

## ВИСНОВОК

**про наукову новизну, теоретичне та практичне значення результатів дисертації Аль-Зірджаві Фарах Джавад Галі на тему «Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах, які є інваріантними відносно дії операторних напівгруп» на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика» з галузі знань 11 «Математика та статистика»**

**Актуальність теми дослідження і отриманих результатів.** Тематика дисертаційної роботи знаходиться на перетині нелінійного функціонального аналізу, теорії аналітичних відображень та теорії аналітичних інваріантів операторних напівгруп. Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах та їх спектри досліджувались в роботах Л. Нахбіна, Т. Гамеліна, Т. Корна, Б. Коула, Дж. Мухіки. Пізніше, Р.Арон, Б. Коул та Т. Гамелін розглянули алгебру аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі і запропонували досліджувати спектр такої алгебри за допомогою так званого продовження Арона-Бернера аналітичних функцій обмеженого типу у другий спряжений простір. У роботах А.В. Загороднюка було узагальнено цей метод і використано продовження Арона-Бернера для поліномів на топологічних тензорних добутках.

Симетричні поліноми на банаховому просторі досліджувались в роботах А.С. Немировського, С.М. Семенова, М. Гонзалеса, Р. Гонзало, Х. Харамілло, Р. Аленкара, Р. Арона, П. Галіндо, А. Загороднюка, М. Маестре, Д. Гарсія, П. Хаєка, І. Чернеги, Т. Василичина, В. Кравців та інших. Встановлено, що спектр алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на деякому банаховому просторі  $X$  суттєво залежить як від вибору простору так і від вибору групи або напівгрупи симетрії. Наприклад, як показано у роботі П. Галіндо, Т. Василичина і А. Загороднюка, у випадку, коли  $X=L_\infty[0,1]$  і група симетрії складається з групи вимірних автоморфізмів відрізка  $[0,1]$ , спектр алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу повністю описується функціоналами значень в точках простору  $X$ . Проте, як показано у роботах І. Чернеги, П. Галіндо та А. Загороднюка, у випадку, коли  $X=\ell_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , і група  $G$  є групою перестановок базисних векторів, спектр алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу є ширшим, ніж множина функціоналів значень в точках. У цьому випадку, на спектрі існують природні алгебраїчні операції, які утворюють структуру комутативного напівкільця з одиницею.

У даній дисертаційній роботі продовжено дослідження алгебр симетричних аналітичних функцій обмеженого типу та їх спектрів на деякому банаховому просторі послідовностей. Зокрема розглянуто випадки напівгруп симетрії, які дозволяють отримати достатньо багату алгебраїчну структуру на

спектрах цих алгебр. Так, у випадку алгебри так званих суперсиметричних аналітичних функцій на просторі  $\ell_1$  отримано і досліджено кільце характерів яке є спектром цієї алгебри. Зауважимо, що суперсиметричні поліноми мають застосування у статистичній квантовій фізиці і отримані в дисертації результати також можуть бути застосованими в цьому контексті. Також, в дисертаційній роботі описано спектри алгебр симетричних аналітичних функцій для деяких інших випадків дії напівгрупи операторів на деякому банаховому просторі.

### **Наукова новизна одержаних результатів.**

У дисертації вперше одержані такі нові наукові результати:

- Описано алгебраїчні базиси алгебри нарізно симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на скінченному декартовому степені простору  $\ell_1$ . Доведено, що спектр цієї алгебри є декартовим добутком спектрів алгебр симетричних аналітичних функцій на просторах  $\ell_1$ .
- Описано алгебраїчні базиси алгебри суперсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу на двосторонньому просторі  $\ell_1$ . Знайдено зображення відповідних генеруючих функцій у вигляді мероморфних функцій однієї комплексної змінної. Побудовано неперервний ін'єктивний гомоморфізм з щільним образом цієї алгебри в алгебру симетричних аналітичних функцій на  $\ell_1$ .
- Встановлено, що спектр алгебри суперсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу містить нелінійне комутативне кільце  $M$ , яке складається з функціоналів значень у точках вихідного простору. Це кільце є повним несепарабельним метричним простором у деякій природній метриці. Досліджено оборотність елементів цього кільця, гомоморфізми, описано гомоморфізми.
- Описано слабо поліноміальну топологію на спектрі алгебри суперсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу, та показано, що адитивну операцію кільця  $M$  можна продовжити на спектр до комутативної згортки.
- Отримано узагальнення деяких результатів про суперсиметричні аналітичні функції на алгебри аналітичних  $S_\omega$ -суперсиметричних функцій обмеженого типу на деякій топологічній прямій сумі просторів  $\ell_1$ . Напівгрупа симетрії  $S_\omega$  побудована таким чином, щоб функціонали значень в точках утворювали топологічну алгебру відносно природних операцій. Досліджено гомоморфізми і топологічні властивості цієї алгебри.

### **Особистий внесок здобувача.**

Основні результати, висвітлені в дисертації, отримано здобувачем самостійно. У спільних роботах з науковим керівником, керівнику належить постановка задачі і перевірка правильності висновків. У статті [3] співавтор Karpenko H. надавала консультації щодо правильності використання англomовної термінології та проводила остаточну коректуру тексту.

**Ступінь достовірності результатів дослідження** забезпечується повними математичними доведеннями усіх результатів, наведених у дисертації

**Практичне значення одержаних результатів.** Результати, отримані у дисертаційній роботі, носять теоретичний характер. Вони можуть бути використані в нескінченновимірному комплексному аналізі, в теорії операторів, квантовій статистичній механіці, теорії алгебр Фреше. Ці результати знайдуть застосування у наукових дослідженнях, які проводяться у ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», Інституті прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України, Львівському національному університеті імені Івана Франка, Інституті математики НАН України, Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича, Національному університеті імені Т. Г. Шевченка та інших наукових установах і вищих навчальних закладах України.

**Повнота викладу матеріалів дисертації в публікаціях та особистий внесок здобувача в публікації.** Всі результати дисертаційного дослідження опубліковано в 8 працях, серед яких 3 журналні статті у фахових міжнародних виданнях, що входять до наукометричних баз Scopus та Web of Science (з них дві, у журналах, що входять до 2-го та 3-го кuartилів відповідно до Scimago Journal Rank).

#### **Перелік основних публікацій Аль-Зірджаві Фарах Джавад Галі за темою дисертації**

##### **Статті, опубліковані у наукометричних базах Scopus та Web of Science**

1. Jawad F. *Note on separately symmetric polynomials on the Cartesian product of  $l_1$*  // *Mat. Stud.* 2018, **50** (2), 204–210. doi:10.15330/ms.50.2.204-210
2. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Supersymmetric Polynomials on the Space of Absolutely Convergent Series* // *Symmetry*, 2019, **11** (9), 1111, (19 p.). doi: 10.3390/sym11091111.
3. Jawad F., Karpenko H., Zagorodnyuk A. *Algebras generated by special symmetric polynomials on  $l_1$*  // *Carpathian Math. Publ.* 2019, **11** (2), 335—344. doi:10.15330/cmp.11.2.335-344.

##### **Перелік додаткових публікацій за темою дисертації**

1. Zagorodnyuk A., Jawad F. *Problems related to symmetric analytic functions on Banach spaces* // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach. Book of abstracts. - Lviv. 18–23 September 2017. -- 33.
2. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Supersymmetric Polynomials on the Space of Absolutely Converges Series* // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. - Ворохта. 25 лютого – 1 березня, 2019. – 37.
3. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Symmetric and supersymmetric analytic functions on Banach spaces* // International conference "Banach Spaces and their Applications" dedicated to 70th anniversary of Professor Anatolij M. Plichko. Book of abstracts. - Lviv, 26–29 June 2019. – 52.
4. Jawad F. *Separately symmetric polynomials on the Cartesian product of  $l_1$*  // International Conference "Infinite-Dimensional Analysis and Topology" dedicated to 70th anniversary of Professor O. Lopushansky. Book of abstracts. - Ivano-Frankivsk, October 16–20, 2019 – 24.
5. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Quotient of a weighted sum of  $l_1$ -spaces associated with supersymmetric polynomials* // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. - Ворохта. 26 лютого – 1 березня, 2020. – 11–12.

### Загальний висновок

Дисертаційна робота Аль-Зірджаві Фарах Джавад Галі «Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах, які є інваріантними відносно дії операторних напівгруп» є завершеним науковим дослідженням в рамках поставлених мети і завдань, виконане дисертанткою особисто. Вона свідчить про достатній рівень наукової підготовки її автора. Робота містить обґрунтовані та достовірні висновки і пропозиції. За змістом та оформленням вона відповідає встановленим вимогам.

Зміст, структура, оформлення дисертації та кількість публікацій відповідають вимогам «Порядку проведення експерименту з присудження ступеня доктора філософії» (Постанова Кабінету Міністрів України від 06.03.2019 р. № 167), наказу МОН України від 12.01.2017 р. № 40 «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» та відповідає напрямку наукового дослідження освітньо-наукової програми ДВНЗ «Прикарпатський

національний університет імені Василя Стефаника” зі спеціальності 111 «Математика».

Під час виконання дисертації аспірантка дотримувалась принципів академічної доброчесності. За результатами перевірки та аналізу матеріалів дисертації не було виявлено ознак академічного плагіату, самоплагіату, фабрикації, фальсифікації.

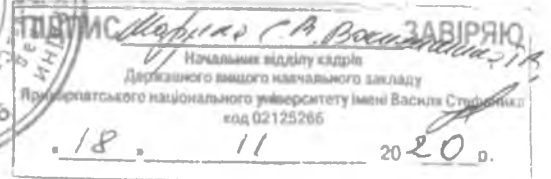
Враховуючи високий рівень виконаних досліджень, актуальність теми, новизну отриманих результатів, їх теоретичне та практичне значення рекомендуємо дисертацію Аль-Зірджаві Фарах Джавад Галі «Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах, які є інваріантними відносно дії операторних напівгруп» до захисту у спеціалізованій вченій раді за спеціальністю 111 «Математика».

**Рецензенти:**

доктор фізико-математичних наук,  
професор, проректор з науково-педагогічної  
роботи ДВНЗ «Прикарпатський національний  
університет імені Василя Стефаника»

С.В. Шарин

кандидат фізико-математичних наук  
доцент, доцент кафедри математичного  
і функціонального аналізу  
ДВНЗ «Прикарпатський національний  
університет імені Василя Стефаника»



Т.В. Василюшин

18 листопада 2020 р.