ДВНЗ “Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника”

Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Микицей Оксана Ярославівна

УДК 512.568.2

ДИСЕРТАЦІЯ

Граткозначні предикати на неперервних напівгратках

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів та текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

______________________ Микицей О.Я.

підпис

Науковий керівник: д.ф.-м.н., доцент
Никифорчин Олег Ростиславович

Івано-Франківськ — 2021

АНОТАЦІЯ

Микицей О. Я. Граткозначні предикати на неперервних напівгратках. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 — алгебра та теорія чисел. — ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”, Івано-Франківськ, 2021.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню граткозначних монотонних предикатів на неперервних напівгратках як природних узагальнень дійснозначних та граткозначних неадитивних мір. Частковим випадком монотонних предикатів на неперервних напівгратках є введені Г. Шоке ємності (неадитивні міри), які широко застосовуються у теорії прийняття рішень в умовах невизначеності.

У першому розділі наведено необхідні відомості з теорії неперервних областей, зокрема, означення неперервності за Скоттом, топології Лоусона, відношення апроксимації, тощо.

У другому розділі обґрунтовано поширення поняття монотонного предиката на функції зі значеннями у цілком дистрибутивних гратках. Доведено, що для кожного неперервного за Скоттом відображення $\varphi : S \to K$ з області у повний неперервний L-напівмодуль існує єдине продовження $\Phi : \underline{M}_{[L]}S \to K$ до морфізму у категорії повних неперервних L-напівмодулів та їх неперервних за Скоттом лінійних відображень. Для області S з нижнім елементом існує єдине продовження $\Phi : M_{[L]}S \to K$ неперервного за Скоттом відображення $\varphi : S \to K$ до морфізму в категорії повних неперервних L-напівмодулів та їх неперервних за Скоттом афінних відображень. Воно є лінійним, якщо і тільки якщо φ зберігає нульовий елемент. Це означає, що L-значні монотонні предикати як ідемпотентні напівмодулі є вільними об’єктами над S. І категорія, з якої обирається S, і категорія, до якої належатиме $\underline{M}_{[L]}S$ чи $M_{[L]}S$, можуть бути обрані по різному.

У третьому розділі запроваджено поняття сумісності $P : S \times S' \to \{0,1\}$ між неперервними напівгратками S, S'. У множині $C_w(S,S')$ всіх таких сумісностей розглянуто різні підкласи і досліджено їх зв'язки з широким колом об'єктів.

Зокрема, для цілком дистрибутивної гратки L підклас $C_{\bullet\vee}(S,L)$ сумісностей, які зберігають попарні супремуми по другому аргументу, можна ототожнити з множиною $M_{[L]}S$ L-значних нормованих монотонних предикатів. Клас $C_{\vee\vee}(L,L')$ сумісностей, для яких вимагаємо збереження попарних супремумів по обох аргументах, як частково впорядкована множина антиізоморфний гратці контраваріантних зв'язків Галуа між неперервними гратками L та L'. Означено підклас $C_{\nearrow}(S,L)$ сумісностей умовою: для кожних $x_1, x_2 \in S$, $y \in L$ виконується $P(x_1 \wedge x_2, y) = \min\bigl\{P(x_1,y_1) \vee P(x_2,y_2) \bigm| y \leqslant y_1 \vee y_2\bigr\}$. Доведено, що $C_{\nearrow}(S,L)$ можна ототожнити з підмножиною $M_{\wedge[L]}S \subset M_{[L]}S$ всіх L-значних нормованих монотонних предикатів на S, що відображають попарні інфімуми у попарні супремуми.

Для фіксованих сумісностей $P_1 \in C_w(S_1,S_1')$, $P_2 \in C_w(S_2,S_2')$ введено відображення $P_1 \otimes P_2 : \tilde{C_w}(S_1,S_2) \times \tilde{C_w}(S_1',S_2') \to \{0,1\}$ і показано, що воно є сумісністю між цілком дистрибутивними гратками $\tilde{C_w}(S_1,S_2)$ і $\tilde{C_w}(S_1',S_2')$, яка зберігає супремуми по обох аргументах. Доведено, що така сумісність між сумісностями визначається зв'язком Галуа, і описано цей зв'язок.

Виділено підклас сильних (що зберігають попарні інфімуми по обох аргументах) сумісностей $C_{\wedge\wedge}(S,S')$ і розглянуто їх будову. Запропоновано модифікацію класичної двоїстості Лоусона і доведено, що кожна відокремлююча сильна сумісність ізоморфна до природної сумісності між неперервною напівграткою з нулем та її модифікованою двоїстою за Лоусоном напівграткою.

Вивчено будову множини $[S \to S']$ неперервних за Скоттом відображень між неперервними напівгратками. А саме, доведено неперервність частково впорядкованої множини $[S \to S']$ з повної неперервної напівгратки S у неперервну напівгратку S'. Її підмножина $[S \to S']_0$, яка складається з усіх функцій, що зберігають нуль, також є неперервною напівграткою з нулем. Побудовано порядковий ізоморфізм, який ототожнює множину $C_{\bullet\wedge}(S,S')$ всіх сумісностей, що зберігають попарні інфімуми по другому аргументу, та $[S \to (S')^{\wedge}]_0$. Отже, сумісності, що зберігають попарні інфімуми по другому аргументу, між повною неперервною напівграткою і неперервною напівграткою з нулем, утворюють неперервну напівгратку з нулем. Якщо ж S — повна напівгратка, S' – стабільно неперервна, то $C_{\bullet\wedge}(S,S')$ є повною неперервною напівграткою. Також доведено, що для повних стабільно неперервних напівграток S і S' множина $C_{\wedge\wedge}(S,S')$ є повною неперервною напівграткою.

Для нормованих монотонних предикатів $c \boxtimes c' \in M_{[L]}(S \boxtimes S')$ на повних стабільно неперервних напівгратках означено тензорний добуток $c \boxtimes c' : S \boxtimes S' \to L^{op}$, який є L-значним нормованим монотонним предикатом на повній напівгратці $S \boxtimes S'$. Також введено двоїсту в певному сенсі симетричну операцію $c \boxplus c' : S \boxtimes S' \to L$ і доведено, що $c \boxplus c'$ теж належить до $M_{[L]}(S \boxtimes S')$.

Показано, що відома дія знаходження спряженої до граткозначної ємності на напівгратці, яка узагальнює взяття спряженої до неадитивної міри на компакті, є звуженням спряженості сумісностей. Доведено, що відображення взяття спряжених до граткозначних мір в сукупності утворюють ізоморфізм функторів, що пов'язує дві класичні двоїстості у теорії областей.

У четвертому розділі сильні сумісності використано для запровадження понять чіткого та L-нечіткого (для цілком дистрибутивної квантали $L = (L, \oplus, *)$) неоднозначних зображень з однієї неперервної напівгратки у іншу. Виділено підкласи чітких та L-нечітких неоднозначних зображень, для яких існують псевдообернені зображення, і означено композиції, з якими вони як стрілки та неперервні напівгратки з нулем як об'єкти утворюють категорії $\mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}$ і $\mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^{*}_{L}$ (чи $\mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^{\hat{*}}_{L}$, якщо множити у іншому порядку) відповідно. Доведено, що перша категорія є самодвоїстою щодо контраваріантного функтора $(-)^{\smile} : \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR} \to \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}$, який є розширенням функтора $(-)^{\wedge}$ в категорії неперервних напівграток з нулем $\mathcal{CS}\mathrm{em}_0$ і продовжується до контраваріантних функторів $(-)^{\smile} : \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^*_L \to \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^{\hat{*}}_L$ і $(-)^{\smile} : \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^{\hat{*}}_L \to \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^*_L$. Обидві попарні композиції цих функторів ізоморфні до тотожніх функторів. Побудовано вкладення категорії L-нечітких неоднозначних зображень у категорію неперервних L-напівмодулів. Це вкладення зіставляє кожній неперервній напівгратці з нулем L-напівмодуль монотонних предикатів на ній.

Для сильної відокремлюючої сумісності між неперервними напівгратками S і S' з нулями запропоновано множення $(-,-)^*_P : M_{[L]}S \times M_{[L']}S' \to L$ (де L' — та ж кванталь L, але з “переставленим” множенням), яке є нескінченно дистрибутивним і неперервним за Скоттом по кожній змінній. Показано, що $M_{[L]}S$ і $M_{[L']}S'$ з таким множенням утворюють двоїсту пару. Доведено, що дія псевдообернення $(-)^{\smile}$ L-нечітких неоднозначних зображень відповідає дії знаходження ермітово спряжених L-лінійних операторів. Доведено, що відповідність, яка кожній неперервній напівгратці S зіставляє $M_{[L]}S$, а кожному неперервному за Скоттом відображенню $S_1 \to M_{[L]}S_2$ єдине неперервне за Скоттом лінійне продовження $M_{[L]}S_1 \to M_{[L]}S_2$, є функтором, який вкладає категорію $\mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^*_L$ в категорію неперервних L-напівмодулів $(L, \oplus, *)$-$\mathcal{CSM}\mathrm{od}_{\uparrow}$ як повну підкатегорію. Тобто, щоб скомпонувати L-неоднозначні зображення у “функціональному” вигляді, потрібно спершу продовжити їх до лінійних відображень вільних напівмодулів, тоді скомпонувати у відповідній категорії і обмежити назад до напівгруп. Наведено інтерпретацію L-нечітких неоднозначних зображень та відповідних L-лінійних операторів як трансформерів монотонних предикатів. Зокрема, довільне ізотонне відображення $\varphi : D \to \underline{M}_{[L]}D'$ можна вважати L-нечітким трансформером станів.

У п'ятому розділі монотонні предикати застосовано до аналізу грубих ігор двох гравців. Вважаємо, що елементи неперервних напівграток описують неповну інформацію про позицію гравця у грі, що зазвичай моделюють через подання гри у розширеній формі — як дерево, у якому вершини не завжди розрізненні для гравців. Показано, що застосування напівграток дозволяє часом обмежитись нормальною формою, коли гравці можуть вибирати елементи напівграток, які розглядаємо як грубі стратегії. Неоднозначні зображення відображають усі набори виплат, які можуть бути гарантовані, якщо гравці між собою домовляться, що дозволяє означити грубі оптимуми Парето.

Однак основна увага у розділі приділена грубим іграм двох гравців у розширеній формі, коли перший і другий гравці ходять по черзі, а результат гри є елементом цілком дистрибутивної гратки L, і монотонний предикат $R_i(x_i) = m_{x_i R_i} \in M_{[\tilde{L}]}S_{-i}$ повністю описує позицію у грі з точки зору другого гравця після ходу $x_i \in S_i$ першого гравця. І навпаки, $R_{-i}(x_{-i}) = m_{x_{-i} R_{-i}} \in M_{[L]}S_{i+1}$ зображує позицію першого гравця після ходу x_{-i} другого.

Також за допомогою L-неоднозначних зображень описано, як позиція одного гравця залежить від попереднього вибору іншого гравця у грі розширеної форми, у котрій два гравці мають неповну інформацію про актуальний стан речей і не мають повного контролю над діями.

Побудовано монотонні предикати виплат $\bar{w}_i \in M_{[\tilde{L}]}S_i$ і $\bar{w}_{-i} \in M_{[L]}S_{-i}$, що описують нижні обмеження на результати при правильній грі. Знайдено рекурентні співвідношення, які дозволяють обчислити ці предикати, рухаючись від останнього можливого ходу гри.

Доведено, що, для грубої скінченної дійснозначної гри розширеної форми з нульовою сумою, найменшою верхньою гранню мінімального виграшу першого гравця є найбільша нижня грань максимального програшу другого гравця.

Ключові слова: неперервна напівгратка, монотонний предикат, неоднозначне зображення, спряжена ємність, ідемпотентний напівмодуль.

ABSTRACT

Mykytsey O. Ya. Lattice-valued predicates on continuous semilattices. — Qualifying scientific work, manuscript. Thesis for a Candidate Degree in Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.06 Algebra and Number Theory. — Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2021.

The thesis is devoted to the research of lattice-valued monotonic predicates on continuous semilattices, which are natural generalizations of non-additive real-valued and lattice-valued measures. Partial cases of monotonic predicates on continuous semilattices are are presented with the introduced by G. Choquet capacities (or non-additive measures), which are widely used in decision making under uncertainty.

The first chapter provides the necessary information on the theory of continuous domains, in particular, the definitions of Scott continuity, Lawson topology, way-below relation, etc.

In the second chapter the author justifies generalization of the notion of monotonic predicate to functions with values in completely distributive lattices. It is proved that for every Scott continuous mapping $\varphi : S \to K$ from a domain to a complete continuous L-semimodule there is a unique extension $\Phi : \underline{M}_{[L]}S \to K$ to a morphism in the category of complete continuous L-semimodules and their Scott continuous linear mappings. For domain S with bottom element there exists a unique extension $\Phi : M_{[L]}S \to K$ of a Scott continuous mapping $\varphi : S \to K$ to a morphism in the category of complete continuous L-semimodules and their Scott continuous affine mappings. It is linear if and only if φ preserves the bottom element. This means that the sets of L-valued monotonic predicates are free objects over the respective S. Both the domain and the target categories can be chosen differently.

The third chapter introduces the notion of compatibility $P : S \times S' \to \{0, 1\}$ between continuous semilattices S and S'. Several subclasses of the set $C_w(S, S')$

of such compatibilities are introduced, and it is shown that many specific kinds of mathematical objects can be regarded as compatibilities. In particular, for completely distributive semilattice L the subclass $C_{\bullet\vee}(S, L)$ of compatibilities that are join preserving in the second argument is equivalent to the set $M_{[L]}S$ of L-valued normalized monotonic predicates. The class $C_{\vee\vee}(L, L')$ of all join preserving in both arguments compatibilities as a partially ordered set is antiisomorphic to the lattice of contravariant Galois connections between continuous lattices L and L'. A subclass $C_{\nearrow}(S, L)$ is also defined, of compatibilities such that for any $x_1, x_2 \in S$, $y \in L$ we have $P(x_1 \wedge x_2, y) = \min\bigl\{P(x_1, y_1) \vee P(x_2, y_2) \bigm| y \leqslant y_1 \vee y_2\bigr\}$. It is proved that $C_{\nearrow}(S, L)$ is equivalent to the subset $M_{\wedge[L]}S \subset M_{[L]}S$ of all L-valued normalized monotone predicates on S which take meets to joins.

For fixed compatibilities $P_1 \in C_w(S_1, S_1')$, $P_2 \in C_w(S_2, S_2')$ the mapping $P_1 \otimes P_2 : \tilde{C_w}(S_1, S_2) \times \tilde{C_w}(S_1', S_2') \to \{0, 1\}$ is defined so that it is a compatibility between the completely distributive lattices $\tilde{C_w}(S_1, S_2)$ and $\tilde{C_w}(S_1', S_2')$. This compatibility preserves joins in both arguments. It is proved that the compatibility between compatibilities can be regarded as Galois connection.

The subclass of strong (i.e., meet preserving in both arguments) compatibilities $C_{\wedge\wedge}(S, S')$ is introduced and investigated. A modification of classical Lawson duality is proposed, and it is and proved that every separating strong compatibility is isomorphic to the natural compatibility between a continuous semilattice with bottom element and its modified Lawson dual.

The structure of the set $[S \to S']$ of all Scott continuous maps between continuous semilattices is studied. It is proved that the partially ordered set $[S \to S']$ is continuous for a complete continuous semilattice S and a continuous semilattice S'. Its subset $[S \to S']_0$ that consists of all zero-preserving functions is a continuous semilattice with a zero as well. An order isomorphism between the set $C_{\bullet\wedge}(S, S')$ of all meet preserving in the second argument compatibilities and $[S \to (S')^{\wedge}]_0$ is constructed. Hence the set of all meet preserving in the second argument compatibilities between a complete continuous semilattice and a continuous semilattice with a zero is a continuous semilattice with a zero. If S is a complete semilattice and S' is stably continuous with a zero, then $C_{\bullet\wedge}(S, S')$ is a complete continuous semilattice. Also it is proved that for complete stably continuous semilattices S and S' the set $C_{\wedge\wedge}(S, S')$ is a complete continuous semilattice.

For normalized monotonic predicates $c \boxtimes c' \in M_{[L]}(S \boxtimes S')$ on complete stably continuous semilattices the tensor product $c \boxtimes c' : S \boxtimes S' \to L^{op}$ is defined. This product is an L-valued normalized monotonic predicate on the complete semilattice $S \boxtimes S'$. A dual in a certain sense symmetrical operation $c \boxplus c' : S \boxtimes S' \to L$ is constructed, and it is proved that $c \boxplus c'$ is in $M_{[L]}(S \boxtimes S')$ as well.

It is shown that the operation of taking the conjugate to a lattice-valued capacity, which is a generalization of the conjugate measure to a non-additive measure on compactum, is a restriction of conjugation for compatibilities. Thus the constructions of lattices of normalized L-capacities and of normalized $\tilde{L}$-capacities on continuous semigroups with zeros are functorial and linked via two classic dualities and a functor isomorphism. The components of the latter send each capacity to its conjugate.

In the fourth chapter strong compatibilities are used to define crisp and L-fuzzy (for a completely distributive quantale $L = (L, \oplus, *)$) ambiguous representations between continuous semilattices. Subclasses of pseudoinvertible ambiguous and pseudoinvertible L-ambiguous representations are defined and characterized. It is proved that pseudoinvertible representations can be composed so that the categories $\mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}$ and $\mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^*_L$ (or $\mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^{\hat{*}}_L$, if the opposite order of multiplication is chosen) respectively are obtained, with objects being continuous semilattices. It is proved that the first category is self-dual with respect to contravariant functor $(-)^{\smile} : \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR} \to \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}$ which is an extention of functor $(-)^{\wedge}$ in the category of continuous semilattices with zero $\mathcal{CS}\mathrm{em}_0$. This functor can be extended to contravariant functors $(-)^{\smile} : \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^*_L \to \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^{\hat{*}}_L$ and $(-)^{\smile} : \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^{\hat{*}}_L \to \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^*_L$. Both pairwise composition of these functors are isomorphic to identity functors. An embedding of the category L-fuzzy ambiguous representations into the category of continuous L-semimodules is constructed. This embedding takes any continuous semilattice with a zero to the L-semimodule of monotonic predicates.

For a separating strong compatibility between continuous semilattices S and S' with zeros a multiplication $(-,-)^*_P : M_{[L]}S \times M_{[L']}S' \to L$ is defined (where L' is the same as L but with "swapped" multiplication). This multiplication is infinitely distributive and Scott continuous in both variables. It is shown that $M_{[L]}S$ and $M_{[L']}S'$ with $(-,-)^*_P$ form a dual pair. It is proved that the operation $(-)^{\smile}$ for L-ambiguous representations is nothing but Hermitian conjugation of L-linear operators. The correspondence which takes any continuous semilattice S to $M_{[L]}S$ and any Scott continuous mapping $S_1 \to M_{[L]}S_2$ to the unique Scott continuous linear extention $M_{[L]}S_1 \to M_{[L]}S_2$, is a functor. This functor embeds category $\mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^*_L$ into category of continuous L-semimodules $(L, \oplus, *)$-$\mathcal{CSM}\mathrm{od}_\uparrow$ as a full subcategory. Thus, to compose L-ambiguous representations in "functional" form, we need to extend them to linear mappings of free semimodules and compose them in respective category and restrict back to semigroups. An interpretation of L-ambiguous representations and respective L-linear operators as predicate transformers is proposed. In particular, any isotone mapping $\varphi : D \to \underline{M}_{[L]}D'$ can be regarded as an L-fuzzy state transformer.

In the fifth chapter, monotone predicates are applied to the analysis of two player rough games. Elements of continuous semilattices are used to describe incomplete information of a player on his position, which is usually represented via extensive form of a game, as a tree with nodes that are not always distinguishable. It is shown that use of semilattice allows sometimes to reduce this to normal form, if players choose elements of semilattices, which can be regarded as rough strategies. Ambiguous representations select then all sets of payoffs that can be ensured if the player make a deal. Thus rough Pareto optima can be defined.

The chapter, however, focuses at the rough extensive-form two-player games, when the first and the second players make moves in turn, and the result of the game is an element of a completely distributive lattice L. A monotonic predicate $R_i(x_i) = m_{x_i R_i} \in M_{[\tilde{L}]} S_{-i}$ fully describes the position in the game from the viewpoint of the second player after the move $x_i \in S_i$ of the first player. Similarly, $R_{-i}(x_{-i}) = m_{x_{-i} R_{-i}} \in M_{[L]} S_{i+1}$ is the position of the first player after the move x_{-i} of the second one.

L-ambiguous representation specify also how a player's position depends on the previous choice of the other player in an extensive form game, if both player have incomplete information and control on the actual state and its change.

Monotonic payoff predicates $\bar{w}_i \in M_{[\tilde{L}]} S_i$ i $\bar{w}_{-i} \in M_{[L]} S_{-i}$ are obtained to describe lower estimates of the game result for rational players. Recurrent formulae are found, which makes it possible to calculate these predicates backwards from the last possible move of the game.

It is proved that for a rough extensive-form real-valued zero-sum finite games, the least upper bound of the minimal gain of the first player is equal to the greatest lower bound of the maximal loss of the second player.

Keywords: continuous semilattice, monotonic predicate, ambiguous representation, conjugate measure, idempotent semimodule.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНІ ОСНОВНІ НАУКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Nykyforchyn O., Mykytsey O. *Conjugate measures on semilattices* // Вісник ЛНУ, сер. мех.-мат. — 2010. — Вип. 72. — С. 221–231.
2. Nykyforchyn O., Mykytsey O. *L-idempotent linear operators between predicate semimodules, dual pairs and conjugate operators* // Математичний вісник НТШ. — 2011. — Вип. 8. — С. 299–314.
3. Nykyforchyn O., Mykytsey O. *Ambiguous representations of semilattices, imperfect information, and predicate transformers* // Order. – 2020. – Vol. 37. – P. 319–339.
4. Nykyforchyn O.R., Mykytsey O.Ya. *Rough games modeled via L-fuzzy ambiguous representations of semilattices* // Fuzzy Sets and Systems. — 2020. — Vol. 398. — P. 128–138.
5. Mykytsey O.Ya., Koporkh K.M. *Compatibilities between continuous semilattices* // Carpathian Math. Publ. — 2021. – Vol. 13, №1. — P. 5–14.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Микицей О. *Continuity of strongest postcondition transformers* // VIII літня школа "Алгебра, топологія, аналіз та застосування 5-15 липня, 2011, Херсон-Лазурне: тези доп. – Херсон, 2011. – С. 21.
2. Микицей О. *Continuity of symmetric products of capacities* // 9 Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, 8-13 липня, 2013, Львів: тези доп. – Львів, 2013. – С. 134
3. Микицей О. *Категорія Лоусонових напівграток і їх псевдооборотних неоднозначних зображень* // Міжнародна конференція молодих математиків, 3-6 червня, 2015, Київ: тези доп. – Київ, 2015. – С. 40.
4. Mykytsey O. *Category of L-fuzzy ambiguous representations* // Міжнародна конференція «Нескінченновимірний аналіз і топологія», 16-20 жовтня, 2019, Івано-Франківськ: тези доп. – Івано-Франківськ, 2019. – С. 40.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена об'єктам, які у різних галузях математики відомі під різними назвами, інтерпретовані у різний спосіб і досліджувані з різних точок зору.

Один з шляхів "дістатись" до них починається від регулярних адитивних мір. Якщо відмовитись від вимоги адитивності, залишивши інші властивості, ми отримаємо дійснозначні функції, означені на сім'ях підмножин фіксованих множин, переважно топологічних просторів [17]. Шоке [18] запровадив їх під назвою ємностей, оскільки початково їх дослідження стимулювалось потребами теорії потенціалу, Деннеберг [20] та Сугено [69] пропонували відповідно терміни "неадитивні міри" та "нечіткі міри". Хоча застосування у математичній фізиці і надалі є актуальними, фокус теорії неадитивних мір переважно змістився у бік математичного моделювання економічних та соціальних процесів (див. [27, 32]). Неадитивні міри виступають "замінниками" адитивних, у першу чергу ймовірнісних мір, у ситуаціях, коли точний опис умов та закономірностей експерименту неможливий, тобто має місце невизначеність, неповнота інформації, і "справжні" ймовірності подій недоступні [74]. Інша причина полягає у тому, що, навіть в умовах повної інформації і можливості виразити можливі результати чисельно, реальні гравці чи учасники економічних відносин приймають рішення не на основі математичного сподівання результату, оскільки по-різному сприймають ризик і непевність. Виявляється, що при досить необтяжливих припущеннях переваги можна моделювати, замінивши інтеграл за адитивною мірою (ймовірністю) інтегралом за неадитивною функцією множин [67]. Отже, неадитивна міра вживається як суб'єктивна ймовірність, тому часто називається вірогідністю (plausibility) [33].

Часом неадитивність виникає не внаслідок суб'єктивності, а через те, що можливою є ціла сім'я ймовірнісних (адитивних) розподілів, тоді функція, що їх "огортає", є неадитивною [51]. У будь-якому випадку нова міра успадковує від ймовірності її дійснозначність і невід'ємність, і переважно нормованість, тобто міра від "всього" рівна 1.

Якщо припустити, що вірогідність події A змінюється залежно від зовнішнього параметра, що може набувати n значень $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то A відповідає n чисел $p_1(A), p_2(A), \ldots, p_n(A) \in [0,1]$, тому можемо вважати, що вірогідність $p(A)$ є елементом гратки $[0,1]^n$. Так виникають граткозначні функції множин, які природно називати граткозначними ємностями [55].

Аргументи цих функцій, тим не менш, досі належать до сімей підмножин фіксованих просторів, на яких визначено відношення часткового порядку — включення. Якщо елементи простору X трактувати як можливі стани середовища чи системи, а довільну підмножину $A \subset X$ — як інформацію, що актуальний стан системи лежить в A, то менша підмножина $A \subset B$ містить більше інформації, бо більше звужує сукупність можливих станів. Отже, природно впорядкувати непорожні підмножини *протилежно* до включення. Тоді множина можливих "порцій інформації" виявляється нижньою напівграткою, де інфімум A і B, тобто найточніша інформація, що включає і випадок A, і випадок B, відповідає об'єднанню $A \cup B$. Весь простір X є найменшою (найслабшою) інформацією — "будь-що можливе". Тоді вірогідність події A є її *антитонною* функцією щодо обраного часткового порядку, що природно — що більше ("сміливіше", вужче) припущення, тобто чим менша множина, що йому відповідає, тим менша вірогідність, що воно виявиться правильним. Припущення, що можливе все, є найслабшим (найменшим елементом напівгратки), але гарантовано правильним, тому має вірогідність 1.

Не завжди неповна інформація виражається підмножиною фіксованої множини. Розглянемо приклад з [62]. Для скінченної множини станів $\mathcal{S}$ субімовірнісний розподіл $D : \mathcal{S} \to [0,1]$ гарантує, що для кожного стану $s \in \mathcal{S}$ його ймовірність не менша за $D(s)$. Тоді ймовірність того, що реалізується стан з $A \subset \mathcal{S}$, не менша за $\sum\limits_{s \in A} D(s)$, звідки $\sum\limits_{s \in \mathcal{S}} D(s) \leqslant 1$.

Субімовірнісний розподіл D' надає точнішу інформацію, ніж D (позначаємо $D \sqsubseteq D'$), якщо $D(s) \leqslant D'(s)$ для всіх $s \in \mathcal{S}$. Найменша інформація $\mathbf{0}$, гарантовано правильна, відповідає функції $D \equiv 0$ і стверджує, що ймовірність кожного стану не менша за 0. Тоді множина $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ всіх субімовірнісних розподілів на $\mathcal{S}$ з поточковим порівнянням є нижньою напівграткою з найменшим, але без найбільшого елемента. Нехай відома реальна ймовірність $P(s)$ кожного стану, тоді функція

$$p(D) = 1 - \max\{\sum_{s \in A} D(s) - \sum_{s \in A} P(s) \mid A \subset \mathcal{S}\} \in [0,1]$$

тим менша, чим більше помиляється припущення D у оцінці справжньої ймовірності подій. Оскільки $p(\mathbf{0}) = 1$, можемо вважати $p : \mathcal{D}(\mathcal{S}) \to [0,1]$ функцією вірогідності, яка, очевидно, є антитонною.

Так поступово ми приходимо до окреслення об'єктів нашого дослідження — антитонних функцій на нижніх напівгратках зі значеннями у $[0,1]$ чи іншій гратці, переважно цілком дистрибутивній, які природно назвати *ємностями на напівгратках*. Точне означення буде надано пізніше, зауважимо тільки, що ємність, яка найменший елемент напівгратки відображає у найбільший елемент гратки, називається нормованою. Скажімо, ймовірнісна міра на компакті є нормованою ємністю на напівгратці непорожніх замкнених підмножин цього компакта.

Інший підхід і відповідно інший рівноцінний термін для ємностей на напівгратках беруть початок з денотаційної семантики мов програмування, а, точніше, з піонерської праці Едсґера Дійкстри [22]. Він зауважив, що зміст кожної програми визначається тим, як істинність припущень (предикатів) про вхідні дані впливає на істинність припущень (предикатів) про результат її роботи. Всі можливі (ймовірно, неповні) “порції інформації” про дані чи стан системи у деякий момент утворюють область обчислення (domain of computation) [26]. На цій множині є природний частковий порядок, про який мова вже була вище. Він відбиває ієрархію інформації чи знання: що більше інформації несе елемент (що більш обмежуючим/специфічним він є), то більшим ми його вважаємо. У [26] також обґрунтовано, чому природно вимагати, щоб область обчислення була неперервною напіграткою у сенсі теорії областей, яку створив Дана Скотт, див. [35]. Відповідно, функцію, яка кожній “порції інформації” зіставляє її “ступінь правдивості”, ми, слідуючи [38], називаємо монотонним предикатом на області обчислення. Це і є інший термін для ємності на напівгратці, якому ми надаємо перевагу і який ввійшов у назву дисертаційної роботи.

У згаданій роботі Дійкстри предикати є бінарними, тобто зі значеннями у $\{0, 1\}$, часто розглядають також нечіткі предикати, що діють у $[0, 1]$. Ми поставили за мету вивчити монотонні предикати на неперервних напівгратках зі значеннями у цілком дистрибутивних гратках і показати, що гратки не просто є природними, а неминуче виникають у цьому контексті. Граткозначна теорія нечітких множин є розвиненою і з практичного, і з формально-концептуального боку [36], граткозначна логіка теж стала класичною [52], однак граткозначні предикати [21] є вивченими недостатньо.

Оскільки по суті йдеться про ті ж об’єкти, але досліджувані у рамках досить віддалених теорій, тема є актуальною і тому, що встановлює зв’язки між ними, а також з ідемпотентною лінійною алгеброю [41, 42, 44], про що далі.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась на кафедрі алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника в рамках плану наукових досліджень за проектом Державного фонду фундаментальних досліджень

№25.1/099 “Узагальнення ймовірнісних мір, їх категорні і фрактальні властивості, наближення і застосування”. Результати дисертації також частково використані при виконанні завдань держбюджетної теми “Проблеми нелінійного аналізу щодо продовжень відображень, які належать до різних функціональних класів на топологічних і топологічних векторних просторах” (номер держреєстрації 0118U000097).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є дослідження алгебраїчних, топологічних та категорних властивостей частково впорядкованих множин монотонних предикатів на неперервних напівгратках, відображень і відношень між цими множинами, та можливостей їх застосування у проблемах прийняття рішень в умовах неповної інформації.

Досягнення поставленої мети пов’язане із розв’язанням наступних *завдань*:

– вивчення ідемпотентних напівмодулів монотонних предикатів зі значеннями у цілком дистрибутивних кванталях;
– формалізація ідеї сумісності порцій неповної інформації у вигляді поняття сумісності між неперервними напівгратками та дослідження будови сумісностей з додатковими властивостями і утворених ними класів;
– узагальнення на неперервні напівгратки поняття чіткого та L-нечіткого неоднозначного зображення між компактами, дослідження категорій, складених такими неоднозначними зображеннями;
– з’ясування зв’язку між неоднозначними зображеннями та ідемпотентними узагальненнями векторних топологічних просторів і їх лінійних та афінних відображень;
– дослідження застосовності граткозначних, зокрема, дійснозначних монотонних предикатів на напівгратках у моделюванні ігор з неповною інформацією.

Об'єктом дослідження є неперервні за Скоттом відображення з неперервних напівграток з нулями у цілком дистрибутивні гратки.

Предметом дослідження є властивості напівграток, граток та ідемпотентних напівмодулів, складених монотонними предикатами, а також відображень та відношень між цими алгебраїчними об'єктами.

Методи дослідження. У процесі виконання дисертаційної роботи використані методи теорії неперервних областей, ідемпотентної математики та теорії категорій.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист, є новими. У дисертації вперше:

доведено, що ідемпотентні напівмодулі всіх L-значних монотонних предикатів чи нормованих L-значних монотонних предикатів на областях різних класів є вільними об'єктами для відповідних забуваючих функторів;

введено поняття сумісності між неперервними напівгратками і доведено достатні умови того, що всі сумісності з певними властивостями між фіксованою парою напівграток утворюють цілком дистрибутивну гратку, неперервну гратку, двоїсто неперервну гратку чи неперервну напівгратку з нулем;

описано будову всіх відокремлюючих сильних сумісностей;

побудовано два симетричні тензорні добутки монотонних предикатів зі значенням у цілком дистрибутивній кванталі L, які узагальнюють тензорні добутки адитивних мір, і запропоновано їх інтерпретацію;

описано дію взяття спряженого до граткозначного предиката, і доведено, що вона є звуженням контраваріантного зв'язку Галуа, визначеного сумісностями між сумісностями;

запроваджено чіткі та L-значні неоднозначні зображення, виділено їх підкласи, які утворюють категорії, самодвоїсті щодо контраваріантного функтора взяття псевдооберненого неоднозначного зображення;

доведено, що ці категорії є повними підкатегоріями категорій неперервних ідемпотентних L-напівмодулів, а псевдообернені зображення відповідають ермітово спряженим до ідемпотентно лінійних операторів;

введено грубі ігри двох гравців у розширеній формі, задані через монотонні предикати та неоднозначні зображення, досліджено предикати виплат та їх антитонні трансформери, і доведено апроксимативну теорему про мінімакс.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна використати у денотаційній семантиці мов програмування та теорії прийняття рішень в умовах невизначеності.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статтей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору. У статті [53] співавтору належить аналіз поняття неадитивної міри, означеної на експоненті компакта, та його зв'язку з поняттям монотонного предиката; у спільних працях [6, 57, 58, 59, 60] співавтору належить постановка задач, обговорення результатів та загальне керівництво роботою.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації апробовано на таких наукових конференціях та семінарах:

– VII-ій літній школі "Алгебра, топологія і аналіз" (смт. Верховина, Івано-Франківська обл., липень 5 – 16, 2010);
– VIII-ій літній школі "Алгебра, топологія, аналіз та застосування " (м. Херсон – смт. Лазурне, липень 5 – 15, 2011);
– міжнародній науковій конференції "International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach" (Lviv, September 17 – 21, 2012);
– міжнародній науковій конференції "9-th International Algebraic Conference in Ukraine" (Lviv, July 8 – 13, 2013);
– IX-ій літній школі "Алгебра, топологія і аналіз " (с.Поляниця, Івано-Франківська обл., липень 7 – 18, 2014);

– міжнародній науковій конференції “International Conference of Young Mathematicians” (Kyiv, June 3 – 6, 2015);
– міжнародній науковій конференції “Infinite Dimensional Analysis and Topology. International Conference dedicated to the 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky” (Ivano-Frankivsk, October 16 – 20, 2019).
– звітних науково-практичних конференціях ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”;
– наукових семінарах кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (Івано-Франківськ, 2010 – 2016, 2019 – 2020).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 13 наукових працях: 6 статтях, з яких 3 ([53, 59, 60]) включені до наукометричних баз Scopus та Web of Science Core Collection (серед них 2 статті [59, 60] – у періодичних закордонних виданнях, віднесених відповідно до першого квартиля (Q1) та другого квартиля (Q2) згідно класифікації SCImago Journal Rank), 2 ([57, 58]) — у фахових виданнях із переліку, затвердженого МОН України, та 7 тезах конференцій різного рівня, з яких 4 ([5, 7, 8, 54]) – тези міжнародних конференцій.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, п’яти розділів, висновків, списку використаних джерел, який налічує 74 найменування, та двох додатків. Обсяг основного тексту дисертації – 113 сторінок, обсяг списку використаних джерел – 7 сторінок, обсяг додатків – 3 сторінки.

РОЗДІЛ 1
НЕОБХІДНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Допоміжні означення і факти

У цій роботі ми працюватимемо із нижніми напівгратками. Надалі писатимемо *напівгратка*, маючи на увазі *нижня напівгратка*, якщо не буде вказано інше. Якщо частково упорядкована множина має нижній (верхній) елемент, то позначаємо його 0 (відповідно 1) і називатимемо *нулем*(*одиницею*).

Для часткового порядку $\leqslant$ на множині X відношення $\tilde{\leqslant}$, означене як $x \mathrel{\tilde{\leqslant}} y \iff y \leqslant x$ для $x, y \in X$, є *оберненим* до $\leqslant$ частковим порядком, а позначення $(X, \leqslant)^{op}$ використовуємо для частково упорядкованої множини $(X, \tilde{\leqslant})$. Якщо оригінальний порядок $\leqslant$ є очевидним, то пишемо просто X^{op} для позначення *оберненої* частково упорядкованої множини. Також для позначення оберненого порядку користуватимемось $\tilde{(\,)}$, тобто, $\tilde{X} = X^{op}$, $\tilde{\sup} = \inf$, $\tilde{0} = 1$ і т. п. Для морфізму $f : (X \leqslant) \to (Y, \leqslant)$ в категорії [48] $\mathcal{P}\mathrm{oset}$ частково упорядкованих множин та ізотонних (таких, що зберігають порядок) відображень, позначаємо f^{op} ту саму функцію, але розглядаємо її як $(X, \tilde{\leqslant}) \to (Y, \tilde{\leqslant})$. Очевидно, що функція f^{op} також ізотонна, тому можемо ввести функтор $(-)^{op} : \mathcal{P}\mathrm{oset} \to \mathcal{P}\mathrm{oset}$.

Для підмножини A частково упорядкованої множини $(X, \leqslant)$ позначаємо

$$A{\uparrow} = \{x \in X \mid \text{ існує } a \in A, \text{що } a \leqslant x\},$$

$$A{\downarrow} = \{x \in X \mid \text{ існує } a \in A, \text{що } x \leqslant a\}.$$

Скорочуємо $\{x\}{\uparrow} \equiv x{\uparrow}$, $\{x\}{\downarrow} \equiv x{\downarrow}$. Якщо $A = A{\uparrow}$ $(A = A{\downarrow})$, то множину A називаємо *верхньою* (відповідно *нижньою*).

Підграфіком (або *гіпографом*) відображення f з множини T у частково упорядковану множину L є множина

$$\operatorname{sub} f = \{(t, \alpha) \in T \times L \mid \alpha \leqslant f(t)\}.$$

Його *надграфіком* (або *епіграфом*) є множина

$$\operatorname{epi} f = \{(t, \alpha) \in T \times L \mid f(t) \leqslant \alpha\}.$$

Для частково упорядкованої множини L позначаємо $L^{\top}$ частково упорядковану множину $L \cup \{\top\}$, до якої додали новий верхній елемент $\top \notin L$. Зазначимо, що $L^{\top}$ є повною граткою тоді і тільки тоді, коли L є повною напівграткою.

Топологічною нижньою (чи *верхньою*) *напівграткою* є напівгратка L, на якій існує топологія, для якої відображення $\wedge : L \times L \to L$ (відповідно $\vee : L \times L \to L$) неперервне. Гратка L з топологією, в якій і $\wedge : L \times L \to L$, і $\vee : L \times L \to L$ є неперервними, називається *топологічною граткою*.

Множина A у частково упорядкованій множині $(X, \leqslant)$ називається *напрямленою вгору* (*напрямленою вниз* чи *фільтрованою*), якщо для всіх x, $y \in A$ знайдеться $z \in A$ таке, що $x \leqslant z$, $y \leqslant z$ (відповідно $z \leqslant x$, $z \leqslant y$). Частково упорядкована множина називається *напрямлено повною*, якщо у ній всі напрямлені вгору підмножини мають найменшу верхню межу.

Частково упорядкована множина $(X, \leqslant)$ називається *обмежено повною*, якщо в ній кожна обмежена зверху непорожня підмножина $A \subset X$ має найменшу верхню межу.

Для топології τ на X означимо передпорядок $\leqslant_\tau$ на X наступним чином:

$$x \leqslant_\tau y \;\Leftrightarrow\; \text{з } x \in U \text{ випливає } y \in U \text{ для всіх } x \in \tau.$$

Передпорядок $\leqslant_\tau$ називається *порядком спеціалізації* на X щодо τ. Він є частковим порядком тоді і тільки тоді, коли топологія τ має властивість T_0 [28].

Зафіксуємо частковий порядок $\leqslant$ на множині X. Він є порядком спеціалізації щодо заданої топології τ на X, якщо і тільки якщо з того, що напрямлена вгору відносно $\leqslant$ множина має найменшу верхню грань в $U \in \tau$, випливає, що і сама множина перетинається з в U. Тоді таку топологію називаємо порядково сумісною. Найсильнішою такою топологією є *топологія Скотта* $\sigma(X)$. Вона складається з усіх $U \subseteq X$, для яких $x \in U \;\Leftrightarrow\; U \cap D \neq \varnothing$ для всіх напрямлених вгору відносно $\leqslant$ множин $D \subseteq X$ з найменшою верхньою межею x. Легко бачити, що $U = U\uparrow$.

Відображення f між напрямлено повними частково упорядкованими множинами X та Y є *неперервним за Скоттом*, тобто неперервним щодо $\sigma(X)$ і $\sigma(Y)$, якщо і тільки якщо воно зберігає супремуми напрямлених вгору множин ([35], Твердження II.2-1).

Нижньою топологією $\omega(X)$ на частково упорядкованій множині $(X, \leqslant)$ є найменша топологія, у якій усі множини вигляду $\{x\}\uparrow$ замкнені. Точна верхня грань топологій $\sigma(X)$ та $\omega(X)$ (тобто найменша топологія, яка містить обидві) називається *топологією Лоусона* на X та позначається $\lambda(X)$. Простір $(X, \lambda(X))$ ще позначаємо ΛX.

У напрямлено повній частково упорядкованій множині X нижня множина замкнена за Лоусоном тоді і тільки тоді, коли вона замкнена за Скоттом, тобто, замкнена щодо супремумів напрямлених вгору множин.

Нехай дано частково упорядковану множину L. Кажемо, що елемент x *апроксимує знизу* елемент y і пишемо $x \ll y$, якщо і тільки якщо для всіх напрямлених вгору підмножин $D \subseteq L$, для яких існує $\sup D$, з того, що $y \leq \sup D$ випливає існування елемента $d \in D$, такого, що $x \leq d$. Відношення “апроксимує знизу” має властивості транзитивності та антисиметричності. Якщо для елемента виконується $x \ll x$, то називаємо його *компактним* або *ізольованим щодо апроксимації знизу*, а множина $\{x\}\uparrow$ у такому випадку є відкритою за Скоттом (значить, і за Лоусоном).

Зазначимо, що елемент $\top$ ізольований щодо апроксимації знизу в $L^{\top}$ тоді і тільки тоді, коли кожна напрямлена вгору множина $D \subset L$ має верхню грань в L.

Частково упорядкована множина L називається *неперервною*, якщо кожен її елемент y є найменшою верхньою гранню напрямленої вгору множини усіх $x \in L$ таких, що $x \ll y$. Напрямлена вгору повна неперервна частково впорядкована множина називається *областю*. *Неперервною напівграткою* (*неперервною граткою*) є область, що має всі попарні інфімуми (попарні інфімуми і супремуми). Очевидно, що неперервна гратка [73] з нижнім елементом є повною граткою, а напівгратка S є неперервною тоді і тільки тоді, коли $S^{\top}$ є неперервною напівграткою з одиницею $\top$, ізольованою щодо апроксимації знизу.

Зі Вправи III.2-19 випливає, що у неперервній напівгратці операція попарного інфімуму є неперервною щодо топології Скотта (ця властивість називається meet continuity).

З Теореми II.1-14 і Твердження III.2-6 [35] випливає, що для напрямлено повної частково упорядкованої множини S і області L топології $\lambda(S \times L)$ та $\lambda(S) \times \lambda(L)$ на $S \times L$ збігаються.

У неперервній напівгратці S для кожних елементів $y \ll x$ множина $y \Uparrow = \{z \in S | y \ll z\}$ є околом x у топології Скотта. Щобільше, множини $y \Uparrow$ для всіх $y \ll x$ утворюють локальну базу топології Скотта у точці $x \in S$. Всі ці множини у неперервній напівгратці є відкритими фільтрами, тому кажуть, що топологія Скотта на ній є визначеною фільтрами (filter defined).

Якщо $x \ll y$ у неперервній напівгратці S, то виконано два корисні факти. По-перше, існує відкритий фільтр $\mathrm{F} \subset S$, для якого $y \in \mathrm{F} \subset \{x\}\uparrow$ (наприклад, можемо взяти $\mathrm{F} = \{x\}\Uparrow$). По-друге, існує такий елемент $z \in S$, що $x \ll z \ll y$.

Топологічна напівгратка називається *напівграткою Лоусона* [43, 49], або ще кажуть, що вона має *малі напівгратки*, якщо для кожної її точки знайдеться локальна база з піднапівграток. *Дистрибутивна* топологічна гратка L називається *граткою Лоусона* [35], якщо для кожної її точки існує локальна база з підграток або, що рівносильно, якщо L і L^{op} є напівгратками Лоусона. Згідно з фундаментальною теоремою про компактні напівгратки ([35], Теорема VI.3-4) кожна повна неперервна напівгратка з топологією Лоусона є компактною гаусдорфовою напівграткою Лоусона, а кожна компактна гаусдорфова напівгратка Лоусона є неперервною напівграткою, такою, що топологія, задана на ній, є топологією Лоусона.

Повна гратка L називається *цілком дистрибутивною* [47], якщо для кожного набору множин $(M_t)_{t\in T}$ в L виконується рівність $\inf\{\sup M_t \mid t \in T\} = \sup\{\inf\{\alpha_t \mid t \in T\} \mid (\alpha_t)_{t\in T} \in \prod_{t\in T} M_t\}$. Із цієї властивості випливає дистрибутивність, але не навпаки. Згідно з результатами, отриманими Raney [64], повна гратка є цілком дистрибутивною тоді і тільки тоді, коли вона є компактною гаусдорфовою дистрибутивною граткою Лоусона з деякою топологією (яка в цьому випадку співпадає з топологією Лоусона) [35, Твердження VII-2.8].

Надалі цілком дистрибутивні гратки будемо розглядати із топологією Лоусона.

Топології Лоусона на L та L^{op} узгоджуються між собою. Топологія Скотта на L співпадає з нижньою топологією на L^{op} і навпаки. Отже, топологія на L є супремумом нижніх топологій на L та L^{op}.

Для підмножини $R \subset S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, індекса $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ та елементів $\alpha_1 \in S_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in S_{k-1}, \alpha_{k+1} \in S_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in S_n$, множина

$$\underbrace{\mathrm{pr}_{1\ldots(k-1)(k+1)\ldots n}}_{\text{усі індекси, крім } k\text{-го}}\big(R \cap (\{\alpha_1\} \times \cdots \times \{\alpha_{k-1}\} \times S_k \times \{\alpha_{k+1}\} \times \cdots \times \{\alpha_n\})\big)$$
$$= \{\alpha \in S_k \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) \in R\} \subset S_k$$

називаться *перерізом* R. Позначаємо його $\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} R \alpha_{k+1} \ldots \alpha_n$.

Ми використовуватимемо наступну нескладну властивість.

ЛЕМА 1.1.1. *Нехай S_1, S_2, ..., S_n напрямлено повні частково упорядковані множини, $R \subset S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$. Тоді R замкнена за Скоттом тоді і тільки тоді, коли такими є її перерізи.*

ДОВЕДЕННЯ. Необхідність є очевидною. Щоб довести достатність, зазначимо, що з того, що R замкнена за Скоттом (отже, нижня) випливає, що і S_i нижня множина. Не зменшуючи загальності, можемо обмежитись випадком $n = 2$. Нехай множина $D \subset R \subset S_1 \times S_2$ напрямлена вгору. Тоді множина $D' = D{\downarrow} \subset R$ також напрямлена вгору і нижня в $S_1 \times S_2$, а тому є добутком $D_1 \times D_2$ напрямлених вгору нижніх множин $D_1 \subset S_1$ і $D_2 \subset S_2$. Для довільного $x \in D_1$ множина $\{x\} \times D_2$ міститься в R, тому D_2 міститься у замкненому за Скоттом перерізі xR. Звідки випливає, що найменша верхня межа $b = \sup D_2$, котра існує тому, що S_2 напрямлено повна частково упорядкована множина, є елементом цього перерізу. Отже, $(x, b) \in R$ для всіх $x \in D_1$. Тому D_1 міститься в замкненому за Скоттом перерізі Rb, а значить, $a = \sup D_1$ в напрямлено повній частково упорядкованій множині S_1 також належить до цього перерізу. Ми отримали, що $(a, b) = \sup D' = \sup D$ належить до R для будь-якої напрямленої вгору підмножини $D \subset R$. Тобто, R замкнена за Скоттом. $\square$

Подібним чином, для підмножини $R \subset S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, індекса $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ і *підмножин* $A_1 \subset S_1$, ..., $A_{k-1} \subset S_{k-1}$, $A_{k+1} \subset S_{k+1}$, ...,

$A_n \subset S_n$ позначаємо

$$A_1 \dots A_{k-1} R A_{k+1} \dots A_n = \{\alpha \in S_k \mid \text{існують } \alpha_1 \in S_1, \dots, \alpha_{k-1} \in S_{k-1},$$

$$\alpha_{k+1} \in S_{k+1}, \dots, \alpha_n \in S_n, \text{ для яких } (\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) \in R\}.$$

Розглядаємо кожну підмножину $P \subset X \times Y$ як бінарне відношення і пишемо xPy для $(x, y) \in P$. Також позначаємо $xP = \{y \in Y \mid xPy\}$, $Py = \{x \in X \mid xPy\}$ для всіх $x \in X$, $y \in Y$. Характеристичне відображення відношення позначатимемо тією ж літерою, що і саме відношення:

$$P(x, y) = \begin{cases} 1, (x, y) \in P, \\ 0, (x, y) \notin P, \end{cases} \qquad x \in X, y \in Y.$$

Також позначимо $\bar{P}$ доповнення $(X \times Y) \setminus P$. Очевидно, що $\bar{P}(x, y) = 1 - P(x, y)$.

РОЗДІЛ 2
МОНОТОННІ ПРЕДИКАТИ

Метою цього невеликого розділу є строге окреслення предмету нашого дослідження — монотонних предикатів, висвітлення їх зв'язку з дійснозначними і граткозначними неадитивними мірами на компактах, а також демонстрація того, що простори монотонних предикатів на неперервних напівгратках є вільними ідемпотентними напівмодулями над ними, подібно до того, як простори ймовірнісних мір на компактах є вільними опуклими компактами.

2.1. Монотонні предикати на напівгратках

Надалі неперервне за Скоттом відображення між областями D і D' позначатимемо $D \to D'$, а множину усіх таких відображень $[D \to D']$. Для неперервних (нижніх) напівграток S та S' неперервне за Скоттом відображення, яке зберігає попарні інфімуми, позначаємо $S \twoheadrightarrow S'$, відповідно $[S \twoheadrightarrow S']$ є множиною всіх таких відображень. Якщо згадані вище частково упорядковані множини мають нульові (нижні) елементи, то $[D \to D']_0$ і $[S \twoheadrightarrow S']_0$ є підмножинами, які містять лише ті відповідні відображення, котрі зберігають нижні елементи.

Нехай L — компактна гаусдорфова гратка Лоусона. Для неперервної напівгратки S з леми II.2-5 та теореми II.2-12 [35] випливає, що множина $[S \to L]$ всіх неперервних за Скоттом (отже, ізотонних) відображень з S в L є повною неперервною граткою щодо природнього порядку: $f \leqslant g$, якщо $f(s) \leqslant g(s)$ в L для всіх $s \in S$. Попарні інфімуми і супремуми в $[S \to L]$ та інфімуми у $[S \twoheadrightarrow L]$ обчислюються поаргументно: $f \wedge g(s) = f(s) \wedge g(s)$,

$f \vee g(s) = f(s) \vee g(s)$. Тому $[S \to L]$ з топологією Лоусона є компактною гаусдорфовою граткою Лоусона, а $[S \twoheadrightarrow L]$ — її нижньою піднапівграткою. Те, що дійснозначні ємності утворюють гратки, було зауважено вже давно [40].

Щобільше, з [30, Теорема 4] випливає (хоча названо “фольклорним знанням” у [38]), що для області S і цілком дистрибутивної гратки L множина $[S \to L]$ є цілком дистрибутивною граткою. Якщо ж у S є найменший елемент, то і $[S \to L]_0$ є цілком дистрибутивною граткою. Оскільки тоді L^{op} теж цілком дистрибутивна гратка, то такою ж є і множина $[S \to L^{op}]^{op}$. Згідно з [38] її елементи називаємо *L-нечіткими монотонними предикатами* на S. Зауважимо що порядок на множині нечітких предикатів поточковий, тобто $m_1 \leqslant m_2$ тоді і тільки тоді, коли $m_1(a) \leqslant m_2(a)$ в L (не у L^{op}!) для всіх $a \in S$. Водночас $m \in [S \to L^{op}]^{op}$ є *антитонним* відображенням $S \to L$.

Розглянемо практичний зміст L-нечітких монотонних предикатів на S. Ми використовуватимемо базові поняття денотаційної семантики мов програмування. Розглянемо систему станів обчислювального процесу. Всеможливі (можливо, неповні) порції інформації, яку ми можемо отримати про стан процесу, утворюють *область обчислення* S [26]. На цій множині введемо частковий порядок $\leqslant$, який відображає ієрархію інформації: більший елемент містить більше інформації, тобто описує стан процесу точніше. Найменший елемент позначаємо $0 \in S$ (жодної інформації, нічого не відомо), а для довільних a і b в S їх інфімум $a \wedge b$ можна (хоча не обов’язково) розуміти як “a або b є істиною”.

Надалі вважаємо L цілком дистрибутивною граткою [35]. Позначимо 0, 1, $\oplus$ і $\otimes$ відповідно нижній елемент, верхній елемент, попарні супремум та інфімум в L. Елементи цієї (довільної, проте фіксованої в даній роботі) гратки ми використовуватимемо для визначення міри істинності. Операція $\oplus$ є диз’юнкцією, хоча кон’юнкція не обов’язково співпадає з $\otimes$.

Тоді для $m \in [S \to L^{op}]^{op}$ та $a \in S$ розглядаємо $m(a)$ як значення істинності (ступінь певності) для a, виражений у шкалі L. Зрозуміло, що при $a \leqslant b$ (інформація b більше звужує можливі стани системи, ніж a) маємо $m(a) \geqslant m(b)$, тобто певність у b поступається певності у a. Природно також, що припущення $0 \in S$ ("трапитись може будь-що") не може бути помилковим, тому варто вимагати $m(0) = 1 \in L$, тобто $m(0) = \tilde{0} \in L^{op}$. Такий монотонний предикат m належить до $[S \to L^{op}]_0^{op}$, і називаємо його *нормованим*.

Відомо (див. впр. VI.3-18 [35]), що *топологія Вієторіса* [50] на множині $\exp X$ всіх непорожніх замкнених підмножин компактного гаусдорфового простору X є топологією Лоусона на $(\exp X)^{op}$, тобто на $\exp X$, впорядкованій *обернено* до включення. Ми позначатимемо цю множину $\exp_{\supset} X$. З даною топологією вона утворює компактну гаусдорфову напівгратку Лоусона, а тому є повною неперервною (нижньою) напівграткою. Звідси, елемент $f \in [\exp_{\supset} X \to L^{op}]$ є ізотонним відображенням, що зберігає супремуми напрямлених вгору множин, тобто ізотонним відображенням $f : \exp X \to L$, що зберігає інфімуми фільтрованих наборів множин: $f(\bigcap \mathcal{A}) = \inf\{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ для всіх напрямлених вниз наборів $\mathcal{A}$ замкнених непорожніх підмножин X. Це не що інше, як τ-гладка (тобто напівнеперервна згори) L^{op}-значна ємність на X [55]. Якщо додатково відомо, що $f(X) = 1 \in L$ для найменшого елемента $X \in \exp_{\supset} X$, то ємність f є нормованою, тому термінологія для ємностей і предикатів є узгодженою.

Отже, монотонні предикати є узагальненням граткозначних ємностей на компакті, подібно до того, як σ-адитивна міра на повній булевій алгебрі є узагальненням σ-адитивної міри, означеної на σ-алгебрі множин. Тому надалі для L-нечітких монотонних предикатів на неперервній напівгратці S вживаємо рівносильний термін *L-значна ємність на напівгратці S*, і позначаємо $\underline{M}_{[L]}S = [S \to L^{op}]^{op}$ множину всіх предикатів (L-ємностей) і $M_{[L]}S =$

$[S \to L^{op}]_0^{op}$ її підмножину, що складається з нормованих предикатів (для напівгратки S з найменшим елементом).

Прикладом найпростішої нормованої ємності є $c_0 : S \to L^{op}$:

$$c_0(s) = \begin{cases} 1 = \tilde{0}, s = 0, \\ 0 = \tilde{1}, s \neq 0, \end{cases} \qquad s \in S.$$

Ємність $c \in \underline{M}_{[L]}S$ є нормованою тоді і тільки тоді, коли $c_0 \leqslant c$. Тому множина $M_{[L]}S$ всіх нормованих L-ємностей на S^{op} є не що інше, як $\{c_0\}\uparrow$ в $\underline{M}_{[L]}S$. Зі сказаного вище зрозуміло:

Твердження 2.1.1. *Частково впорядковані множини $\underline{M}_{[L]}S$ та $M_{[L]}S$ є цілком дистрибутивними гратками, тому є компактними гаусдорфовими гратками Лоусона з відповідними топологіями Лоусона.*

В цьому розділі для функцій f, g зі спільною областю визначення, сталої α і бінарної операції $*$ через $f * g$, $\alpha * f$ і $f * \alpha$ позначатимемо функції зі спільною областю визначення, отримані поточковим застосуванням операції $*$. Надалі для сім'ї функцій, що мають спільну область визначення і діють у частково упорядковану множину, користуватимемось $\sup_p$ та $\inf_p$ для позначення поточкових супремумів та інфімумів відповідно.

Для елемента $d_0 \in S$ позначатимемо $\eta_{[L]}S(d_0)$ функцію $S \to L$, яка кожному $d \in S$ ставить у відповідність 1, якщо $d \leqslant d_0$, та 0 в іншому випадку. Легко бачити, що $\eta_{[L]}S(d_0) \in M_{[L]}S \subset \underline{M}_{[L]}S$ і $\eta_{[L]}S(0)$ є мінімальним елементом в $M_{[L]}S$.

Лема 2.1.2 (1.1, [62]). *Відображення $\eta_{[L]}S : S \to \underline{M}_{[L]}S$ є вкладенням щодо топологій Скотта та щодо нижніх топологій.*

Зауваження. Якщо у S є найменший елемент, то $M_{[L]}S$ є повною підграткою у $\underline{M}_{[L]}S$. Тоді $\eta_{[L]}S$ як відображення : $S \to M_{[L]}S$ є вкладенням щодо топологій Скотта та щодо нижніх топологій.

Тому ми розглядаємо S як підпростір і $M_{[L]}S$, і $\underline{M}_{[L]}S$ по відношенню до нижньої топології та топології Скотта, а тому і лоусонової, на обох множинах. Якщо S є неперервною напівграткою, то вона також є нижньою піднапівграткою в $M_{[L]}S$ та $\underline{M}_{[L]}S$.

Попарні інфімуми і супремуми повних граток $\underline{M}_{[L]}S$ і $M_{[L]}S$ обчислюються поточково. Розглянемо як обчислюються довільні супремуми. Для функції $f : S \to L$ покладемо

$$f^u(b) = \inf\{f(a) \mid a \in S, a \ll b\}, \text{ for all } b \in S.$$

Зазначимо, що f^u завжди є монотонним предикатом. Більше того [71, Лема I.4]:

Лема 2.1.3. *Для антитонної функції $f : S \to L$ функція f^u є найменшим монотонним предикатом f', таким, що $f \leqslant f'$ поточково.*

Отже, для сім'ї $\mathcal{F} \subset \underline{M}_{[L]}S$ (або $\mathcal{F} \subset M_{[L]}S$) маємо $\inf \mathcal{F} = \inf_p \mathcal{F}$, $\sup \mathcal{F} = (\sup_p \mathcal{F})^u$. У випадку скінченної сім'ї $\mathcal{F}$ останнє ^{u} непотрібне.

Користуватимемось символами $\bar{\oplus}$ та $\bar{\otimes}$ для позначення відповідно попарних супремумів та інфімумів у $\underline{M}_{[L]}S$ і $M_{[L]}S$.

Зауважимо, що для $f \in [S \to L^{op}]$ підграфік $\operatorname{sub} f = \{(s, \alpha) \in S \times L \mid \alpha \leqslant f(s)\}$ є нижньою множиною, замкненою щодо напрямлених супремумів, а тому, замкненою за Скоттом $\equiv$ Лоусоном в $\Lambda(S \times L)$. Оскільки S і L є областями, звідки $\Lambda(S \times L) = \Lambda S \times \Lambda L$, то для множини $F = \operatorname{sub} c$ виконується наступне:

(1) F є замкненою нижньою підмножиною множини $\Lambda S \times \Lambda L$;

(2) для всіх $s \in S$ множина $\{\alpha \in L \mid (s, \alpha) \in F\}$ є непорожньою (оскільки містить $\min L$) і напрямленою вгору (тому, що містить найбільший елемент).

ТВЕРДЖЕННЯ 2.1.4. *Кожна підмножина $F \subset S \times L$, яка задовольняє описані вище умови (1),(2), є підграфіком єдиного відображення $f \in [S \to L]$.*

ДОВЕДЕННЯ. Якщо таке відображення f існує, то воно породжується рівністю $f(s) = \sup\{\alpha \in L \mid (s,\alpha) \in F\}$ для $s \in S$. Найменша верхня грань існує, оскільки множина справа напрямлена вгору, а L є повною щодо напрямлених вгору множин граткою. Тому f може бути означене останньою формулою. Припустимо, що множина $D \subset S$ напрямлена вгору і $f(d) \geqslant \alpha$ для всіх $d \in D$. Тоді $\{(d,\alpha) \mid d \in D\}$ є напрямленою вгору підмножиною F і супремумом такої множини є (s,α), де $s = \sup D$. Із замкненості F маємо $(s,\alpha) \in F$. Отже, $f(s) \geqslant \alpha$. З цього слідує, що $f(\sup D) = \sup f(D)$ в L^{op}. Таким чином, f є неперервним за Скоттом відображенням. $\square$

2.2. Напівмодулі монотонних предикатів

Надалі вимагатимемо, щоб L була *кванталлю з одиницею* [65], тобто існувала бінарна нескінченно дистрибутивна по відношенню до супремуму по обох змінних операція $* : L \times L \to L$, для якої 1 — двостороння одиниця. Отже, $*$ є неперервною щодо до топології Скотта на L. Зазначимо, що для $*$ нескінченна дистрибутивність також і відносно інфімумів означає неперервність щодо до топології Лоусона на L. Нагадаємо, що ми розуміємо $\oplus$ як диз'юнкцію, а $*$ вважатимемо (можливо, некомутативною) кон'юнкцією в L-значній нечіткій логіці [37]. У випадку $L = \{0,1\}$ маємо $\oplus = \vee$ і $* = \wedge$.

Нагадаємо, що (лівим ідемпотентним) $(L,\oplus,*)$-напівмодулем [11] є множина X з операціями $\bar{\oplus} : X \times X \to X$ і $\bar{*} : L \times X \to X$, такими, що для всіх $x, y, z \in X, \alpha, \beta \in L$:

(1) $x \bar{\oplus} y = y \bar{\oplus} x$;

(2) $(x \mathbin{\bar{\oplus}} y) \mathbin{\bar{\oplus}} z = x \mathbin{\bar{\oplus}} (y \mathbin{\bar{\oplus}} z)$;

(3) існує (очевидно, єдиний) елемент $\bar{0} \in X$, такий, що $x \mathbin{\bar{\oplus}} \bar{0} = x$ для всіх x;

(4) $\alpha \mathbin{\bar{*}} (x \mathbin{\bar{\oplus}} y) = (\alpha \mathbin{\bar{*}} x) \mathbin{\bar{\oplus}} (\alpha \mathbin{\bar{*}} y)$, $(\alpha \oplus \beta) \mathbin{\bar{*}} x = (\alpha \mathbin{\bar{*}} x) \mathbin{\bar{\oplus}} (\beta \mathbin{\bar{*}} x)$;

(5) $(\alpha * \beta) \mathbin{\bar{*}} x = \alpha \mathbin{\bar{*}} (\beta \mathbin{\bar{*}} x)$;

(6) $1 \mathbin{\bar{*}} x = x$; і

(7) $0 \mathbin{\bar{*}} x = \bar{0}$.

З даних аксіом випливає, що $(X, \bar{\oplus})$ є верхньою напівграткою з нижнім елементом $\bar{0}$, порядок на якій означується як $x \leqslant y \iff x \mathbin{\bar{\oplus}} y = y$ і $\alpha \mathbin{\bar{*}} \bar{0} = \bar{0}$ для всіх $\alpha \in L$. Операція $\bar{*}$ ізотонна по обох змінних.

Тому $(L, \oplus, *)$-напівмодуль є аналогом векторного простору. Подібно, аналоги існують для лінійних та афінних відображень. Відображення $f : X \to Y$ між $(L, \oplus, *)$-напівмодулями називається *лінійним*, якщо для будь-яких $x_1, \dots, x_n \in X$ та $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ виконуєтся рівність

$$f(\alpha_1 \mathbin{\bar{*}} x_1 \mathbin{\bar{\oplus}} \cdots \mathbin{\bar{\oplus}} \alpha_n \mathbin{\bar{*}} x_n) = \alpha_1 \mathbin{\bar{*}} f(x_1) \mathbin{\bar{\oplus}} \cdots \mathbin{\bar{\oplus}} \alpha_n \mathbin{\bar{*}} f(x_n).$$

Якщо остання рівність має місце лише у випадку, коли $\alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_n = 1$, то f називаємо *афінним*. Зазначимо, що афінне відображення f зберігає попарні супремуми, тобто $f(x_1 \mathbin{\bar{\oplus}} x_2) = f(x_1) \mathbin{\bar{\oplus}} f(x_2)$ для всіх $x_1, x_2 \in X$. Афінне відображення є лінійним тоді і тільки тоді, коли воно зберігає найменший елемент.

Називаємо трійку $(X, \bar{\oplus}, \bar{*})$ *неперервним* $(L, \oplus, *)$-*напівмодулем*, якщо $(X, \bar{\oplus}, \bar{*})$ є $(L, \oplus, *)$-напівмодулем, для якого $(X, \bar{\oplus})$ – область, а операція $\bar{*}$ є нескінченно дистрибутивною по обох змінних (отже, неперервною за Скоттом). Якщо $(X, \bar{\oplus})$ має супремуми всіх підмножин, то $(X, \bar{\oplus}, \bar{*})$ називається *повним неперервним* $(L, \oplus, *)$-*напівмодулем*. Якщо частково впорядкована множина $(X, \bar{\oplus})$ є цілком дистрибутивною граткою, то називаємо $(X, \bar{\oplus}, \bar{*})$ *цілком дистрибутивним* $(L, \oplus, *)$-*напівмодулем*. Це рівносильне тому, що

X має компактну гаусдорфову топологію, для якої верхня напівгратка $(X, \bar{\oplus})$ є дистрибутивною лоусоновою граткою і операція $\bar{*} : L \times X \to X$ напівнеперервна знизу. Тому ми використовуємо рівносильний термін "*компактний гаусдорфовий лоусоновий* $(L, \oplus, *)$*-напівмодуль*" — це ідемпотентний аналог векторного топологічного простору [66].

Нехай маємо область S. Для $m \in \underline{M}_{[L]}S$ означимо $\alpha \mathbin{\bar{\odot}} m$ як найменший предикат $m' : S \to L$, для якого $\alpha * m(b) \leqslant m'(b)$ для всіх $b \in S$, тобто $\alpha \mathbin{\bar{\odot}} m = (\alpha * m)^u$. Тоді:

$$(\alpha \mathbin{\bar{\odot}} m)(b) = \inf\{\alpha * m(a) \mid a \in S, a \ll b\}.$$

Якщо S має найменший елемент, тоді для $m \in M_{[L]}S$ потрібно "підкоригувати" результат:

$$(\alpha \mathbin{\bar{\circledast}} m)(b) = (\alpha \mathbin{\bar{\odot}} m)(d) \mathbin{\bar{\oplus}} \delta_L^S = \begin{cases} (\alpha \mathbin{\bar{\odot}} m)(b), & b \neq 0; \\ 1, & b = 0. \end{cases}$$

Твердження 2.2.1 (1.7, [62]). *Трійки* $(\underline{M}_{[L]}S, \bar{\oplus}, \bar{\odot})$ *та* $(M_{[L]}S, \bar{\oplus}, \bar{\circledast})$ *є компактними гаусдорфовими лоусоновими* $(L, \oplus, *)$*-напівмодулями.*

Ми розглядатимемо категорії, які можуть бути означені як у топологічних термінах, так і з використанням порядково-теоретичних властивостей.

Категорію всіх областей та їх неперервних за Скоттом відображень позначаємо $\mathcal{D}\mathrm{om}$. Її повна підкатегорія, об'єктами якої є всі області з нульовими елементами, позначається $\mathcal{D}\mathrm{om}_\perp$. Якщо вимагати, щоб морфізми зберігали нижні елементи, то отримаємо підкатегорію $\mathcal{D}\mathrm{om}_0$.

Категорія, яка складається з усіх неперервних напівграток та неперервних за Скоттом напівграткових морфізмів, позначається $\mathcal{CS}\mathrm{em}$. Ширша категорія, яка складається з усіх неперервних напівграток та неперервних за Скоттом відображень, котрі не обов'язково зберігають попарні інфімуми, позначається $\mathcal{CS}\mathrm{em}_\uparrow$. Позначимо $\mathcal{CS}\mathrm{em}_{0\uparrow}$ підкатегорію $\mathcal{CS}\mathrm{em}_\uparrow$, яка виникає, коли ми розглядаємо тільки напівгратки з нижніми елементами та їх відображення, що зберігають нижні елементи. Нарешті, позначаємо $\mathcal{CS}\mathrm{em}_\perp$ категорію усіх напівграток з нижніми елементами та їх неперервних за Скоттом відображень (не обов'язково зберігаючих 0).

Нагадаємо, що згідно з фундаментальною теоремою про компактні напівгратки [35, Теорема VI-3.4] неперервна напівгратка є повною тоді і тільки тоді, коли вона (з деякою, заданою на ній компактною гаусдорфовою топологією) є топологічною напівграткою, у кожній точці якої існує локальна база з піднапівграток, тобто, вона є компактною гаусдорфовою граткою Лоусона і топологія на ній співпадає з топологією Лоусона. Зазначимо, що всі такі напівгратки мають нижні елементи.

Отже, позначимо $\mathcal{LL}\mathrm{aws}$ категорію усіх компактних гаусдорфових нижніх напівграток Лоусона та їх неперервних відображень, які зберігають нульовий елемент, або, що рівносильно, усіх повних неперервних напівграток та їх відображень, які зберігають усі інфімуми і напрямлені вгору супремуми. Це досить вузька категорія, тому позначимо $\mathcal{LL}\mathrm{aws}_\uparrow$ категорію з тими самими об'єктами, але з *неперервними за Скоттом* відображеннями в ролі морфізмів. Її підкатегорію, яка складається тільки з тих неперервних за Скоттом відображень, котрі зберігають 0, позначимо $\mathcal{LL}\mathrm{aws}_{0\uparrow}$.

Також розглянемо категорії $(L,\oplus,*)$-$\mathcal{CSM}\mathrm{od}_\uparrow$ та $(L,\oplus,*)$-$\mathcal{CSA}\mathrm{ff}_\uparrow$, котрі складаються з усіх повних неперервних $(L,\oplus,*)$-напівмодулів та їх неперервних за Скоттом відповідно лінійних та афінних відображень. Такі відображення зберігають усі супремуми. Розглядаючи тільки цілком дистрибутивні $(L,\oplus,*)$-напівмодулі, отримаємо повні підкатегорії $(L,\oplus,*)$-$\mathcal{L}\mathrm{w}\mathcal{SM}\mathrm{od}_\uparrow$ та $(L,\oplus,*)$-$\mathcal{L}\mathrm{w}\mathcal{SA}\mathrm{ff}_\uparrow$ відповідно.

Теорема 2.1. [58] *Для кожного неперервного за Скоттом відображення* $\varphi : S \to K$ *з області у повний неперервний* L*-напівмодуль існує єдине продовження* $\Phi : \underline{M}_{[L]}S \to K$ *до морфізму у* $(L, \oplus, *)$-$\mathcal{CSM}\mathrm{od}_{\uparrow}$.

Доведення. Для всіх $\alpha \in L, d \in S$ відображення $\alpha * \eta_{[L]}S(d) : S \to L$ є монотонним предикатом, отже, $\alpha * \eta_{[L]}S(d) = \alpha \,\bar{\odot}\, \eta_{[L]}S(d)$. Зауважимо також, що $m \in \underline{M}_{[L]}S$ є найменшою верхньою гранню множини $\{m(d) * \eta_{[L]}S(d) \mid d \in S\}$.

Тому, якщо таке продовження Φ існує, то воно задається формулою

$$\begin{aligned}\Phi(m) &= \sup\{\Phi(m(d) \,\bar{\odot}\, \eta_{[L]}S(d)) \mid d \in S\}\\ &= \sup\{m(d) \,\bar{\odot}\, \Phi(\eta_{[L]}S(d)) \mid d \in S\}\\ &= \sup\{m(d) \,\bar{\odot}\, \varphi(d) \mid d \in S\}\end{aligned}$$

для всіх $m \in \underline{M}_{[L]}S$.

Оскільки супремуми в $\underline{M}_{[L]}S$ обчислюються поточково, то неважко побачити, що відображення Φ зберігає довільні супремуми. Продовжимо Φ за формулою, заданою вище, на множину *усіх* антитонних функцій $m : S \to L$.

Очевидно, що з $m \leqslant m^u$ випливає $\Phi(m) \leqslant \Phi(m^u)$. З іншого боку, для будь-яких $k \in K$, $k \ll \Phi(m^u)$ існують $d_1, \ldots, d_n \in S$ такі, що $k \ll m^u(d_1) \,\bar{\odot}\, \varphi(d_1) \,\bar{\oplus} \cdots \bar{\oplus}\, m^u(d_n) \,\bar{\odot}\, \varphi(d_n)$. Нехай $d_1' \ll d_1, \ldots, d_n' \ll d_n$ і кожне d_i' прямує до відповідного d_i. Користуючись неперервністю за Скоттом φ і $\bar{\odot}$, маємо

$$m^u(d_1)\bar{\odot}\varphi(d_1')\bar{\oplus}\cdots\bar{\oplus}m^u(d_n)\bar{\odot}\varphi(d_n') \to m^u(d_1)\bar{\odot}\varphi(d_1)\bar{\oplus}\cdots\bar{\oplus}m^u(d_n)\bar{\odot}\varphi(d_n).$$

Отже, існують $d_1' \ll d_1, \ldots, d_n' \ll d_n$ такі, що

$$\begin{aligned}k &\leqslant m^u(d_1) \,\bar{\odot}\, \varphi(d_1') \,\bar{\oplus} \cdots \bar{\oplus}\, m^u(d_n) \,\bar{\odot}\, \varphi(d_n')\\ &\leqslant m(d_1') \,\bar{\odot}\, \varphi(d_1') \,\bar{\oplus} \cdots \bar{\oplus}\, m(d_n') \,\bar{\odot}\, \varphi(d_n') \leqslant \Phi(m).\end{aligned}$$

З неперервності K отримуємо $\Phi(m) \geqslant \Phi(m^u)$. Тому $\Phi(m) = \Phi(m^u)$.

Тепер для всіх $\alpha \in L, m \in \underline{M}_{[L]}S$:

$$\Phi(\alpha \mathbin{\bar{\odot}} m) = \Phi((\alpha * m)^u) = \Phi(\alpha * m) = \sup\{(\alpha * m(d)) \mathbin{\bar{\odot}} \varphi(d) \mid d \in S\}$$
$$= \sup\{\alpha \mathbin{\bar{\odot}} (m(d) \mathbin{\bar{\odot}} \varphi(d)) \mid d \in S\}$$
$$= \alpha \mathbin{\bar{\odot}} \sup\{m(d) \mathbin{\bar{\odot}} \varphi(d) \mid d \in S\}$$
$$= \alpha \mathbin{\bar{\odot}} \Phi(m).$$

□

Теорема 2.2. *Для кожного неперервного за Скоттом відображення $\varphi : S \to K$ з області з нижнім елементом у повний неперервний L-напівмодуль існує єдине продовження $\Phi : M_{[L]}S \to K$ до морфізму в $(L, \oplus, *)$-$\mathcal{CSA}\mathrm{ff}_\uparrow$. Це продовження є лінійним, тобто морфізмом у категорії $(L, \oplus, *)$-$\mathcal{CSM}\mathrm{od}_\uparrow$, якщо і тільки якщо φ зберігає нульовий елемент.*

Доведення є аналогічним, тільки продовження означується за формулою

$$\Phi(m) = \varphi(0) \mathbin{\bar{\oplus}} \sup\{m(d) \mathbin{\bar{\odot}} \varphi(d) \mid d \in S\}$$

для всіх $m \in M_{[L]}S$.

Зауваження. Формально кажучи, два останні твердження означають, що $\underline{M}_{[L]}S$ (відповідно $M_{[L]}S$) є вільним об'єктом [13] над S. І категорія, з якої обирається S, і категорія, до якої належатиме $\underline{M}_{[L]}S$ чи $M_{[L]}S$, можуть бути обрані по різному, оскільки $\underline{M}_{[L]}S$ і $M_{[L]}S$ є цілком дистрибутивними гратками, а, "забуваючи" множення на них, отримуємо не просто області, а також неперервні і навіть повні неперервні напівгратки. Тому маємо три твердження, еквівалентні до двох попередніх.

Твердження 2.2.2. *Для об'єкта S категорії $\mathcal{D}\mathrm{om}$ (або $\mathcal{CS}\mathrm{em}_\uparrow$, або $\mathcal{LL}\mathrm{aws}_\uparrow$) повний неперервний L-напівмодуль $\underline{M}_{[L]}S$ є вільним об'єктом над S в $(L, \oplus, *)$-$\mathcal{CSM}\mathrm{od}_\uparrow$ (або в $(L, \oplus, *)$-$\mathcal{L}\mathrm{w}\mathcal{SM}\mathrm{od}_\uparrow$).*

Твердження 2.2.3. *Для об'єкта S категорії $\mathcal{D}\mathrm{om}_\perp$ (або $\mathcal{CS}\mathrm{em}_\perp$, або $\mathcal{LL}\mathrm{aws}_\uparrow$) повний наперервний L-напівмодуль $M_{[L]}S$ є вільним об'єктом над S в $(L, \oplus, *)$-$\mathcal{CSA}\mathrm{ff}_\uparrow$ (або в $(L, \oplus, *)$-$\mathcal{L}\mathrm{w}\mathcal{SA}\mathrm{ff}_\uparrow$).*

Твердження 2.2.4. *Для об'єкта S категорії $\mathcal{D}\mathrm{om}_{\mathbf{0}}$ (або $\mathcal{CS}\mathrm{em}_{\mathbf{0}}$, або $\mathcal{LL}\mathrm{aws}_{\mathbf{0}\uparrow}$) повний неперервний L-напівмодуль $\underline{M}_{[L]}S$ є вільним об'єктом над S в $(L, \oplus, *)$-$\mathcal{CSM}\mathrm{od}_\uparrow$ (або в $(L, \oplus, *)$-$\mathcal{L}\mathrm{w}\mathcal{SM}\mathrm{od}_\uparrow$).*

Висновки до розділу 2.

У другому розділі обґрунтовано поширення поняття монотонного предиката на функції зі значеннями у цілком дистрибутивних гратках і доведено, що L-значні монотонні предикати утворюють ідемпотентні напівмодулі, які є вільними об'єктами над неперервними напівгратками і цілком дистрибутивними гратками у категоріях неперервних L-напівмодулів та цілком дистрибутивних L-напівмодулів.

Результати розділу опубліковано у працях [3, 58].

РОЗДІЛ 3

СУМІСНОСТІ І СПРЯЖЕНІСТЬ

Як було сказано, граткозначні монотонні предикати можна (але не обов'язково) інтерпретувати як оцінки ступеня вірогідності чи застосовності "порцій часткової інформації" про стан процесу або системи. При цьому природно виникає питання про сумісність різних порцій інформації, як і про сумісність різних оцінок їх вірогідності.

Хоча можна досліджувати сумісність кількох припущень чи тверджень, ми обмежимось "попарними" сумісностями, які є функціями двох аргументів і набувають два значення — 0 і 1, які, знову ж, можна розуміти як "можливо" або "цілком неможливо". Залежно від потреб можна накладати різні обмеження на ці функції, виділяючи різні їх класи.

3.1. Сумісності

3.1.1. Поняття сумісності.

ОЗНАЧЕННЯ 3.1.1. Нехай маємо неперервні напівгратки S, S' з нульовими елементами $0, 0'$ відповідно. Відображення $P : S \times S' \to \{0, 1\}$ назвемо *сумісністю* між S і S', якщо

(1) P зберігає нулі по обох змінних, тобто $P(0, y) = P(x, 0') = 0$ для всіх $x \in S$, $y \in S'$;

(2) P неперервне за Скоттом.

Множину усіх сумісностей на $S \times S'$ позначимо $C_w(S, S')$.

Якщо ж додатково виконується

(3) P відокремлює елементи S і S', тобто,

(3a) для будь-яких $x_1, x_2 \in S$ з того, що $P(x_1, y) = P(x_2, y)$ для всіх $y \in S'$, випливає $x_1 = x_2$;

(3b) для будь-яких $y_1, y_2 \in S'$ з того, що $P(x, y_1) = P(x, y_2)$ для всіх $x \in S$, випливає $y_1 = y_2$,

то називаємо P *відокремлюючою сумісністю*.

Означення (відокремлюючої) сумісності є симетричним у тому сенсі, що відображення $P' : S' \times S \to \{0, 1\}$, $P'(y, x) = P(x, y)$ також є (відокремлюючою) сумісністю, яку ми називаємо *оберненою сумісністю*. Для сумісностей ми використовуємо також позначення $xPy \equiv P(x, y)$.

Ми можемо розглядати сумісність $P : S \times S' \to \{0, 1\}$ як характеристичне відображення бінарного відношення $P \subset S \times S'$, а тому природно позначати $xP = \{y \in S' \mid xPy = 1\}$, $Py = \{x \in S \mid xPy = 1\}$ для всіх $x \in S$, $y \in S'$.

Інтерпретуємо $P(x, y) = 1$ як “порції інформації x та y несумісні (не можуть виконуватись одночасно)”. Тому, ймовірно, термін “несумісність” був би відповіднішим. Сумісність $P : S \times S' \to \{0, 1\}$ є відокремлюючою, якщо для всіх $x_1 \neq x_2$ в S знайдеться $y \in S'$, для якого рівно один з x_i несумісний з y по відношенню до P, аналогічно для $y_1 \neq y_2$ в S' і $x \in S$. Тоді елементи S' можуть розглядатись як “негативні твердження” про стан системи, спостережуваний у S : маючи $y \in S'$ і відокремлюючу сумісність P, ми оголошуємо неможливим виконання усіх $x \in S$, для яких $xPy = 1$.

Неважко переконатися, що найбільшою з усіх сумісностей між S і S' є R_0, де

$$R_0(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = 0 \text{ або } y = 0, \\ 1, & \text{якщо } x \neq 0 \text{ і } y \neq 0. \end{cases}$$

Отже, $C_w(S, S') = R_0 \downarrow$ у множині $[S \times S' \to \{0, 1\}]$, тобто

$$\{f : S \times S' \to \{0, 1\} \mid f \text{ – неперервне за Скоттом}\},$$

яка є цілком дистрибутивною граткою згідно Теореми 4 [30]. Тоді і $C_w(S, S')$ є цілком дистрибутивною граткою, а R_0 — її найбільшим елементом. Відповідно у множині $\tilde{C_w}(S, S')$ з протилежним порядком R_0 є найменшим елементом (нулем).

3.1.2. Види і приклади сумісностей. Зауважимо, що від сумісності по кожному аргументу при фіксованому іншому вимагається тільки неперервність за Скоттом і збереження нуля. Накладаючи додаткові обмеження, отримаємо вужчі класи сумісностей. Кажемо, що сумісність $P : S \times S'$ зберігає попарні інфімуми (meets) по першому аргументу, якщо для кожних $x_1, x_2 \in S$, $y \in S'$ виконано $P(x_1 \wedge x_2, y) = P(x_1, y) \wedge P(x_2, y)$. Підмножину таких сумісностей позначаємо $C_{\wedge\bullet}(S, S') \subset C_w(S, S')$. Аналогічно $C_{\bullet\wedge}(S, S') \subset C_w(S, S')$ позначено підмножину сумісностей, що зберігають попарні інфімуми по другому аргументу. Елементи множини $C_{\wedge\wedge}(S, S') \subset C_w(S, S')$, тобто сумісності, що зберігають попарні інфімуми по обох аргументах, називаємо *сильними сумісностями*. Збереження попарних інфімумів по першому аргументу означає, що якщо x_1 та x_2 несумісні (не можуть виконуватись одночасно) з y, то й “x_1 або x_2” несумісне з y, аналогічно для другого аргумента. Це, мабуть, найважливіший клас, який далі буде розглянуто окремо.

У довільній напівгратці існування попарних супремумів (joins) не гарантується. Якщо у неперервній напівгратці L з нулем вони завжди існують, тобто вона є *неперервною граткою*, звідки є повною граткою і містить одиницю 1, то кажемо, що сумісність $P : S \times L \to \{0, 1\}$ зберігає попарні супремуми по другому аргументу, якщо $P(x, y_1 \vee y_2) = P(x, y_1) \vee P(x, y_2)$ для всіх $x \in S$, $y_1, y_2 \in L$. Позначимо $C_{\bullet\vee}(S, L)$ множину таких сумісностей. Тоді для кожного $x \in S$ множина $\{y \in L \mid P(x, y) = 0\}$ містить нуль, є замкненою за

Скоттом і напрямленою вгору. Звідси випливає, що вона має найбільший елемент y_0, і $\{y \in L \mid P(x, y) = 0\} = y_0{\downarrow}$. Функція P однозначно визначається відображенням $p : S \to L$, яке кожному x зіставляє відповідний y_0, а саме

$$P(x, y) = \begin{cases} 0, y \leqslant p(x), \\ 1, y \nleqslant p(x), \end{cases} \qquad x \in S, y \in L.$$

Неважко довести, що p є антитонною, відображає $0 \in S$ у $1 \in L$, і неперервна за Скоттом як відображення $S \to L^{op}$. Для цілком дистрибутивної гратки L це означає, що p є L-значним нормованим монотонним предикатом на S.

І навпаки, кожна неперервна за Скоттом функція $p : S \to L^{op}$, що відображає 0 у $1 = \tilde{0}$, за формулою вище визначає сумісність $P \in C_{\bullet\vee}(S, L)$. Отже, можна ототожнити $C_{\bullet\vee}(S, L)$ та множину $[S \to L^{op}]_0^{op}$, яка для цілком дистрибутивної L є множиною $M_{[L]}S$ L-значних нормованих монотонних предикатів.

З'ясуємо зміст вужчого класу $C_{\wedge\vee}(S, L)$ сумісностей, які зберігають meets по першому аргументу і joins по другому. Для кожного $P \in C_{\wedge\vee}(S, L)$ відповідна функція $p : S \to L$ повинна мати властивість: якщо $x_1, x_2 \in S$, $y \in L$, $y \nleqslant p(x_1)$ і $y \nleqslant p(x_2)$, то $y \nleqslant p(x_1 \wedge x_2)$. Оскільки p антитонне, то $p(x_1) \leqslant p(x_1 \wedge x_2)$, $p(x_2) \leqslant p(x_1 \wedge x_2)$, звідки $y = p(x_1) \vee p(x_2) \leqslant p(x_1 \wedge x_2)$. Отже, для цього y повинно бути або $y \leqslant p(x_1)$, або $y \leqslant p(x_2)$, тобто або $p(x_1) \leqslant p(x_2)$, або $p(x_2) \leqslant p(x_1)$. Це означає, що $P \in C_{\wedge\vee}(S, L)$, якщо і тільки якщо $p(S) \subset L$ є ланцюгом (лінійно впорядкованою підмножиною). Зокрема, якщо L є лінійно впорядкованою, наприклад, $L = I$, то $C_{\wedge\vee}(S, L) = C_{\bullet\vee}(S, L)$.

Підемо далі і розглянемо дві неперервні гратки L, L' та сумісність $P \in C_{\vee\vee}(L, L')$, тобто вимагаємо збереження попарних супремумів по обох аргументах. Згідно сказаного вище існує така антитонна функція $p : L \to L'$, яка відображає $0 \in L$ у $1' \in L'$, супремуми напрямлених вгору множин у інфімуми відповідних напрямлених вниз множин, і $P(x, y) = 0 \iff y \leqslant p(x)$. Однак аналогічно можна знайти антитонну функцію $q : L' \to L$, теж неперервну за Скоттом як відображення $L' \to L^{op}$, для якої $0' \in L' \mapsto 1 \in L$, і $P(x, y) = 0 \iff x \leqslant q(x)$.

ОЗНАЧЕННЯ 3.1.2. [35] Якщо S, S' є частково впорядкованими множинами, а функції $p : S \to S'$ і $q : S' \to S$ такі, що для всіх $s \in S$ та $s' \in S'$ виконується

$$s \leqslant_S q(s') \text{ тоді і тільки тоді, коли } p(s) \leqslant_{S'} s',$$

то називаємо p *нижнім спряженим* до q, відповідно q *верхнім спряженим* до p, а четвірку (S, p, q, S') називаємо *зв'язком Галуа* (або *співвідношенням Галуа*).

Такі p, q є ізотонними відображеннями і кожне відображення зі спряженої пари (p, q) єдиним чином породжується іншим.

Якщо для $p_1 : S \to S'^{op}$ і $p_2 : S'^{op} \to S$ четвірка (S, p_1, p_2, S'^{op}) утворює зв'язок Галуа, то (S, p_1, p_2, S') називаємо *контраваріантним зв'язком Галуа* [16]. Дамо еквівалентне означення:

ОЗНАЧЕННЯ 3.1.3. Якщо множини S, S' частково впорядковані, а функції $p : S \to S'$ і $q : S' \to S$ такі, що для всіх $s \in S$ і $s' \in S'$

$$s \leqslant_S q(s') \text{ тоді і тільки тоді, коли } s' \leqslant_{S'} p(s),$$

то називаємо (S, p, q, S') *контраваріантним зв'язком Галуа*.

Такі p, q антитонні, а останнє означення симетричне в тому розумінні, що (S', q, p, S) також контраваріантний зв'язок Галуа.

Оскільки для побудованих вище функцій $p : L \to L'$ і $q : L' \to L$ виконано $y \leqslant p(x) \iff x \leqslant q(y)$, то (L, p, q, L') — контраваріантний зв'язок Галуа. І навпаки, кожний контраваріантний зв'язок Галуа (L, p, q, L') між неперервними гратками L та L' визначає у описаний спосіб сумісність $P \in C_{\vee\vee}(L, L')$.

Найпростіший приклад такої сумісності виникає з довільної цілком дистрибутивної гратки L та гратки $L' = L^{op}$ з оберненим порядком. Тоді $p = \mathbf{1}_L : L \to L^{op}$ та $q = \mathbf{1}_L : L^{op} \to L$ — контраваріантний зв'язок Галуа, який визначає *стандартну сумісність*

$$P(x, y) = \begin{cases} 0, x \leqslant y, \\ 1, x \nleqslant y, \end{cases} \qquad x \in L, y \in L^{op}.$$

Зокрема, для $L = (I, \leqslant)$ маємо $L^{op} = (I, \geqslant) \cong (I, \leqslant)$, де ізоморфізм зіставляє $1 - x$ кожному $x \in I$. Тому можемо покласти $L' = (I, \leqslant)$, $P(x, y) = 0 \iff y \leqslant 1 - x$, тобто

$$P(x, y) = \begin{cases} 0, x + y \leqslant 1, \\ 1, x + y > 1, \end{cases} \qquad x, y \in I.$$

Ми можемо трактувати $P(x, y)$ як сумісність претензій x та y на поділ виграшу: якщо перший гравець хоче отримати частку x, а другий — частку y, і $x + y > 1$, то одночасно задовольнити обох неможливо.

Попередні класи було означено через властивості перерізів функції P, тобто її залежності від одного аргумента, коли інший зафіксовано. Задамо клас $C_{\nearrow}(S, L) \subset C_w(S, L)$ сумісностей умовою, яка вживає одночасно обидва аргументи: для кожних $x_1, x_2 \in S$, $y \in L$

$$P(x_1 \wedge x_2, y) = \min\bigl\{P(x_1, y_1) \vee P(x_2, y_2) \bigm| y \leqslant y_1 \vee y_2\bigr\}.$$

Інакше кажучи, $P(x_1 \wedge x_2, y) = 0$, якщо і тільки якщо існують такі $y_1, y_2 \in L$, що $y \leqslant y_1 \vee y_2$, $P(x_1, y_1) = P(x_2, y_2) = 0$.

З цієї умови випливає

$$P(x, y) = \min\bigl\{P(x, y_1) \vee P(x, y_2) \bigm| y \leqslant y_1 \vee y_2\bigr\},$$

тобто $P(x, y_1) = P(x, y_2) = 0 \implies P(x, y_1 \vee y_2) = 0$, і P зберігає попарні супремуми по другому аргументу. Отже, P визначається антитонною функцією $p : S \to L$, причому ця функція має властивість $p(x_1 \wedge x_2) = p(x_1) \vee p(x_2)$, тобто як відображення $p : S \to L^{op}$ є морфізмом нижніх напівграток. І навпаки, кожний неперервний за Скоттом морфізм нижніх напівграток $p : S \to L^{op}$, який зберігає нуль, у описаний вище спосіб визначає сумісність з $C_{\nearrow}(S, L)$. Отже, $C_{\nearrow}(S, L)$ можна ототожнити з підмножиною $M_{\wedge[L]}S \subset M_{[L]}S$ всіх L-значних нормованих монотонних предикатів на S, що відображають попарні інфімуми у попарні супремуми.

Бачимо, що сумісності охоплюють широке коло різних об'єктів — монотонні предикати, зв'язки Галуа, цілком дистрибутивні гратки (насправді достатньо подвійної неперервності) тощо.

3.1.3. Сумісності між сумісностями. Для неперервних напівграток S_1, S_2, S_1', S_2' з нулями зафіксуємо сумісності $P_1 \in C_w(S_1, S_1')$, $P_2 \in C_w(S_2, S_2')$. Задамо відображення $P_1 \otimes P_2 : \tilde{C_w}(S_1, S_2) \times \tilde{C_w}(S_1', S_2') \to \{0, 1\}$ так: для кожних $R \in C_w(S_1, S_2)$, $R' \in C_w(S_1', S_2')$ покладемо

$$P_1 \otimes P_2(R, R') = \sup\{P_1(x, x') \cdot P_2(y, y') \mid x \in S_1,\ x' \in S_1',\ y \in S_2,\ y' \in S_2',$$
$$xRy = 0, x'R'y' = 0\}.$$

Теорема 3.1. *Відображення $P_1 \otimes P_2$ є сумісністю між гратками $\tilde{C_w}(S_1, S_2)$ і $\tilde{C_w}(S_1', S_2')$, яка зберігає супремуми по обох аргументах.*

Доведення. Позначимо $P = P_1 \otimes P_2$. Тоді для нуля R_0 гратки $\tilde{C_w}(S_1, S_2)$ і довільного R' маємо :

$$P(R_0, R') = \sup\{P_1(x, x') \cdot P_2(y, y') \mid (x = 0 \text{ або } y = 0) \text{ і } P_2(x', y') = 0\} = 0,$$

тобто P зберігає нуль по першому і, аналогічно, по другому аргументах.

Перевіримо, чи P є неперервним за Скоттом, наприклад, по першому аргументу. Для довільної напрямленої вгору множини $\mathcal{D} \subset \tilde{C_w}(S_1, S_2)$ покладемо $D_0 = \tilde{\sup}\mathcal{D}$. Тоді $D_0 = \inf \mathcal{D}$ в $C_w(S_1, S_2.)$ Для $x \in S_1$ і $y \in S_2$ маємо

$$D_0(x, y) = \sup\{\inf\{D(x', y') \mid D \in \mathcal{D}\} \mid x' \ll x, y' \ll y\}.$$

Порівняємо $P(D_0, R')$ та $\sup\{P(D, R') \mid D \in \mathcal{D}\}$.

З того, що $\sup\{P(D, R'), D \in \mathcal{D}\} = 1$, випливає існування $D_1 \in \mathcal{D}$, $x_0 \in S_1,\ x'_0 \in S'_1,\ y_0 \in S_2,\ y'_0 \in S'_2$, для яких $D_1(x_0, y_0) = 0$, $R'(x'_0, y'_0) = 0$, $P_1(x_0, x'_0) = 1$, $P_2(y_0, y'_0) = 1$. Тоді $\inf\{D(x_0, y_0) \mid D \in \mathcal{D}\} = 0$ і, з ізотонності всіх $D \in \mathcal{D}$, $\inf\{D(x, y) \mid D \in \mathcal{D}\} = 0$ для всіх $x \ll x_0$, $y \ll y_0$. Звідси $\sup\{\inf\{D(x, y) \mid D \in \mathcal{D}\} \mid x \ll x_0, y \ll y_0\} = 0$, тобто $D_0(x_0, y_0) = 0$. Отже, $P(D_0, R') = 1$.

Нехай тепер, навпаки, $P(D_0, R') = 1$, тобто існують $x_0 \in S_1$, $x'_0 \in S'_1$, $y_0 \in S_2$, $y'_0 \in S'_2$, для яких $D_0(x_0, y_0) = 0$, $R'(x'_0, y'_0) = 0$, $P_1(x_0, x'_0) = 1$, $P_2(y_0, y'_0) = 1$. Оскільки P_1 і P_2 неперервні за Скоттом, то знайдуться такі $x \ll x_0$, $y \ll y_0$, $x' \ll x'_0$, $y' \ll y'_0$, що $P_1(x, x') = P_2(y, y') = 1$. Тоді за побудовою D_0 знайдеться таке $D_1 \in \mathcal{D}$, що $D_1(x, y) = 0$. За монотонністю R' маємо також $R'(x', y') = 0$, тому $P(D_1, R') = 1$, звідки $\sup\{P(D, R'), D \in \mathcal{D}\} = 1$.

Отже, $P(D_0, R')$ та $\sup\{P(D, R') \mid D \in \mathcal{D}\}$ або одночасно рівні 1, або одночасно рівні 0, тобто збігаються.

Ми показали, що P є неперервним за Скоттом за першим і, аналогічно, за другим аргументом, тому неперервне за Скоттом в сукупності. Цим доведено, що $P = P_1 \otimes P_2$ — сумісність.

Нехай $R, Q \in C_w(S_1, S_2)$, $R' \in C_w(S'_1, S'_2)$. Зауважимо, що $R \tilde{\vee} Q$ у $\tilde{C}(S_1, S_2)$ — це $R \wedge Q$ у $C(S_1, S_2)$, тобто поточковий мінімум функцій P і Q. Для $P = P_1 \otimes P_2$ потрібно довести рівність $P(R \wedge Q, R') = \max\{P(R, R'),$ $P(Q, R')\}$. Оскільки $P(R \wedge Q, R') \geqslant P(R, R')$, $P(R \wedge Q, R') \geqslant P(Q, R')$, то

$P(R \wedge Q, R') \geqslant \max\{P(R, R'), P(Q, R')\}$. Залишається довести неможливість $P(R \wedge Q, R') = 1, \max\{P(R, R'), P(Q, R')\} = 0$.

Інакше існують $x \in S_1$, $x' \in S_1'$, $y \in S_2$, $y' \in S_2'$, для яких $R(x, y) \wedge R'(x, y) = 0$, $R'(x', y') = 0$, $P_1(x, x') = 1$, $P_2(y, y') = 1$. Повинна виконуватись принаймні одна з рівностей $R(x, y) = 0$ або $R'(x, y) = 0$, наприклад, перша. Оскільки за припущенням $P(R, R') = 0$, то для кожних $x \in S_1$, $x' \in S_1'$, $y \in S_2$, $y' \in S_2'$ з $P_1(x, x') = 1$, $R(x, y) = R'(x', y') = 0$ випливає $P_2(y, y') = 0$ — суперечність. Аналогічно неможливий випадок $R'(x, y) = 1$. Отже, P зберігає попарні супремуми за першим, а подібно і за другим, аргументами. $\square$

Згідно сказаного вище сумісність $P = P_1 \otimes P_2$ задається контраваріантним зв'язком Галуа з антитонних відображень $p : \tilde{C_w}(S_1, S_2) \to \tilde{C_w}(S_1', S_2')$, $q : \tilde{C_w}(S_1', S_2') \to \tilde{C_w}(S_1, S_2)$, таких, що $P(R, R') = 0 \iff R' \tilde{\leqslant} p(R) \iff R \tilde{\leqslant} q(R')$. Розглянемо вигляд, наприклад, відображення p :

$$\begin{aligned} p(R) &= \tilde{\sup}\{R' \in \tilde{C_w}(S_1', S_2') \mid (P_1 \otimes P_2)(R, R') = 0\} = \\ &= \inf\{R' \in C_w(S_1', S_2') \mid R'(x', y') = 1 \text{ для всіх } x \in S_1, y \in S_2, \\ &\qquad\qquad x' \in S_1', y' \in S_2' \text{ таких, що} \\ &\qquad\qquad P_1(x, x') = 1, P_2(y, y') = 1, R(x, y) = 0\} \\ &= \inf\{R' \in C_w(S_1', S_2') \mid R'(x', y') \geqslant \widehat{R}(x', y') \text{ для всіх } x' \in S_1', y' \in S_2'\}, \end{aligned}$$

де $\widehat{R}(x', y')$ означено формулою

$$\widehat{R}(x', y') = \begin{cases} 1, & \text{якщо існують такі } x \in S_1, y \in S_2, \\ & \quad \text{що } P_1(x, x') = 1, P_2(y, y') = 1, R(x, y) = 0, \\ 0, & \text{якщо таких } x \in S_1, y \in S_2 \text{ не існує.} \end{cases}$$

Ізотонність і неперервність за Скоттом $\widehat{R}$ по обох аргументах випливає з ізотонності і неперервності P_1 і P_2. Неважко перевірити, що $\widehat{R}$ зберігає нуль по обох аргументах. Отже, $\widehat{R}$ — сумісність, тому

$$p(R) = \inf\{R' \in C_w(S_1', S_2') \mid R'(x', y') \geqslant \widehat{R}(x', y') \text{ для всіх } x' \in S_1', y' \in S_2'\}$$

збігається з $\widehat{R}$. Аналогічно $q(R') = \widehat{R'}$, де

$$\widehat{R'}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо існують такі } x' \in S_1', y' \in S_2', \\ & \qquad \text{що } P_1(x, x') = 1, P_2(y, y') = 1, R'(x', y') = 0, \\ 0, & \text{якщо таких } x' \in S_1', y' \in S_2' \text{ не існує.} \end{cases}$$

Назвемо $\widehat{R}$ і $\widehat{R'}$ *спряженими сумісностями* до сумісностей відповідно R і R'. За побудовою $R \mathrel{\tilde{\leqslant}} q(p(R))$, тобто $R \geqslant q(p(R))$. Сумісності вигляду $R = q(R')$, і тільки вони, задовольняють рівність $q \circ p(R) = R$.

3.2. Сильні сумісності

3.2.1. Двоїстість за Лоусоном. Надалі нам буде потрібна класична двоїстість Лоусона та її модифікація.

Фільтром у частково впорядкованій множині називається напрямлена вниз верхня множина. Для частково впорядкованої множини X позначимо $X^\triangle$ множину, *двоїсту за Лоусоном* до X, що складається з усіх непорожніх відкритих за Скоттом фільтрів в X. Вважаємо $X^\triangle$ впорядкованою за включенням.

Категорія, об'єктами якої є всі неперервні напівгратки з одиницями (верхніми елементами), а стрілками морфізми напівграток, що зберігають одиниці та напрямлені супремуми (тобто неперервні за Скоттом), позначається $\mathcal{CS}\mathrm{em}_1$. Теорема двоїстості на неперервних напівгратках [35, Теорема IV-2.16] стверджує, що для неперервної напівгратки S з одиницею множина $S^\triangle$ також є неперервною напівграткою з одиницею, а для морфізму $f : S \to S'$ в $\mathcal{CS}\mathrm{em}_1$ формула $f^\triangle(F) = f^{-1}(F)$, де $F \in S'^\triangle$, означує морфізм $f^\triangle : S'^\triangle \to S^\triangle$ в

$\mathcal{CS}\mathrm{em}_1$. Тому можна розлядати функтор $(-)^\triangle : \mathcal{CS}\mathrm{em}_1 \to \mathcal{CS}\mathrm{em}_1^{op}$, причому композиція $(-)^\triangle \circ (-)^\triangle$ є ізоморфною до тотожнього функтора $\mathbf{1}_{\mathcal{CS}\mathrm{em}_1}$. Ізоморфізм $\mathcal{U} : \mathbf{1}_{\mathcal{CS}\mathrm{em}_1} \to (-)^\triangle \circ (-)^\triangle$ складається з усіх відображень $\mathcal{U}_S : S \to S^{\triangle\triangle}$, які кожному $s \in S$ зіставляють множину $\{F \in S^\triangle \mid s \in F\}$. Отже, згідно зі згаданою вище теоремою, категорія $\mathcal{CS}\mathrm{em}_1$ є *двоїстою до себе* відносно контраваріантного функтора $(-)^\triangle$. Очевидно, що $\max S^\triangle = S$.

Позначимо $\mathcal{CS}\mathrm{em}_0$ категорію неперервних напівграток, які мають нижній елемент, і неперервних за Скоттом напівграткових морфізмів, що зберігають нижні елементи. Для кожного об'єкта S категорії $\mathcal{CS}\mathrm{em}_0$ множина $S^\top = S \cup \{\top\}$ є об'єктом $\mathcal{CS}\mathrm{em}_1$, причому її верхній елемент є ізольованим відносно апроксимації знизу.

Візьмемо морфізм $f : S \to S'$ в $\mathcal{CS}\mathrm{em}_0$. Нехай $f^\top : S^\top \to S'^\top$ кожному $s \in S$ ставить у відповідність $f(s) \in S'$, а одиниці в $S^\top$ – одиницю в $S'^\top$. Зауважимо, що відображення $f^\top$ є морфізмом у $\mathcal{CS}\mathrm{em}_1$, а функтор $(-)^\top : \mathcal{CS}\mathrm{em}_0 \to \mathcal{CS}\mathrm{em}_1$ вкладає категорію $\mathcal{CS}\mathrm{em}_0$ у категорію $\mathcal{CS}\mathrm{em}_1$.

Тоді (див. впр. IV.2-21 [35]), двоїста за Лоусоном $(S^\top)^\triangle$ є неперервною напівграткою з одиницею $S^\top$, ізольованою відносно апроксимації знизу, та нижнім елементом $\{\top\}$. Отже, частково упорядкована множина

$$S^\wedge = (S^\top)^\triangle \setminus \{S^\top\}.$$

також є об'єктом категорії $\mathcal{CS}\mathrm{em}_0$. Ця відповідність продовжується до контраваріантного функтора $(-)^\wedge : \mathcal{CS}\mathrm{em}_0 \to \mathcal{CS}\mathrm{em}_0$. Жоден елемент $F \in (S'^\top)^\triangle$, де $F \neq S'^\top$, не містить нижнього елемента $0' \in S'$. Тому відображення $(f^\top)^\triangle : (S'^\top)^\triangle \to (S^\top)^\triangle$ переводить F у відкритий фільтр $(f^\top)^{-1}(F)$, який також не містить $0 \in S$. Отже, $(f^\top)^\triangle(F) \neq S^\top$. З іншого боку, $(f^\top)^\triangle(S'^\top) = S^\top$. Тому ми означуємо $f^\wedge : S'^\wedge \to S^\wedge$ як обмеження відображення $(f^\top)^\triangle$. Відповідно до сказаного вище, відповідність $s \mapsto \{F \in$

$S^\wedge \mid s \in F\}$ є ізоморфізмом $u_S : S \to S^{\wedge\wedge}$, що є компонентою природнього перетворення $u : \mathbf{1}_{\mathcal{CS}\mathrm{em}_0} \to (-)^{\wedge\wedge}$. Тому категорія $\mathcal{CS}\mathrm{em}_0$ є двоїстою до самої себе відносно контраваріантного функтора $(-)^\wedge$. Отже, ми розглядаємо цю самодвоїстість як обмеження самодвоїстості для $\mathcal{CS}\mathrm{em}_1$ через $(-)^\triangle$ до підкатегорії $\mathcal{CS}\mathrm{em}_0 \subset \mathcal{CS}\mathrm{em}_1$.

3.2.2. Будова сильних відокремлюючих сумісностей. Важливе місце займає наступне твердження [57]:

Теорема 3.2. *Нехай S, S' є неперервними нижніми напівгратками з нижніми елементами $0, 0'$ відповідно. Якщо відношення $P \subset S \times S'$ є сильною відокремлюючою сумісністю, то відображення i, яке переводить $x \in S$ в $xP \cup \{\top\}$ є ізоморфізмом $S \to S'^\wedge$. І навпаки, кожен ізоморфізм $i : S \to S'^\wedge$ породжується єдиною сильною відокремлюючою сумісністю $P \subset S \times S'$ за вказаною формулою.*

Доведення. $(\Longrightarrow)$ Нагадаємо, що згідно з лемою II.2-8 [35] неперервність за Скоттом відношення P є рівносильною до його неперервності за Скоттом по кожній змінній окремо. Відповідно до (1),(2) xP та Py є відкритими за Скоттом фільтрами (можливо, порожніми), які не співпадають з S' і S відповідно. Тоді, $i(x) = xP \cup \{\top\} \in S'^\wedge$ для всіх $x \in S$. Подібним чином означимо $i'\colon y \mapsto Py \cup \{\top\}$ для всіх $y \in S'$. Тоді i та i' є ін'єктивними відображеннями $S \to S'^\wedge$ і $S' \to S^\wedge$ відповідно, які зберігають попарні інфімуми. З властивостей (1) і (2) робимо висновок, що i зберігає напрямлені супремуми та нижній елемент, а тому є неперервним за Скоттом. Отже, i є морфізмом в категорії $\mathcal{CS}\mathrm{em}_0$. Застосуємо до i контраваріантний функтор $(-)^\wedge$. Відображення $i^\wedge : S'^{\wedge\wedge} \to S^\wedge$ кожний непорожній відкритий за Скоттом фільтр $\mathrm{F} \subsetneq (S'^\top)^\triangle$

переводить в $i^{-1}(\mathrm{F}) \cup \{\top\}$. Тоді $i^{\wedge} \circ u_{S'} : S' \to S^{\wedge}$ кожному y зіставляє

$$\{x \in S^{\top} \mid x = \top \text{ або } i(x) \ni y\} =$$
$$= \{x \in S^{\top} \mid x = \top \text{ або } y \in xP\} = Py \cup \{\top\} = i'(y).$$

Оскільки $u_{S'}$ є ізоморфізмом, а i' згідно з (3) ін'єктивне, то відображення $i^{\wedge}$ також є ін'єкцією. Отже, i – сюр'єкція. Беручи до уваги те, що i зберігає попарні інфімуми, приходимо до висновку, що i є порядковим ізоморфізмом.

Зауважимо, що так само $i'^{\wedge} \circ u_S : S \to S'^{\wedge}$ співпадає з i. Тому i' теж є ізоморфізмом.

($\Longleftarrow$) Нехай маємо ізоморфізм $i : S \to S'^{\wedge}$. Неважко перевірити, що відношення $P = \{(x, y) \in S \times S' \mid y \in i(x)\}$ задовольняє властивості (1)–(3) та визначає i, як описано вище. $\square$

Надалі, якщо існують такі S' і P, то можемо вважати, що $S' = S^{\wedge}$, а також, що $P = \{(s, \mathrm{F}) \in S \times S^{\wedge} \mid s \in \mathrm{F}\}$. Важливо, що для $S = \exp_{\supset} X$ можемо покласти $S' = S$. Потрібне нам $P \subset \exp_{\supset} X \times \exp_{\supset} X$ утворюється наступним чином: $(F, G) \in P$ тоді і тільки тоді, коли $F \cap G = \varnothing$.

Нас цікавить випадок, коли S і $S^{\wedge}$ є компактними і гаусдорфовими щодо топології Лоусона. Неперервну напівгратку S називаємо *стабільно неперервною*, якщо для всіх $x, y, z \in S$ з $x \ll y, z$ випливає $x \ll y \wedge z$. Неперервна напівгратка L є неперервною граткою (див. впр. IV-2.23 [35]) тоді і тільки тоді, коли $L^{\triangle}$ є стабільно неперервною з верхнім елементом, ізольованим відносно апроксимації знизу.

Лема 3.2.1. *Для неперервної напівгратки S з нижнім елементом, частково впорядкована множина $(S^{\top})^{\triangle}$ є неперервною граткою (тобто, $S^{\wedge}$ є повною напівграткою) тоді і тільки тоді, коли S стабільно неперервна.*

Наслідок 3.2.2. *Для неперервної напівгратки S з нижнім елементом, топології Лоусона на S та $S^\wedge$ є компактними і гаусдорфовими тоді і тільки тоді, коли S повна і стабільно неперервна.*

Отже, повна підкатегорія $\mathcal{CSCS}\mathrm{em}_0$ категорії $\mathcal{CS}\mathrm{em}_0$ повних стабільно неперервних напівграток з 0 є самодвоїстою відносно обмеження функтора $(-)^\wedge$.

Зазначимо, що для кожного компакта X напівгратка $\exp_\supset X$ є повною, стабільно неперервною і має нижній елемент.

3.3. Порядкові властивості класів сумісностей

Як було сказано, множина $C_w(S, S')$ всіх сумісностей між неперервними напівгратками S і S' з природним (поточковим) впорядкуванням є цілком дистрибутивною граткою. Аналогічно цілком дистрибутивною граткою є множина $C_{\bullet\vee}(S, L)$ всіх сумісностей між неперервною напівграткою S та цілком дистрибутивною граткою L, що зберігають попарні супремуми по другому аргументу, оскільки її можна ототожнити з множиною $M_{[L]}S = [S \to L^{op}]_0^{op}$ всіх L-значних нормованих монотонних предикатів на S. Розглянемо інші класи сумісностей.

3.3.1. Множина неперервних за Скоттом відображень між неперервними напівгратками. Для подальшого нам потрібно уточнити будову множини $[S \to S']$ множини неперервних за Скоттом відображень між неперервними напівгратками.

Зауважимо, що у [29] неперервність і відношення апроксимації знизу розглядається дуже детально для загальнішого випадку множини неперервних відображень з топологічного простору X у область L, однак майже відразу на X і L накладаються досить сильні обмеження —- X переважно повинен бути локально компактним, а L — обмежено повною, тобто повинна мати точні верхні грані всіх обмежених згори множин, що надто обтяжливо для нас.

Лема 3.3.1. *Нехай $\mathcal{I}$ — це нижня впорядкована за включенням сім'я непорожніх підмножин множини $\{1, 2, \dots, n\}$, тобто з $\varnothing \neq A \subset B \in \mathcal{I}$ випливає $A \in \mathcal{I}$, всі множини $\{i\}$, де $1 \leqslant i \leqslant n$, належать до $\mathcal{I}$, b — ізотонне відображення з $\mathcal{I}$ у неперервну напівгратку S (для зручності позначаємо $b(\{i_1, i_2, \dots, i_k\}) = b_{i_1, i_2, \dots, i_k}$, де $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$, зокрема, $b(\{i\}) = b_i$), і для всіх $1 \leqslant i \leqslant n$ у S зафіксовано елементи $a_i \ll b_i$. Тоді існує таке ізотонне відображення $a : \mathcal{I} \to S$ (знову позначаємо $a(\{i_1, i_2, \dots, i_k\}) = a_{i_1, i_2, \dots, i_k}$, зокрема, $a(\{i\}) = a_i$ вже задано), що $a_{i_1, i_2, \dots, i_k} \ll b_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ для всіх індексів $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \in \mathcal{I}$.*

Доведення. Побудуємо відображення a індуктивно за потужністю підмножин з $\mathcal{I}$. Нехай значення a_A, що задовольняють умову, вже побудовано для всіх $A \in \mathcal{I}$, $|A| \leqslant k$ (на початку $k = 1$). Щоб побудувати a_A для $A = \{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}\} \in \mathcal{I}$, позначимо $A_l = \{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}\} \setminus \{i_l\}$ для всіх $1 \leqslant l \leqslant k + 1$. Тоді $A_l \in \mathcal{I}$, і $a_{A_l} \ll b_{A_l} \leqslant b_A$, звідки $a_{A_l} \ll b_A$. Оскільки множина всіх елементів way below b_A напрямлена вгору, то існує елемент $c \in S$, $c \ll b_A$, що слідує за всіма a_{A_l}, де $l = 1, 2, \dots, k + 1$. Його і приймемо за a_A. Так поступово отримаємо всі значення a_A, $A \in \mathcal{I}$, так, що вимога у формулюванні буде задоволена. $\square$

Неважко зауважити, що для напрямлено повної нижньої напівгратки S з існування $x \vee y$ для всіх таких елементів $x, y \in S$, що $\{x, y\}\!\uparrow \neq \varnothing$, випливає, що множина нижніх граней довільної непорожньої підмножини $A \subset X$ є напрямленою вгору, тому має точну верхню грань, яка, очевидно, рівна $\inf A$.

Отже, напівгратка S з такою властивістю є повною. І навпаки, для повної напівгратки з непорожньості $\{x\}\uparrow \cap \{y\}\uparrow$ випливає, що ця множина напрямлена вниз і має точну верхню грань, тобто $x \vee y$. Отже, "умовне" існування попарних супремумів для напрямлено повної нижньої напівгратки рівносильне до повноти.

ТЕОРЕМА 3.3. *Нехай S — повна неперервна напівгратка, S' — неперервна напівгратка з нулем. Тоді частково впорядкована множина $[S \to S']$ та її підмножина $[S \to S']_0$ з усіх функцій, що зберігають нуль, є неперервними напівгратками з нулями.*

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $f : S \to S'$ — неперервне за Скоттом відображення. Оберемо довільні $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ та $a_1 \ll f(x_1)$, $a_2 \ll f(x_2)$, $\ldots$, $a_n \ll f(x_n)$ у S'. Оскільки $a_i \Uparrow = \{z \in S' \mid a_i \ll z\}$ є околом $f(x_i)$, то за неперервністю f існує $x_i^0 \ll x_i$, для якого $a_i \ll f(x_i^0)$. Далі, існує відкритий фільтр $\mathrm{F}_i \subset S'$, для якого $x_i \in \mathrm{F}_i \subset x_i^0 \Uparrow$. Утворимо сім'ю $\mathcal{I}$ з усіх множин $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ натуральних чисел, для яких $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, і $x_{i_1}^0\uparrow \cap x_{i_2}^0\uparrow \cap \ldots \cap x_{i_k}^0\uparrow \neq \varnothing$. За припущенням для кожної $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \in \mathcal{I}$ існує точна верхня грань $x_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^0 = x_{i_1}^0 \vee x_{i_2}^0 \vee \ldots \vee x_{i_k}^0$, і $\mathcal{I}$ є нижньою сім'єю непорожніх множин.

Відображення $b : \mathcal{I} \to S'$, $b(\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}) = f(x_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^0)$ є ізотонним, і $a_i \ll b_i$ для всіх $1 \leqslant i \leqslant n$. Тоді за попередньою лемою існують такі $a_A \ll b_A$ для всіх $A \in \mathcal{I}$, що $a : \mathcal{I} \to S'$ — ізотонне відображення. Позначимо $\mathrm{F}_{i_1,i_2,\ldots,i_k} = \mathrm{F}_{i_1} \cap \mathrm{F}_{i_2} \cap \ldots \cap \mathrm{F}_{i_k}$, тоді $\mathrm{F}_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \subset x_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^0\uparrow$, звідки $\mathrm{F}_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \neq \varnothing \implies \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \in \mathcal{I}$.

Очевидно також, що з $x \in \mathrm{F}_A$ і $x \in \mathrm{F}_B$ випливає $x \in \mathrm{F}_{A\cup B}$, і $A \cup B \in \mathcal{I}$. Тому задамо відображення $f_0 : S \to S'$ так :

(1) якщо $x \in \mathrm{F}_A$ для деякої $A \in \mathcal{I}$, то $f_0(x) = a_A$ для *найбільшої* такої $A \in \mathcal{I}$;

(2) якщо $x \notin \mathrm{F}_A$ для всіх $A \in \mathcal{I}$, то $f_0(x) = 0$.

Очевидно, що f_0 — неперервне за Скоттом, і $f_0(x) \leqslant f(x)$ для всіх $x \in S'$. Доведемо, що $f_0 \ll f$ у $[S \to S']$. Нехай $(g_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ напрямлена вгору сім'я неперервних за Скоттом відображень $S \to S'$, для якої супремум (нагадаємо, що він обчислюється поточково) є $\geqslant f$. Тоді для кожної $A \in \mathcal{A}$ напрямлена вгору сім'я значень $g_\alpha(x_A^0)$ має супремум, що слідує за $f(x_A^0)$. Оскільки $a_A \ll f(x_A^0)$, то існує такий індекс $\alpha_A \in \mathcal{A}$, що $g_{\alpha_A}(x_A^0) \geqslant a_A$. Оскільки сім'я $(g_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ напрямлена вгору, існує такий індекс $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, що $g_{\alpha_0}(x_A^0) \geqslant a_A$ для всіх $A \in \mathcal{I}$.

Нехай $x \in S$, і $f_0(x) \neq 0$, тоді $f_0(x) = a_A$ для найбільшого такого $A \in \mathcal{I}$, що $x \in \mathrm{F}_A$. Тоді $x_A^0 \ll x$, звідки

$$g_{\alpha_0}(x) \geqslant g_{\alpha_0}(x_A^0) \geqslant g_{\alpha_A}(x_A^0) \geqslant a_A = f_0(x).$$

Цим показано $g_{\alpha_0} \geqslant f_0$ для деякого $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, отже, $f_0 \ll f$ у $[S \to S']$.

Доведемо, що множина всіх функцій f_0, які можна побудувати у такий спосіб, є напрямленою вгору. Нехай при побудові функцій f_0' та f_0'' виходили відповідно з $x_1', x_2', \ldots, x_m' \in S$ і $a_1' \ll f(x_1')$, $a_2' \ll f(x_2')$, $\ldots$, $a_n' \ll f(x_m')$ та $x_1'', x_2'', \ldots, x_n'' \in S$ і $a_1'' \ll f(x_1'')$, $a_2'' \ll f(x_2'')$, $\ldots$, $a_n'' \ll f(x_n'')$, і обрали елементи $x_A'^0, a_A' \in S'$, $A \in \mathcal{I}'$, $x_B''^0, a_B'' \in S'$, $B \in \mathcal{I}''$, для яких відповідно $x_i'^0 \ll x_i', x_j''^0 \ll x_j'', a_A' \ll f(x_A'^0), a_B'' \ll f(x_B''^0)$. Тоді візьмемо за основу скінченну множину $\{x_A'^0 \mid A \in \mathcal{I}'\} \cup \{x_B''^0 \mid B \in \mathcal{I}''\}$ і відповідні a_A' та a_B'', за якими у описаний вище спосіб побудуємо функцію $f_0 \ll f$. Неважко перевірити, що $f_0 \geqslant f_0'$, $f_0 \geqslant f_0''$.

Крім того, для кожної точки $x \in S$ і довільного $a \ll f(x)$ можна взяти x за одну з x_i, а a — за відповідне a_i, тоді для побудованої функції f_0 матимемо $f_0(x) \geqslant a$. Отже, супремум значень $f_0(x)$ всіх таких функцій f_0 у кожній точці x за побудовою слідує за всіма $a \ll f(x)$, тому з неперервності S слідує за $f(x)$. Оскільки всі f_0 передують f, то їх супремум *збігається* з f.

Цього достатньо, щоб стверджувати, що множина всіх елементів $[S \to S']$ way below f напрямлена вгору, і її супремум рівний f. Отже, $[S \to S']$ — неперервна напрямлено повна частково впорядкована множина, тобто область.

Нагадаємо, що у неперервній напівгратці завдяки meet continuity поточковий інфімум двох неперервних за Скоттом функцій теж є неперервним за Скоттом, тому $[S \to S']$ є неперервною напіграткою. Зрозуміло, що найменшим елементом $[S \to S']$ є функція $S \to S'$, що відображає всі елементи у найменший елемент.

Крім того, функції, що зберігають нуль, утворюють піднапівгратку $[S \to S']_0 \subset [S \to S']$, у якій точні верхні і нижні грані збігаються з обчисленими у $[S \to S']$, тому $[S \to S']_0$ — теж неперервна напівгратка з нулем. □

Зауваження. Теорема II-2.12 з [35] дає досить близький результат, при слабших вимогах до S, яка має бути всього лише областю, однак від S' вимагається бути неперервною (тому повною) граткою. Тоді $[S \to S']$ теж є неперервною граткою, що дещо надмірно для нас.

3.3.2. Зображення сумісності через відображення між напівгратками. Нехай P належить до множини $C_{\bullet\wedge}(S, S')$ всіх сумісностей між неперервними напівгратками S і S', що зберігають попарні інфімуми по другому аргументу. Тоді для кожного $x \in S$ функція $P_x : S' \to \{0, 1\}$, $P_x(x') = P(x, x')$ для всіх $x' \in S'$, є морфізмом напівграток, що зберігає найменший елемент, тобто елементом $(S')\wedge$. І навпаки, задання всіх P_x одночасно визначає P.

Перевірка наступного твердження є прямолінійною.

Твердження 3.3.2. *Для кожної сумісності $P \in C_{\bullet\wedge}(S, S')$ відповідність $p : x \mapsto P_x$ є неперервним за Скоттом відображенням $S \to (S')^\wedge$, що зберігає нуль. І навпаки, для кожного неперервного за Скоттом відобра-*

ження $p : S \to (S')^{\wedge}$, *що зберігає нуль, відображення* $P : S \times S' \to \{0,1\}$, *означене формулою* $P(x,x') = p(x)(x')$, *є сумісністю з* $C_{\bullet\wedge}(S,S')$.

Відповідність $P \mapsto p$ вище, очевидно, є порядковим ізоморфізмом, тому можна ототожнити множини $C_{\bullet\wedge}(S,S')$ та $[S \to (S')^{\wedge}]_0$. Оскільки $(S')^{\wedge}$ є неперервною напівграткою з нулем, негайно отримуємо :

Твердження 3.3.3. *Нехай* S *і* S' *— неперервні напівгратки з нулями,* S *— повна. Тоді частково впорядкована множина* $C_{\bullet\wedge}(S,S')$ *є неперервною напівграткою з нулем.*

Питання про будову множини $C_{\bullet\wedge}(S,S') = [S \to (S')^{\wedge}]_0$ для довільних неперервних напівграток залишається відкритим. У [35] було сформульовано проблему з'ясування, коли неперервні відображення з топологічного простору X у область S з топологією Скотта утворюють область. Ця проблема досі не має повного розв'язання.

Щоб вивчити будову частково впорядкованої множини $C_{\wedge\wedge}(S,S')$ всіх сумісностей, що зберігають попарні інфімуми по обох аргументах, нагадаємо, як обчислюється інфімум $f_0 : S \times S' \to \{0,1\}$ довільної підмножини $(f_i)_{i \in \mathcal{I}}$ у ширшій множині — цілком дистрибутивній гратці $C_w(S,S') \subset [S \times S' \to \{0,1\}]$. Маємо $f_0(x,y) = 1$, якщо і тільки якщо існують такі $x_0 \ll x$, $y_0 \ll y$, що $f_i(x_0,y_0) = 1$ для всіх $i \in \mathcal{I}$.

Лема 3.3.4. *Якщо* S *— повна неперервна напівгратка,* S' *— стабільно неперервна напівгратка з нулем, і всі* $f_i : S \times S' \to \{0,1\}$, $i \in \mathcal{I}$, *неперервні за Скоттом і зберігають інфімуми по другому аргументу, то інфімум* f_0 *всіх* f_i *у множині* $[S \times S' \to \{0,1\}]$ *теж зберігає інфімуми по другому аргументу.*

Доведення. Нехай $f_0(x,y') = f_0(x,y'') = 1$. Потрібно довести, що $f_0(x, y' \wedge y'') = 1$. Як було сказано, існують такі $x_0' \ll x$, $y_0' \ll y'$, що

$f_i(x_0', y_0') = 1$ для всіх $i \in \mathcal{I}$. Аналогічно існують такі $x_0'' \ll x$, $y_0'' \ll y''$, що $f_i(x_0'', y_0'') = 1$ для всіх $i \in \mathcal{I}$. Покладемо $x_0 = x_0' \vee x_0''$. Цей супремум існує, оскільки S повна, і обидва елементи x_0' та x_0'' передують x, щобільше, очевидно, що $x_0 \ll x$. Тоді за ізотонністю кожного f_i отримуємо $f_i(x_0, y_0') = f_i(x_0, y_0'') = 1$ для всіх $i \in \mathcal{I}$, звідки $f_i(x_0, y_0' \wedge y_0'') = 1$ (за припущенням всі f_i зберігають інфімуми по другому аргументу). Оскільки S' — стабільно неперервна, $y_0' \wedge y_0'' \ll y' \wedge y''$, що доводить рівність $f_0(x, y' \wedge y'') = 1$. □

Лема 3.3.5. *Якщо S, S' — неперервні напівгратки з нулями, і $(f_i : S \times S' \to \{0,1\})_{i \in \mathcal{I}}$ — напрямлена вгору сім'я неперервних за Скоттом відображень, що зберігають інфімуми по другому аргументу, то супремум f^0 всіх f_i у множині $[S \times S' \to \{0,1\}]$ теж зберігає інфімуми по другому аргументу.*

Нагадаємо, що супремуми у множині $[S \times S' \to \{0,1\}]$ обчислюються поточково.

Доведення. Нехай $f^0(x, y') = f^0(x, y'') = 1$, тоді існують $i, j \in \mathcal{I}$, для яких $f_i(x, y') = f_j(x, y'') = 1$. Оскільки дана сім'я множин напрямлена вгору, то існує f_k, що слідує і за f_i, і за f_j, звідки $f_k(x, y') = f_k(x, y'') = 1$, отже, $f_k(x, y' \wedge y'') = 1$, з чого випливає $f^0(x, y' \wedge y'') = 1$. □

Звідси :

Наслідок 3.3.6. *Нехай S і S' — неперервні напівгратки з нулями, S — повна, S' — стабільно неперервна. Тоді частково впорядкована множина $C_{\bullet\wedge}(S, S')$ є повною неперервною напівграткою.*

Доведення. Розглянемо сім'ю $(P_i)_{i\in\mathcal{I}}$ елементів $C_{\bullet\wedge}(S,S')$ і знайдемо їх інфімум P_0 у множині $C_w(S,S')$, яка є повною піднапівграткою $[S\times S'\to\{0,1\}]$. Тоді за попередньою лемою $P_0\in C_{\bullet\wedge}(S,S')$.

Аналогічно для напрямленої вгору сім'ї $(P_i)_{i\in\mathcal{I}}$ елементів $C_{\bullet\wedge}(S,S')$ їх супремум P_0 у множині $C_w(S,S')$ теж теж належить до $C_{\bullet\wedge}(S,S')$.

Отже, $C_{\bullet\wedge}(S,S')$ є підмножиною цілком дистрибутивної гратки $C_w(S,S')$, замкненою щодо напрямлених вгору супремумів та довільних інфімумів, тому є повною неперервною напівграткою [35]. $\square$

Це твердження дає сильніший наслідок, ніж попереднє, однак його вимоги теж сильніші.

Водночас цікавіше застосувати цей метод до множини $C_{\wedge\wedge}(S,S')$.

Твердження 3.3.7. *Нехай S і S' — повні стабільно неперервні напівгратки, тоді частково впорядкована множина $C_{\wedge\wedge}(S,S')$ є повною неперервною напівграткою.*

Доведення. Досить зауважити, що для напрямленої вгору сім'ї елементів $C_{\wedge\wedge}(S,S')$ їх супремум у $C_w(S,S')$ зберігає попарні інфімуми по обох аргументах, як і інфімум у $C_w(S,S')$ довільної сім'ї елементів $C_{\wedge\wedge}(S,S')$. $\square$

Важливо, що повною стабільно неперервною напіграткою є кожна напівгратка $\exp_{\supset} X$ непорожніх замкнених множин довільного компакта X, впорядкованих протилежно до включення.

На жаль, поки що невідомо, чи є в умовах останнього твердження напівгратка $C_{\wedge\wedge}(S,S')$ стабільно неперервною.

3.3.3. Зв'язки Галуа і тензорні добутки. Розглянемо $C_{\vee\vee}(L,L')$ — множину всіх сумісностей між неперервними гратками L та L', що зберігають попарні інфімуми по обох аргументах. Як було сказано, кожна така сумісність P

визначається контраваріантним зв'язком Галуа (L, p, q, L'), де

$$p(x) = \sup\{y \in L' \mid P(x, y) = 0\}, \quad q(y) = \sup\{x \in L \mid P(x, y) = 0\}$$

для всіх $x \in L$, $y \in L'$, і, навпаки, контраваріантний зв'язок Галуа (L, p, q, L') визначає сумісність $P \in C_{\vee\vee}(L, L')$ за формулою

$$P(x, y) = 0 \iff y \leqslant p(x) \iff x \leqslant q(y).$$

Тому можна ототожнити множину $C_{\vee\vee}(L, L')$ сумісностей з множиною контраваріантних зв'язків Галуа, але з наступним застереженням : якщо $P_1 \leqslant P_2$ у $C_{\vee\vee}(L, L')$, і P_1, P_2 визначено відповідно контраваріантними зв'язками Галуа (L, p_1, q_1, L') та (L, p_2, q_2, L'), то $p_1(x) \geqslant p_2(x)$, $q_1(y) \geqslant q_2(y)$ для всіх $x \in L$, $y \in L'$. Тому $C_{\vee\vee}(L, L')$ є порядково оберненою до множини всіх контраваріантних зв'язків Галуа між L і L', впорядкованих поточково за значеннями p чи q (що, як легко бачити, рівносильне).

Давно відомо (див., наприклад, [68]), що контраваріантні зв'язки Галуа між фіксованими повними гратками самі утворюють повні гратки. Кожен контраваріантний зв'язок Галуа (L, p, q, L') між L і L' визначає множину $T = \{(x, y) \in L \times L' \mid y \leqslant p(x) \iff x \leqslant q(y)\}$ з властивостями :

(1) для кожного $x \in L$ множина $xT = \{y \in L' \mid (x, y) \in T\}$ має вигляд $y_0\!\downarrow$ для деякого $y_0 \in L'$ (є головним ідеалом);

(2) для кожного $y \in L'$ множина $Ty = \{x \in L \mid (x, y) \in T\}$ має вигляд $x_0\!\downarrow$ для деякого $x_0 \in L'$ (теж є головним ідеалом).

Кожна підмножина $T \subset L \times L'$ з властивостями (1), (2) називається тензором (двостороннім тензором у термінології [31]), а сукупність всіх тензорів — тензорним добутком L і L', який позначається $L \otimes L'$. Очевидно, як за кожним тензором відновити відповідний контраваріантний зв'язок Галуа, тому $L \otimes L'$ можна ототожнити з граткою всіх контраваріантних зв'язків Галуа між L і L', і відповідно $C_{\vee\vee}(L, L') \cong (L \otimes L')^{op}$. Легко бачити, що сумісності

P відповідає тензор $T = \{(x, y) \in L \times L' \mid P(x, y) = 0\}$. Як було доведено Бандельтом (разом з анонімним рецензентом його праці [12], Теорема 2.1), для неперервних граток L і L' тензорний добуток $L \otimes L'$ теж є неперервною граткою. Отже :

НАСЛІДОК 3.3.8. *Для неперервних граток L і L' множина $C_{\vee\vee}(L, L')$ всіх сумісностей, що зберігають попарні супремуми по обох аргументах, є двоїсто неперервною граткою* [1].

Крім того, ми можемо отримати інформацію про будову $C_{\bullet\vee}(S, L)$, коли L не обов'язково є цілком дистрибутивною граткою, а тільки неперервною граткою, а S — довільною неперервною напівграткою з нулем. Нагадаємо, що ця множина ізоморфна до $[S \to L]_0$. Зауважимо, що елементам $P \in C_{\bullet\vee}(S, L)$ відповідають множини $T = \{(x, y) \in L \times L' \mid P(x, y) = 0\}$, які за [31] є правими тензорами, тобто замкнені за Скоттом у $S \times L$, і для кожного $x \in S$ множина $xT = \{y \in L' \mid (x, y) \in T\}$ непорожня, нижня, і з кожними y', y'' містить $y' \vee y''$. Звідси випливає, що xT є головним ідеалом, тобто виконано умову (1) вище, але не обов'язково (2).

Користуючись методом доведення Теореми 2.1 з [12], можна довести

ТВЕРДЖЕННЯ 3.3.9. *Для неперервної напівгратки S з нулем і неперервної гратки L множина $S \otimes_r L$ правих тензорів у $S \times L$ є неперервною граткою.*

ДОВЕДЕННЯ. Зрозуміло, що перетин довільної кількості правих тензорів є правим тензором, і інфімум довільної сім'ї елементів $S \otimes_r L$ збігається з їх інфімумом у цілком дистрибутивній гратці всіх замкнених за Скоттом підмножин $S \times L$.

---

[1] Тобто порядково оберненою до неперервної гратки.

Розглянемо напрямлену вгору сім'ю $(T_i))i \in \mathcal{I}$ елементів $S \otimes_r L$ і позначимо $T_0 = \mathrm{Cl}(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} T_i)$ (замикання беремо щодо топології Скотта). Доведемо, що $T_0 \subset S \times L$ — теж правий тензор.

Нехай $(x, y'), (x, y'') \in T_0$, тоді існують напрямлені вгору множини A', $A'' \subset S$, $B', B'' \subset L$, для яких $A' \times B' \subset \bigcup_{i\in\mathcal{I}} T_i$, $A'' \times B'' \subset \bigcup_{i\in\mathcal{I}} T_i$, $\sup A' = \sup A'' = x$, $\sup B' = y'$, $\sup B'' = y''$. Оскільки S — неперервна напівгратка, то у ній виконано meet continuity, і $\sup\{a' \wedge a'' \mid a' \in A', a'' \in A''\} = x$. Неважко перевірити, що множина

$$\{(a' \wedge a'', b' \vee b'') \mid a' \in A', a'' \in A'', b' \in B', b'' \in B''\} \subset S \times L$$

напрямлена вгору, і її супремум рівний $(x, y' \vee y'')$. Для кожних $a' \in A'$, $a'' \in A''$, $b' \in B'$, $b'' \in B''$ існують $i, j \in \mathcal{I}$, для яких $(a', b') \in T_i$, $(a'', b'') \in T_j$, тоді для такого $k \in \mathcal{I}$, що $T_i, T_j \subset T_k$, маємо

$$(a' \wedge a'', b') \in T_i,\ (a' \wedge a'', b'') \in T_j \implies (a' \wedge a'', b' \vee b'') \in T_k,$$

отже, $(x, y' \vee y'') \in \mathrm{Cl}(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} T_i) = T_0$. Тому T_0 — теж правий тензор, і супремум напрямленої вгору сім'ї елементів $S \otimes_r L$ збігається з їх супремумом у цілком дистрибутивній гратці всіх замкнених за Скоттом підмножин $S \times L$. Тому підмножина $S \otimes_r L$ цієї гратки замкнена щодо напрямлених вгору супремумів і довільних інфімумів, і сама є неперервною граткою. $\square$

Отже :

Наслідок 3.3.10. *Для неперервної напівгратки S з нулем і неперервної гратки L множина $C_{\bullet\vee}(S, L)$ всіх сумісностей, що зберігають попарні супремуми по другому аргументу, є двоїсто неперервною граткою.*

3.4. Тензорне множення монотонних предикатів

Розглянемо наступну конструкцію для нетривіальних (неодноелементних) повних стабільно неперервних напівграток з нулями S і S'. Як відомо, двоїсті напівгратки $S^\wedge$ та $S'^\wedge$ теж повні і стабільно неперервні, тому згідно доведеного вище множина $C_{\wedge\wedge}(S^\wedge, S'^\wedge)$ всіх сумісностей між $S^\wedge$ та $S'^\wedge$, що зберігають інфімуми по обох аргументах, є повною неперервною напівграткою, яку позначимо $S \boxtimes S'$. Задамо відображення $\theta : S \to S \boxtimes S'$ формулою

$$\theta(x)(\mathrm{F}, \mathrm{F}') = \begin{cases} 0, & \mathrm{F}' = \varnothing \text{ або } x \in \mathrm{F}, \\ 1, & \mathrm{F}' \neq \varnothing \text{ і } x \notin \mathrm{F}, \end{cases} \qquad \mathrm{F} \in S^\wedge,\ \mathrm{F}' \in S'^\wedge,$$

(нагадаємо, що F і F' — відкриті фільтри, що не містять нуля, відповідно у S і S'). Неважко перевірити збереження всіх інфімумів та супремумів відображенням θ, як і аналогічним відображенням $\theta' : S' \to S \boxtimes S'$, де

$$\theta'(y)(\mathrm{F}, \mathrm{F}') = \begin{cases} 0, & \mathrm{F} = \varnothing \text{ або } y \in \mathrm{F}', \\ 1, & \mathrm{F} \neq \varnothing \text{ і } y \notin \mathrm{F}', \end{cases} \qquad \mathrm{F} \in S^\wedge,\ \mathrm{F}' \in S'^\wedge.$$

Отже, можна вважати, що $S \boxtimes S'$ містить S і S'.

Варто розглянути будову $S \boxtimes S'$, якщо $S = \exp_\supset X$, $S' = \exp_\supset Y$ для компактів X та Y. Кожний елемент $S^\wedge$ визначений деякою множиною $F \in \exp_\supset X$ і має вигляд $\mathrm{F}_F = \{A \in \exp_\supset X \mid A \cap F = \varnothing\}$, зокрема, порожній фільтр — це F_X. Аналогічно елементи $S'^\wedge$ збудовані як $\mathrm{F}'_G = \{B \in \exp_\supset Y \mid B \cap G = \varnothing\}$ для всіх $G \in \exp_\supset Y$, і $\varnothing = \mathrm{F}'_Y$. Тоді елемент $P \in S \boxtimes S'$ — це функція з властивостями

(1) $P(\mathrm{F}_X, \mathrm{F}'_G) = P(\mathrm{F}_F, \mathrm{F}'_Y) = 0$ для всіх $F \in \exp_\supset X$, $G \in \exp_\supset Y$;

(2) $P(\mathrm{F}_{F_1} \cap \mathrm{F}_{F_2}, \mathrm{F}'_G) = P(\mathrm{F}_{F_1}, \mathrm{F}'_G) \wedge P(\mathrm{F}_{F_2}, \mathrm{F}'_G)$ для всіх $F_1, F_2 \in \exp_\supset X$, $G \in \exp_\supset Y$;

(3) $P(\mathrm{F}_F, \mathrm{F}'_{G_1} \cap \mathrm{F}'_{G_2}) = P(\mathrm{F}_F, \mathrm{F}'_{G_1}) \wedge P(\mathrm{F}_F, \mathrm{F}'_{G_2})$ для всіх $F \in \exp_{\supset} X$, $G_1, G_2 \in \exp_{\supset} Y$.

Якщо позначимо $P(\mathrm{F}_F, \mathrm{F}'_G) = Q(F, G)$, то умови вище набудуть простішого вигляду :

(1) $Q(X, G) = Q(F, Y) = 0$ для всіх $F \in \exp_{\supset} X$, $G \in \exp_{\supset} Y$;

(2) $Q(F_1 \cup F_2, G) = \min\{Q(F_1, G), Q(F_2, G)\}$ для всіх $F_1, F_2 \in \exp_{\supset} X$, $G \in \exp_{\supset} Y$;

(3) $Q(F, G_1 \cup G_2) = \min\{Q(F, G_1), Q(F, G_2)\}$ для всіх $F \in \exp_{\supset} X$, $G_1, G_2 \in \exp_{\supset} Y$.

Оскільки функція $Q : \exp_{\supset} X \times \exp_{\supset} Y \to \{0, 1\}$ неперервна за Скоттом, то для кожних таких F, G, що $Q(F, G) = 1$, існують замкнені околи $\overline{OF} \supset F$, $\overline{G} \supset G$, такі, що $Q(\overline{OF}, \overline{OG}) = 1$. Звідси випливає, що об'єднання

$$U = \bigcup\{F \times G \mid F \in \exp_{\supset} X,\ G \in \exp_{\supset} Y,\ Q(F, G) = 1\}$$

є відкритою власною підмножиною $X \times Y$. Більше того, для довільних $F \in \exp_{\supset} X$, $G \in \exp_{\supset} Y$ з $F \times G \subset U$, або, що рівносильно, $(F \times G) \cap H = \varnothing$ для $H = (X \times Y) \setminus U \in \exp(X \times Y)$, випливає $Q(F, G) = 1$. Отже, Q визначається формулою

$$Q(F, G) = \begin{cases} 1, & (F \times G) \cap H = \varnothing, \\ 0, & (F \times G) \cap H \neq \varnothing, \end{cases} \qquad F \in \exp_{\supset} X,\ G \in \exp_{\supset} Y.$$

З іншого боку, кожна $H \in \exp(X \times Y)$ за формулою вище задає функцію Q з властивостями (1), (2). Відповідна функція $P : (\exp_{\supset} X)^\wedge \times (\exp_{\supset} Y)^\wedge \to \{0, 1\}$ задається як

$$Q(\mathrm{F}, \mathrm{F}') = \begin{cases} 1, & \text{існують такі } A \in \mathrm{F}, B \in \mathrm{F}', \text{ що } (A \times Y) \cup (X \times B) \supset H, \\ 0, & \text{для всіх } A \in \mathrm{F}, B \in \mathrm{F}' \text{ маємо } (A \times Y) \cup (X \times B) \not\supset H, \end{cases}$$

$\mathrm{F} \in (\exp_{\supset} X)^\wedge$, $\mathrm{F}' \in (\exp_{\supset} Y)^\wedge$.

Отже :

$$S \boxtimes S' = \exp_{\supset} X \boxtimes \exp_{\supset} Y \cong \exp_{\supset}(X \times Y).$$

Повернемось до загального випадку повних стабільно неперервних напівграток S, S' з нулями і приймемо, як і раніше, що $L = (L, \oplus, *)$ — цілком дистрибутивна кванталь з одиницею, операція $* : L \times L \to L$ (узагальнена трикутна норма [23]) — неперервна щодо топології Лоусона.

Для довільних монотонних предикатів $c \in M_{[L]}S = [S \to L^{op}]_0^{op}$ та $c' \in M_{[L]}S' = [S' \to L^{op}]_0^{op}$ задамо функцію $c \boxtimes c' : S \boxtimes S' \to L$ формулою

$$c \boxtimes c'(P) = \sup\Big\{c(x) * c'(y) \;\Big|\; \text{якщо } x \notin \mathrm{F} \in S^{\wedge},\ y \notin \mathrm{F}' \in S'^{\wedge}, \\ \text{то } P(\mathrm{F}, \mathrm{F}') = 0\Big\}$$

для кожної сумісності $P \in S \boxtimes S'$.

“Розшифруємо” цю формулу для $S = \exp_{\supset} X$, $S' = \exp_{\supset} Y$ і P, визначеної множиною H вище. Тоді

$$c \boxtimes c'(P) = \sup\Big\{c(A) * c'(B) \;\Big|\; \text{якщо } A \cap F \neq \varnothing,\ B \cap G \neq \varnothing, \\ \text{то } (F \times G) \cap H \neq \varnothing, \\ = \sup\Big\{c(A) * c'(B) \;\Big|\; A \times B \subset H\Big\}.$$

Якщо трактувати елементи $x \in S$ та $y \in S'$ як гомоморфізми напігруп $S^{\wedge} \to \{0, 1\}$ та $S'^{\wedge} \to \{0, 1\}$, а саме

$$x(\mathrm{F}) = \begin{cases} 1, & x \in \mathrm{F}, \\ 0, & x \notin \mathrm{F}, \end{cases} \quad \mathrm{F} \in S^{\wedge}, \qquad y(\mathrm{F}') = \begin{cases} 1, & y \in \mathrm{F}', \\ 0, & y \notin \mathrm{F}', \end{cases} \quad \mathrm{F}' \in S'^{\wedge},$$

то формула набуде вигляду

$$c \boxtimes c'(P) = \sup\Big\{c(x) * c'(y) \;\Big|\; x(\mathrm{F}) \vee y(\mathrm{F}') \geqslant P(\mathrm{F}, \mathrm{F}') \\ \text{для всіх } \mathrm{F} \in S^{\wedge},\ \mathrm{F}' \in S'^{\wedge}\Big\}.$$

Лема 3.4.1. *Множина*

$$M_P = \{(x, y) \in S \times S' \mid x(\mathrm{F}) \vee y(\mathrm{F}') \geqslant P(\mathrm{F}, \mathrm{F}') \text{ для всіх } \mathrm{F} \in S^{\wedge},\ \mathrm{F}' \in S'^{\wedge}\}$$

є замкненою у нижній топології на $S \times S'$.

Доведення. Очевидно, що ця множина є верхньою. Припустимо, що $(x_0, y_0) \notin M_P$, тобто існують $\mathrm{F}_0 \in S^{\wedge}$, $\mathrm{F}'_0 \in S'^{\wedge}$, для яких $x_0(\mathrm{F}_0) = y_0(\mathrm{F}'_0) = 0$, $P(\mathrm{F}_0, \mathrm{F}'_0) = 1$. Оскільки P неперервне за Скоттом, існують такі $\mathrm{F}_1 \ll \mathrm{F}_0$, $\mathrm{F}'_1 \ll \mathrm{F}'_0$, що $P(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}'_1) = 1$. Згідно опису відношення $\ll$ на неперервних напівгратках існують такі $x_1 \in S$, $y_1 \in S'$, що $x_1 \in \mathrm{F}_0$, $\mathrm{F}_1 \subset x_1{\uparrow}$, $y_1 \in \mathrm{F}'_0$, $\mathrm{F}'_1 \subset y_1{\uparrow}$, звідки $x_0 \ll x_1$, $y_0 \ll y_1$. Зауважимо, що $(x_1, y_1) \notin M_P$ і для всіх $x \notin x_1{\uparrow}$, $y \notin y_1{\uparrow}$ маємо $x \notin \mathrm{F}_1$, $y \notin \mathrm{F}'_1$, звідки $(x, y) \notin M_P$. Це означає, що

$$(x_0, y_0) \in W = (S \times S') \setminus \{(x_1, 0), (0, y_1)\}{\uparrow} \subset (S \times S') \setminus M_P.$$

Множина W є елементом бази нижньої топології на $S \times S'$, отже, доповнення до множини M_P відкрите, а сама вона є замкненою. $\square$

Зауваження. Надалі використаємо відомий з [35] (Вправа III.3-28) факт, що для довільної верхньої підмножини A повної неперервної напівгратки S наступні твердження рівносильні :

— A замкнена у нижній топології;
— A замкнена у топології Лоусона;
— A компактна у топології Лоусона;
— A компактна у топології Скотта.

Наслідок 3.4.2. *Для довільних монотонних предикатів* $c \in M_{[L]}S = [S \to L^{op}]_0^{op}$ *та* $c' \in M_{[L]}S' = [S' \to L^{op}]_0^{op}$ *і кожної сумісності* $P \in S \boxtimes S'$ *множина*

$$M_{P,c,c'} = (c \times c')(M_P){\uparrow} \subset L^{op} \times L'^{op}$$

компактна у топології Лоусона, а для напрямленої вгору сім'ї сумісностей $P_i \in S \boxtimes S'$, $i \in \mathcal{I}$, та точної верхньої грані $P_0 = \sup_{i\in\mathcal{I}} P_i$ виконано

$$M_{P_0,c,c'} = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} M_{P_i,c,c'}$$

Доведення. Оскільки функція $c \times c' : S \times S' \to L^{op} \times L'^{op}$ неперервна за Скоттом, то образ $(c \times c')(M_P) \subset L^{op} \times L'^{op}$ компактної множини M_P теж компактний за Скоттом, як і його "верхня тінь" $M_{P,c,c'} = (c \times c')(M_P)\uparrow$, а тоді згідно зауваження вище $M_{P,c,c'}$ компактна у топології Лоусона.

Очевидно, що $M_{P_0} = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} M_{P_i}$. Для кожних $\alpha, \beta \in L^{op}$ множина $D = \{(x, y) \in S \times S' \mid c(x) \leqslant \alpha,\ c'(y) \leqslant \beta$ у $L^{op}\}$ нижня і замкнена за Скоттом, тому компактна у топології Лоусона. Отже, $M_{P_0} \cap D \neq \varnothing$, якщо і тільки якщо $M_{P_i} \cap D \neq \varnothing$ для всіх $i \in \mathcal{I}$. Це означає, що

$$(\alpha, \beta) \in (c \times c')(M_{P_0})\uparrow \iff (\alpha, \beta) \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} (c \times c')(M_{P_i})\uparrow,$$

тобто $M_{P_0,c,c'} = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} M_{P_i,c,c'}$. □

Отже :

Теорема 3.4. *Для кожних монотонних предикатів $c \in M_{[L]}S$ та $c' \in M_{[L]}S'$ функція $c \boxtimes c'$ належить до $M_{[L]}(S \boxtimes S')$.*

Доведення. З доведеного вище випливає, що для напрямленої вгору сім'ї сумісностей $P_i \in S \boxtimes S'$, $i \in \mathcal{I}$, та точної верхньої грані $P_0 = \sup_{i\in\mathcal{I}} P_i$ напрямлена вниз сім'я з компактних множин $M_{P_i,c,c'}$ збігається у топології Вієторіса на $\exp\{L\}$ до їх перетину $M_{P_0,c,c'}$. У цілком дистрибутивній гратці супремум та інфімум непорожньої замкненої множини залежать від неї неперервно щодо топології Вієторіса, звідки

$$c \boxtimes c'(P_i) = \underbrace{\sup\bigl(\exp(*)(M_{P_i,c,c'})\bigr)}_{\text{у } L} \to \underbrace{\sup\bigl(\exp(*)(M_{P_0,c,c'})\bigr)}_{\text{у } L} = c \boxtimes c'(P_0)$$

у топології Лоусона, тому (враховуючи напрямленість вгору у L^{op}) і у топології Скотта.

Отже, $c \boxtimes c' : S \boxtimes S' \to L^{op}$ — неперервна за Скоттом функція, яка зберігає найменший елемент, тобто $c \boxtimes c' \in M_{[L]}(S \boxtimes S')$. $\square$

Цим доведено, що для нормованих монотонних предикатів на повних стабільно неперервних напівгратках S і S' можна означити тензорний добуток, який є нормованим монотонним предикатом на повній напівгратці $S \boxtimes S'$. Щоб змістовно поставити запитання про його асоціативність, потрібно або зняти вимогу стабільної неперервності S і S', або довести стабільну неперервність $S \boxtimes S'$, що ми маємо намір зробити у майбутньому.

Однак побудована операція є комутативною у тому розумінні, що $c \boxtimes c' = (c' \boxtimes c) \circ i$, де $i : S' \boxtimes S \to S \boxtimes S'$ — очевидний ізоморфізм. Цим наше тензорне множення відрізняється від пари несиметричних (але симетричних між собою) тензорних множень неадитивних мір, породжених монадами [70]. Як було сказано, для $S = \exp_{\supset} X$ і $S' = \exp_{\supset} Y$ можемо ототожнити $S \boxtimes S'$ та $\exp_{\supset}(X \times Y)$. Тоді симетричний добуток визначається формулою: $(c \boxtimes c')(H) = \sup\{c(A) * c'(B) \mid A \subset X, B \subset Y, A \times B \subset H\}$ для кожної замкненої $H \subset X \times Y$ та ємностей $c \in MX$, $c' \in MY$. Цей добуток ближчий до тензорного добутку (адитивних) ймовірнісних мір [10].

Двоїста у певному сенсі симетрична операція тензорного множення $\boxplus$ для свого означення потребує неперервної щодо топології Лоусона узагальненої трикутної конорми $\tilde{*} : L \to L$ (тобто трикутної норми на L^{op}) [23].

Для кожних монотонних предикатів $c \in M_{[L]}S = [S \to L^{op}]_0^{op}$ та $c' \in M_{[L]}S' = [S' \to L^{op}]_0^{op}$ задамо функцію $c \boxplus c' : S \boxtimes S' \to L$ формулою

$$c \boxplus c'(P) = \inf\Big\{c(x) \,\tilde{*}\, c'(y) \;\Big|\; \text{якщо } x \in \mathrm{F} \in S^{\wedge},\ y \in \mathrm{F}' \in S'^{\wedge},$$

$$\text{то } P(\mathrm{F}, \mathrm{F}') = 1\Big\},$$

або ж

$$c \boxplus c'(P) = \inf\Big\{c(x) \mathbin{\tilde{*}} c'(y) \;\Big|\; x(\mathrm{F}) \wedge y(\mathrm{F}') \leqslant P(\mathrm{F}, \mathrm{F}')$$

$$\text{для всіх } \mathrm{F} \in S^{\wedge},\ \mathrm{F}' \in S'^{\wedge}\Big\}$$

для кожної сумісності $P \in S \boxtimes S'$.

Якщо $S = \exp_{\supset} X$, $S' = \exp_{\supset} Y$, і сумісність P визначено множиною H, як описано вище, то

$$c \boxplus c'(P) = \inf\Big\{c(A) \mathbin{\tilde{*}} c'(B) \;\Big|\; \text{якщо } A \cap F = \varnothing,\ B \cap G = \varnothing$$

$$\text{для } F \in \exp_{\supset} X,\quad G \in \exp_{\supset} Y, \text{ то } (F \times G) \cap H = \varnothing\Big\}$$

$$= \inf\Big\{c(A) \mathbin{\tilde{*}} c'(B) \;\Big|\; (A \times Y) \cup (X \times B) \supset H\Big\}.$$

Лема 3.4.3. *Для кожної сумісності $P \in S \boxtimes S'$ множина*

$$N_P = \{(x, y) \in S \times S' \mid x(\mathrm{F}) \wedge y(\mathrm{F}') \leqslant P(\mathrm{F}, \mathrm{F}') \text{ для всіх } \mathrm{F} \in S^{\wedge},\ \mathrm{F}' \in S'^{\wedge}\}$$

є замкненою у топології Скотта на $S \times S'$.

Для довільної напрямленої вгору сім'ї сумісностей $P_i \in S \boxtimes S'$, $i \in \mathcal{I}$, та її точної верхньої грані $P_0 = \sup_{i \in \mathcal{I}} P_i$ множина N_{P_0} збігається з замиканням щодо топології Скотта об'єднання $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} N_{P_i}$.

Доведення. Зрозуміло, що множина N_P є нижньою, і для довільної напрямленої вгору сім'ї $(x_j, y) \in N_P$ елемент $(\sup_j x_j, y)$ теж належить до N_P, аналогічно для фіксованого першого елемента пар, звідки маємо замкненість N_P щодо топології Скотта.

Зрозуміло, що множина N_{P_0} містить об'єднання $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} N_{P_i}$. Нехай $(x_0, y_0) \in N_{P_0}$, $x_1 \ll x_0$, $y_1 \ll y_0$, тоді існують $\mathrm{F}_0 \in S^{\wedge}$, $\mathrm{F}'_0 \in S'^{\wedge}$, для яких $x_0 \in \mathrm{F}_0 \subset x_1{\uparrow}$, $y_0 \in \mathrm{F}'_0 \subset y_1{\uparrow}$. За побудовою з $(x_0, y_0) \in N_P$ випливає $P_0(\mathrm{F}_0, \mathrm{F}'_0) = 1 = \sup_{i \in \mathcal{I}} P_i(\mathrm{F}_0, \mathrm{F}'_0)$, тому існує $i \in \mathcal{I}$, для якого $P_i(\mathrm{F}_0, \mathrm{F}'_0) = 1$. Тоді для всіх $\mathrm{F} \ni x_1$, $\mathrm{F}' \ni y_1$ виконано $\mathrm{F} \geqslant \mathrm{F}_0$, $\mathrm{F}' \geqslant \mathrm{F}'_0$, тому $P_i(\mathrm{F}, \mathrm{F}') = 1$, тобто

$(x_1, y_1) \in N_{P_i}$. Цим доведено, що (x_0, y_0) є точкою дотику щодо топології Скотта об'єднання $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} N_{P_i}$. □

З цього випливає :

ТЕОРЕМА 3.5. *Для кожних монотонних предикатів $c \in M_{[L]}S$ та $c' \in M_{[L]}S'$ функція $c \boxplus c'$ належить до $M_{[L]}(S \boxtimes S')$.*

ДОВЕДЕННЯ. Якщо $P_0 = \sup_{i\in\mathcal{I}} P_i$ для напрямленої вгору сім'ї сумісностей $P_i \in S \boxtimes S'$, $i \in \mathcal{I}$, то

$$\begin{aligned}
c \boxplus c'(P_0) &= \underbrace{\sup\{\alpha \mathbin{\tilde{*}} \beta \mid \alpha \leqslant c(x),\ \beta \leqslant c'(y) \text{ для деякого } (x,y) \in N_{P_0}\}}_{\text{у } L^{op}} \\
&= \underbrace{\sup\{\alpha \mathbin{\tilde{*}} \beta \mid \alpha \leqslant c(x),\ \beta \leqslant c'(y) \text{ для деякого } (x,y) \in \bigcup_{i\in\mathcal{I}} N_{P_i}\}}_{\text{у } L^{op}} \\
&= \sup_{i\in\mathcal{I}} \underbrace{\sup\{\alpha \mathbin{\tilde{*}} \beta \mid \alpha \leqslant c(x),\ \beta \leqslant c'(y) \text{ для деякого } (x,y) \in N_{P_i}\}}_{\text{у } L^{op}} \\
&= \sup_{i\in\mathcal{I}} c \boxplus c'(P_i),
\end{aligned}$$

тому функція $c \boxplus c' : S \boxtimes S' \to L^{op}$ — неперервна за Скоттом.

Ми використали той факт, що для неперервної функції f і множини A завжди $f(A) \subset f(\mathrm{Cl}\, A) \subset \mathrm{Cl}\, f(A)$, а для підмножини B цілком дистрибутивної гратки $\sup \mathrm{Cl}\, B = \sup B$, де замикання — щодо топології Скотта. □

Щоб продемонструвати практичну значущість запропонованих конструкцій, ми надамо їм теоретико-ігрову інтерпретацію, більше уваги якій буде приділено у останньому розділі.

ПРИКЛАД 3.4.4. Для простоти покладемо $L = I$, $S = \exp_{\supset} X$, $S' = \exp_{\supset} Y$ для компактів X, Y, тоді вважаємо, що $S \boxtimes S' = \exp_{\supset}(X \times Y)$.

Розглянемо кооперативну гру двох гравців, яким арбітр пропонує непорожню замкнену підмножину H добутку $X \times Y$. Перший гравець обіцяє арбітру можливість вибору будь-якої точки x з непорожньої замкненої підмножини $A \subset X$, а другий — будь-якої точки y з непорожньої замкненої підмножини $B \subset Y$. Якщо арбітр, маючи повну інформацію, обере точку $(x, y) \notin H$, $x \in A$, $y \in B$, то гравці не отримують нічого, інакше їх спільний виграш тим більший, чим більші множини A і B, і визначається добутком $c(A) * c'(B)$, де $c \in M_{[I]} \exp_{\supset} X = MX$, $c' \in M_{[I]} \exp_{\supset} Y = MY$, тобто c і c' — регулярні нормовані неадитивні міри (ємності) відповідно на X та Y. Тоді максимально можливий виграш (з міркувань вище бачимо, що він досяжний) визначається значенням $c \boxtimes c'(H)$.

Приклад 3.4.5. Знову $L = I$, $S = \exp_{\supset} X$, $S' = \exp_{\supset} Y$ для компактів X, Y, $S \boxtimes S' = \exp_{\supset}(X \times Y)$, однак тепер гравці відповідно обіцяють, що при будь-якому виборі арбітром точки $(x, y) \in H$ буде виконано $x \in A \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ чи $y \in B \underset{\mathrm{cl}}{\subset} Y$. Якщо *жодна* з цих обіцянок не буде виконана, вони сплачують арбітрові максимально можливий штраф, рівний 1, а, якщо *хоча б одна з них* здійсниться, то їх спільний штраф тим менший, чим менші A і B, і рівний $c(A) \tilde{*} c'(B)$, де c і c' — знову регулярні нормовані неадитивні міри відповідно на X та Y. Тоді точна нижня грань штрафів, які можуть обрати для себе гравці, (не обов'язково досяжна) визначається значенням $c \boxplus c'(H)$.

3.5. Спряжені ємності на неперервних напівгратках

3.5.1. Поняття спряженої ємності. Нагадаємо, як означується спряжена ємність до нормованої дійснозначної ємності c на компакті X [2], тобто до ізотонної функції $c : \exp X \cup \{\varnothing\} \to I$, що відображає $\varnothing$ у 0, X у 1, і для кожної напрямленої вниз сім'ї $(F_i)_{i \in \mathcal{I}}$ замкнених підмножин X задовольняє рівність $c(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} F_i) = \inf_{i \in \mathcal{I}} c(F_i)$.

Для кожної $G \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ покладаємо $\tilde{c}(G) = 1 - \sup\{c(F) \mid F \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X, F \cap G = \varnothing\}$. Неважко перевірити, що $\tilde{\tilde{c}} \equiv c$, і для ймовірнісної (тобто нормованої адитивної) міри виконано $\tilde{c} = c$, і всі ймовірнісні міри є самоспряженими.

Поняття спряженої міри природно узагальнюється на граткозначні ємності, тобто функції з $\exp X \cup \{\varnothing\}$ у цілком дистрибутивну гратку L з наведеними вище властивостями. Відмінність тільки у тому, що спряжена ємність має значення у $\tilde{L} = L^{op}$ і визначається формулою $\tilde{c}(G) = \sup\{c(F) \mid F \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X, F \cap G = \varnothing\}$.

Нагадаємо, що множина $\exp X$, впорядкована протилежно до включення, є неперервною граткою $\exp_{\supset} X$, і L-значна ємність c на компакті X по суті є неперервним за Скоттом відображенням $c : \exp_{\supset} X \to L^{op}$, що відображає найменший елемент X у $\tilde{0} = 1 \in L$ (нехтуємо значенням $c(\varnothing)$, яке завжди рівне $0 \in L$).

Якщо замінити $\exp_{\supset} X$ довільною неперервною граткою S з нулем, то для означення спряженого до неперервного за Скоттом відображення $c : S \to L^{op}$ потрібно знайти замінник умови $F \cap G = \varnothing$ вище для елементів S. Ми використаємо для цього сильну відокремлюючу сумісність.

Нам будуть також потрібні контраваріантні hom-функтори у категорії $\mathcal{CS}\mathrm{em}_{0\uparrow}$ неперервних напівграток з найменшими елементами і неперервних за Скоттом відображень, що зберігають найменші елементи. З Леми II.2-9 [35] випливає, що для морфізму $f : S_1 \to S_2$ в $\mathcal{CS}\mathrm{em}_{0\uparrow}$ відображення $[f \to L] : [S_2 \to L] \to [S_1 \to L]$, $[f \to L](c) = c \circ f$, де $c \in [S_2 \to L]$, є неперервним за Скоттом гратковим морфізмом. Тому отримуємо контраваріантний функтор $[- \to L]$ з $\mathcal{CS}\mathrm{em}_{0\uparrow}$ в категорію $\mathcal{S}\mathrm{up}$ повних граток і відображень, які зберігають усі супремуми. Для кожного об'єкта S категорії $\mathcal{CS}\mathrm{em}_{0\uparrow}$ підмножина $[S \to L]_0 = \{c \in [S \to L] \mid c(0) = 0\}$ замкнена відносно довільних інфімумів і супремумів. Тому вона також є об'єктом $\mathcal{S}\mathrm{up}$. Включення $[S \to$

$L]_0 \hookrightarrow [S \to L]$ є морфізмом у $\mathcal{S}\mathrm{up}$, а $[f \to L]\big([S_2 \to L]_0\big) \subset [S_1 \to L]_0$ для вказаного вище відображення $f : S_1 \to S_2$. Тому, означуємо відображення $[f \to L]_0 : [S_2 \to L]_0 \to [S_1 \to L]_0$ як обмеження $[f \to L]$ та отримуємо контраваріантний функтор $[- \to L]_0 : \mathcal{CS}\mathrm{em}_{0\uparrow} \to \mathcal{S}\mathrm{up}$. Нагадаємо, що множину $[S \to L]$ ототожнюємо з оберненою до множини $\underline{M}_{[L^{op}]}S$ усіх L^{op}-ємностей на S. Легко бачити, що $[S \to L]_0$ є оберненою до частково впорядкованої множини $M_{[L^{op}]}S$ всіх *нормованих* L^{op}-ємностей на S.

Зафіксуємо неперервні напівгратки з нулями S, S' і сильну відокремлюючу сумісність $P \subset S \times S'$. Для неперервної за Скоттом функції $c : S \to L$ (тобто для L^{op}-ємності $c : S \to L^{op}$), означимо *спряжену до неї* функцію $\tilde{c} : S' \to \tilde{L}$ наступним чином:

$$\tilde{c}(s') = \inf\{c(s) \mid s \in S, (s, s') \in P\} \text{ в } L,\ s' \in S'.$$

В частковому "канонічному" випадку, коли $S' = S^\wedge$, $P = \{(s, \mathrm{F}) \in S \times S^\wedge \mid s \in \mathrm{F}\}$, спряжена функція $\tilde{c} \in [S' \to \tilde{L})$ має вигляд

$$\tilde{c}(\mathrm{F}) = \inf\{c(s) \mid s \in F, s \neq \top\} \text{ в } L,\ F \in S^\wedge.$$

Твердження 3.5.1. [57] *Функція $\tilde{c}$ є неперервною за Скоттом, переводить нульовий елемент в нульовий елемент, а для її надграфіка виконується рівність*

$$\widetilde{\mathrm{epi}}\,\tilde{c} = \{(s', \alpha') \in S' \times \tilde{L} \mid (s, s') \in P \text{ або } \alpha' \leqslant \alpha \text{ для всіх } (s, \alpha) \in \mathrm{epi}\, c\}.$$

Істинне також наступне:

$$\tilde{\tilde{c}}(s) = \begin{cases} c(s), s \neq 0, \\ 0, s = 0, \end{cases} \qquad s \in S.$$

Зауваження. Поняття спряженості та останнє твердження можна сформулювати у термінах ємностей. Якщо $c : S \to L$ є L-ємністю, то функція

$\tilde{c} : S' \to \tilde{L}$, така, що

$$\tilde{c}(s') = \sup\{c(s) \mid s \in S, (s, s') \in P\} \text{ в } L,\ s' \in S',$$

є нормованою $\tilde{L}$-ємністю, підграфік якої утворюється за формулою

$$\widetilde{\operatorname{sub}}\, \tilde{c} = \{(s', \alpha') \in S' \times \tilde{L} \mid (s, s') \in P \text{ або } \alpha \leqslant \alpha' \text{ для всіх } (s, \alpha) \in \operatorname{sub} c\}.$$

Називаємо її *ємністю, спряженою до* c. Також $\tilde{\tilde{c}} = c \vee c_0$, де c_0 є найменшою нормованою ємністю, що переводить $0 \in S$ в $1 \in L$, а всі інші елементи S переводить в 0.

Щоб довести останнє твердження і дослідити природу взаємовідношення між c та $\tilde{c}$, скористаємось зв'язком Галуа.

Зафіксуємо сильну відокремлюючу сумісність $P \subset S \times S'$, функцію $f \in [S \to L]$ і означимо відображення $p(f) : S' \to \tilde{L}$ формулою

$$p(f)(s') = \widetilde{\sup}\{f(s) \mathbin{\tilde{\wedge}} \bar{P}(s, s') \mid s \in S\}, s' \in S'.$$

Для $f' \in [S' \to \tilde{L}]$ відображення $q(f') : S \to L$ означується подібно:

$$q(f')(s) = \sup\{f'(s') \wedge P(s, s') \mid s \in S\}, s \in S.$$

Для всіх $s \in S$ функція $S' \to \tilde{L}$, яка кожному s' ставить у відповідність $f(s) \mathbin{\tilde{\wedge}} \bar{P}(s, s')$, є неперервною за Скоттом, а значить, поточковий супремум усіх таких функцій теж є неперервним за Скоттом. Очевидно, що $p(f)(0) = 1 = \tilde{0}$, а тому $p(f) \in [S' \to \tilde{L}]_0$. Так само $q(f') \in [S \to L]_0$. Зауважимо, що для $f \in [S \to L]$ і $f' \in [S' \to \tilde{L}]$ виконання обох нерівностей $p(f) \mathrel{\tilde{\leqslant}} f'$ та $q(f') \leqslant f$ є еквівалентним наступному:

$$f(s) \geqslant f'(s') \text{ для всіх } s \in S, s' \in S',\ \text{ таких, що } sPs'.$$

Отже, четвірка $([S \to L]^{op}, p, q, [S' \to \tilde{L}]^{op})$ утворює контраваріантний зв'язок Галуа. З того, що відношення P відокремлює точки в S та S', випливає, що обмеження $p_0 : [S \to L]_0 \to [S' \to \tilde{L}]_0$ відображення p є ін'єкцією. Так само і обмеження $q_0 : [S' \to \tilde{L}]_0 \to [S \to L]_0$ відображення q є ін'єктивним. Тому p_0 і q_0 є взаємно оберненими порядковими антиізоморфізмами.

Тепер, зауваживши, що $p(f) = \tilde{f}$, $q(f') = \tilde{f}'$, скористаємось твердженням 3.5.1. Якщо $S' = S^\wedge$, а $P = \{(s, \mathrm{F}) \in S \times S^\wedge \mid s \in \mathrm{F}\}$, то такий антиізоморфізм $p_0 : [S \to L]_0 \to [S^\wedge \to \tilde{L}]_0$ позначатимемо $\varkappa_{[L]}S$.

Якщо $S = S' = \exp_\supset X$, $P = \{(F, G) \in (\exp_\supset X)^2 \mid F \cap G \neq \varnothing\}$, $c \in \underline{M}_{[L]}S$, то

$$\tilde{c}(F) = \sup\{c(G) \mid F \cap G = \varnothing\}, F \in \exp_\supset X,$$

що насправді є означенням *спряженої $\tilde{L}$-ємності* до L-ємності c на компакті X, див. [55]. Отже, доречно називати $\tilde{c} : S' \to \tilde{L}$ *спряженим відображенням* до $c : S \to L$, а ємність $\tilde{c} : S'^{op} \to \tilde{L}$ *спряженою ємністю* до $c : S^{op} \to L$.

Зі сказаного вище отримуємо

Теорема 3.6. *Для компактної гаусдорфової гратки Лоусона L і неперервної напівгратки S з нижнім елементом частково впорядковані множини $[S \to L]_0$ і $[S^\wedge \to \tilde{L}]_0$ порядково антиізоморфні.*

Частково впорядковані множини $M_{[L]}S$ і $M_{[\tilde{L}]}(S^\wedge)$ теж порядково антиізоморфні.

3.5.2. Спряженість ємностей як частковий випадок спряженості сумісностей. Нагадаємо, що кожна нормована L-значна ємність c на неперервній напівгратці S з нулем (тобто монотонний L-значний предикат на S) ототожнюється з сумісністю R між S та L, означеною як

$$R(x, \alpha) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha \leqslant c(x), \\ 1, & \text{якщо } \alpha \nleqslant c(x). \end{cases}$$

Якщо зафіксовано сильну відокремлюючу сумісність $P : S \times S' \to \{0,1\}$, то аналогічно довільну нормовану $\tilde{L}$-значну ємність c' на S' з нулем (монотонний $\tilde{L}$-значний предикат на S') ототожнюємо з сумісністю R' між S' та L' :

$$R'(x',\beta) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \beta \tilde{\leqslant} c'(y), \\ 1, & \text{якщо } \beta \tilde{\nleqslant} c'(y). \end{cases}$$

Нагадаємо, що між L і $\tilde{L}$ існує стандартна сумісність

$$P_L(x,y) = \begin{cases} 0, x \leqslant y, \\ 1, x \nleqslant y, \end{cases} \qquad x \in L, y \in \tilde{L}.$$

Тоді $P \otimes P_L$ є сумісністю між $M_{[L]}S \cong C_{\bullet\vee}(S,L)$ та $M_{[\tilde{L}]}S' \cong C_{\bullet\vee}(S',\tilde{L})$, і $P \otimes P_L(R,R') = 0$, якщо і тільки якщо $c(x) \leqslant c'(x')$ для всіх таких $x \in S$, $x' \in S'$, що $P(x,x') = 1$. Тоді кажемо, що c і c' є сумісними. Спряжена ємність $\tilde{c}$ є найбільшою найбільшою нормованою $\tilde{L}$-значною ємністю, сумісною з c, і вона відповідає $\widehat{R}$ — найбільшій сумісності, що зберігає попарні супремуми по другому аргументу і сумісна з R. Отже :

Твердження 3.5.2. *Якщо нормована L-значна ємність c на неперервній напівґратці S з нулем визначає сумісність R між S і L, P — сильна відокремлююча сумісність між S і S', P_L — стандартна сумісність між L і $\tilde{L}$, тоді спряжена ємність $\tilde{c} : S' \to \tilde{L}$ визначає сумісність $\widehat{R}$ між S' і $\tilde{L}$, спряжену до R щодо $P \otimes P_L$.*

Отже, спряженість ємностей (монотонних предикатів) є звуженням спряженості сумісностей.

3.5.3. Спряженість як природне перетворення між двома класичними двоїстостями. Візьмемо "стандартні" сильні відокремлюючі сумісності $P_1 \subset S_1 \times S_1^\wedge$ і $P_2 \subset S_2 \times S_2^\wedge$. Тобто, $P_i = \{(s,\mathrm{F}) \in S_i \times S_i^\wedge \mid s \in \mathrm{F}\}$,

$i = 1, 2$, а контраваріантні зв'язки Галуа $([S_i \to L]_0^{op}, p_i, q_i, [S_i^\wedge \to \tilde{L}]_0^{op})$, $i = 1, 2$ такі, як описано вище.

Для морфізму $f : S_1 \to S_2$ у $\mathcal{CS}\mathrm{em}_0$ розглянемо діаграму:

$$\begin{tikzcd}
{[S_1 \to L]_0} \arrow[r, shift left, "p_1"] & {[S_1^\wedge \to \tilde{L}]_0} \arrow[l, shift left, "q_1"] \arrow[d, "{[f^\wedge \to \tilde{L}]_0}"] \\
{[S_2 \to L]_0} \arrow[u, "{[f \to L]_0}"] \arrow[r, shift left, "p_2"] & {[S_2^\wedge \to \tilde{L}]_0} \arrow[l, shift left, "q_2"]
\end{tikzcd}$$

Лема 3.5.3. [57] *Четвірка* $([S_1 \to L]_0^{op}, [f^\wedge \to \tilde{L}]_0 \circ p_1, [f \to L]_0 \circ q_2, [S_2^\wedge \to \tilde{L}]_0^{op})$ *утворює контраваріантний зв'язок Галуа.*

Доведення. Зауважимо, що для всіх $\varphi \in [S_1 \to L]_0$, $\psi \in [S_2^\wedge \to \tilde{L}]_0$ нерівність $\tilde{\varphi} \circ f^\wedge \lesseqgtr \psi$ еквівалентна

$$\psi(y) \leqslant \varphi(x) \text{ для всіх } x \in S_1, y \in S_2^\wedge, \text{ для яких } (x, f^\wedge(y)) \in P_1,$$

а нерівність $\tilde{\psi} \circ f \leqslant \varphi$ еквівалентна

$$\psi(y) \leqslant \varphi(x) \text{ для всіх } x \in S_1, y \in S_2^\wedge, \text{ для яких } (f(x), y) \in P_2.$$

Оскільки $(x, f^\wedge(y)) \in P_1$ тоді і тільки тоді, коли $(f(x), y) \in P_2$, то ми приходимо до потрібного висновку. $\square$

Наслідок 3.5.4. *Відображення* $q_2 \circ [f^\wedge \to \tilde{L}]_0 \circ p_1 : [S_1 \to L]_0 \to [S_2 \to L]_0$ *є верхнім спряженим до* $[f \to L]_0 : [S_2 \to L]_0 \to [S_1 \to L]_0$.

Для відображення повних граток $\varphi : L \to L'$ позначаємо φ^* *нижнє обернене* до нього, тобто, таке відображення $L' \to L$, для якого

$$\varphi^*(y) = \sup\{x \in L \mid \varphi(x) \leqslant y\}, \ y \in L'.$$

Нагадаємо, що за теоремою спряження для порядкових структур [35] будь-яке відображення повних граток $\varphi : L \to L'$, що зберігає всі супремуми, є нижнім спряженим до єдиного зв'язку Галуа між цими гратками, а верхнім спряженим є φ^*.

З теореми IV.1-3 [35] випливає, що категорія $\mathcal{S}\mathrm{up}$ всіх повних граток і відображень, які зберігають усі супремуми, є самодвоїстою відносно контраваріантного функтора $\tilde{D}$, що кожній гратці L ставить у відповідність L^{op}, а кожному морфізму $f : L_1 \to L_2$ співставляє $(f^*)^{op} : L_2^{op} \to L_1^{op}$.

Діаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}\mathrm{up} \arrow[r, "\tilde{D}"] & \mathcal{S}\mathrm{up} \\
\mathcal{CS}\mathrm{em}_0 \arrow[u, "{[-\to L]_0}"] \arrow[r, "(-)^\wedge"'] & \mathcal{CS}\mathrm{em}_0 \arrow[u, "{[-\to \tilde{L}]_0}"']
\end{tikzcd}$$

в загальному не є комутативною, але дві попарні композиції ізоморфні [48] (зауважимо, що функтори контраваріантні).

Склавши разом усі твердження, отримуємо один з головних результатів цього розділу.

Теорема 3.7. *Набір $\varkappa_{[L]}$ всіх ізоморфізмів $\varkappa_{[L]}S : [S \to L]_0^{op} \to [S^\wedge \to \tilde{L}]_0$ для всіх об'єктів категорії $\mathcal{CS}\mathrm{em}_0$ є ізоморфізмом функторів $\tilde{D} \circ [- \to L]_0 \to [- \to \tilde{L}]_0 \circ (-)^\wedge$.*

Тому, конструкції граток нормованих L-ємностей і нормованих $\tilde{L}$-ємностей на неперервних напівгратках з нулем є функторіальними і пов'язані з допомогою двох класичних двоїстостей та функторіального ізоморфізму. Компоненти останнього зіставляють кожній ємності спряжену до неї.

Висновки до розділу 3.

У третьому розділі запроваджено поняття сумісності між неперервними напівгратками і показано, що підкласи класу сумісностей відповідають неперервним за Скоттом відображенням, зв'язкам Галуа, ізотонним відображенням з лінійно впорядкованими образами. Виділено підклас сильних сумісностей і доведено, що всі вони ізоморфні до природних сумісностей між неперервними напівгратками з нулями та їх модифікованими двоїстими за Лоусоном напівгратками. Доведено твердження про неперервність частково впорядкованої множини неперервних за Скоттом відображень з повної неперервної напівгратки у неперервну напівгратку, з якої отримано, що сумісності, що зберігають попарні інфімуми по другому аргументу, між повною неперервною напівграткою і неперервною напівграткою з нулем, утворюють неперервну напівгратку з нулем, як і сумісності між повними стабільно неперервними напівгратками, що зберігають попарні інфімуми по обох аргументах. Доведено, що частково впорядковані множини сумісностей, що зберігають попарні супремуми по одному чи двох аргументах, є двоїсто неперервними гратками. Побудовано дві симетричні операції тензорного множення предикатів, що є аналогами тензорного множення адитивних мір. Доведено, що пари сумісностей між неперервними напівгратками з нулем задають сумісність між цілком дистрибутивними гратками сумісностей, визначену зв'язком Галуа, і описано цей зв'язок. Показано, що відома дія знаходження спряженої до граткозначної ємності на напівгратці, яка узагальнює взяття спряженої до неадитивної міри на компакті, є частковим випадком цього зв'язку Галуа. Доведено, що відображення взяття спряжених до граткозначних мір в сукупності утворюють ізоморфізм функторів, що пов'язує дві класичні двоїстості у теорії областей.

Результати розділу опубліковано у працях [6, 7, 53, 57].

РОЗДІЛ 4
НЕОДНОЗНАЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ

Більшість цього розділу буде присвячена вивченню спеціальних класів відношень — чітких та граткозначних (нечітких) неоднозначних зображень між неперервними напівгратками. Вже було сказано, що сукупності монотонних предикатів можна розуміти як аналоги вільних векторних топологічних просторів чи вільних опуклих компактів. Тоді неоднозначні зображення, разом з доречно означеними їх композиціями, відповідають неперервним лінійним чи афінним відображенням. Крім того, ми доводимо, що можна означити “скалярний добуток” предикатів так, що для лінійних відображень існують ермітово спряжені, відповідні псевдооберненим неоднозначним зображенням.

4.1. Категорія неоднозначних зображень

ОЗНАЧЕННЯ 4.1.1. Нехай S_1, S_2 неперервні напівгратки з нулями 0_1 та 0_2 відповідно. *Неоднозначним зображенням* S_1 в S_2 є бінарне відношення $R \subset S_1 \times S_2$, для якого виконуються умови:

(1) якщо $(x, y) \in R$, $x \leqslant x'$ в S_1, а $y' \leqslant y$ в S_2, то $(x', y') \in R$;

(2) для всіх $x \in S_1$ множина $xR = \{y \in S_2 \mid (x, y) \in R\}$ непорожня і замкнена за Скоттом в S_2.

З означення випливає, що $(x, 0_2) \in R$ для всіх $x \in S$. Всі замкнені за Скоттом множини є нижніми, отже, з (2) випливає, що $(x, y') \in R$, якщо $(x, y) \in R$ і $y' \leqslant y$. Тому умову (1) можна розглядати у такому виді: $(x', y) \in R$ для $(x, y) \in R$ та $x \leqslant x'$.

Зафіксуємо сильні відокремлюючі сумісності $P_1 : S_1 \times \hat{S}_1 \to \{0,1\}$ і $P' = S_2 \times \hat{S}_2 \to \{0,1\}$.

Для неоднозначного зображення $R \subset S_1 \times S_2$ означимо відношення $R^{\smile} \subset \hat{S}_2 \times \hat{S}_1$ формулою

$$R^{\smile} = \big\{(\hat{y},\hat{x}) \in \hat{S}_2 \times \hat{S}_1 \mid \text{з того, що } xP_1\hat{x} = 1 \text{ для деякого } x \in S_1, \\ \text{випливає існування } y \in xR, \text{ для якого} yP_2\hat{y} = 1\big\}$$

або, що рівносильно,

$$R^{\smile} = \big\{(\hat{y},\hat{x}) \in \hat{S}_2 \times \hat{S}_1 \mid \text{якщо } x \in S_1 \text{ таке, що } yP_2\hat{y} = 0 \\ \text{для всіх } y \in xR, \text{то } xP_1\hat{x} = 0\big\}.$$

Очевидно, що $R^{\smile}$ теж є неоднозначним зображенням. Отже, ми можемо обчислити $R^{\smile\smile} = (R^{\smile})^{\smile} \subset S \times S'$, ще раз застосувавши сумісності.

Теорема 4.1. [60] *Для кожного неоднозначного зображення $R \subset S_1 \times S_2$ виконується включення $R^{\smile\smile} \subset R$. Рівність $R = R^{\smile\smile}$ еквівалентна до умов*

(3) *якщо $(x,y) \in R$ і $y' \ll y$ в S_2, то існує $x' \ll x$ в S_1, для якого $(x',y') \in R$;*

(4) *якщо $(0_1, y) \in R$, то $y = 0_2$.*

Доведення. Зауважимо, що має місце формула

$$\hat{y}R^{\smile} = \big\{x \in S_1 \,\big|\, \hat{y} \in (xR)^{\perp}\big\}^{\perp}.$$

Тому

$$\bar{x}R^{\smile\smile} = \big\{\hat{y} \in \hat{S}_2 \,\big|\, \bar{x} \in (\hat{y}R^{\smile})^{\perp}\big\}^{\perp} = \big\{\hat{y} \in \hat{S}_2 \,\big|\, \bar{x} \in \{x \in S_1 \mid \hat{y} \in (xR)^{\perp}\}^{\perp\perp}\big\}^{\perp}.$$

Беручи до уваги

$$\bar{x} \in \{x \in S \mid \hat{y} \in (xR)^{\perp}\}^{\perp\perp} \Leftarrow \hat{y} \in (\bar{x}R)^{\perp},$$

отримаємо

$$\bar{x}R^{\smile\smile} \subset \big\{\hat{y} \in \hat{S}_2 \mid \hat{y} \in (\bar{x}R)^{\perp}\big\}^{\perp} = (\bar{x}R)^{\perp\perp} = \bar{x}R$$

для всіх $\bar{x} \in S_1$. Отже, включення виконується.

Якщо $(\hat{0}_2, \hat{x}) \in R^{\smile}$, то для кожного $x \in S_1$ і всіх $y \in xR$ виконано $yP_2\hat{0}_2 = 0$, звідки $xP_1\hat{x} = 0$ теж повинно виконуватись для всіх $x \in S_1$, тому $\hat{x} = \hat{0}_1$. Отже, (4) істинне для всіх відношень $R^{\smile}$, тому і для $R^{\smile\smile}$. Звідси виконання (4) для R необхідне для рівності $R = R^{\smile\smile}$.

Припустимо, що (4) виконано. Множина $\{x \in S_1 \mid \hat{y} \in (xR)^{\perp}\}$ нижня і непорожня (бо згідно (4) містить 0_1), тому подвійна трансверсаль для неї є замиканням. Тому

$$\begin{aligned} \bar{x}R^{\smile\smile} &= \left\{\hat{y} \in \hat{S}_2 \;\middle|\; \bar{x} \in \mathrm{Cl}\{x \in S_1 \mid \hat{y} \in (xR)^{\perp}\}\right\}^{\perp} \\ &= \left\{\hat{y} \in \hat{S}_2 \;\middle|\; \hat{y} \in (xR)^{\perp} \text{ для всіх } x \ll \bar{x}\right\}^{\perp} \\ &= \left(\bigcap\{(xR)^{\perp} \mid x \ll \bar{x}\}\right)^{\perp}. \end{aligned}$$

Сім'я $\{\{xR)^{\perp} \mid x \ll \bar{x}\}$ замкнених нижніх множин є фільтрованою. Отже, трансверсаль їх перетину дорівнює

$$\mathrm{Cl}\left(\bigcup\{(xR)^{\perp\perp} \mid x \ll \bar{x}\}\right) = \mathrm{Cl}\left(\bigcup\{xR \mid x \ll \bar{x}\}\right),$$

а рівність $R^{\smile\smile} = R$ еквівалентна до

$$\bar{x}R = \mathrm{Cl}\left(\bigcup\{xR \mid x \ll \bar{x}\}\right),$$

що, фактично, є умовою (3). □

З рівності $R\smile\smile = R$ випливає $(R^{\smile})^{\smile\smile} = R^{\smile}$. Отже, якщо (3) виконується для R, то вона виконується і для $R^{\smile}$. Тому на таких неоднозначних зображеннях операція $(\ )^{\smile}$ інволютивна і називаємо R та $R^{\smile}$ *псевдооберненими* одне до одного. Неоднозначні зображення, для яких $R\smile\smile = R$, називаються *псевдооборотними*.

Одна з причин розглядати цей підклас полягає в тому, що якщо ми скомпонуємо неоднозначні зображення як відношення, тобто, для $R \subset S_1 \times S_2$,

$Q \subset S_2 \times S_3$ розглянемо

$$RQ = \{(x,z) \in S_1 \times S_3 \mid \text{ існує } y \in S_2, \text{ для якого } (x,y) \in R, (y,z) \in Q\},$$

то в результаті отримаємо відношення, яке не обов'язково є замкненим, як цього вимагає умова (2) в означенні неоднозначного зображення. Отже, неоднозначні зображення не утворюють категорію з такою композицією.

Щоб це виправити, переозначимо композицію

$$\begin{aligned} R;Q = \{(x,z) \in S_1 \times S_3 \mid z \in \mathrm{Cl}(xRQ)\} = \\ = \{(x,z) \in S_1 \times S_3 \mid \text{для всіх } z' \ll z \\ \text{існує таке } y \in S_2, \text{ що } (x,y) \in R, (y,z') \in Q\}. \end{aligned}$$

Тепер маємо замкненість, але композиція ";" не є асоціативною.

Лема 4.1.2. [60] *Для всіх неоднозначних зображень $R \subset S_1 \times S_2$, $Q \subset S_2 \times S_3$ виконується включення $Q^{\smile};R^{\smile} \subset (R;S)^{\smile}$.*

Доведення. Оскільки $\hat{z}Q^{\smile};R^{\smile} = \mathrm{Cl}(\hat{z}Q^{\smile}R^{\smile})$ для всіх $\hat{z} \in \hat{S}_3$, а $\hat{z}(R;Q)^{\smile}$ замкнене в S_1, то достатньо довести $Q^{\smile}R^{\smile} \subset (R;Q)^{\smile}$.

Нехай маємо $(\hat{z},\hat{x}) \in Q^{\smile}R^{\smile}$. Виберемо $\hat{y} \in \hat{S}_2$, для якого $(\hat{z},\hat{y}) \in Q^{\smile}$ і $(\hat{y},\hat{x}) \in R^{\smile}$. Тоді

1) якщо $xP_1\hat{x} = 1$ для деякого $x \in S_1$, то існує $y \in xR,\ yP_2\hat{y} = 1$,

2) якщо $yP_2\hat{y} = 1$ для деякого $y \in S_2$, то існує $z \in yQ,\ zP_3\hat{z} = 1$.

А це означає, що

якщо $xP_1\hat{x} = 1$ для деякого $x \in S_1$, то існує $z \in xRQ,\ zP_3\hat{z} = 1$.

Більше того, останнє z належить $xR;Q$. Отже, $(\hat{z},\hat{x}) \in (R;Q)^{\smile}$. □

Наслідок 4.1.3. *Нехай неоднозначні зображення $R \subset S_1 \times S_2$, $Q \subset S_2 \times S_3$ є псевдооборотними. Тоді $Q^{\smile};R^{\smile} = (R;Q)^{\smile}$, а композиція $R;Q$ також є псевдооборотною.*

Доведення. Беручи до уваги сказане вище, а також те, що відображення $(-)^{\smile}$ антитонне, маємо:

$$R;Q = R^{\smile\smile};Q^{\smile\smile} \subset (Q^{\smile};R^{\smile})^{\smile} \subset (R;Q)^{\smile\smile}.$$

Оскільки, як відомо, виконується і обернене включення, то $R;Q = (R;Q)^{\smile\smile} = (Q^{\smile};R^{\smile})^{\smile}$, тобто, зображення $R;Q$ є псевдооборотним. Далі застосуємо $(-)^{\smile}$ ще раз і отримаємо $(R;Q)^{\smile} = (Q^{\smile};R^{\smile})^{\smile\smile} = Q^{\smile};R^{\smile}$. $\square$

Твердження 4.1.4. *Композиція ";" псевдооборотних неоднозначних зображень асоціативна.*

Доведення. Нагадаємо, що для неоднозначних зображень $R \subset S_1 \times S_2$, $Q \subset S_2 \times S_3$ композиція обчислюється наступним чином:

$$R;Q = \{(x,z) \in S_1 \times S_3 \mid \text{для всіх } z' \ll z \text{ існує } y \in S_2,$$
$$\text{для якого } (x,y) \in R, (y,z') \in Q\}.$$

Також важливо те, що для елементів $a \ll c$ у неперервній напівгратці існує елемент b такий, що $a \ll b \ll c$.

Нехай $(x,t) \in R;(Q;T)$. Для довільного $t' \ll t$ виберемо t'' таке, що $t' \ll t'' \ll t$. Тоді існує $y \in S_2$, для якого $(x,y) \in R$, $(y,t'') \in Q;T$. З цього випливає існування $z \in S_3$, для якого $(y,z) \in Q$, $(z,t') \in T$.

Нехай тепер $(x,t) \in (R;Q);T$, тоді для всіх $t' \ll t$ виберемо $t' \ll t'' \ll t$. Для нього існує $z' \in S_3$ таке, що $(x,z') \in R;Q$, $(z',t'') \in T$. Із псевдооборотності T випливає існування $z \ll z'$, для якого $(z,t') \in T$. Також існує $y \in S_2$ такий, що $(x,y) \in R$, $(y,z) \in Q$.

З іншого боку, якщо для $x \in S_1$, $t \in S_4$ елементи $y \in S_2$, $z \in S_3$ існують для всіх $t' \ll t$, для яких $(x,y) \in R$, $(y,z) \in Q$, $(z,t') \in T$, то $(x,t') \in RQT$. Отже, $(x,t') \in R(Q;T)$ і $(x,t') \in (R;Q)T$, звідки випливає $(x,t) \in R;(Q;T)$ і $(x,t) \in (R;Q);T$. Тому $R;(Q;T) = (R;Q);T$. $\square$

Неважко перевірити, що для неперервної напівгратки S з нулем відношення $E_S = \{(x, y) \in S \times S \mid y \leqslant x\}$ є псевдооборотним неоднозначним зображенням, яке є нейтральним елементом для композиції. Тому:

ТЕОРЕМА 4.2. [60] *Усі неперервні напівгратки з нульовими елементами і усі псевдооборотні неоднозначні зображення утворюють категорію* $\mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}$, *яка містить* $\mathcal{CS}\mathrm{em}_0$ *як підкатегорію.*

Очевидним є вкладення $\mathcal{CS}\mathrm{em}_0 \to \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}$: $IS = S$ для об'єкта S і $If = \{(x, y) \in S_1 \times S_2 \mid y \leqslant f(x)\}$ для стрілки $f : S_1 \to S_2$.

ТВЕРДЖЕННЯ 4.1.5. *Відповідність* $(-)^{\smile}$ *є інволютивним контраваріантним функтором (самодвоїстістю) у* $\mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}$, *який є продовженням функтора* $(-)^{\wedge}$ *в* $\mathcal{CS}\mathrm{em}_0$.

4.2. Категорія L-нечітких неоднозначних зображень

Тепер продовжимо поняття неоднозначних зображень до граткозначних відношень в дусі [72], як було зроблено у [55] та [57].

ОЗНАЧЕННЯ 4.2.1. Нехай маємо неперервні напівгратки S_1, S_2 з нулями 0_1 і 0_2 відповідно і цілком дистрибутивну гратку L з нижнім елементом 0 та верхнім елементом 1. *L-нечітким неоднозначним зображенням* (чи просто *L-неоднозначним зображенням*) S_1 у S_2 є тернарне відношення $R \subset S_1 \times S_2 \times L$ таке, що

(1) якщо $(x, y, \alpha) \in R$, $x \leqslant x'$ в S_1, $y' \leqslant y$ в S_2 і $\alpha' \leqslant \alpha$ в L, то $(x', y', \alpha') \in R$;

(2) для будь-якого $x \in S_1$ множина $xR = \{(y, \alpha) \in S_2 \times L \mid (x, y, \alpha) \in R\}$ замкнена за Скоттом в $S_2 \times L$ і містить усі елементи виду $(0_2, \alpha)$ та $(y, 0)$;

(3) для всіх $x \in S_1$, $y \in S_2, \alpha, \beta \in L$ з того, що $(x, y, \alpha) \in R, (x, y, \beta) \in R$ випливає $(x, y, \alpha \vee \beta) \in R$.

Наступне означення рівносильне.

ОЗНАЧЕННЯ 4.2.2. Для неперервних напівграток S_1, S_2 з нулями і цілком дистрибутивної гратки L тернарне відношення $R \subset S_1 \times S_2 \times L$ є L-*неоднозначним зображенням* S_1 в S_2, якщо

(1′) для всіх $y \in S_2, \alpha \in L$ множина $Ry\alpha = \{x \in S_1 \mid (x, y, \alpha) \in R\}$ є верхньою в S_1;

(2′) для всіх $x \in S_1, \alpha \in L$ множина $xR\alpha = \{y \in S_2 \mid (x, y, \alpha) \in R\}$ є непорожньою і замкненою за Скоттом в S_2;

(3′) для всіх $x \in S_1$, $y \in S_2$ множина $xyR = \{\alpha \in L \mid (x, y, \alpha) \in R\}$ є непорожньою, напрямленою вгору і замкненою за Скоттом в L.

Враховуючи цілком дистрибутивність L, умова (3′) еквівалентна до кожної з наступних властивостей:

(3″) для всіх $x \in S_1$, $y \in S_2$ множина $xyR = \{\alpha \in L \mid (x, y, \alpha) \in R\}$ є непорожньою напрямленою вгору нижньою множиною і такою, що, якщо $\beta \in xyR$ для кожного $\beta \ll \alpha$, то $\alpha \in xyR$;

(3‴) для всіх $x \in S_1$, $y \in S_2$ множина xyR нижня і має найбільший елемент (тобто, має вигляд $\{\alpha\}{\downarrow}$).

Зафіксуємо $x \in S_1$. Тоді, відповідно до (3‴) формула

$$m_{xR}(y) = \max\{\alpha \in L \mid (x, y, \alpha) \in R\}, \qquad y \in S_2,$$

означує нормований L-нечіткий монотонний предикат $m_{xR} \in M_{[L]}S_2$. Відповідність R, що переводить x у m_{xR} є ізотонним відображенням $S_1 \to M_{[L]}S_2$. З іншого боку, як і у бінарному випадку, кожне ізотонне відображення $R : S_1 \to M_{[L]}S_2$ породжує L-неоднозначне зображення

$$R = \{(x, y, \alpha) \in S_1 \times S_2 \times L \mid \alpha \leqslant R(x)(y)\},$$

і навпаки. Отже, ми можемо розглядати L-неоднозначні зображення або як відношення, або як ізотонні відображення, залежно, що для нас є зручнішим.

Довільне L-неоднозначне зображення S_1 в S_2 позначаємо $R : S_1 \Rightarrow^L S_2$. Інтерпретуємо (x, y, α) як "якщо x істинне, то значенням істинності y є щонайменше α" або "з x випливає y з вірогідністю щонайменше α". За означенням, для довільних x та y існує найбільше таке α, яке можна також розглядати як якість або точність зображення однієї інформації іншою.

Зазначимо, що $(1')$ і $(2')$ разом означають, що для усіх $\alpha \in L$ переріз $R\alpha = \{(x, y) \in S_1 \times S_2 \mid (x, y, \alpha) \in R\}$ є (чітким) неоднозначним зображенням S_1 в S_2. Будемо називати такий переріз *α-перерізом* R і позначатимемо R_α.

Зафіксуємо відокремлюючі сумісності $P_1 : S_1 \times \hat{S}_1 \to \{0, 1\}$, $P_2 = S_2 \times \hat{S}_2 \to \{0, 1\}$.

Для неоднозначного зображення $R \subset S_1 \times S_2 \times L$ означимо відношення $R^\smile \subset \hat{S}_2 \times \hat{S}_1 \times L$, використовуючи α-перерізи:

$$(R^\smile)_\alpha = \begin{cases} \bigcap_{\beta \ll \alpha} (R_\beta)^\smile, & \alpha \neq 0, \\ \hat{S}_2 \times \hat{S}_1, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Еквівалентними до попереднього є наступні означення, задані формулами

$$R^\smile = \Big\{(\hat{y}, \hat{x}, \alpha) \in \hat{S}_2 \times \hat{S}_1 \mid \text{якщо } \beta \ll \alpha \neq 0 \text{ і } xP_1\hat{x} = 1 \text{ для деякого } x \in S_1, \\ \text{то знайдеться } y \in S_2, \text{що } (y, \beta) \in xR,\ yP_2\hat{y} = 1\Big\}$$

або

$$R^\smile = \Big\{(\hat{y}, \hat{x}) \in \hat{S}_2 \times \hat{S}_1 \mid \text{якщо } \beta \ll \alpha \neq 0 \text{ і } x \in S_1 \text{ таке, що } yP_2\hat{y} = 0 \\ \text{для всіх } (y, \beta) \in xR, \text{то } xP_1\hat{x} = 0\Big\}.$$

Коротша формула використовує трансверсалі:

$$\hat{y}(R^\smile)_\alpha = \begin{cases} \bigcap_{\beta \ll \alpha} \big\{x \in S_1 \bigm| \hat{y} \in (xR_\beta)^\perp\big\}^\perp, & \alpha \neq 0, \\ \hat{S}_1, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Твердження 4.2.3. [60] *Відношення $R^{\smile}$ є L-неоднозначним зображенням.*

Доведення. Перетин чітких неоднозначних зображень теж є чітким неоднозначним зображенням, тому умови ($1'$) і ($2'$) для $R^{\smile}$ виконуються. Щоб перевірити $3''$, вважаємо, що $\beta \in \hat{y}\hat{x}R^{\smile}$ для всіх $\beta \ll \alpha \neq 0$, тобто, $(\hat{y}, \hat{x}) \in \bigcap_{\beta \ll \alpha} \bigcap_{\gamma \ll \beta} (R_\gamma)^{\smile}$. У цілком дистрибутивній гратці L маємо $\gamma \ll \alpha$ тоді і тільки тоді, коли існує β, для якого $\gamma \ll \beta \ll \alpha$. Отже, $(\hat{y}, \hat{x}) \in \bigcap_{\gamma \ll \alpha} (R_\gamma)^{\smile}$, звідки випливає $\alpha \in \hat{y}\hat{x}R^{\smile}$.

Очевидно, що множина $\hat{y}\hat{x}R^{\smile}$ нижня і містить 0. Покажемо, що вона напрямлена вгору. Якщо $\alpha, \beta \in \hat{y}\hat{x}R^{\smile}$, тоді для всіх $\gamma \ll \alpha \vee \beta$ існують $\alpha' \ll \alpha$, $\beta' \ll \beta$, що $\gamma \leqslant \alpha' \vee \beta'$. Тому

$$\begin{aligned}
\hat{x} &\in \hat{y}(R_{\alpha'})^{\smile} \cap \hat{y}(R_{\beta'})^{\smile} \\
&= \left\{x \in S_1 \;\middle|\; \hat{y} \in (xR_{\alpha'})^{\perp}\right\}^{\perp} \cap \left\{x \in S_1 \;\middle|\; \hat{y} \in (xR_{\beta'})^{\perp}\right\}^{\perp} \\
&= \left\{x \in S_1 \;\middle|\; \hat{y} \in (xR_{\alpha'})^{\perp} \text{ або } \hat{y} \in (xR_{\beta'})^{\perp}\right\}^{\perp} \\
&\subset \left\{x \in S_1 \;\middle|\; \hat{y} \in (xR_{\alpha' \vee \beta'})^{\perp}\right\}^{\perp} = \hat{y}(R_{\alpha' \vee \beta'})^{\smile} \subset \hat{y}(R_\gamma)^{\smile}.
\end{aligned}$$

Отже, $\alpha \vee \beta \in \hat{y}\hat{x}R^{\smile}$ і вище згадана множина напрямлена вгору в L. □

Тому $R^{\smile\smile} = (R^{\smile})^{\smile} \subset S_1 \times S_2 \times L$ є L-неоднозначним зображенням.

Теорема 4.3. [60] *Для кожного неоднозначного зображення $R \subset S_1 \times S_2 \times L$ виконується включення $R^{\smile\smile} \subset R$. Рівність $R = R^{\smile\smile}$ істинна, якщо і тільки якщо виконано умови*

(4) *якщо $(x, y, \alpha) \in R$, $y' \ll y$ в S_2 і $\alpha' \ll \alpha$ в L, то знайдеться $x' \ll x$ в S, для якого $(x', y', \alpha') \in R$;*

(5) *якщо $(0_1, y, \alpha) \in R$, $\alpha \neq 0$, то $y = 0_2$.*

Доведення. Необхідність (5) є очевидним наслідком аналогічної властивості (4) для псевдооборотних чітких неоднозначних зображень. Вважаємо, що (5) виконується. Нагадаємо, що

$$\hat{y}(R^{\smile})_\beta = \bigcap_{\gamma \ll \beta} \{x \in S_1 \mid \hat{y} \in (xR_\gamma)^\perp\}^\perp = \Big(\bigcup_{\gamma \ll \beta} \{x \in S_1 \mid \hat{y} \in (xR_\gamma)^\perp\}\Big)^\perp.$$

Отже,

$$\begin{aligned}
x(R^{\smile\smile})_\alpha &= \bigcap_{\beta \ll \alpha} \{\hat{y} \in \hat{S}_2 \mid x \in (\hat{y}(R^{\smile})_\beta)^\perp\}^\perp \\
&= \bigcap_{\beta \ll \alpha} \Big\{\hat{y} \in \hat{S}_2 \mid x \in \Big(\bigcup_{\gamma \ll \beta} \{x' \in S_1 \mid \hat{y} \in (x'R_\gamma)^\perp\}\Big)^{\perp\perp}\Big\}^\perp
\end{aligned}$$

(подвійна трансверсаль непорожньої згідно з (5)

множини є її замиканням за Скоттом)

$$= \bigcap_{\beta \ll \alpha} \Big\{\hat{y} \in \hat{S}_2 \mid x \in \mathrm{Cl}\Big(\bigcup_{\gamma \ll \beta} \{x' \in S_1 \mid \hat{y} \in (x'R_\gamma)^\perp\}\Big)\Big\}^\perp$$

(замикання за Скоттом нижньої множини A

складається з усіх точок, наближених елементами A)

$$\begin{aligned}
&= \bigcap_{\beta \ll \alpha} \Big\{\hat{y} \in \hat{S}_2 \mid \text{для кожного } x' \ll x \text{ є } \gamma \ll \beta, \text{ що } \hat{y} \in (x'R_\gamma)^\perp\Big\}^\perp \\
&\overset{*}{=} \bigcap_{\beta \ll \alpha} \Big\{\hat{y} \in \hat{S}_2 \mid \text{для кожного } x' \ll x \quad \hat{y} \in (x'R_\beta)^\perp\Big\}^\perp \\
&= \bigcap_{\beta \ll \alpha} \Big(\{x\} \downarrow R_\beta\Big)^{\perp\perp} \subset \bigcap_{\beta \ll \alpha} \big(xR_\beta\big)^{\perp\perp} = \bigcap_{\beta \ll \alpha} \big(xR_\beta\big) = xR_\alpha,
\end{aligned}$$

тому $R^{\smile\smile} \subset R$. Доведемо, що рівність “$\overset{*}{=}$” виконується. Очевидно, що якщо $\gamma \ll \beta$ і $\hat{y} \in (x'R_\gamma)^\perp$, то $\hat{y} \in (x'R_\beta)^\perp$. Операція $(-)^\perp$ антитонна, тому виконується включення “$\supset$”. З іншого боку,

$$\begin{aligned}
&\text{існує } \gamma \ll \beta, \text{ що для всіх } x' \ll x \;\; \hat{y} \in (x'R_\gamma)^\perp \\
&\quad \Longrightarrow \text{ для кожного } x' \ll x \text{ знайдеться } \gamma \ll \beta, \text{ для кого } \hat{y} \in (x'R_\gamma)^\perp.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\bigcap_{\beta\ll\alpha}\Big\{\hat{y}\in\hat{S}_2 \;\Big|\; \text{для кожного } x'\ll x \text{ знайдеться } \gamma\ll\beta,\ \text{для якого } \hat{y}\in(x'R_\gamma)^\perp\Big\}^\perp$$

$$\subset \bigcap_{\beta\ll\alpha}\Big\{\hat{y}\in\hat{S}_2 \;\Big|\; \text{існує } \gamma\ll\beta,\ \text{що для всі } x'\ll x\ \ \hat{y}\in(x'R_\gamma)^\perp\Big\}^\perp$$

$$= \bigcap_{\gamma\ll\beta\ll\alpha}\Big\{\hat{y}\in\hat{S}_2 \;\Big|\; \text{для кожного } x'\ll x\ \ \hat{y}\in(x'R_\gamma)^\perp\Big\}^\perp$$

$$= \bigcap_{\gamma\ll\alpha}\Big\{\hat{y}\in\hat{S}_2 \;\Big|\; \text{для кожного } x'\ll x\ \ \hat{y}\in(x'R_\gamma)^\perp\Big\}^\perp,$$

тому включення “$\subset$” (після перепозначення γ на β) також виконується.

Зрозуміло також, що для того, щоб виконувалась рівність $R^{\smile\smile} = R$, необхідно і достатньо, щоб у заданій вище послідовності замість “$\subset$” було “$=$”, тобто, кожен $y\in xR_\alpha$ має бути точкою дотику для всіх нижніх множин $\{x\}\Downarrow R_\beta$, де $\beta\ll\alpha$, що фактично є умовою (4). $\square$

L-неоднозначне зображення R, для якого $R = R^{\smile\smile}$, також називається *псевдооборотним*. Тоді:

Твердження 4.2.4. [60] *L-неоднозначне зображення $R\subset S_1\times S_2\subset L$ є псевдооборотним тоді і тільки тоді, коли воно як відображення $S_1\to M_{[L]}S_2$ неперервне за Скоттом і зберігає нуль.*

Доведення. Якщо R псевдооборотне, то згідно умов (2’), (5) для кожного $y\in S_2$:

$$R(0)(y) = \begin{cases} 1, & y = 0,\\ 0, & y\neq 0,\end{cases}$$

тобто $R(0)$ є найменшим елементом $M_{[L]}S_2$. Неперервність $S_1\to M_{[L]}S_2$ за Скоттом випливає з (4). Обернена імплікація аналогічна. $\square$

Щоб означити композицію L-неоднозначних зображень, нам потрібна додаткова операція $*: L \times L \to L$, котра робить $L = (L, *)$ *унітальною кванталлю*, тобто, ця операція нескінченно дистрибутивна по відношенню до супремумів по обох змінних (отже, неперервна за Скоттом) і 1 є двосторонньою одиницею для “$*$”. Зазначимо, що *комутативність* не вимагається, тому від тепер “$*$” є (можливо) некомутативною напівнеперервною знизу кон’юнкцією для L-значної нечіткої логіки [15, 37]. Операція $\alpha \mathbin{\hat{*}} \beta \equiv \beta * \alpha$ задовольняє ті самі вимоги, а тому $\hat{L} = (L, \hat{*})$ також є унітальною кванталлю.

Тоді, для L-неоднозначних зображень $R \subset S_1 \times S_2 \times L$ і $Q \subset S_2 \times S_3 \times L$ композиція $R * Q$ може бути означена у спосіб, звичний для L-нечітких відношень:

$$
\begin{aligned}
R * Q = \big\{&(x, z, \alpha) \in S_1 \times S_3 \times L \mid \\
&\alpha \leqslant \sup\{\beta * \gamma \mid \text{існує } y \in S_3, \text{ для якого } (x, y, \beta) \in R, (y, z, \gamma) \in Q\}\big\}.
\end{aligned}
$$

Як і у випадку з чіткими неоднозначними зображеннями, ця композиція асоціативна, але $R * Q$ може не бути L-неоднозначним зображенням, оскільки (2) не завжди виконується. Тому ми “покращимо” композицію: $R \mathbin{\overset{*}{,}} Q \subset S_1 \times S_3 \times L$ є такою, що $xR \mathbin{\overset{*}{,}} Q = \mathrm{Cl}(xR * Q)$ для всіх $x \in S_1$. Розглянемо розширену версію останнього означення: для $x \in S_1, z \in S_3, \alpha \in L$ маємо $(x, z, \alpha) \in R \mathbin{\overset{*}{,}} Q$ тоді і тільки тоді, коли для всіх $z' \ll z, \alpha' \ll \alpha$ існують $n \in \mathbb{N}$, $y_1, \ldots, y_n \in S_2$, $\beta_1, \gamma_1, \ldots, \beta_n, \gamma_n \in L$ такі, що

$$
\begin{gathered}
(x, y_1, \beta_1), \ldots, (x, y_n, \beta_n) \in R, \ (y_1, z', \gamma_1), \ldots, (y_n, z', \gamma_n) \in Q, \\
\beta_1 * \gamma_1 \vee \cdots \vee \beta_n * \gamma_n \geqslant \alpha'.
\end{gathered}
$$

Найпростішою операцією “$*$”, яка задовольняє вказані вище умови, є гратковий інфімум “$\wedge$”. У цьому випадку для “$\overset{*}{,}$” ми використовуємо позначення “;”.

Для L-неоднозначного зображення R ми вважаємо $R^{\smile}$ $\hat{L}$-неоднозначним зображенням і використовуємо "$\hat{;}^{*}$" для композицій таких зображень.

Лема 4.2.5. *Для будь-яких L-неоднозначних зображень $R \subset S_1 \times S_2 \times L$, $Q \subset S_2 \times S_3 \times L$ виконується включення $Q^{\smile} \hat{;}^{*} R^{\smile} \subset (R \,;^{*} Q)^{\smile}$.*

Доведення. Нехай $(\hat{z}, \hat{x}, \alpha) \in Q^{\smile} \hat{;}^{*} R^{\smile}$. Для кожного $\alpha' \ll \alpha$ ми можемо вибрати α'' таке, що $\alpha' \ll \alpha'' \ll \alpha$. Тоді для всіх $\hat{x}' \ll \hat{x}$ існують $n \in \mathbb{N}$, $\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n \in S_2$, $\gamma_1, \beta_1, \ldots, \gamma_n, \beta_n \in L$, що

$$(\hat{z}, \hat{y}_1, \gamma_1), \ldots, (\hat{z}, \hat{y}_n, \gamma_n) \in Q^{\smile},\ (\hat{y}_1, \hat{x}', \beta_1), \ldots, (\hat{y}_n, \hat{x}', \beta_n) \in R^{\smile},$$

$$\gamma_1 \mathbin{\hat{*}} \beta_1 \vee \cdots \vee \gamma_n \mathbin{\hat{*}} \beta_n = \beta_1 * \gamma_1 \vee \cdots \vee \beta_n * \gamma_n \geqslant \alpha''.$$

Для будь-якого $x \in S_1$, для якого $xP_1\hat{x}' = 1$, і всіх $\beta_1' \ll \beta_1, \ldots, \beta_n' \ll \beta_n$ існують $y_1, \ldots, y_n \in S_2$ такі,що $(x', y_1, \beta_1'), \ldots, (x', y_n, \beta_n') \in R$, $y_1 P_2 \hat{y}_1 = \cdots = y_n P_2 \hat{y}_n = 1$. Аналогічно, для всіх $\gamma_1' \ll \gamma_1, \ldots, \gamma_n' \ll \gamma_n$ знайдуться $z_1, \ldots, z_n \in S_3$,що $(y_1, z_1, \gamma_1'), \ldots, (y_n, z_n, \gamma_n') \in Q$, $z_1 P_3 \hat{z} = \cdots = z_n P_3 \hat{z} = 1$. Тоді елемент $z = z_1 \wedge \cdots \wedge z_n$ задовольняє $zP_3\hat{z} = 1$ і $(y_1, z, \gamma_1'), \ldots, (y_n, z, \gamma_n') \in Q$.

Очевидно, що $(x, z, \beta_1' * \gamma_1' \vee \cdots \vee \beta_n' * \gamma_n') \in R * Q$. Оскільки операції $*$ та $\vee$ неперервні за Скоттом (напівнеперервні знизу), ми можемо вибрати такі $\beta_1', \ldots, \beta_n', \gamma_1', \ldots, \gamma_n'$, що $\beta_1' * \gamma_1' \vee \cdots \vee \beta_n' * \gamma_n' \geqslant \alpha'$. Отже, для всіх $\alpha' \ll \alpha$, $\hat{x}' \ll \hat{x}$, $x \in S_1$, $xP_1\hat{x}'$ знайдеться $z \in S_3$, для якого $zP_3\hat{z} = 1$, $(x, z, \alpha') \in R \,;^{*} Q$, тобто, $(\hat{z}, \hat{x}, \alpha) \in (R \,;^{*} Q)^{\smile}$.

$\square$

З урахуванням відповідних змін, ми отримали аналог твердження для чітких неоднозначних зображень:

Наслідок 4.2.6. *Нехай маємо L-неоднозначні псевдооборотні зображення $R \subset S_1 \times S_2 \times L$ і $Q \subset S_2 \times S_3 \times L$. Тоді $Q^{\smile} \,\hat{\stackrel{*}{;}}\, R^{\smile} = (R \stackrel{*}{;} Q)^{\smile}$, а композиція $R \stackrel{*}{;} Q$ є псевдооборотним зображенням.*

Твердження 4.2.7. *Композиція "$\stackrel{*}{;}$" псевдооборотних L-неоднозначних зображень асоціативна.*

Доведення подібне до доведення для чітких зображень і використовує те, що для L-неоднозначних зображень $R \subset S_1 \times S_2 \times L$, $Q \subset S_2 \times S_3 \times L$, $S \subset S_3 \times S_4 \times L$ обидва твердження $(x, t, \alpha) \in (R \stackrel{*}{;} Q) \stackrel{*}{;} S$ і $(x, t, \alpha) \in R \stackrel{*}{;} (Q \stackrel{*}{;} S)$ еквівалентні до існування $n \in \mathbb{N}$, $y_1, \ldots, y_n \in S_2$, $z_1, \ldots, z_n \in S_3$, $\beta_1, \gamma_1, \delta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_n, \delta_n \in L$ для всіх $\alpha' \ll \alpha$ і $t' \ll t$, що

$$(x, y_1, \beta_1), \ldots, (x, y_n, \beta_n) \in R, \quad (y_1, z_1, \gamma_1), \ldots, (y_n, z_n, \gamma_n) \in Q,$$

$$(z_1, t', \delta_1), \ldots, (z_n, t', \delta_n) \in S, \quad \beta_1 * \gamma_1 * \delta_1 \vee \cdots \vee \beta_n * \gamma_n * \delta_n \geqslant \alpha'.$$

□

Отже, ми отримали категорію [60]:

Теорема 4.4. *Усі неперервні напівгратки з нульовими елементами і усі псевдооборотні L-неоднозначні зображення утворюють категорію $\mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}_L^*$, яка містить $\mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}$ як підкатегорію.*

Вкладення $I_L^* : \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR} \to \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}_L^*$ зберігає об'єкти і кожному чіткому неоднозначному зображенню $R \subset S_1 \times S_2$ зіставляє L-неоднозначне наступним чином:

$$I_L^* R = \{(x, y, \alpha) \subset S_1 \times S_2 \times L \mid (x, y) \in R \text{ або } \alpha = 0\}.$$

Очевидно, що існує також вкладення $I_L^{\hat{*}} : \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR} \to \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}_L^{\hat{*}}$ в категорію, побудовану з використанням операції "$\hat{*}$".

Стрілку R з S_1 у S_2 позначаємо $R : S_1 \Rightarrow^* S_2$ в категорії $\mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^*_L$ і $R : S_1 \Rightarrow^{\hat{*}} S_2$ в категорії $\mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^{\hat{*}}_L$. Композицію R та Q позначаємо $R \mathbin{;}^{*} Q$ (у прямому порядку) або $Q \circledast R$ (в оберненому порядку) в $\mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^*_L$ і $R \mathbin{;}^{\hat{*}} Q$ або $Q \mathbin{\hat{\circledast}} R$ відповідно в $\mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^{\hat{*}}_L$.

Твердження 4.2.8. *Самодвоїстість* $(-)^{\smile} : \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR} \to \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}$ *продовжується до контраваріантних функторів*

$$(-)^{\smile} : \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^*_L \to \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^{\hat{*}}_L, \qquad (-)^{\smile} : \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^{\hat{*}}_L \to \mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^*_L.$$

Обидві попарні композиції цих функторів ізоморфні до тотожніх функторів.

Отже, $(-)^{\smile}$ є "контраваріантною еквівалентністю" між категоріями $\mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^*_L$ та $\mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^{\hat{*}}_L$.

4.3. Неоднозначні зображення як афінні оператори і трансформери предикатів

Твердження 4.3.1. *Нехай для псевдооборотних L-неоднозначних зображень $\varphi : S_1 \Rightarrow^* S_2$ і $\psi : S_2 \Rightarrow^* S_3$ маємо неперервні за Скоттом лінійні продовження $\Phi : M_{[L]}S_1 \to M_{[L]}S_2$ і $\Psi : M_{[L]}S_2 \to M_{[L]}S_3$. Тоді композиція $\psi \circledast \varphi$ в $\mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^*_L$ є обмеженням для $\Psi \circ \Phi : M_{[L]}S_1 \to M_{[L]}S_3$.*

Доведення. Достатньо перевірити чи композиція $\Psi \circ \varphi : S_1 \to M_{[L]}S_3$ співпадає з $\psi \circledast \varphi$. Для всіх $x \in S_1$ виконується

$$\Psi \circ \varphi(x) = \sup\{\varphi(x)(y) \mathbin{\bar{\circledast}} \psi(y) \mid y \in S_2\}.$$

Отже, для всіх $z \in S_3 \setminus \{0_3\}$

$$(\Psi \circ \varphi(x))(z) = \inf\big\{\sup\{(\varphi(x)(y) \mathbin{\bar{\odot}} \psi(y))(z') \mid y \in S_2\} \bigm| z' \ll z\big\}$$
$$= \inf\big\{\sup\big\{\inf\{\varphi(x)(y) * \psi(y)(z'') \mid z'' \ll z'\} \bigm| y \in S_2\big\} \bigm| z' \ll z\big\}.$$

Зауважимо, що $\inf\{\varphi(x)(y) * \psi(y)(z'') \mid z'' \ll z'\} \geqslant \varphi(x)(y) * \psi(y)(z')$. Отже,

$$\begin{aligned}\inf\Big\{\sup\Big\{\inf\{\varphi(x)(y) * \psi(y)(z'') \mid z'' \ll z'\} \Bigm| y \in S_2\Big\} \Bigm| z' \ll z\Big\} \\ \geqslant \inf\Big\{\sup\{\varphi(x)(y) * \psi(y)(z') \mid y \in S_2\} \Bigm| z' \ll z\Big\} \\ = \inf\Big\{\sup\{\varphi(x)(y) * \psi(y)(z'') \mid y \in S_2\} \Bigm| z'' \ll z\Big\}\end{aligned}$$

(в останньому рядку ми тільки перейменували z' на z''.)

З іншого боку, для кожного $z'' \ll z$ в неперервній напівгратці знайдеться z' таке, що $z'' \ll z' \ll z$ і

$$\varphi(x)(y) * \psi(y)(z'') \geqslant \inf\{\varphi(x)(y) * \psi(y)(z'') \mid z'' \ll z'\}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}\inf\Big\{\sup\{\varphi(x)(y) * \psi(y)(z'') \mid y \in S_2\} \Bigm| z'' \ll z\Big\} \\ \geqslant \inf\Big\{\sup\Big\{\inf\{\varphi(x)(y) * \psi(y)(z'') \mid z'' \ll z'\} \Bigm| y \in S_2\Big\} \Bigm| z' \ll z\Big\}.\end{aligned}$$

Тому для всіх $z \in S_3 \setminus \{0_3\}$ ми маємо

$$(\Psi \circ \varphi(x))(z) = \inf\Big\{\sup\{\varphi(x)(y) * \psi(y)(z') \mid y \in S_2\} \Bigm| z' \ll z\Big\}.$$

Отже, $(\Psi \circ \varphi(x))(z) \geqslant \alpha \in L$ тоді і тільки тоді, коли для всіх $z' \ll z$ і $\alpha' \ll \alpha$ маємо $\alpha' \ll \sup\{\varphi(x)(y) * \psi(y)(z') \mid y \in S_2\}$. Найменшою верхньою межею множини A в L є границя напрямленої вгору множини найменших верхніх граней скінченних підмножин множини A. Остання умова еквівалентна до існування $y_1, y_2, \ldots, y_n \in S_2$ таких, що

$$\varphi(x)(y_1) * \psi(y_1)(z') \vee \varphi(x)(y_2) * \psi(y_2)(z') \vee \cdots \vee \varphi(x)(y_n) * \psi(y_n)(z') \geqslant \alpha'$$

для всіх $\alpha' \ll \alpha$ і $z' \ll z$.

Нагадаємо, що $(x, z, \alpha) \in \psi \mathbin{\bar{\circledast}} \varphi$ тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $z' \ll z$, $\alpha' \ll \alpha$ знайдуться $n \in \mathbb{N}$, $y_1, \ldots, y_n \in S_2$, $\beta_1, \gamma_1, \ldots, \beta_n, \gamma_n \in L$, для яких

$$(x, y_1, \beta_1), \ldots, (x, y_n, \beta_n) \in \varphi,\ (y_1, z', \gamma_1), \ldots, (y_n, z', \gamma_n) \in \psi,$$

$$\beta_1 * \gamma_1 \vee \cdots \vee \beta_n * \gamma_n \geqslant \alpha'.$$

Зрозуміло, що $(\Psi \circ \varphi(x))(z) \geqslant \alpha$, якщо і тільки якщо $(x, z, \alpha) \in \psi \bar{\circledast} \varphi$. Доведення завершено. □

Ми прийшли до наступного [60]:

ТЕОРЕМА 4.5. *Відповідність, яка кожній неперервній напівграткі S зіставляє $M_{[L]}S$, а кожному неперервному за Скоттом відображенню $S_1 \to M_{[L]}S_2$* [1] *єдине неперервне за Скоттом лінійне продовження $M_{[L]}S_1 \to M_{[L]}S_2$, є функтором, який вкладає категорію $\mathcal{CS}\mathrm{em}\mathcal{PR}^*_L$ в категорію неперервних L-напівмодулів $(L, \oplus, *)$-$\mathcal{CSM}\mathrm{od}_\uparrow$ як повну підкатегорію.*

Фактично, остання підкатегорія є категорією Клейслі для відповідної монади [48], але ми не будемо вдаватися в деталі. Тепер стає очевидним як компонувати L-неоднозначні зображення у "функціональному" вигляді: спершу продовжимо їх до лінійних відображень вільних напівмодулів, тоді скомпонуємо в $(L, \oplus, *)$-$\mathcal{CSM}\mathrm{od}_\uparrow$ і, нарешті, обмежимо назад до напівгруп.

Тепер настав час пояснити практичний сенс сконструйованих продовжень. Кожне відображення $m : D \to L$ для області визначення D ми розуміємо як "відомо, що для кожного $d \in D$ значенням його істинності є (чи може бути) щонайменше $m(d)$". Подібним чином, довільне відображення $\varphi : D \to \underline{M}_{[L]}D'$ інтерпретується як "якщо $a \in D$ є істинним, то значенням істинності кожного $b \in D'$ є щонайменше $\varphi(a)(b)$". Зазначимо, що $\varphi(a)(b)$ неявно розглядається як "умовне" значення істинності [62]. Якщо a є "частково

---

[1] Тобто кожному псевдооборотному L-неоднозначному зображенню $S_1 \Rightarrow^* S_2$.

істинним” зі ступенем довіри $\geqslant \alpha$, тоді b є істинним щонайменше зі ступенем довіри $\alpha * \varphi(a)(b)$.

Отже, таке φ є L-нечітким *трансформером станів*. Для даного φ кажемо, що $m : D \to L$ є *передумовою*, а $m' : D' \to L$ *післяумовою* один для одного щодо до φ, якщо для всіх $a \in D$ і $b \in D'$ “гарантоване” значення істинності $m'(b)$ є рівним чи більшим, ніж $m(a) * \varphi(a)(b)$.

Очевидно, що для антитонної функції $m : D \to L$ її *найсильніша* (*найменша*) післяумова $\Phi(m)$ в $\underline{M}_{[L]}D'$ визначається рівністю

$$\Phi(m)(b) = \inf\bigl\{\sup\{m(a) * \varphi(a)(b') \mid a \in D\} \mid b' \in D', b' \ll b\bigr\}, b \in D'.$$

Ця ж формула істинна для нормованих предикатів і Φ є єдиним лінійним неперервним за Скоттом продовженням трансформера станів φ.

4.4. Двоїсті пари і спряжені оператори

Для $L = (L, \oplus, *)$ позначатимемо через L' кванталь $(L, \oplus, *')$, що відрізняється тільки множенням: $\alpha *' \beta = \beta * \alpha$ для всіх $\alpha, \beta \in L$.

Дещо модифікувавши означення з [19], називаємо пару з L-напівмодуля K і L'-напівмодуля K' *переддвоїстою парою*, якщо існує дистрибутивне і неперервне за Скоттом по кожній змінній множення $\cdot : K \times K' \to L$ і $(\alpha \bar{\circledast} k) \cdot (\beta \bar{\circledast} k') = \alpha * (k \cdot k') * \beta$ для всіх $k \in K, k' \in K', \alpha, \beta \in L$.

Кажемо, що $\cdot$ відокремлює елементи K, якщо для всіх $k_1, k_2 \in K, k_1 \not\leq k_2$ існує $k' \in K'$ таке, що $k_1 \cdot k' \not\leq k_2 \cdot k'$. Аналогічно $\cdot$ може відокремлювати елементи K'. Якщо $\cdot$ відокремлює елементи обох модулів K і K', то кажемо, що вони утворюють *двоїсту пару*.

Найбільш очевидною двоїстою парою є $K = K' = L^I$, де I – довільна множина індексів, $\alpha \bar{\circledast} (a_i)_{i \in I} = (\alpha * a_i)_{i \in I}$ в K, $\beta \bar{\circledast} (b_i)_{i \in I} = (b_i * \beta)_{i \in I}$ в

K', $(a_i)_{i\in I}\cdot(b_i)_{i\in I}=\sup\{a_i * b_i \mid i\in I\}$. Далі ми побудуємо передвоїсті та двоїсті пари, які складаються з напівмодулів монотонних предикатів.

Нехай S і S' є неперервними напівгратками з нижніми елементами. Нагадаємо, що $M_{[L]}S$ – повний неперервний L-напівмодуль, а множина $M_{[L']}S'$, яка фактично є $M_{[L]}S'$, але з іншою операцією множення, є повним неперервним L'-напівмодулем.

Зафіксуємо неперервне за Скоттом відображення $P : S\times S'\to L$ таке, що $P(d,0)=P(0,d')=0$ для всіх $d\in S$, $d'\in S'$, і означимо "скалярподібний" добуток формулою:

$$(m,m')^*_P = m\cdot m' = \sup\{m(d) * P(d,d') * m'(d') \mid d\in S, d'\in S'\}$$

для будь-яких антитонних функцій $m : S\to L$, $m' : S'\to L$. З аргументів, які використані у доведенні Твердження 2.1, випливає наступна лема.

Лема 4.4.1. *Для будь-яких антитонних функцій $m : S\to L$, $m' : S'\to L$ виконується рівність $(m^u,m')^*_P=(m,m'^u)^*_P=(m,m')^*_P$.*

Наслідок 4.4.2. *Для будь-яких $m\in M_{[L]}S$, $m'\in M_{[L']}S'$ та $\alpha\in L$ маємо $(\alpha\,\bar{\circledast}\,m,m')^*_P=\alpha * (m,m')^*_P$.*

Звичайно, що аналогічне твердження виконується і для другого аргумента, але з "множенням справа".

Оскільки супремуми в $M_{[L]}S$ і $M_{[L']}S'$ обчислюються поаргументно, то означене вище множення є дистрибутивним по обох аргументах. З леми 4.4.1 випливає нескінченна дистрибутивність і неперервність за Скоттом цілком і по кожній змінній зокрема множення *монотонних предикатів*.

Нагадаємо, що "канонічне" множення $P : S\times S^\wedge\to\{0,1\}$, означене формулою

$$P(d,F)=\begin{cases}0, d\notin F,\\ 1, d\in F,\end{cases}\qquad d\in S, F\in S^\wedge,$$

є сильною відокремлюючою сумісністю.

Теорема 4.6. [58] *Нехай* $P : S \times S' \to \{0,1\} \subset L$ *є сильною відокремлюючою сумісністю між неперервними напівгратками* S, S' *з нижніми елементами. Тоді* $M_{[L]}S$ *і* $M_{[L']}S'$ *із множенням* $(-,-)^*_P : M_{[L]}S \times M_{[L']}S' \to L$ *утворюють двоїсту пару.*

Доведення. Візьмемо $S' = S^\wedge$. Потрібно перевірити лише властивість відокремлення точок. Нехай $m_1 \nleqslant m_2$, тобто $m_1(d) \nleqslant m_2(d)$ для деякого $d \in S$. Оскільки $m_2 : S \to L^{op}$ неперервне за Скоттом, то існує $d_0 \ll d$ в S, для якого $m_1(d) \nleqslant m_2(d_0) \geqslant m_2(d)$, звідки випливає $d_0 \neq 0$. Згідно з Твердженням I-3.3 [35], існує такий відкритий фільтр, що $F \ni d$, $d_0 \ll b$ для всіх $b \in F$.

Нехай $m' : S^\wedge \to L$ означене формулою

$$m'(d') = \begin{cases} 1, d' \leqslant F, \\ 0, d' \nleqslant F, \end{cases} \qquad d' \in S^\wedge.$$

Тоді

$$(m_i, m')^*_P = \sup\{m_i(b) \mid b \in F\}, i = 1, 2,$$

а тому

$$(m_1, m')^*_P \geqslant m_1(d) \nleqslant m_2(d_0) \geqslant \sup\{m_2(b) \mid b \in S, d_0 \ll b\} \geqslant (m_2, m')^*_P.$$

Отже, $(m_1, m')^*_P \nleqslant (m_2, m')^*_P$. $\square$

Якщо несумісним $s \in S$ і $s' \in S'$ монотонні предикати m і m' зіставляють значення істинності $m(s)$ і $m'(s')$ з ненульовою кон'юнкцією $m(s) * m'(s')$, то предикати також в певній мірі несумісні. Добуток $(m, m')^*_P$ є супремумом тих "несумісностей" $m(s) * m'(s')$, для яких $sPs' = 1$. Отже, добуток може розглядатись як міра тотальної несумісності m і m'.

Нехай маємо L-напівмодулі K_1 і K_2 та L'-напівмодулі K'_1 і K'_2. Операції множення $\cdot : K_1 \times K'_1 \to L$ і $\cdot : K_2 \times K'_2 \to L$ такі, що K_1, K'_1 і K_2, K'_2 утворюють двоїсті пари. Нехай $A : K_1 \to K_2$ – лінійне відображення. Природньо називати лінійне відображення $A' : K'_2 \to K'_1$ *(ермітовим) спряженим* до A, якщо $Aa \cdot a' = a \cdot A'a'$ для $a \in K_1$, $a' \in K'_2$. З властивості відокремлення випливає, що якщо спряжене до заданого A існує, то воно єдине. Тому в даному випадку $A' = A^*$ і, очевидно, що $A^{**} = A$. Також неважко переконатись, що спряженим до композиції $A \circ B$ лінійних відображень зі спряженими A^* і B^* відповідно, є $B^* \circ A^*$.

Очевидно, що спряжені існують для лінійних відображень між (алгебраїчно) вільними ідемпотентними напівмодулями [19]. Більше того, для таких відображень спряження означає транспонування відповідних скінченних чи нескінченних матриць.

В цій роботі ми розглядаємо спряжені до неперервних за Скоттом лінійних відображень між згаданими вище *топологічно* вільними L-ідемпотентними напівмодулями над неперервними напівгратками з нижніми елементами.

ТЕОРЕМА 4.7. *Нехай S_1, S_2 – неперервні напівгратки з нижніми елементами. Для кожного неперервного за Скоттом лінійного відображення $\Phi : M_{[L]}S_1 \to M_{[L]}S_2$, існує неперервне за Скоттом спряжене $\Phi' : M_{[L']}S_2^\wedge \to M_{[L]}S_1^\wedge$.*

ДОВЕДЕННЯ. Згідно з 2.2 відображення Φ та спряжене до нього Φ' повинні бути неперервними за Скоттом лінійними продовженнями відображень $\varphi : S_1 \to M_{[L]}S_2$, яке є обмеженням Φ на S_1, та $\varphi' : S_2^\wedge \to M_{[L]}S_1^\wedge$, яке ми можемо обчислити.

Для всіх $x \in S_1$, $\hat{y} \in S_2^\wedge$ має виконуватись наступне:

$$\Phi(\eta_{[L]}S_1(x)) \cdot \eta_{[L']}S_2^\wedge(\hat{y}) = \eta_{[L]}S_1(x) \cdot \Phi'(\eta_{[L']}S_2^\wedge(\hat{y})), \qquad (*)$$

тобто

$$\sup\{\varphi(x)(y) \mid y \in \hat{y}\} = \sup\{\varphi'(\hat{y})(\hat{x}) \mid \hat{x} \ni x\}. \qquad (**)$$

З неперервності за Скоттом функції $\varphi'(\hat{y}) : S_1^\wedge \to L^{op}$ випливає, що для будь-якого $\hat{x} \in S_1^\wedge$:

$$\begin{aligned}\varphi'(\hat{y})(\hat{x}) &= \inf\big\{\sup\{\varphi'(\hat{y})(\hat{x}') \mid \hat{x}' \in S_1^\wedge, \hat{x}' \ni x\} \bigm| x \in \hat{x}\big\}\\ &= \inf\big\{\sup\{\varphi(x)(y) \mid y \in \hat{y}\} \bigm| x \in \hat{x}\big\},\end{aligned}$$

Дану рівність і візьмемо за означення $\varphi'(\hat{y}')$. Для кожної функції $\theta : S_1 \to L$ відповідність $\hat{x} \mapsto \inf\{\theta(x) \mid x \in \hat{x}\}$ є нормованим монотонним предикатом $S_1^\wedge \to L$, а тому $\varphi'(\hat{y}) \in M_{[L']}S_1^\wedge$.

З іншого боку, для всіх $\hat{x}' \ll \hat{x}$ в $S_1^\wedge$ знайдеться $x \in \hat{x}$, для якого $\hat{x}' \subset \{x\}\uparrow$. Отже,

$$\begin{aligned}\sup\{\varphi'(\hat{y}')(\hat{x}') \mid \hat{y}' \ll \hat{y}\} &\geqslant \sup\big\{\sup\{\varphi(x)(y) \mid y \in \hat{y}'\} \bigm| \hat{y}' \ll \hat{y}\big\}\\ = \sup\{\varphi(x)(y) \mid y \in \hat{y}\} &\geqslant \inf\big\{\sup\{\varphi(x)(y) \mid y \in \hat{y}\} \bigm| x \in \hat{x}\big\} = \varphi'(\hat{y})(\hat{x}).\end{aligned}$$

Отже, для функції $m' = \sup\{\varphi'(\hat{y}') \mid \hat{y}' \ll \hat{y}\}$ в $M_{[L']}S_1^\wedge$ і для всіх $\hat{x}' \ll \hat{x}$ маємо $m'(\hat{x}') \geqslant \varphi'(\hat{y})(\hat{x})$, з чого випливає $m' \geqslant \varphi'(\hat{y})$. Тому

$$\sup\{\varphi'(\hat{y}') \mid \hat{y}' \ll \hat{y}\} = \varphi'(\hat{y}),$$

тобто φ' неперервне за Скоттом. Далі нескладно, проте важливо показати, що з неперервності за Скоттом φ випливає той факт, що φ' задовольняє (**), а тому і (*). Оскільки множення "·" є однорідним і нескінченно дистрибутивним по обох змінних і кожен елемент $M_{[L]}S_1$ і $M_{[L']}S_2^\wedge$ є (можливо, нескінченним) супремумом елементів виду $\alpha \bar{\circledast} \eta_{[L]}S_1(x)$ та $\beta \bar{\circledast} \eta_{[L']}S_2^\wedge(\hat{y})$ відповідно, то звідси випливає, що для φ і φ' їх єдині неперервні за Скоттом лінійні розширення Φ і Φ' взаємно спряжені. $\square$

ЗАУВАЖЕННЯ. Відображення $\varphi' : S_2 \to M_{[L']} S_1^{\wedge}$ є неперервним за Скоттом для всіх *ізотонних* $\varphi : S_1 \to M_{[L]} S_2$. Без неперервності за Скоттом φ рівність (*) може не виконуватись.

Маючи φ, можна обчислити φ', використовуючи сумісності:

$$\varphi'(\hat{y})(\hat{x}) = \inf\bigl\{\sup\{\varphi(x)(y) \mid y \in S_2, yP_2\hat{y} = 1\} \bigm| x \in S_1, xP_1\hat{x} = 1\bigr\}.$$

Отже, $\varphi'(\hat{y})(\hat{x}) \geqslant \alpha \neq 0$ тоді і тільки тоді, коли для всіх $x \in S_1$, для яких $xP_1\hat{x} = 1$ і для всіх $\beta \ll \alpha$ можна вибрати $y_1, y_2, \ldots, y_n \in S_2$, що $y_1 P_2 \hat{y} = y_2 P_2 \hat{y} = \cdots = y_n P_2 \hat{y} = 1$ і

$$\varphi(x)(y_1) \vee \varphi(x)(y_2) \vee \cdots \vee \varphi(x)(y_n) \geqslant \beta.$$

Тоді для $y = y_1 \vee y_2 \vee \cdots \vee y_n$ маємо $yP_2\hat{y} = 1$ і $\varphi(x)(y) \geqslant \beta$.

Тому, $\varphi'(\hat{y})(\hat{x}) \geqslant \alpha$, якщо і тільки якщо для всіх $x \in S_1$, для яких $xP_1\hat{x} = 1$ і для всіх $\beta \ll \alpha$ знайдеться $y \in S_2$, що $yP_2\hat{y} = 1$ і $\varphi(x)(y \geqslant \beta$. Це означає, що $(\hat{y}, \hat{x}, \alpha) \in \varphi^{\smile}$. Отже, $\varphi' = \varphi^{\smile}$. Ми прийшли до висновку:

ТВЕРДЖЕННЯ 4.4.3. *Якщо відображення* $\Phi : M_{[L]} S_1 \to M_{[L]} S_2$ *є неперервним за Скоттом лінійним продовженням псевдооборотного* L*-неоднозначного представлення* $\varphi : S_1 \Rightarrow^* S_2$*, то спряжене відображення* $\Phi' : M_{[L]} S_2^{\wedge} \to M_{[L]} S_1^{\wedge}$ *є неперервним за Скоттом лінійним продовженням псевдооберненого* L*-неоднозначного представлення* $\varphi^{\smile} : S_2^{\wedge} \hat{\Rightarrow}^* \hat{S}_1^{\wedge}$.

Висновки до розділу 4.

У розділі для цілком дистрибутивної кванталі $L = (L, \oplus, *)$ сильні сумісності, введені і досліджені вище, використано для запровадження понять чіткого та L-нечіткого неоднозначних зображень з однієї неперервної напівгратки у іншу. Виділено підкласи чітких та L-нечітких неоднозначних зображень, для яких існують псевдообернені зображення, і означено композиції, з якими вони як стрілки та неперервні напівгратки з нулем як об'єкти утворюють категорії. Доведено, що ці категорії є самодвоїстими щодо контраваріантного функтора взяття псевдооберненого зображення. Доведено, що L-нечіткі неоднозначні зображення взаємно однозначно відповідають неперервним за Скоттом зберігаючим нуль відображенням з неперервних напівграток у неперервні L-напівмодулі монотонних предикатів, а ті, у свою чергу, взаємно однозначно відповідають неперервним L-лінійним операторам між L-напівмодулями монотонних предикатів. Цим побудовано вкладення категорії L-нечітких неоднозначних зображень у категорію неперервних L-напівмодулів, що встановлює зв'язок з ідемпотентним функціональним аналізом. Це вкладення зіставляє кожній неперервній напівгратці з нулем L-напівмодуль монотонних предикатів на ній. Доведено, що дія псевдообернення L-нечітких неоднозначних зображень відповідає дії знаходження ермітово спряжених L-лінійних операторів. Наведено інтерпретацію L-нечітких неоднозначних зображень та відповідних L-лінійних операторів як трансформерів монотонних предикатів.

Результати розділу опубліковано у працях [4, 5, 8, 9, 58, 54, 60].

РОЗДІЛ 5

ІГРИ, НЕПЕРЕРВНІ НАПІВГРАТКИ ТА ПРЕДИКАТИ

Теорія областей виникла і розвивалася, мотивована цілком практичними потребами комп'ютерних наук. Тому при запровадженні нових понять, отриманні результатів і виборі напрямків досліджень у ній наявність реалістичної інтерпретації і можливість ефективного застосування є не менш важливим критерієм якості, ніж стрункість і логічність теорії.

У цьому розділі ми збираємось показати, що монотонні предикати природно виникають і мають застосування у ситуаціях неповної або неточної інформації, наприклад, у іграх двох гравців. При цьому запроваджені і досліджені раніше алгебраїчні об'єкти набувають цілком практичного сенсу.

Звичайно, описана нижче інтерпретація неперервних напівграток є тільки однією з багатьох можливих, але впродовж всього розділу вона є сталою, тому коротко пригадаємо її.

Нехай S – множина всіх порцій неповної інформації (тверджень про стан речей), яку можна отримати в певний момент часу. На S існує звичайний порядок: інформація x передує інформації y (тобто, $x \leqslant y$), якщо y є більш обмежуючою, ніж x. Тоді найменший елемент $0 \in S$ означає "жодної інформації" або "нічого не відомо". Також вважаємо, що для будь-яких $x, y \in S$ існує інфімум $x \wedge y$, який є найбільш обмежуючою інформацією серед тих, які містять x та y як часткові випадки. Отже, S є нижньою напівграткою з нулем.

Приклад. Для компакта X покладемо $S = \exp_{\supset} X$. Точки X розглядаємо як можливі стани системи в певний момент часу. Тоді кожен елемент $A \in \exp_{\supset} X$, тобто замкнену непорожню підмножину $A \subset X$ інтерпретуємо як "система перебуває в одному зі станів A", що для $|A| > 1$ є неповною інформацією. Найменший елемент $X \in \exp_{\supset} X$ розуміємо як “що завгодно може трапитись”.

Надалі гіперпростори компактів будуть нашими головними об’єктами застосування та мотивуючими прикладами, коли мова йде про неперервні напівгратки. Корисно буде застосувати запропоновану теорію до підмножин компактних просторів станів, щоб зрозуміти “як це працює”.

5.1. Грубі ігри у нормальній формі

Розглянемо гру з двома гравцями у *нормальній (матричній) формі*. Нехай $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ і $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – скінченні *множини стратегій* для гравців. Якщо перший гравець вибирає стратегію x_i, а другий – x'_j, тоді (дійснозначні) результати гри для гравців рівні $f(x_i, x'_j)$ та $f'(x_i, x'_j)$ відповідно, а $f : X \times X' \to [u, U] = L$, $f' : X \times X' \to [u', U'] = L'$ називаємо *функціями виплат* (тут $[u, U]$ та $[u', U']$ — числові проміжки).

Взагалі, вважається, що кожен гравець вибирає по одній стратегії і саме ці вибрані стратегії зіграють. Але буває так, що на результат впливає Випадок. Наприклад, камінь, кинутий в одну з комірок, може відскочити в сусідню комірку. Щоб змоделювати такий вид недетермінізму, зазвичай звертаються до ігор у *розширеній формі*, коли гравець замість єдиної вершини у дереві гри може вибрати *інформаційну множину*, тобто клас еквівалентних вершин, і наперед невідомо, у котрій з вершин опиниться гравець після свого ходу. Додатково на інформаційній множині може бути зафіксований ймовірнісний розподіл.

Тепер покажемо, що гра з нерозрізненними для гравців вершинами дерева (коли множини вершин є *грубими* [63], див. також [34, 45, 46]) може бути частково змодельована як гра у нормальній формі з використанням напівграток.

Розглянемо непорожні підсім'ї $S \subset \exp X$ та $S' \subset \exp X'$ (нагадаємо, що X та X' скінченні, тому усі їх підмножини замкнені). Очевидно, що $S \subset \exp_{\supset} X$ і $S' \subset \exp_{\supset} X'$ складаються з об'єднань класів еквівалентності, тому замкнені щодо об'єднань, тобто є нижніми піднапівгратками. Скінченність гарантує їх неперервність. Гравці можуть вибирати $A \in S$, $A' \in S'$, які розглядаємо як *грубі стратегії*. Тоді, кожна пара $(a, a') \in A \times A' \subset X \times X'$ може бути зіграна, отже, $f(A \times A')$ і $f'(A \times A')$ є множинами можливих результатів для гравців. Означимо $R \subset (S \times S') \times (L \times L')$ наступним чином:

$$(A, A')R(\alpha, \alpha') \iff f(a, a') \geqslant \alpha,\ f'(a, a') \geqslant \alpha' \text{ для всіх } a \in A, a' \in A'.$$

Іншими словами, вибір A першим гравцем та A' другим гарантує їм результати не менші, ніж α та α' відповідно. Очевидно, що R є неоднозначним зображенням $S \times S'$ в $L \times L'$. Друга проекція R, тобто, множина усіх $(\alpha, \alpha') \in L \times L'$, таких, що $(A, A')R(\alpha, \alpha')$ для $(A, A') \in S \times S'$, містить усі пари виплат, які можуть бути гарантовані, якщо гравці між собою домовляться. Максимальні елементи цієї множини (які, очевидно, існують) утворюють *грубі оптимуми Парето*. Зрозуміло, як означити *грубу рівновагу Неша*.

Подібним чином, можемо розглядати будь-яке неоднозначне зображення

$$R \subset (S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n) \times (K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_n),$$

де K_i – компактні підмножини дійсної прямої або, загальніше, цілком дистрибутивної гратки, як модель гри з n гравцями з напівнеперервною дійснозначною чи граткозначною множиною виплат у *грубій нормальній формі*. Якщо маємо

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)R(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

і усі a_i, $i = 1, \ldots, n$ зіграні відповідними гравцями, то той, хто керує грою (можливо, зовнішня особа чи сукупність гравців) може гарантувати, що незалежно від впливу Випадку, виплати для гравців будуть не меншими, ніж α_i, $i = 1, \dots, n$. Для гри з одним гравцем цією особою може бути він сам.

5.2. Відношення до вірогіднісних змішаних стратегій в порядкових іграх

Запропонована модель тісно пов'язана з теорією вірогідностей [24].

Нагадаємо [14], що порядковою (ordinal) грою називається трійка $G = \big(N, (A_i)_{i \in N}, (\mu_i)_{i \in N}\big)$, де $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – скінченна множина гравців, A_i – скінченна множина стратегій, допустимих для гравця i, $A = \prod_{i \in N} A_i$ – множина об'єднаних стратегій, а кожна функція μ_i є функцією корисності для гравця i з A в лінійно впорядковану гратку L. Отже, $\mu_i(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – це корисність для гравця i об'єднаної дії $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Змішаною стратегією для гравця i є L-значний вірогіднісний розподіл на A_i, тобто, відображення $\pi_i : A_i \to L$, яке кожній стратегії $a_i \in A_i$ співставляє її рівень переваги, зокрема, $\pi_i(a_i) = 1_L$ означає, що a_i повністю задовольняє гравця, а $\pi(a_i) = 0_L$ означає, що a_i зовсім не вигідна для i. Як правило, вимагається, щоб функція π_i була нормованою, тобто, $\max_{a_i \in A_i} \pi_i(a_i) = 1_L$. Тоді для $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ позначимо $\pi(a_1, a_2, \dots, a_n) = \min\{\pi_1(a_1), \pi_2(a_2), \dots, \pi_n(a_n)\}$ об'єднаний рівень переваги для об'єднаної стратегії π, який відображає вірогідність того, що така стратегія буде зіграна.

Тоді для i песимістичною оцінкою результату π є [25]

$$\mu_i^{PES}(\pi) = \min_{a \in A} \max\{n(\pi(a)), \mu_i(a)\},$$

де $n : L \to L$ – відображення, яке змінює порядок на протилежний.

Зауважимо, що для повної лінійно впорядкованої шкали L усі нормовані L-значні вірогіднісні розподіли на A_i утворюють неперервну нижню напівгратку $\mathcal{P}_L(A_i)$ з частковим порядком

$$\pi_i \prec \pi_i' \iff \pi_i(a_i) \geqslant \pi_i'(a_i) \text{ для всіх } a_i \in A_i,$$

тобто, π_i' більш уточноююче, ніж π_i. Нижнім елементом є $\pi_i(a_i) = 1_L$ для всіх $a_i \in A_i$ (усе влаштовує).

Отримуємо грубу гру у нормальній формі. А саме, для об'єднаної змішаної стратегії $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) \in \mathcal{P}_L(A_1) \times \mathcal{P}_L(A_2) \times \dots \times \mathcal{P}_L(A_n)$ ми можемо гарантувати результати не гірші, ніж $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in L^n$, якщо

$$(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \iff$$
$$\iff \mu_i^{PES}(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) \geqslant \alpha_i \text{ для всіх } i \in N.$$

Змішана рівновага Неша для порядкової гри є грубою рівновагою Неша для відповідної грубої гри у нормальній формі.

5.3. Грубі ігри у розширеній формі з двома гравцями і нульовою сумою

Ми розглядали ситуацію, коли усі гравці вибирають свої стратегії (фактично, роблять ходи) одночасно. Тепер розглянемо гру, у якій перший і другий гравці ходять по черзі. Припустимо, що результат гри є елементом цілком дистрибутивної гратки L, де 0 розглядаємо як повний програш першого гравця і цілковиту перемогу другого, а 1 – навпаки. Тепер розглянемо той самий результат як елемент L для першого гравця і елемент $\tilde{L} = L^{op}$ для другого гравця. Це означає, що можемо покласти $L = [0, 1]$ і розглядати результат α як виплату $C(\alpha - \frac{1}{2})$ для першого гравця і $C(\frac{1}{2} - \alpha)$ для другого для деякого $C > 0$.

Нагадаємо, що L-неоднозначне зображення $R : S \Rightarrow^L S'$ можна розглядати як ізотонне відображення $R : S \to M_{[L]} S'$, яке зберігає нуль.

Робимо наступні припущення:

1) Гравці ходять по черзі, ходи першого гравця є елементами неперервних напівграток $S_1, S_2, \ldots$ з нулями, а другий гравець вибирає елементи напівграток $S_{-1}, S_{-2}, \ldots$ з нулями. Послідовність $S_1, S_{-1}, S_2, S_{-2}, \ldots$ скінченна, тобто, кількість ходів обмежена.

2) Найбільший елемент напівгратки описує стан гри точніше, зокрема, накладає більше обмежень на наступний хід іншого гравця.

3) Гравець не може безпосередньо спостерігати хід іншого гравця, але спостерігає власну позицію, що виникає внаслідок цього ходу. А саме, для всіх $i = 1, 2, \ldots$ знайдеться $\tilde{L}$-неоднозначне зображення $R_i : S_i \Rightarrow^{\tilde{L}} S_{-i}$, для якого після ходу $x_i \in S_i$ першого гравця, другому гравцеві дається множина $x_i R_i = \{(x_{-i}, \alpha\} \in S_{-i} \times \tilde{L} \mid (x_i, x_{-i}, \alpha) \in R_i\}$. Для кожного елемента (x_{-i}, α), якщо другий гравець вибирає x_{-i}, то перший гравець може або отримати $\alpha \in L$ і вийти з гри, залишивши другого гравця з результатом $\alpha \in \tilde{L}$, або робити свій хід.

Звідси випливає, що для всіх $(x_i, x_{-i}, 1) \in R_i$ хід x_{-i} після x_i означає програш для другого гравця. Зокрема, будь-який нульовий хід $x_{-i} = 0$ призводить до негайного програшу. Не буде суперечності з логікою гри, якщо ми вважатимемо такий хід здачею. Тому хід x_i призводить до безпосередньої перемоги першого гравця, якщо $(x_i, x_{-i}, 1) \in R_i$ для всіх $x_{-i} \in S_{-i}$.

Отже, монотонний предикат $R_i(x_i) = m_{x_i R_i} \in M_{[\tilde{L}]} S_{-i}$ повністю описує позицію у грі з точки зору другого гравця після ходу $x_i \in S_i$ першого гравця.

4) Подібним чином, для всіх $i = 1, 2, \ldots$ розглянемо L-неоднозначне зображення $R_{-i} : S_{-i} \Rightarrow^{L} S_{i+1}$. Для всіх його елементів (x_{-i}, x_{i+1}, β), якщо перший гравець робить хід x_{i+1} після ходу x_{-i} другого гравця, то останній або негайно отримує $\beta \in \tilde{L}$, або продовжує гру. Тому $R_{-i}(x_{-i}) = m_{x_{-i} R_{-i}} \in$

$M_{[L]}S_{i+1}$ зображує позицію першого гравця після ходу x_{-i} другого. Негайно виграшні/програшні ходи описуються двоїсто.

5) Також використовуємо монотонний предикат $m_0 \in M_{[L]}S_1$, щоб описати позицію першого гравця до його першого ходу.

Таким чином, перед тим, як зробити свій хід, гравець перебуває у певній позиції і (крім випадку, коли робиться перший хід у грі) може вийти з гри.

5.4. Зв'язок з іграми у звичайній розширеній формі

Покажемо, що модель, розглянута вище, може адекватно представляти скінченну гру у розширеній формі з двома гравцями і нульовою сумою, у якій є третій гравець Випадок і два раціональні гравці роблять ходи по черзі, але між ними може з'явитися будь-яка кількість ходів Випадку. У нас також немає розподілу ймовірностей для ходів Випадку, але припускаємо, що після ходу раціонального гравця Випадок діє на користь іншого гравця.

У кореневому дереві гри для вершини, яка відповідає ходу раціонального гравця, називаємо її *раціональною глибиною* кількість вершин *для раціонального гравця* між даною вершиною і коренем. Нехай X_0, X_1, X_{-1}, X_2, X_{-2}, $\ldots$ – множини ходів раціональної глибини 0, 1, 2, 3, 4, $\ldots$ відповідно. Зауважимо, що X_0, X_{-1}, X_{-2}, $\ldots$ містять вершини для першого гравця, а X_1, X_2, $\ldots$ – вершини для другого гравця.

Для $i = 1, 2, \ldots$ позначимо

$$S_{\pm i} = \{F \subset X_{\pm i} \mid F \neq \varnothing \text{ і, якщо вершини } u, v \in X_{\pm i} \text{ нерозрізненні}$$
$$\text{(належать до однієї інформаційної множини), то } u \in F \iff v \in F\}$$

і впорядкуємо цю скінченну сім'ю обернено до включення. Отже, елементи множин $S_{\pm i}$ є грубими множинами в $X_{\pm i}$, визначеними з точністю до нерозрізненності з точки зору відповідного гравця.

Зазначимо, що перший хід у грі також може бути зроблений Випадком, тому навіть початкова вершина у X_0 може бути невідома першому гравцеві до того як він зробить свій перший хід. Гравцеві відома тільки множина інформаційних множин (тобто, клас нерозрізненних вершин), в одній з яких знаходиться реальна вершина. Він вибирає один чи більше класів еквівалентності для своїх ходів, які можуть залежати від ходів Випадку, і ця послідовність може зупинитися або на листку (кінцевій вершині) дерева, або на вершині другого гравця.

Нехай $F \in S_1$ – множина вершин другого гравця, яку ми отримали внаслідок вибору першого гравця. Тепер другий гравець може або погодитись вибрати одну із кінцевих вершин безпосередньо чи у зв'язку з ходами Випадку (не знаючи про це заздалегідь) і отримати відповідний результат, або робити свій власний вибір. Звідси, гарантований результат α_F є найбільшою нижньою межею в $\tilde{L}$ значень в усіх листках, доступних з F або безпосередньо, або через ходи Випадку ($\alpha_F = \tilde{0} = 1$, якщо немає таких листків). Припустимо, що $\alpha_F = 0 = \tilde{1}$, якщо неможливо забезпечити потрапляння в F і, значить, другий гравець може вибрати F. Відповідність $F \mapsto \alpha_F$ є монотонним предикатом $m_0 : S_1 \to \tilde{L}$, який повністю описує усі дії для першого гравця і початок гри, тобто, його початкову позицію.

Якщо другий гравець вирішує продовжити гру, то він вибирає непорожню множину класів еквівалентності ходів таку, що з F можна потрапити тільки у множину $G \in S_{-1}$ вершин першого гравця. Тоді перший гравець може вийти з гри, вибравши β_G, що є найбільшою верхньою межею в L серед усіх результатів в листках, які можуть бути вибрані із G безпосередньо або через ходи Випадку. Якщо не існує непорожньої множини класів еквівалентності, для якої з F можна потрапити в G, то вибір G є некоректним. Тоді, покладемо $\beta_G = 1$, і перший гравець відразу виграє, що, по суті, забороняє таке G.

Таким чином, отримуємо монотонний предикат $m_F : S_{-1} \to L$, який кожній множині G співставляє β_G. Відповідність $R_1 : S_1 \to M_{[\tilde{L}]}S_{-1}$, $R_1 : F \mapsto m_F$ є L-неоднозначним зображенням, яке описує як позиція m_F другого гравця залежить від попереднього вибору F першого гравця.

Тепер, маючи $G \in S_{-1}$, перший гравець може задовольнитись β_G або вибрати множину $H \in S_2$, досяжну з G, і т.д., звідки отримуємо відповідність $R_{-1} : S_{-1} \to M_{[L]}S_2$.

Бачимо, що дана схема описує гру розширеної форми, у котрій два гравці мають неповну інформацію про актуальний стан речей і не мають повного контролю над діями.

5.5. Предикати виплат

Означимо рекурсивно функції $w_i : S_i \to L$, $w_{-i} : S_{-i} \to \tilde{L}$, для яких $w_i(x_i)$ і $w_{-i}(x_{-i})$ – найменші верхні межі гарантованих результатів для першого і другого гравців відповідно після ходів $x_{\pm i}$ (незалежно від наступного ходу іншого гравця). Якщо $S_{\pm i}$ – останній можливий хід у грі, то додамо фіктивний хід, який породжується $R_i : S_i \Rightarrow^{\tilde{L}} \{0\}$ або $R_{-i} : S_{-i} \Rightarrow^{L} \{0\}$. Тоді $w_i(x_i) = R_i(x_i)(0) \in L$, $w_{-i}(x_{-i}) = R_{-i}(x_{-i})(0) \in \tilde{L}$.

Інакше, згідно з припущенням про поведінку Випадку, природно покласти

$$w_i(x_i) = \inf\{R_i(x_i)(x_{-i}) \vee w_{-i}(x_{-i}) \mid x_{-i} \in S_{-i}\}$$

або

$$w_{-i}(x_{-i}) = \widetilde{\inf}\{R_{-i}(x_{-i})(x_{i+1}) \mathbin{\tilde{\vee}} w_{i+1}(x_{i+1}) \mid x_{i+1} \in S_{i+1}\}.$$

Проблема в тому, що функції $w_i : S_i \to L$ і $w_{-i} : S_{-i} \to \tilde{L}$, означені в такий спосіб, є ізотонними і зберігають нижні елементи, але не обов’язково неперервні за Скоттом. Тому, дещо змінимо означення:

$$\bar{w}_i(x_i) = \sup\{w_i(x) \mid x \in S_i, x \ll x_i\}$$
$$= \sup_{x \ll x_i} \inf\{R_i(x)(x_{-i}) \vee w_{-i}(x_{-i}) \mid x_{-i} \in S_{-i}\}$$

і

$$\bar{w}_{-i}(x_{-i}) = \tilde{\sup}\{w_{-i}(x) \mid x \in S_{-i}, x \ll x_{-i}\}$$
$$= \tilde{\sup_{x \ll x_{-i}}} \tilde{\inf}\{R_{-i}(x)(x_{i+1}) \tilde{\vee} w_{i+1}(x_{i+1}) \mid x_{i+1} \in S_{i+1}\}.$$

Тоді $\bar{w}_i \leqslant w_i$ в L і $\bar{w}_{-i} \leqslant w_{-i}$ в $\tilde{L}$. Зрозуміло, що для найменшого ходу $S_{\pm i}$ виконується $\bar{w}_{\pm i} = w_{\pm i}$.

Зауваження. Крім того, що отримуємо неперервність за Скоттом, перехід від $w_{\pm i}$ до $\bar{w}_{\pm i}$ має практичне значення. Якщо хід $x_{\pm i} \in S_{\pm i}$ не ізольований відносно апроксимації знизу, то відповідний гравець не зможе його вибрати, але він може зробити будь-який хід $x \ll x_{\pm i}$. Тоді результат вважається досяжним через вибір $x_{\pm i}$, якщо і тільки якщо він може бути апроксимованим з довільною точністю через усі x, які апроксимують знизу $x_{\pm i}$.

Так отримані функції $\bar{w}_{\pm i}$ можна розглядати як монотонні предикати $\bar{w}_i \in M_{[\tilde{L}]}S_i$ і $\bar{w}_{-i} \in M_{[L]}S_{-i}$. Називатимемо їх *предикатами виплат*.

Лема 5.5.1. [59]

$$w_i(x_i) = \inf\{R_i(x_i)(x_{-i}) \vee \bar{w}_{-i}(x_{-i}) \mid x_{-i} \in S_{-i}\}$$

Доведення. Очевидно, що

$$\beta = \inf\{R_i(x_i)(x_{-i}) \vee \bar{w}_{-i}(x_{-i}) \mid x_{-i} \in S_{-i}\}$$
$$\geqslant \alpha = \inf\{R_i(x_i)(x_{-i}) \vee w_{-i}(x_{-i}) \mid x_{-i} \in S_{-i}\}.$$

Якщо $\beta > \alpha$, то знайдеться відкритий фільтр $U \subset \tilde{L}$, для якого $\alpha \in U \not\ni \beta$. Ми можемо вибрати скінченну кількість точок $x^1, x^2, \dots x^k \in S_{-1}$ таких, що

$$\gamma = \big(R_i(x_i)(x^1) \vee w_{-i}(x^1)\big) \wedge \big(R_i(x_i)(x^2) \vee w_{-i}(x^2)\big) \wedge \\ \cdots \wedge \big(R_i(x_i)(x^k) \vee w_{-i}(x^k)\big) \in U.$$

Для всіх $y^1 \ll x^1$, $y^2 \ll x^2, \ldots, y^k \ll x^k$ маємо

$$\big(R_i(x_i)(x^1) \vee w_{-i}(y^1)\big) \wedge \big(R_i(x_i)(x^2) \vee w_{-i}(y^2)\big) \wedge \\ \cdots \wedge \big(R_i(x_i)(x^k) \vee w_{-i}(y^k)\big) \geqslant \\ \big(R_i(x_i)(x^1) \vee \bar{w}_{-i}(x^1)\big) \wedge \big(R_i(x_i)(x^2) \vee \bar{w}_{-i}(x^2)\big) \wedge \\ \cdots \wedge \big(R_i(x_i)(x^k) \vee \bar{w}_{-i}(x^k)\big).$$

Ліва сторона прямує до $\gamma \in \tilde{L}$, якщо $y^1 \to x^1$, $y^2 \to x^2, \ldots, y^k \to x^k$, залишаючись “way below”. Тому права сторона також належить U і дорівнює або є більшою, ніж β, що суперечить припущенню про те, що β не належить відкритому фільтру $U \subset \tilde{L}$. Отже, інфімуми рівні. $\square$

Аналогічно доводиться

Лема 5.5.2.

$$w_{-i}(x_{-i}) = \tilde{\inf}\{R_{-i}(x_{-i})(x_{i+1}) \,\tilde{\vee}\, \bar{w}_{i+1}(x_{i+1}) \mid x_{i+1} \in S_{i+1}\}.$$

Звідси випливає

Теорема 5.1. *Для скінченної послідовності $S_1, S_{-1}, S_2, S_{-2}, \ldots$ неперервних напівграток з нулями і грубої гри двох гравців у розширеній формі, у якій початковий стан задається монотонним предикатом $m_0 \in M_{[L]}S_1$, а ходи гравців — неоднозначними зображеннями $R_i : S_i \Rightarrow^{\tilde{L}} S_{-i}$ і $R_{-i} : S_{-i} \Rightarrow^{L} S_{i+1}$, предикати виплат задовольняють рекурсивні співвідношення*

$$\bar{w}_i(x_i) = \sup_{x \ll x_i} \inf\{R_i(x)(x_{-i}) \vee \bar{w}_{-i}(x_{-i}) \mid x_{-i} \in S_{-i}\}$$

i

$$\bar{w}_{-i}(x_{-i}) = \tilde{\sup_{x \ll x_{-i}}} \tilde{\inf}\{R_{-i}(x)(x_{i+1}) \mathbin{\tilde{\vee}} \bar{w}_{i+1}(x_{i+1}) \mid x_{i+1} \in S_{i+1}\}.$$

Підкреслимо, що ми можемо обчислити рекурсивно тільки "безпечні" функції $\bar{w}_{\pm i}$.

5.6. Зворотні трансформери предикатів виплат

Зазначимо, що означені формулами вище відповідності $T_i : M_{[L]}S_{-i} \to M_{[\tilde{L}]}S_i$ і $T_{-i} : M_{[\tilde{L}]}S_{i+i} \to M_{[L]}S_{-i}$, які перетворюють відповідно $\bar{w}_{-i} \mapsto \bar{w}_i$ і $\bar{w}_{i+1} \mapsto \bar{w}_{-i}$, є антитонними [59].

ТВЕРДЖЕННЯ 5.6.1. *Відображення $T_{\pm i}$ переводять інфімуми у супремуми.*

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $\bar{w}^0_{-i} = \inf\{\bar{w}^k_{-i} \mid k \in \mathcal{K}\}$ в $M_{[L]}S_{-i}$. Нагадаємо, що інфімуми обчислюються поточково, а тому, для всіх $x \in S_i$ маємо

$$\begin{aligned} w^0_i(x) = \inf\{R_i(x)(x_{-i}) \vee \bar{w}^0_{-i}(x_{-i}) \mid x_{-i} \in S_{-i}\} \\ &= \inf\{R_i(x)(x_{-i}) \vee \big(\inf_{k \in \mathcal{K}} \bar{w}^k_{-i}(x_{-i})\big) \mid x_{-i} \in S_{-i}\} \\ &= \inf_{k \in \mathcal{K}} \inf\{R_i(x)(x_{-i}) \vee \bar{w}^k_{-i}(x_{-i})) \mid x_{-i} \in S_{-i}\} \\ &= \inf_{k \in \mathcal{K}} w^k_i(x). \end{aligned}$$

Тепер $\bar{w}^0_i = T_i(\bar{w}^0_{-i})$ є найбільшою неперервною за Скоттом функцією $S_i \to L$, яка поточково менша чи рівна від усіх w^k_i, або, що рівносильно, менша чи рівна від усіх $\bar{w}^k_i = T_i(\bar{w}^k_{-i})$. Тому, $\bar{w}^0_i$ як елемент $M_{[\tilde{L}]}S_i$ є найменшою верхньою гранню усіх $\bar{w}^k_i$, $k \in \mathcal{K}$, а T_i інфімумам зіставляє супремуми. Доведення для T_{-i} аналогічне. $\square$

ЗАУВАЖЕННЯ.

Відображення $T_i : \left(M_{[L]}S_{-i}\right)^{op} \to M_{[\tilde{L}]}S_i$ і $T_{-i} : \left(M_{[\tilde{L}]}S_{i+i}\right)^{op} \to M_{[L]}S_{-i}$ неперервні за Скоттом. Називаємо їх *зворотніми трансформерами предикатів виплат*, і, на відміну від звичайних трансформерів предикатів передумов та післяумов [62], вони антитонні, а не ізотонні.

На жаль, відображення $T_i : M_{[L]}S_{-i} \to \left(M_{[\tilde{L}]}S_i\right)^{op}$ і $T_{-i} : M_{[\tilde{L}]}S_{i+i} \to \left(M_{[L]}S_{-i}\right)^{op}$ не завжди неперервні за Скоттом.

ПРИКЛАД 5.6.2. Нехай $L = S_1 = S_{-1} = I = [0,1]$, $R_1 : S_1 \to M_{[\tilde{I}]}S_{-1}$ означене наступним чином:

$$R(0)(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

$$R(a)(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1/2, \\ 1, & x > 1/2, \end{cases} \qquad a > 0.$$

Тоді R_1 неперервне за Скоттом і зберігає нижній елемент, отже, є $\tilde{I}$-неоднозначним зображенням. Також означимо монотонні предикати $\bar{w}^i_{-1} \in M_{[I]}S_{-1}$ формулами:

$$\bar{w}^0_{-1}(x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant 1/2, \\ 0, & x > 1/2, \end{cases} \qquad \bar{w}^i_{-1}(x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant 1/2 - \frac{1}{2i}, \\ 0, & x > 1/2 - \frac{1}{2i}, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \dots .$$

Тоді $\bar{w}^i_{-1} \nearrow \bar{w}^0_{-1}, i \to \infty$, in $M_{[I]}S_{-1}$. З іншого боку, для $T_1(\bar{w}^i_{-1})S_1 \in M_{[\tilde{I}]}S_1$, $i = 0, 1, 2, \dots$ виконується рівність

$$T_1(\bar{w}^0_{-1})(y) = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ 1, & y > 0, \end{cases} \qquad T_1(\bar{w}^i_{-1})(y) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots .$$

Зрозуміло, що $T_1(\bar{w}^i_{-1}) \nearrow T_1(\bar{w}^0_{-1})$, $i \to \infty$ не виконується в $(M_{[\tilde{I}]}S_1)^{op}$.

Тому відображення $T_1 : M_{[I]}S_{-1} \to (M_{[\tilde{I}]}S_1)^{op}$ не є неперервним за Скоттом.

Отже, неперервність за Лоусоном зворотніх трансформерів предикатів виплат також не гарантується.

5.7. Виплата для початкової позиції

Нагадаємо, що $\bar{w}_1(x_1)$ – найкращий гарантований результат гри для першого гравця, якщо він починає з вибору x_1. Якщо монотонний предикат $m_0 \in M_{[L]}S_1$ використовується, щоб описати початкову позицію першого гравця (тобто, обмеження на його ходи), то найбільший гарантований результат гри для другого гравця може бути обчислений введенням фіктивного ходу на початку, подібно до фіктивного ходу, запровадженого у її кінці.

Покладемо $S_0 = \{0, 1\}$, де 0 =“здатися”, 1 =“продовжити гру”. Означимо L-неоднозначне зображення $R_0 : S_0 \to M_{[\tilde{L}]}S_1$ наступним чином: $R_0(0) = m_{\{0\}}$ (нульовий елемент у $M_{[\tilde{L}]}S_1$), $R_0(1) = m_0$. Тоді предикат виплат $\bar{w}_0$ для єдиного ненульового аргументу 1 обчислюється як звичайно:

$$\bar{w}_0(1) = \tilde{\inf}\{R_0(1)(x_1) \mathbin{\tilde{\vee}} \bar{w}_1(x_1) \mid x_1 \in S_1\} = \sup\{m_0(x_1) \wedge \bar{w}_1(x_1) \mid x_1 \in S_1\}.$$

Це найкращий результат гри, який можна забезпечити другому гравцеві. Іншими словами, якщо йому запропонують щонайменше $\bar{w}_0(1)$, розумно буде погодитись і не грати в гру далі.

5.8. Чи досяжне значення предикату виплат?

Виникає запитання: якщо $\bar{w}_0(1) = \alpha \in \tilde{L}$, чи може результат α бути досягнутим першим гравцем? Звичайно, якщо усі $S_{\pm i}$ скінченні, то відповідь позитивна.

Приклад 5.8.1. Нехай S_1 — це "їжак" $\bigvee_{n=1}^{\infty}(I_n, 0)$ колючості ω, тобто диз'юнктне об'єднання одиничних проміжків $I_n = [0,1]$, $n = 1, 2, \ldots$, з ототожненими початками 0. На кожному проміжку розглядаємо природне впорядкування, з 0 як спільним найменшим елементом, а інші елементи різних проміжків вважаємо непорівнянними, тоді S_1 очевидно є неперервною напівграткою з найменшим елементом. Покладемо також $S_{-1} = \{0\}$, $L = I = [0,1]$, і задамо $\tilde{L}$-неоднозначне зображення $R_1 : S_1 \Rightarrow^{\tilde{I}} S_{-1}$ так:

$$0R_1 = \{0\} \times \{1\}, \text{ і } xR_1 = \{0\} \times [1 - 1/n, 1] \text{ для кожного } x \in I_n \setminus \{0\}.$$

Якщо перший гравець обирає голку I_n, то другий отримує $1/n$. Отже, $\bar{w}_0(1) = 1$, але для першого гравця нема способу отримати 1, тому для другого нема сенсу відмовлятися від гри.

Таким чином, предикати виплат описують тільки нижні обмеження на результати при правильній грі, і цілком можливо, що реальні виплати завжди кращі.

5.9. Як грати?

Розглянемо, як застосовувати описані вище функції, щоб отримати у грі кращі результати. Для спрощення припустимо, що гратка L лінійно впорядкована, наприклад, $L = I = [0,1]$, і $\bar{w}_0(1) = \alpha$. Нагадаємо, що перший гравець може виявитися нездатним отримати α, тому оберемо як завгодно близьке $\alpha' < \alpha$. Оскільки $\bar{w}_0(1) > \alpha'$, існує таке $x_1 \in S_1$, що $m_0(x_1) \wedge w_1(x_1) > \alpha'$. Нехай перший гравець зробить свій вибір x_1. Якщо другий гравець погодиться на $m_0(x_1) > \alpha'$ і вийде з гри, то перший отримає не менш, ніж α'. Інакше за цим слідує хід $x_{-1} \in S_{-1}$, де $w_1(x_1) > \alpha'$, і, взявши до уваги зауваження про предикати виплат, дещо "послабивши" x_1 до x, можемо розраховувати на $R_1(x)(x_{-1}) \vee \bar{w}_{-1}(x_{-1}) > \alpha'$. Якщо $R_1(x)(x_{-1}) > \alpha'$, то перший гравець може вийти з гри з результатом $> \alpha$, або, завдяки $\bar{w}_{-1}(x_{-1}) > \alpha'$, він обере таке $x_2 \in S_2$, що $R_{-1}(x_{-1})(x_2) \wedge \bar{w}_2(x_2) > \alpha'$, і т.д. Так перший гравець може гарантувати довільний результат $\alpha' < \alpha$.

З іншого боку, з $\bar{w}_0(1) = \alpha$ випливає $m_0(x_1) \wedge \bar{w}_1(x_1) \leqslant \alpha$ для всіх ходів $x_1 \in S_1$. Отже, після кожного ходу другий гравець може або отримати $m_0(x_1) \leqslant \alpha$ (тобто $m_0(x_1) \tilde{\geqslant} \alpha$), або скористатись з $\bar{w}_1(x_1) \leqslant \alpha$, щоб знайти для кожного $\alpha'' > \alpha$ такий хід $x_{-1} \in S_{-1}$, що $R_1(x)(x_{-i}) \vee w_{-i}(x_{-i}) < \alpha''$ ($x \ll x_1$ теж є неточною реалізацією вибору x_1 першого гравця). Після цього ходу перший гравець може або взяти $R_1(x)(x_{-i}) \vee w_{-i}(x_{-i}) < \alpha''$ і вийти, або продовжити гру, і, оскільки $w_{-i}(x_{-i}) < \alpha''$, в обох випадках результат другого гравця буде не гіршим від $\alpha'' > \alpha$.

Так ми отримуємо головне твердження підрозділу [59].

ТЕОРЕМА 5.2. *Для грубої скінченної дійснозначної гри розширеної форми з нульовою сумою, найменшою верхньою гранню мінімального виграшу першого гравця є найбільша нижня грань максимального програшу другого гравця.*

Зауважимо, що це “апроксимативна теорема про мінімакс”, бо всі супремуми та інфімуми у ній не обов’язково досяжні.

Висновки до розділу 5.

У розділі запроваджено і досліджено грубі ігри з неповною інформацією, яку виражено через неперервні напівгратки та монотонні граткозначні, зокрема, дійснозначні, предикати на напівгратках. Показано, що стан гри у кожен, зокрема, початковий, момент можна описати предикатом, що виражає ціну виходу, а можливі зміни стану — L-неоднозначним зображенням. Знайдено песимістичні (мінімальні гарантовані) оцінки результату гри для обох гравців, і для дійснозначних ігор доведено їх рівність, тобто істинність апроксимативної теореми про мінімакс. Знайдено трансформери предикатів, тобто функції, що будують оцінки становища одного гравця на підставі відповідних оцінок для іншого гравця після ходу. Доведено, що вони є антитонними і неперервними щодо топології Скотта, якщо обернути порядок на області значень.

Результати розділу опубліковано у працях [4, 59].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримано наступні результати :

— Доведено, що напівмодулі монотонних предикатів є вільними об'єктами у категоріях неперервних ідемпотентних предикатів та неперервних лінійних чи афінних відображень;
— Доведено, що кожна пара сумісностей між напівгратками визначає сумісність між цілком дистрибутивними гратками, порядково двоїстими до граток сумісностей;
— Доведено, що кожна сильна відокремлююча сумісність ізоморфна до канонічної сумісності між неперервною напівграткою з нулем та двоїстою до неї напівграткою щодо модифікованої двоїстості Лоусона;
— Доведено, що частково впорядкована множина всіх неперервних за Скоттом відображень з повної неперервної напівгратки у неперервну напівгратку з нулем є неперервною напівграткою з нулем, звідки отримано достатні умови того, що сумісності між двома напівгратками, що зберігають попарні інфімуми по одному чи по двох аргументах, утворюють неперервні напівгратки з нулями чи повні неперервні напівгратки;
— Доведено, що сумісності, що зберігають попарні супремуми по одному чи по двох аргументах, утворюють двоїсто неперервні гратки;
— Доведено, що для граткозначних монотонних предикатів існує пара операцій симетричного тензорного множення, відмінних від породжених монадами;
— Доведено, що перехід від неперервної напівгратки з нулем до двоїстої, а від цілком дистрибутивної гратки до порядково оберненої призводить до антиізоморфізму між гратками монотонних предикатів;

— Доведено, що спряженість граткозначних ємностей породжується сумісністю між сумісностями і є компонентою природного перетворення між двома класичними двоїстостями у теорії областей;
— Охарактеризовано чіткі та граткозначні неоднозначні зображення, для яких операція псевдообернення є інволютивною, і доведено, що вони як морфізми разом з неперервними напівгратками з нулями як об'єктами утворюють категорії;
— Доведено, що ці категорії є повними підкатегоріями категорій неперервних ідемпотентних напівмодулів та їх неперервних ідемпотентно лінійних відображень;
— Доведено, що для неперервного ідемпотентно лінійного відображення між напівмодулями монотонних предикатів існує ермітове спряжене, обчислення якого зводиться до знаходження псевдооберненого до неоднозначного зображення між напівгратками;
— Доведено, що для грубої гри двох гравців у розширеній формі, заданій монотонним предикатом та нечіткими зображеннями між напівгратками, предикати виплат пов'язані рекурентними співвідношеннями, і виконано апроксимативну теорему про мінімакс.

Результати роботи є внеском у теорію неперервних областей і відкривають можливості застосування граткозначних монотонних предикатів у моделюванні прийняття рішень в умовах невизначеності, зокрема, в умовах ігор з неповною інформацією. Перспективи подальших досліджень пов'язані з послабленням деяких вимог до напівграток та їх відображень, а також з глибшим аналізом монотонних предикатів з погляду і засобами теорії категорій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Зарічний М.М. *Топологія функторів і монад в категорії компактів* // — К.: ІСДО, 1993.
2. Заричный М.М., Никифорчин О.Р. *Функтор емкостей в категории компактов* // Мат. Сборник. — 2008. — Т. 199, №2. — С. 3–26.
3. Микицей О. *On Lawson idempotent semimodules* // VII літня школа "Алгебра, топологія і аналіз 5-16 липня, 2010, Верховина: тези доп. – Верховина, 2010. – С. 25-27.
4. Микицей О. *Continuity of strongest postcondition transformers* // VIII літня школа "Алгебра, топологія, аналіз та застосування 5-15 липня, 2011, Херсон-Лазурне: тези доп. – Херсон, 2011. – С. 21.
5. Микицей О. *Metrization of images of metric compacta under bicommutative functors* // Міжнародна конференція, присвячена 120-річчю з днянародження Стефана Банаха, 17-21 вересня, 2012, Львів: тези доп. – Львів, 2012. – С. 98.
6. Микицей О.Я., Никифорчин О.Р. *Неперервність симетричних добутків гіперпросторів включення та ємностей* // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2012. – Вип. 17, №1. – С. 85–88.
7. Микицей О. *Continuity of symmetric products of capacities* // 9 Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, 8-13 липня, 2013, Львів: тези доп. – Львів, 2013. – С. 134
8. Микицей О. *Категорія Лоусонових напівграток і їх псевдооборотних неоднозначних зображень* // Міжнародна конференція молодих математиків, 3-6 червня, 2015, Київ: тези доп. – Київ, 2015. – С. 40.
9. Никифорчин О., Микицей О. *Категорія Лоусонових верхніх компактних напівграток з одиницею і їх строгих неоднозначних зображень.*// IX літня

школа “Алгебра, топологія і аналіз”, 7-18 липня, 2014, Поляниця: тези доп. – Поляниця, 2014. – С. 52.

10. Федорчук В.В. *Вероятностные меры в топологии* // Успехи матем. наук. — 1991. — Вып. 46, №1. — С. 41–80.
11. Akian M. *Densities of invariant measures and large deviations* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 351, №11. — P. 4515–4543.
12. Bandelt H.-J. *The tensor product of continuous lattices* // Math. Z. — 1980. — Vol. 172. — P. 89–96.
13. Barr M., Wells Ch. *Toposes, Triples and Theories* // Springer, N.Y. — 1988.
14. Ben Amor N., Fargier H., Sabbadin R. *Equilibria in Ordinal Games: A Framework based on Possibility Theory* // Proceedings of the Twenty-Sixth International Joint Conference on Artificial Intelligence Main track. — 2017. — P. 105–111.
15. Bergmann M. *An Introduction to Many-Valued and Fuzzy Logic* // Cambridge University Press, N.Y. – 2008. — 343 p.
16. Birkhoff G. *Lattice theory* // Providence, R.I., AMS. — 1940. — 431 p.
17. O’Brien G.L., Verwaat W. *How subsadditive are subadditive capacities?* // Comment. Math. Univ. Carolinae. — 1994. — Vol.35, №2. — P. 311–324.
18. Choquet G. *Theory of Capacity* // Ann. l’Institute Fourier. — 1953–1954. — Vol. 5. — P. 131–295.
19. Cohen G., Gaubert S., Quadrat J.-P. *Duality and separation theorems in idempotent semimodules* // Linear algebra and its applications. — 2003. — Vol. 379. — P. 395–492.
20. Denneberg D. *Non-Additive Measure and Integral* // Springer Netherlands, Dordrecht, In Theory and Decision Library B, Vol. 27. — 1994. — 188 p.
21. Denniston J.T., Melton A., Rodabaugh S.E. *Lattice-valued predicate transformers and interchange systems* // Abstracts of the 31th Linz Seminar,

Universitätsdirecktion Johannes Kepler Universität. – Linz, Austria, February 2010. — P. 31–40.

22. Dijkstra E.W. *Guarded commands, non-determinacy and formal derivation of programs* // Comm. of the ACM. — 1975. — Vol. 18, №8. — P. 453–457.
23. Drossos C.A. *Generalized t-norm structures* // Fuzzy Sets and Systems. — 1999. — Vol. 104, №1. — P. 53–59.
24. Dubois D., Prade H. *Possibility Theory* // Plenum Press, New York. —1988. — 263 p.
25. Dubois D., Prade H., Sabbadin R. *Decision-theoretic foundations of quantitative possibility theory* // European Journal of Operational Research. – 2001. – Vol. 128. – P. 459–478.
26. Edalat A. *Domains for computation in mathematics, physics and exact real arithmetic* // Bull. Symb. Logic. — 1997. — Vol. 3, №4. — P.401–452.
27. Eichberger J., Kelsey D. *Non-additive beliefs and strategic equilibria* // Games and Economic Behavior. — 2000. — Vol. 30. — P. 183–215.
28. Engelking R. *General topology* // PWN, Warsaw. – 1977.
29. Erker T., Escardó M.H., Keimel K. *The way-below relation of function spaces over semantic domains* // Topology Appl. — 1998. — Vol. 89, №1–2. P. 61–74.
30. Erné M. *Z-distributive function spaces* // Hannover: Leibnitz University. — 1998. — (Preprint / Leibnitz University Hannover).
31. Erné M., Picado J. *Tensor products and relation quantales* // Algebra universalis. — 2017. — Vol. 78. — P.461–487.
32. Epstein L. *“Beliefs about beliefs” without probabilities* // Econometrica. — 1996. — Vol. 64, №5. — P. 1343–1373.
33. Friedman N., Halpern J. *Plausibility Measures: A User’s Guide* // Proceedings of the 11th Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-95). – San Francisco, 1995. — P. 175–184.

34. Gau W.L., Buehrer D.J. *Vague sets* // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. — 1993. — Vol. 23. — P. 610–614.

35. Gierz G., Hofmann K.H., Keimel K., Lawson J.D., Mislove M., Scott D.S. *Continuous Lattices and Domains* // Cambridge University Press. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. — 2003. — Vol. 93. – p. 628.

36. Goguen J.A. *L-fuzzy sets* // J. Math. Anal. Appl. — 1967. — Vol. 18 — P. 145–157.

37. Hájek P. *Fuzzy logics with noncommutative conjuctions* // J. Logic Computation. — 2003. — Vol.13, №4. — P. 469–479.

38. Heckmann R., Huth M. *A duality theory for quantitative semantics* // Proceedings of the 11th International Workshop on Computer Science Logic, Springer Verlag. — 1998. — P. 255–274.

39. Heckmann R., Huth M. *Quantitative semantics, topology, and possibility measures* // Topol. Appl. — 1998. — Vol. 89. — P. 151–178.

40. Holwerda H., Vervaat W. *Lattices of capacities, and related topologies* // Statistica Neerlandica. — 2008. — Vol. 50, №2. — P. 306–324.

41. Kolokoltsov V.N. *Idempotent structures in optimisation* // Journal Math. Sci. — 2001. — Vol. 104, №1. — P. 847–880.

42. Kolokoltsov V.N., Maslov V.P. *Idempotent Analysis and Its Applications* // Kluwer Acad. Publ., Dordrecht. – 1998.

43. Lawson J.D. *Topological semilattices with small semilattices* // J. Lond. Math. Soc. — 1969. — Vol. 11. — P. 719–724.

44. Lawson J.D. *Idempotent analysis and continuous semilattices* // Theor. Comp. Sci. — 2004. — Vol. 316. — P. 75–87.

45. Li T.J. *Rough approximation operators on two universes of discourse and their fuzzy extensions* // Fuzzy Sets and Systems. — 2008. — Vol. 159. — P. 3033–3050.

46. Lin, T.Y. *Neighborhood systems: a qualitative theory for fuzzy and rough sets* // Advances in Machine Intelligence and Soft Computing. – 1997. — Vol. 4. — P. 132–155.
47. Longstaff, W. *Strongly reflexive lattices* // J. Lond. Math. Soc. — 1975. — Vol. 2. — P. 491–498.
48. Mac Lane S. *Categories for the Working Mathematician* // [2nd ed.]. — Springer, N.Y. – 1998. — 317 p.
49. McWaters M.M. *A note on topological semilattices* // J. Lond. Math. Soc. Ser. 2. — 1969. — Vol. 1, №4. — P. 64–66.
50. Michael, E. *Topologies on spaces of subsets* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1951. — Vol. 71. — P. 152–182.
51. Mingsheng Ying. *Reasoning about probabilistic sequential programs in a probabilistic logic* // Mingsheng Ying. Acta Inf. — 2003. — Vol. 39, №5. — P. 315–389.
52. Miyamoto S. *Lattice-valued possibility measures on the basis of multimodal logic* // Proceedings of the 36th SICE Annual Conference. International Session Papers, Tokushima, Japan. — 1997. — P. 1067–1070.
53. Mykytsey O.Ya., Koporkh K.M. *Compatibilities between continuous semilattices* // Carpathian Math. Publ. — 2021. – Vol. 13, №1. — P. 5–14.
54. Mykytsey O. *Category of L-fuzzy ambiguous representations* // Міжнародна конференція «Нескінченновимірний аналіз і топологія», 16-20 жовтня, 2019, Івано-Франківськ: тези доп. – Івано-Франківськ, 2019. – С.40.
55. Nykyforchyn O.R. *Capacities with values in compact Hausdorff lattices* // Applied Categorical Structures. — 2011. — Vol. 15, №3. — P. 243–257.
56. Nykyforchyn O.R. *Continuous and dually continuous idempotent L-semimodules* // Математичні Студії. — 2012. — Вип. 37,№1. — С. 3–28.

57. Nykyforchyn O., Mykytsey O. *Conjugate measures on semilattices* // Вісник ЛНУ, сер. мех.-мат. — 2010. — Вип. 72. — С. 221–231.
58. Nykyforchyn O., Mykytsey O. *L-idempotent linear operators between predicate semimodules, dual pairs and conjugate operators* // Математичний вісник НТШ. — 2011. — Вип. 8. — С. 299–314.
59. Nykyforchyn O.R., Mykytsey O.Ya. *Rough games modeled via L-fuzzy ambiguous representations of semilattices* // Fuzzy Sets and Systems. — 2020. — Vol. 398. — P. 128–138.
60. Nykyforchyn O., Mykytsey O. *Ambiguous representations of semilattices, imperfect information, and predicate transformers* // Order. — 2020. — Vol. 37. — P. 319–339.
61. Nykyforchyn O.R., Repovš D. *Ambiguous fuzzy representations of sets* // Fuzzy Sets and Systems. — 2011. — Vol. 173, №1. — 25–44.
62. Nykyforchyn O.R., Repovš D. *L-fuzzy strongest postcondition transformers as L-idempotent linear or affine operators between semimodules of monotonic predicates* // Fuzzy Sets and Systems. – 2012. — Vol. 208. – P. 67–78.
63. Pawlak, Z. *Rough sets* // Int. J. Computer and Information Sciences. — 1982. — Vol. 5. — P. 341–356.
64. Runey G.N. *Completely distributive complete lattices* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – Vol. 3. – P. 677–680.
65. Rosenthal K. *Quantales and Their Applications* // Longman Scientific & Technical, Wiley, Essex, England, New York. — 1990. — 165 p.
66. Rudin W. *Functional Analysis* // McGrow-Hill, N.Y. – 1973. – 397 p.
67. Schmeidler D. *Subjective probability and expected utility without additivity* // Econometrica. — 1989. — Vol. 57. — P. 571–587.
68. Shmuely Z. *The structure of Galois connections* // Pacific J. Math. — 1974. — Vol. 54. — P. 209–225.

69. Sugeno M. *Theory of fuzzy integrals and its applications: PhD thesis* // Tokyo Institute of Technology, 1974.

70. Teleiko A. *Categorical Topology of Compact Hausdorff Spaces* // VNTL Publishers, Lviv. Math. Studies Monograph Series. – 1999. — Vol. 5. – 263 p.

71. Verwaat W.*Random upper semicontinuous functions and extremal processes* // Probability and Lattices. — 1997. – P. 1—56.

72. Winter M. *Goguen Categories: A Categorical Approach to L-fuzzy Relations* // Dordrecht, Springer. Trends In Logic. — 2007. — Vol. 25. – 208 p.

73. Wyler O. *Algebraic theories of continuous lattices* // Lect. Notes Math. — 1981. — Vol. 871. — P. 390 – 413.

74. Yager R.R., Alajlan N. *Measure based representation of uncertain information* // Fuzzy Optim Decis Making. — Vol. 11. — 2012. — P. 363–385.

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Nykyforchyn O., Mykytsey O. *Conjugate measures on semilattices* // Вісник ЛНУ, сер. мех.-мат. — 2010. — Вип. 72. — С. 221–231.
2. Микицей О. *On Lawson idempotent semimodules* // VII літня школа "Алгебра, топологія і аналіз 5-16 липня, 2010, Верховина: тези доп. – Верховина, 2010. – С. 25-27.
3. Nykyforchyn O., Mykytsey O. *L-idempotent linear operators between predicate semimodules, dual pairs and conjugate operators* // Математичний вісник НТШ. — 2011. — Вип. 8. — С. 299–314.
4. Микицей О. *Continuity of strongest postcondition transformers* // VIII літня школа "Алгебра, топологія, аналіз та застосування 5-15 липня, 2011, Херсон-Лазурне: тези доп. – Херсон, 2011. – С. 21.
5. Микицей О.Я., Никифорчин О.Р. *Неперервність симетричних добутків гіперпросторів включення та ємностей* // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2012. – Вип. 17, №1. – С. 85–88.
6. Микицей О. *Metrization of images of metric compacta under bicommutative functors* // Міжнародна конференція, присвячена 120-річчю з дня народження Стефана Банаха, 17-21 вересня, 2012, Львів: тези доп. – Львів, 2012. – С. 98.
7. Микицей О. *Continuity of symmetric products of capacities* // 9 Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, 8-13 липня, 2013, Львів: тези доп. – Львів, 2013. – С. 134
8. Никифорчин О.Р., Микицей О. *Категорія Лоусонових верхніх компактних напівграток з одиницею і їх строгих неоднозначних зображень*

// IX літня школа “Алгебра, топологія і аналіз”, 7-18 липня, 2014, Поляниця: тези доп. – Поляниця, 2014. – С. 52.

9. Микицей О. *Категорія Лоусонових напівграток і їх псевдооборотних неоднозначних зображень* // Міжнародна конференція молодих математиків, 3-6 червня, 2015, Київ: тези доп. – Київ, 2015. – С. 40.
10. Mykytsey O. *Category of L-fuzzy ambiguous representations* // Міжнародна конференція «Нескінченновимірний аналіз і топологія», 16-20 жовтня, 2019, Івано-Франківськ: тези доп. – Івано-Франківськ, 2019. – С. 40.
11. Nykyforchyn O., Mykytsey O. *Ambiguous representations of semilattices, imperfect information, and predicate transformers* // Order. – 2020. – Vol. 37. – P. 319–339.
12. Nykyforchyn O.R., Mykytsey O.Ya. *Rough games modeled via L-fuzzy ambiguous representations of semilattices* // Fuzzy Sets and Systems. — 2020. — Vol. 398. — P. 128–138.
13. Mykytsey O.Ya., Koporkh K.M. *Compatibilities between continuous semilattices* // Carpathian Math. Publ. — 2021. – Vol. 13, №1. — P. 5–14.

ДОДАТОК Б

ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Результати дисертації доповідалися і обговорювалися на таких конференціях та семінарах:

1. VII-ій літній школі "Алгебра, топологія і аналіз" (смт. Верховина, Івано-Франківська обл., липень 5 – 16, 2010);
2. VIII-ій літній школі "Алгебра, топологія, аналіз та застосування " (м. Херсон – смт. Лазурне, липень 5 – 15, 2011);
3. Міжнародній науковій конференції "International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach" (Lviv, September 17 – 21, 2012);
4. Міжнародній науковій конференції "9-th International Algebraic Conference in Ukraine" (Lviv, July 8 – 13, 2013);
5. IX-ій літній школі "Алгебра, топологія і аналіз " (с.Поляниця, Івано-Франківська обл., липень 7 – 18, 2014);
6. Міжнародній науковій конференції "International Conference of Young Mathematicians" (Kyiv, June 3 – 6, 2015);
7. Міжнародній науковій конференції "Infinite Dimensional Analysis and Topology. International Conference dedicated to the 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky" (Ivano-Frankivsk, October 16 – 20, 2019);
8. Звітних науково-практичних конференціях ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника";
9. Наукових семінарах кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (Івано-Франківськ, 2010 – 2016, 2019 – 2020);
10. Розширеному міжкафедральному науковому семінарі кафедр алгебри та геометрії, математичного і функціонального аналізу, диференціальних рівнянь і прикладної математики ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" (Івано-Франківськ, 9 лютого, 2021).