \{k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}_+ \colon x_k^{(n)} \neq 0\}).$$

Лема 5.2.1. *Для кожного $z = (y|x) \in \Lambda_1^{1/N}$, перестановки σ на $\mathbb{N}$ і $m \geq n$, і відповідних операторів які визначено у твердженні 5.1.5 маємо:*

$$[z] = [S_\sigma^{+(i)}(z)] = [S_\sigma^{-(i)}(z)] = [S_k^{+(n,m)}(z)] = [S_k^{-(n,m)}(z)].$$

Доведення. З твердження 5.1.5 випливає, що поліноми $T_k^{1/N}$ є інваріантними відносно дії цих операторів. Тому, згідно з означенням відношення еквівалентності $\sim$, вказані оператори зберігають класи еквівалентності.

$\square$

Твердження 5.2.1. *Нехай $z = (y|x) \in \Lambda_1^{1/N}$ для деякого $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$ і z має фінітний носій. Якщо $[z] = [0]$, то існує число $j \in \mathbb{N}$ і композиція S скінченного набору відображень $\{S_k^{\pm(n,m)}, S_\sigma^{\pm(j)}\}$, визначених вище, така, що*

$$S(z) = (y'|x') = \left(\begin{array}{ccc} \ldots 0 \ldots 0 & | & 0 \ldots 0 \ldots \\ \ldots & | & \ldots \\ \ldots 0 \ldots 0 & | & 0 \ldots 0 \ldots \\ \ldots y_k^{\prime(j)} \ldots y_1^{\prime(j)} & | & x_1^{\prime(j)} \ldots x_k^{\prime(j)} \ldots \\ \ldots 0 \ldots 0 & | & 0 \ldots 0 \ldots \\ \ldots & | & \ldots \end{array}\right) \tag{5.2.1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{\prime(j)} e_k^{(j)} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{\prime(j)} e_k^{-(j)}$$

і $x'^{(j)}_k = y'^{(j)}_k$ *для кожного* $k \in \mathbb{N}$.

Доведення. Нехай j — найменший номер такий, що $x^{(j)}_k = 0$ і $y^{(j)}_k$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Використовуючи скінченну кількість відображень $S^{\pm(n,m)}_k$ і лему 5.2.1 ми можемо знайти $z' = (y'|x')$, $z' \sim z$, який задовольняє (5.2.1). Отже, для кожного $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(y'^{(j)}_k\right)^m = \sum_{k=1}^{\infty}\left(x'^{(j)}_k\right)^m.$$

З [3] випливає, що вектори $\left(y'^{(j)}_k\right)_k$ і $\left(x'^{(j)}_k\right)_k$ збігаються з точністю до перестановки σ координат $(x_1, \ldots, x_k, \ldots)$. Отже, застосовуючи $S^{(j)}_\sigma$ до z', отримуємо $x'^{(j)}_k = y'^{(j)}_k$ для кожного $k \in \mathbb{N}$.

□

Наслідок 5.2.1. *Нехай* $z = (y|x) \in \Lambda_1^{1/N}$ *для деяких* $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$ *і* z *має фінітний носій. Тоді існує елемент* $z' = (y'|x') \in \Lambda_1^{1/N}$ *такий, що* $z \sim z'$ *і* z' *має таку властивість:*

— *якщо* ${y'}^{(j)}_i \neq 0$, *тоді* ${x'}^{(n)}_k \neq {y'}^{(j)}_i$ *для всіх* $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Доведення. Для доведення достатньо застосувати твердження 5.2.1 до $z \bullet z'^{-} = (y \bullet x'|x \bullet y')$.

□

Завдяки теоремі 5.1.1 ми можемо ввести альтернативне множення на дійсні сталі в $\mathcal{M}^\omega$, принаймі для випадку $\omega = 1/N$, $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$.

Теорема 5.2.1. *Нехай* $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$. *Тоді* $\mathcal{M}^{1/N}$ — *дійсна лінійна комутативна алгебра з одиницею відносно операцій додавання і множення, визначених у твердженні 5.1.4 та*

$$a[z] := [z_{\{a\}}][z] = [z_{\{a\}} \diamond z], \quad a \in \mathbb{R},$$

де $z_{\{a\}}$ *таке, як у теоремі 5.1.1.*

Доведення. Зазначимо спочатку, що з теореми 5.1.1 і твердження 5.1.2 випливає, що для кожного $m \in \mathbb{N}$, $T_m^\omega(z_{\{a\}} \diamond z) = aT_m^\omega(z)$. Отже, $\mathbb{I} = z_{\{1\}}$ — одиниця у $\mathcal{M}^{1/N}$ і $[z_{\{a_1+a_2\}}] = [z_{\{a_1\}}] + [z_{\{a_2\}}]$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Таким чином,

$$a([z] + [r]) = a[z] + a[r]$$

і

$$(a_1 + a_2)[z] = a_1[z] + a_2[z],$$

де $a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ і $[z], [r] \in \mathcal{M}^{1/N}$.

□

Позначимо через Ω клас функцій $\gamma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такий, що відображення $\Phi_\gamma\colon \Lambda_1^\omega \to \Lambda_1^\omega$ визначені як

$$\Phi_\gamma(z) = \Phi_\gamma(y|x) = \begin{pmatrix} \dots\gamma(y_k^{(0)})\dots\gamma(y_1^{(0)}) & | & \gamma(x_1^{(0)})\dots\gamma(x_k^{(0)})\dots \\ \dots & | & \dots \\ \dots\gamma(y_k^{(n)})\dots\gamma(y_1^{(n)}) & | & \gamma(x_1^{(n)})\dots\gamma(x_k^{(n)})\dots \\ \dots & | & \dots \end{pmatrix}$$

є коректно визначеними, тобто з $z \sim z'$ випливає, що $\Phi_\gamma(z) = \Phi_\gamma(z')$. Такий клас не порожній, наприклад, $\gamma(t) = t^m \in \Omega$, $m \in \mathbb{N}$.

Теорема 5.2.2. *Нехай $\gamma \in \Omega$. Тоді Φ_γ породжує лінійний оператор $\widehat{\Phi}_\gamma\colon \mathcal{M}^{1/N} \to \mathcal{M}^{1/N}$ визначений рівністю $\widehat{\Phi}_\gamma([z]) = \Phi_\gamma(z)$.*

Доведення. З означення Ω випливає, що $\widehat{\Phi}_\gamma$ — коректно визначений. Також зрозуміло, що

$$\widehat{\Phi}_\gamma([z] + [r]) = \Phi_\gamma(z \bullet r) = \Phi_\gamma(z) \bullet \Phi_\gamma(r) = \widehat{\Phi}_\gamma([z]) + \widehat{\Phi}_\gamma([r]),$$

$z, r \in \Lambda_1^{1/N}$. Нехай тепер $z_{\{a\}} = (y_{\{a\}}|x_{\{a\}})$ таке, як у теоремі 5.1.1, тобто

$$x_{\{a\}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{a_n} e_i^{(n)}, \quad y_{\{a\}} = 0, \text{ якщо } a \geq 0$$

і

$$y_{\{a\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{a_n} e_i^{-(n)}, \quad x_{\{a\}} = 0, \text{ якщо } a < 0,$$

де

$$|a| = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{N^j}, \quad a_j \in \mathbb{N}.$$

Якщо $a \geq 0$, тоді $[z_{\{a\}}][z] = a[z]$, $a \in \mathbb{R}$, $z = (y|x) \in \Lambda_1^{1/N}$ і

$$\Phi_\gamma(z_{\{a\}} \diamond z) = \Phi_\gamma\big((\underbrace{z \bullet \ldots \bullet z}_{a_0}) \diamond e_1^{(0)} \bullet \ldots \bullet (\underbrace{z \bullet \ldots \bullet z}_{a_n}) \diamond e_1^{(n)} \bullet \ldots\big)$$

$$= \big(\underbrace{\Phi_\gamma(z) \bullet \ldots \bullet \Phi_\gamma(z)}_{a_0}\big) \diamond e_1^{(0)} \bullet \ldots \bullet \big(\underbrace{\Phi_\gamma(z) \bullet \ldots \bullet \Phi_\gamma(z)}_{a_n}\big) \diamond e_1^{(n)} \bullet \ldots = z_{\{a\}} \diamond \Phi_\gamma(z).$$

Якщо $a < 0$, ми повинні замінити $e_1^{(n)}$ на $e_1^{-(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Отже, $\widehat{\Phi}_\gamma\big(a[z]\big) = a\widehat{\Phi}_\gamma\big([z]\big)$. Тому $\widehat{\Phi}_\gamma$ — лінійний оператор.

$\square$

Позначимо $\tau_m\big([z]\big) = T_m^{1/N}(z)$, $[z] \in \mathcal{M}^{1/N}$, $m \in \mathbb{N}$. Зрозуміло, що τ_m — комплекснозначні дійсно-лінійні та мультиплікативні функції, тобто τ_m — гомоморфізми з $\mathcal{M}^{1/N}$ в $\mathbb{C}$. За означенням $\mathcal{M}^{1/N}$, отримуємо, що функціонали $\tau_m \colon m \in \mathbb{N}$ розділяють точки $\mathcal{M}^{1/N}$. Позначимо $\bar{z} = \Phi_\gamma(z)$, де $\gamma(t) = \bar{t}$ — комплексно-спряжені до t. Легко перевірити, що $\tau_m\big([\bar{z}]\big) = \overline{\tau_m\big([z]\big)}$ і тому $\gamma(t) = \bar{t}$ належить Ω. Отже, $[z] \mapsto \tau_m\big([\bar{z}]\big)$ — комплекснозначний функціонал для кожного $m \in \mathbb{N}$. Таким чином, $\tau_m + \overline{\tau}_m$ та $-i\big(\tau_m - \overline{\tau}_m\big)$ є дійснозначними лінійними функціоналами на $\mathcal{M}^{1/N}$.

Наслідок 5.2.2. *Якщо функція $\gamma \in \Omega$ є мультиплікативною, то оператор $\widehat{\Phi}_\gamma$ — гомоморфізм алгебри.*

Доведення. Нехай $[z], [r] \in \mathcal{M}^{1/N}$,

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} z_{+k}^{(n)} e_k^{(n)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} z_{-k}^{(n)} e_k^{-(n)}$$

і
$$r=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} r_{+k}^{(n)}e_k^{(n)}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} r_{-k}^{(n)}e_k^{-(n)}.$$
Оскільки
$$\Phi_\gamma\big(z_{+k}^{(n)}e_k^{(n)}\big)=\gamma\big(z_{+k}^{(n)}\big)e_k^{(n)},$$
то отримуємо
$$\Phi_\gamma\big(z_{\pm k}^{(n)}e_k^{\pm(n)}\diamond r_{\pm i}^{(j)}e_i^{\pm(j)}\big)=\gamma\big(z_{\pm k}^{(n)}r_{\pm i}^{(j)}\big)e_k^{\pm(n)}\diamond e_i^{\pm(j)},$$
$k,i\in\mathbb{N}$, $n,j\in\mathbb{Z}_+$. З лінійності та мультиплікативності τ_m випливає
$$\tau_m\big(\widehat{\Phi}_\gamma([z])\big)\tau_m\big(\widehat{\Phi}_\gamma([r])\big)=\tau_m\big(\widehat{\Phi}_\gamma([z])\widehat{\Phi}_\gamma([r])\big)=\tau_m\big(\widehat{\Phi}_\gamma([z][r])\big).$$
Оскільки це справедливо для кожного m, то отримуємо
$$\widehat{\Phi}_\gamma([z])\widehat{\Phi}_\gamma([r])=\widehat{\Phi}_\gamma([z][r]).$$

□

Твердження 5.2.2. *Нехай функція $\gamma\in\Omega$ і $\gamma(0)=0$. Тоді наступна формула визначає напівнорму на $\mathcal{M}^{1/N}$:*
$$p_\gamma\big([z]\big)=\inf_{(y|x)\in[z]}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{N^n}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\big|\gamma\big(x_k^{(n)}\big)\big|+\big|\gamma\big(y_k^{(n)}\big)\big|\Big).$$

Доведення. Оскільки інфімум береться по всіх зображеннях $(y|x)\in[z]$, то напівнорма коректно визначена. Легко перевірити, що функціонал p_γ є невід'ємним, задовольняє нерівність трикутника. Покажемо, що p_γ є однорідним. Справді, для довільного $a\in\mathbb{R}$, внаслідок теореми 5.2.2, $\Phi_\gamma(z_{\{a\}}\diamond z)=\widehat{\Phi}_\gamma(a[z])=a\Phi_\gamma(z)=$
$$=a\left(\begin{array}{ccc}\ldots\gamma(y_k^{(0)})\ldots\gamma(y_1^{(0)}) & | & \gamma(x_1^{(0)})\ldots\gamma(x_k^{(0)})\ldots\\ \ldots & | & \ldots\\ \ldots\gamma(y_k^{(n)})\ldots\gamma(y_1^{(n)}) & | & \gamma(x_1^{(n)})\ldots\gamma(x_k^{(n)})\ldots\\ \ldots & | & \ldots\end{array}\right).$$

Тому $\gamma\big(z_{\{a\}} \diamond x_k^{(n)}\big) = a\gamma\big(x_k^{(n)}\big)$ і $\gamma\big(z_{\{a\}} \diamond y_k^{(n)}\big) = a\gamma\big(y_k^{(n)}\big)$, з чого випливає однорідність p_γ.

$\square$

Означення 5.2.1. *Визначимо наступні напівнорми на $\mathcal{M}^{1/N}$:*

$$p_m\big([z]\big) = p_{\gamma_m}\big([z]\big) \text{ при } \gamma_n(t) = t^m.$$

Зрозуміло, що $\big|\tau_m\big([z]\big)\big| \le p_m\big([z]\big)$, $[z] \in \mathcal{M}^{1/N}$ і тому, якщо $[z] \neq 0$, то існує $m \in \mathbb{N}$ такий, що $p_m\big([z]\big) > 0$.

Позначимо $\big(\mathcal{M}^{1/N}, (p_m)\big)$ — лінійний простір $\mathcal{M}^{1/N}$ з введеною проективною топологією, породженою напівнормами (p_m). Отже, ми отримуємо наступне твердження

Твердження 5.2.3. *Простір $\big(\mathcal{M}^{1/N}, (p_m)\big)$ є локально опуклим метризовним топологічним векторним простором над полем дійсних чисел, і кожен функціонал τ_m є неперервним на $\big(\mathcal{M}^{1/N}, (p_m)\big)$.*

Доведення. Локальна опуклість і метризовність простору $\big(\mathcal{M}^{1/N}, (p_m)\big)$ є наслідком того, що топологія цього простору породжена зліченною системою напівнорм. З означення функціоналів τ_m і напівнорм p_m $m \in \mathbb{N}$ бачимо, що

$$|\tau_m([z])| \le p_k(z), \quad k \le m,\ m \in \mathbb{N}.$$

Тобто, кожен функціонал τ_m є неперервним відносно напівнорм p_k, $k \le m$ і, отже, неперервним в просторі $\big(\mathcal{M}^{1/N}, (p_m)\big)$.

$\square$

Покажемо, що можна отримати нормовану підалгебру в просторі $\big(\mathcal{M}^{1/N}, (p_m)\big)$.

Позначимо через $\mathcal{D}$ наступну підмножину $\mathcal{M}^{1/N}$:

$$\mathcal{D} = \left\{ u \in \mathcal{M}^{1/N} \colon \text{ існує } z \in u \text{ такий, що } \left| z_k^{(n)} \right| \leq 1,\ n \in \mathbb{Z}_+,\ k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Теорема 5.2.3. *$\mathcal{D}$ — підалгебра над полем дійсних чисел в $\mathcal{M}^{1/N}$ і звуження топології $\left(\mathcal{M}^{1/N}, (p_n)\right)$ на $\mathcal{D}$ породжується нормою на $\mathcal{D}$.*

Доведення. З визначення додавання та множення на $\mathcal{M}^{1/N}$ випливає, що $u + v \in \mathcal{D}$ і $uv \in \mathcal{D}$ для всіх $u, v \in \mathcal{D}$. Також для кожного $a \in \mathbb{R}$, $[z_{\{a\}}] \in \mathcal{D}$ і тому $au = [z_{\{a\}}]u \in \mathcal{D}$. Отже, $\mathcal{D}$ — підалгебра в $\mathcal{M}^{1/N}$. Зауважимо, що для кожного $u \in \mathcal{D}$ і $m \in \mathbb{N}$, $p_m(u) \leq p_1(u)$. Також p_1 — норма на $\mathcal{D}$. Справді, якщо $u \neq 0$, то існує $m \in \mathbb{N}$ такий, що $\tau_m(u) \neq 0$. Тому

$$0 \neq |\tau_m(u)| \leq p_m(u) \leq p_1(u).$$

Отже, $(\mathcal{D}, p_1)$ — нормований простір і всі p_m є неперервними відносно p_1. Тому, звуження топології $\left(\mathcal{M}^{1/N}, (p_n)\right)$ на $\mathcal{D}$ збігається з топологією норми $(\mathcal{D}, p_1)$.

$\square$

Висновки до розділу 5. У цьому розділі побудовано комплексний банахів простір Λ_1^ω і напівгрупу $\mathcal{S}_\omega$, яка складається з лінійних і афінних операторів на Λ_1^ω таким чином, що, для випадку $\omega = 1/N$ спектр алгебри H_{bs}^ω, $\mathcal{S}_\omega$-інваріантних аналітичних функцій обмеженого типу містить лінійну підалгебру $\mathcal{M}^\omega$ над полем дійсних чисел відносно операцій "$\bullet$", "$\diamond$", які є природними в даному випадку, та альтернативного множення на константу, введеного у підрозділі 5.1.

Функції алгебри H_{bs}^ω при звуженні на підпростір вигляду $\{(y^{(0)}|x^{(0)})\} \simeq \ell_1(\mathbb{Z}_0)$ є суперсиметричними. Тому, результати цього розділу є, у певному сенсі, узагальненням результатів четвертого розділу на складніший випадок. Аналогічно як у суперсиметричному випадку, введено адитивну і мультиплікативну операції, а за рахунок складнішої структури множини $\mathcal{M}^\omega$ вдалось визначити структуру лінійного простору на $\mathcal{M}^\omega$.

У підрозділі 5.1, також, досліджено напівгрупу симетрій $\mathcal{S}_{1/n}$ відносно якої всі функції з алгебри $H_{bs}^{1/n}$ є інваріантними. Проте, ми не знаємо, чи кожен $\mathcal{S}_{1/n}$-інваріантний поліном належить алгебрі $H_{bs}^{1/n}$.

У підрозділі 5.2 досліджено лінійні оператори, гомоморфізми та напівнорми алгебри $\mathcal{M}^{1/N}$. Зокрема, описано один клас лінійних операторів, породжених функціями з так званого класу Ω. Крім того, показано, що на $\mathcal{M}^{1/N}$ існує природна структура локально опуклого метризовного простору.

Результати цього розділу опубліковано у працях [35, 40].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено алгебри аналітичних функцій від нескінченної кількості змінних, що є інваріантними відносно дії деякої напівгрупи аналітичних операторів. Такі функції, в певному сенсі, узагальнюють відомі симетричні аналітичні функції обмеженого типу на просторі ℓ_1. Ці узагальнення, часом, є досить суттєвими, а результати є не завжди очікуваними.

У підрозділі 3.1 розглянуто нарізно симетричні поліноми та аналітичні функції обмеженого типу на скінченому декартовому степені простору ℓ_1. Показано, що алгебраїчний базис відповідної алгебри поліномів можна отримати, як об'єднання алгебраїчних базисів симетричних поліномів на відповідні компоненти ℓ_1. При цьому спектр алгебри нарізно симетричних аналітичних функцій обмеженого типу є декартовим добутком спектрів симетричних аналітичних функцій обмеженого типу.

У підрозділі 3.2 розглянуто випадок нескінченної топологічної прямої суми просторів ℓ_1 асоційованої з деяким банаховим простором X. Показано, що в цьому випадку задача описання спектру відповідної алгебри нарізно симетричних аналітичних функцій обмеженого типу є набагато складнішою. Показано, що спектр такої алгебри містить спектр алгебри цілих функцій обмеженого типу на просторі X.

У четвертому розділі вперше розглянуто суперсиметричні поліноми на просторі $\ell_1(\mathbb{Z}_0) \simeq \ell_1 \times \ell_1$. Базис $\{T_k\}$ в алгебрі таких поліномів отримано з базису нарізно симетричних поліномів $\{F_k\}$ на $\ell_1 \times \ell_1$ за допомогою лінійного співвідношення:

$$T_k(y|x) = F_k(x) - F_k(y).$$

Таким чином, кожен суперсиметричний поліном є нарізно симетричним (навпаки, звичайно, не так).

У четвертому розділі побудовано гомоморфізм з алгебри суперсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу в алгебру симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на ℓ_1. Цей гомоморфізм є неперервним, ін'єктивним, має щільний образ. Обернене відображення є розривним. Використовуючи цей гомоморфізм та відомі комбінаторні тотожності, побудовано інший алгебраїчний базис в алгебрі суперсиметричних поліномів, та описано характери, які є функціоналами значень в точках вихідного простору за допомогою мероморфних функцій на комплексній площині. Також, показано, що множина $\mathcal{M}$ характерів, які є функціоналами значень в точках вихідного простору є кільцем відносно природних комутативних операцій "$\bullet$" та "$\diamond$".

Множину $\mathcal{M}$ можна отримати як множину класів еквівалентності відносно відношення $x \sim y \Leftrightarrow T_k(x) = T_k(y)$, $x, y \in \ell_1(\mathbb{Z}_0)$, $k \in \mathbb{N}$. На множині $\mathcal{M}$ введено метрику, яка, в певному сенсі, індукована топологією простору $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$ і показано, що $\mathcal{M}$ є повним метричним несепарабельним простором і кільцеві операцій "$\bullet$" та "$\diamond$" є неперервними відносно цієї метрики. Зауважимо, що на $\mathcal{M}$ визначено, також, операцію множення на комплексну константу. Проте немає дистрибутивного правила для операції множення на константу і адитивної операції "$\bullet$". Тому, $\mathcal{M}$ не є алгеброю (оскільки не є лінійним простором). Більше того, операція множення на константу є розривною.

У четвертому розділі, також показано, що операцію "$\bullet$" можна продовжити на спектр алгебри суперсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу до комутативної згортки лінійних функціоналів, яка є неперервною у слабко поліноміальній топології, побудовано приклад характерів, які не є елементами множини $\mathcal{M}$, знайдено їх зображення у вигляді функції експоненціального типу на комплексній площині. Також, побудовано неперервне в топології Глісона вкладення спектра алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на ℓ_1 в спектр алгебри суперсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$.

Розглянуто умови оборотності елементів кільця $\mathcal{M}$, неперервності гомоморфізмів на $\mathcal{M}$, приклади підкілець. Нажаль, ми не знаємо чи кожен комплексний гомоморфізм кільця $\mathcal{M}$, або деякого замкненого підкільця в кільця $\mathcal{M}$ є неперервним.

Досліджено, також адитивні оператори з $\mathcal{M}$ в себе, тобто оператори, які зберігають операцію "$\bullet$". Серед адитивних операторів вибрано такі, що, додатково, зберігають операцію множення на константу. Ці відображення, в дисертації, названо лінійними операторами. Оскільки $\mathcal{M}$ не є лінійним простором, то ми не можемо скористатись класичним поняттям лінійного оператора. У четвертому розділі повністю описано лінійні оператори на $\mathcal{M}$ як оператори множення на деякий елемент з $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$ та досліджено їх властивості.

У п'ятому розділі узагальнено деякі результати, отримані у четвертому розділі для простору Λ_1^ω який можна подати у вигляді зваженої суми просторів $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$. У цьому випадку, множина $\mathcal{M}^\omega$ комплексних гомоморфізмів алгебри ω-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на Λ_1^ω, які є функціоналами значень в точках простору Λ_1^ω, мають структуру комутативного кільця. Проте, у цьому випадку можна ввести природну альтернативну операцію множення на дійсні константи в $\mathcal{M}^\omega$ і, в результаті, $\mathcal{M}^\omega$ має структуру комутативної алгебри над полем дійсних чисел.

У п'ятому розділі досліджено гомоморфізми і топології алгебри $\mathcal{M}^\omega$ та її підалгебр. Також, досліджено напівгрупу симетрій $\mathcal{S}_{1/n}$ відносно якої всі функції з алгебри $H_{bs}^{1/n}$ є інваріантними. Проте, ми не знаємо, чи кожен $\mathcal{S}_{1/n}$-інваріантний поліном належить алгебрі $H_{bs}^{1/n}$.

Суперсиметричні поліноми та аналітичні функції застосовуються і в інших галузях математики та фізики. Зауважимо, що суперсиметричні поліноми від кількох змінних вивчались багатьма авторами і в [57],[58], [60] ми можемо знайти аналоги формул (4.1.2) та (4.1.3) для цих випадків (з використанням деяких інших позначень). В дисертації доведено такі результати для нескінченної кількості змінних і завдяки топологічним властивостям простору ℓ_1 ми можемо стверджувати, що $\mathcal{W}(y|x)(t)$ є раціональною функцією, де чисельник і знаменник – це функції експоненціального типу для кожного фіксованого $(y|x) \in \ell_1(\mathbb{Z}_0)$. Але важливою відмінністю між скінченно- і нескінченновимірним випадком є те, що в скінченновимірному випадку ми не можемо використовувати операції'$\bullet$' і '$\diamond$', оскільки вони не зберігають розмірність основного простору. Деякі застосування суперсиметричних поліномів для груп Брауера описані в [41]. Очевидно, що H_b^{sup} може застосовуватись для нескінчених породжених груп Брауера аналогічним чином. Інше застосування можна отримати для статистичної механіки. В роботі [59] ми можемо знайти підхід до того, як класичні симетричні поліноми можуть бути використані для моделювання поведінки ідеального газу. Відповідно до цього підходу та використовуючи наші позначення, незалежні змінні $x_1, x_2, \ldots$ відповідають абстрактним рівням енергії, які можуть займати частинки ідеального газ; симетричні одночлени

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_n} x_{i_1}^{k^1} \cdots x_{i_n}^{k^n}$$

відповідають заняттям частинками цих енергетичних рівнів; твірні функцій $\mathcal{G}(x)(t)$ та $\mathcal{H}(x)(t)$ відповідають великим канонічним статистичним сумам для бозонів і ферміонів відповідно, а рівняння (2.3.1) моделює закон симетрії Бозе-Фермі. З цієї точки зору та з урахуванням (4.1.2) суперсиметричні поліноми можуть бути корисними для опису ідеального газу, що складається з частинок обох типів: бозонів та ферміонів. Більше того, симетрія Бозе-Фермі в наших позначеннях означає просто $[(x|x)] = 0$.

Зауважимо, що статистична механіка працює з ситуацією, коли кількість частинок N прямує до нескінченності. Той факт, що ми розглядаємо замикання поліномів у метризовний топології, дозволяє нам переходити до граничних значень при $N \to \infty$. ℓ_1-топологія основного простору $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$ гарантує, що всі абстрактні суперсиметричні поліноми добре визначені на цьому просторі. Наприклад, якщо ми будемо використовувати $\ell_2(\mathbb{Z}_0)$ замість $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$, тоді T_1 не буде визначено. Нарешті, ми можемо очікувати, що алгебраїчні операції '$\bullet$' та '$\diamond$' можуть мати фізичний зміст у запропонованому підході. Але подібні проблеми виходять за рамки нашої роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вейль Г. *Классические групы: их инварианты и представления* // Москва: Мир – 1973. – 404 с.

2. Немировский А. С., Семенов С. М. *О полиномиальной апроксимации функций на гильбертовом пространстве* // Математичиский сборник. — 1973. – Т.92, № 2. – С. 257–281.

3. Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A. *Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p* // Bull. London Math. Soc. — 2003. – Vol. 35. – P. 55–64.

4. Aron R., Berner P. *A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings* // Bull. Soc. Math. France. — 1978. – Vol. 106. – P. 3–24.

5. Aron R. M., Cole B. J., Gamelin T. W. *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space* // J. Reine Angew. Math. — 1991. – Vol. 415. – P. 51–93.

6. Aron R. M., Cole B. J., Gamelin T. W. *Weak-star continuous analytic functions* // Canad. J. Math. — 1995. – Vol. 47. – P. 673–683.

7. Aron R. M., Galindo P., Garcia D., Maestre M. *Regularity and algebras of analytic functions in infinite dimensions* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1996. – Vol. 348. – P. 543–559.

8. Banach S. *Theorie def operations lineaires* // Monografie Mathematyczne, Warszawa. — 1932.

9. Bochnak J., Siciak J. *Analytic functions in topological vector spaces* // Studia Math. — 1971. – 39. – P. 77–112.

10. Brown L.G. *Topologically complete groups.* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – 35. – P. 593–600.

11. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. *Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra* // Proc. Edinb. Math. Soc. — 2012. – Vol. 55, № 2. – P. 125–142.

12. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. *The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions* // J. Math. Anal. Appl. — 2012. – Vol. 395, Iss. 2. – P. 569–577.

13. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. *A multiplicative convolution on the spectra of algebras of symmetric analytic functions* // Revista Matematica Complutense. — 2014. – Vol. 27, Iss. 2. – P. 575–585.

14. Chernega I.V. *A semiring in the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions in the space* ℓ_1 // J. Math. Sci. — 2016. – Vol. 212, Iss. 1. – P. 38–45.

15. Chernega I., Zagorodnyuk A. *Unbounded symmetric analytic functions on* ℓ_1. // Math. Scand. — 2018. – Vol. 122, № 1. – P. 84–90.

16. Chernega I., Holubchak O., Novosad Z., Zagorodnyuk A. *Continuity and hypercyclicity of composition operators on algebras of symmetric analytic functions on Banach spaces.* // European Journal of Mathematics — 2020. – Vol. 6. – P. 153–163.

17. Davie A. M., Gamelin T. W. *A theorem on polynomial-star approximation* // Proc. Amer. Math. Soc. — 1989. – Vol. 106. – P. 351–356.

18. Dineen S. *Complex Analysis in Locally Convex Spaces* // N.H.: Mathematics Studies. — 1981. – 506 p.

19. Dineen S. *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces* // Springer, New York: Monographs in Mathematics. — 1999. – 543 p.

20. Dimant V., Gonzalo R. *Block diagonal polynomials* // Trans. Amer. Math. Soc. — 2000. – Vol. 353, № 2. – P. 733–747.

21. Fréchet M. *Une definition fontionelle des polinômes* // Nouv. Ann. Math. — 1909. – Vol. 9. – P. 145–162.

22. Fréchet M. *Sur les fonctionnelles bilineaires* // T.A.M.S. — 1915. – Vol. 16. – P. 215–234.

23. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. *The algebra of symmetric analytic functions on* L_∞ // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics – 2017. – Vol. 147, Iss. 4. – P. 743–761.

24. Gamelin T. W. *Analytic functions on Banach spaces* // Complex Potential Theory, Ed. Gauthier and Sabidussi, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam – 1994. – P. 187–223.

25. García D., Lourenço M. L., Maestre M., Moraes L. A. *The spectrum of analytic mappings of bounded type* // J. Math. Anal. Appl. — 2000. – Vol. 245. – P. 447–470.

26. García D., Maestre V., Zalduendo I. *The spectra of algebras of group-symmetric functions* // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 2019. – Vol. 62, Iss. 3. – P. 609–623.

27. Gâteaux R. *Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analitiques* // C. R. Acad Sci. Pris, Sér. A – 1913. – Vol. 157. – P. 325–327.

28. Gonzaléz M., Gonzalo R., Jaramillo J. *Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces.* // J. London Math. Soc. – 1999. – Vol. 59, Iss. 2. – P. 681–697.

29. Gonzalo R. *Multilinear forms, subsymmetric polynomials, and spreading models on Banach spaces* // J. Math. Anal. Appl. – 1996. – Vol. 202. – P. 379–397.

30. Hájek P. *Polynomial algebras on classical Banach spaces* // Israel J. Math. — 1998. – Vol. 106. – P. 209-220.

31. Hervé M. *Analyticity in Infinite Dimensional Spaces.* // Berlin, New York: de Gruyter Stud. in Math., Walter de Gruyter. — 1989. – Vol. 10. – 206 p.

32. Hille E., Philips R. S. *Functional analysis and semigroups* // Colloq. Publ., Amer. Math. Soc. — 1957. – Vol. 31. – 808 p.

33. Jawad F. *Note on separately symmetric polynomials on the Cartesian product of* ℓ_1 // Mat. Stud. – 2018. – Vol. 50, Iss. 2. – P. 204–210.

34. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Supersymmetric Polynomials on the Space of Absolutely Convergent Series* // Symmetry – 2019. – Vol. 11, Iss. 9, 1111.

35. Jawad F., Karpenko H., Zagorodnyuk A., *Algebras generated by special symmetric polynomials on* ℓ_1 // Carpathian Math. Publ. – 2019. – Vol. 11, Iss. 2. – P. 335–344.

36. Zagorodnyuk A., Jawad F. *Problems related to symmetric analytic functions on Banach spaces* //International Conference in

Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (Lviv, 18–23 September 2017): book of abstracts – Lviv, 2017. – P. 33.

37. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Supersymmetric Polynomials on the Space of Absolutely Converges Series* // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта. 25 лютого – 1 березня 2019 р.): тези доп. – Івано-Франківськ, 2019. – С. 37.

38. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Symmetric and supersymmetric analytic functions on Banach spaces* //International Scientific Conference "Banach Spaces and their Applications" dedicated to the 70th anniversary of Prof. A.M. Plichko (Lviv, Ukraine, 26–29 June 2019): book of abstracts – Lviv, 2019. – P. 52.

39. Jawad F. *Separately symmetric polynomials on the Cartesian product of* ℓ_1 // International Scientific Conference "Infinite-Dimensional Analysis and Topology" dedicated to 70th anniversary of Professor O. Lopushansky (Ivano-Frankivsk, Ukraine, 16–20 October 2019): book of abstracts – Ivano-Frankivsk, 2019. – P. 24.

40. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Quotient of a weighted sum of* ℓ_1*-spaces associated with supersymmetric polynomials* // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта. 26 лютого – 1 березня 2020 р.): тези доп. – Івано-Франківськ, 2020. – С. 11–12.

41. Jung J.H., Kim M. *Supersymmetric polynomials and the center of the walled Brauer algebra* // arXiv – 2017. – Vol. 23, Iss. 5. – P. 1945 - 1975.

42. Kravtsiv V. *Algebraic basis of the algebra of block-symmetric polynomials on* $\ell_1 \bigoplus \ell_\infty$ // Carpathian Math. Publ. – 2019. – Vol. 11, Iss. 1. – P. 89–95.

43. Kravtsiv V., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. *On Algebraic Basis of the Algebra of Symmetric Polynomials on* $\ell_p(\mathbf{C}^\mathbf{n})$ // Journal of Function Spaces – 2017. – Vol. 2017. – Article ID 4947925, 8 p.

44. Kravtsiv V. V., Zagorodnyuk A. V. *On algebraic bases of algebras of block-symmetric polynomials on Banach spaces.* // Matematychni Studii – 2012. – Vol. 37, Iss. 1. – P. 109–112.

45. Kravtsiv V. V., Zagorodnyuk A. V. *Representation of spectra of algebras of block-symmetric analytic functions of bounded type* // Carpathian Math. Publ. – 2016. – Vol. 8, Iss. 2. – P. 263–271.

46. Lindestrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach spaces I. SequenceSpaces* // Springer-Verlag, New York – 1977. – 190 p.

47. MacMahon P. A. *Combinatory analysis* // Chelsea Publishing Co. New York – 1960. – 53 p.

48. Macdonald I.G. *Symmetric Functions and Orthogonal Polynomials* // American Mathematical Soc. – 1997. – Vol. 12. – 53 p.

49. Mauldin R.D. (ed.) *The Scottish Book* // Birkhäuser, Boston. – 1981.

50. Mazur S., Orlicz W. *Grundlegende eigenschaften der polynomischen operationen I, II* // Studia Math. – 1935. – Vol.5, № 1. – P. 50–68, 179–189.

51. Mazur S., Orlicz W. *Sur la divisibilité des polynomes absraits* // C. R. Acad. Sci. Paris – 1936. – Vol. 207. – P. 621–623.

52. Mazet P. *Analytic Sets in Locally Convex Spaces* // N.H.: Mathematics Studies. — 1984. – 274 p.

53. Michael E. *Locally multiplicatively convex topological algebras* // Mem. Amer. Math. Soc. — 1952. – 82 p.

54. Mujica J. *Complex Analysis in Banach Spaces* // North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford — 1986. – 447 p.

55. Mujica J. *Ideals of holomorphic functions on Tsirelson's space* // Archiv der Mathematik – 2001. – Vol. 76. – P. 292–298.

56. Nachbin L. *Topology on spaces of holomorphic mappings* // Springer — 1969. – 66 p.

57. Olshanski G., Regev A., Vershik A., Ivanov V. *Frobenius-Schur Functions. In Studies in Memory of Issai Schur. Progress in Mathematics* // Birkhäuser, Boston, MA, USA. – 2003. – Vol.210. – P. 251–299.

58. Sergeev A.N. *On rings of supersymmetric polynomials* // J. Algebra. – 2019. – Vol. 517. – P. 336–364.

59. Schmidt H.J., Schnack J. *Symmetric polynomials in physics* // Conference series-institute of physics. Philadelphia, Institute of Physics. – 2003. – Vol. 173. – P. 147–152.

60. Stembridge J.R. *A Characterization of Supersymmetric Polynomials.* // J. Algebra. – 1985. – Vol. 95. – P. 439–444.

61. Taylor A. E. *Analytic functions in general analysis* // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — 1937. – Vol. 6, Iss. 2. – P. 277–292.

62. Taylor A. E. *Additions to the theory of polynomials in normed line spaces* // Tohoku Math. Journal. — 1938. – Vol. 44. – P. 302–318.

63. Zagorodnyuk A. V. *Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces* // Proc. Amer. Math. Soc. — 2006. – Vol. 134. – P. 2559–2569.

64. Zagorodnyuk A. V. *Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces* // Function spaces, Contemp. Math. — 2007. – Vol. 435. – P. 381–394.

65. Zorn M. A. *Characterization of analytic functions in Banach spaces* // Ann. of Math. J. — 1945. – Vol. 46. – P. 585–593.

66. Zorn M. A. *Gateux differentiability and essential boundedness* // DukeMath. J. — 1945. – Vol. 12. – P. 579–583.

ДОДАТКИ

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Jawad F. *Note on separately symmetric polynomials on the Cartesian product of* ℓ_1 // Mat. Stud. – 2018. – Vol. 50, Iss. 2. – P. 204–210.

2. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Supersymmetric Polynomials on the Space of Absolutely Convergent Series* // Symmetry – 2019. – Vol. 11, Iss. 9, 1111.

3. Jawad F., Karpenko H., Zagorodnyuk A., *Algebras generated by special symmetric polynomials on* ℓ_1 // Carpathian Math. Publ. – 2019. – Vol. 11, Iss. 2. – P. 335–344.

4. Zagorodnyuk A., Jawad F. *Problems related to symmetric analytic functions on Banach spaces* //International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (Lviv, 18–23 September 2017): book of abstracts – Lviv, 2017. – P. 33.

5. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Supersymmetric Polynomials on the Space of Absolutely Converges Series* // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта. 25 лютого – 1 березня 2019 р.): тези доп. – Івано-Франківськ, 2019. – С. 37.

6. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Symmetric and supersymmetric analytic functions on Banach spaces* //International Scientific Conference "Banach Spaces and their Applications" dedicated to the 70th anniversary of Prof. A.M. Plichko (Lviv, Ukraine, 26–29 June 2019): book of abstracts – Lviv, 2019. – P. 52.

7. Jawad F. *Separately symmetric polynomials on the Cartesian product of* ℓ_1 // International Scientific Conference "Infinite-Dimensional

Analysis and Topology" dedicated to 70th anniversary of Professor O. Lopushansky (Ivano-Frankivsk, Ukraine, 16–20 October 2019): book of abstracts – Ivano-Frankivsk, 2019. – P. 24.

8. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Quotient of a weighted sum of* ℓ_1*-spaces associated with supersymmetric polynomials* // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта. 26 лютого – 1 березня 2020 р.): тези доп. – Івано-Франківськ, 2020. – С. 11–12.

ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Результати дисертації доповідалися і обговорювалися на таких конференціях та семінарах:

1. International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (Lviv, 18–23 September 2017).

2. Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2019. р.).

3. International conference "Banach Spaces and their Applications" dedicated to 70th anniversary of Professor Anatolij M. Plichko (Lviv, 26–29 June 2019).

4. International Conference "Infinite-Dimensional Analysis and Topology" dedicated to 70th anniversary of Professor O. Lopushansky (Ivano-Frankivsk, October 16–20, 2019).

5. Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 26 лютого – 1 березня 2020. р.);

6. Наукові семінари кафедри математичного і функціонального аналізу “Прикладний нелінійний аналіз ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника” (керівник – д. фіз.-мат. н., проф. А. В. Загороднюк)(2017, 2018, 2019 рр.).