ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ
МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ ім. Я.С. ПІДСТРИГАЧА
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ДВНЗ "ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА"
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Голубчак Олег Михайлович

УДК 517.98

ДИСЕРТАЦІЯ

Оператори в гільбертових просторах симетричних аналітичних функцій на банаховому просторі з симетричною структурою

01.01.01 — математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ______________________________ О. М. Голубчак

Науковий керівник
Загороднюк Андрій Васильович,
доктор фізико-математичних наук, професор

ЛЬВІВ — 2021

АНОТАЦІЯ

Голубчак О. М. Оператори в гільбертових просторах симетричних аналітичних функцій на банаховому просторі з симетричною структурою. Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика. — Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, 2021. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, 2021.

Аналітичні функції на нескінченновимірних банахових просторах є важливим об'єктом сучасного нелінійного функціонального аналізу. Багато цікавих питань теорії операторів та теорії функцій вдається дослідити при вивченні гільбертових просторів аналітичних функцій від однієї та багатьох комплексних змінних. У роботах Б. Коула, Т. Гамеліна, І. Заульдендо, А. Дефанда, О.В. Лопушанського, А.В. Загороднюка та інших досліджено гільбертові простори аналітичних функцій на таких підмножинах в ℓ_2 як куля, напівпростір, полідиск, нескінченний добуток скінченновимірних полідисків, тощо. У багатьох випадках такий гільбертів простір можна зобразити у вигляді простору лінійних неперервних функціоналів на симетричному просторі Фока з певною зваженою нормою.

Серед поліноміальних відображень часто вирізняють поліноми з певними додатковими властивостями. У роботах А.С. Німеровського, С.М. Семенова, М. Гонзалеза, Р. Гонзало, Х. Хараміло, Р. Аленкара, Р. Арона, П. Галіндо, І. Черневи, А.В. Загороднюка та інших досліджувались симетричні поліноми на просторах з певною симетричною структурою та алгебри, породжені цими поліномами. Слід відзначити, що симетричні поліноми на скінченновимірних просторах є класичним об'єктом алгебри та комбінаторики. Вони відіграють важливу роль в теорії Галуа, теорії інваріантів, за допомогою симетричних поліномів можна моделювати комутаційні співвідношення між операторами народження і знищення у квантовій механіці.

У функціональному аналізі симетричні поліноми досліджувались в зада-

чах апроксимації неперервних функцій на дійсних банахових просторах. Симетричні поліноми на ℓ_1 дають приклади для кожного n поліномів $n-$того степеня, які не лежать в замиканні алгебри, породженій поліномами степеня не більшого за $n-1$. Такі поліноми, для $n > 1$, не є апроксимовними. Також, було досліджено топологічні алгебри аналітичних функцій, породжених симетричними поліномами на просторах $\ell_p, 1 \leq p < \infty$, $L_p[0,1], 1 \leq p \leq \infty$, для багатьох випадків описано спектр таких алгебр.

У даній дисертаційній роботі досліджено властивості гільбертового простору $H_s^b(\ell_1)$, породженого простором симетричних поліномів на ℓ_1, поповненим у деякій евклідовій нормі з певною вагою $b = b_\lambda$. Зокрема, досліджено умови неперервності функціоналів на $H_s^b(\ell_1)$, які визначені як значення елементів з $H_s^b(\ell_1)$ у фіксованих точках простору ℓ_1. Розглянуто оператори з $H_s^b(\ell_1)$ в себе, породжені як композиція з симетричними відображеннями на ℓ_1, досліджено природні базиси на $H_s^b(\ell_1)$, розглянуто оператори диференціювання на просторі $H_s^b(\ell_1)$.

У вступі обгрунтовано актуальність теми дослідження, встановлено зв'язок роботи з науковими темами. Сформульовано мету та завдання дослідження, описано наукову новизну отриманих результатів. Подано список публікацій та інформацію про апробації результатів дисертаційної роботи.

У першому розділі здійснено огляд літератури за темою дисертаційної роботи та подано основні результати дисертації.

У другому розділі наведено основні означення та сформульовано відомі результати, які використовуються в основних розділах дисертаційної роботи. Зокрема, у підрозділі 2.1 наведено означення поліноміального відображення на банаховому просторі та сформульовано основні властивості, такі як поляризаційна формула, описано стандартні алгебраїчні базиси в алгебрі симетричних поліномів на $\mathbb{C}^n$. Зв'язок між цими базисами визначається відомими рекурентними формулами Ньютона. Також, розглянуто симетричні аналітичні функції на просторі ℓ_p, генеруючі функції $P(t)$, $G(t)$, $H(t)$ та співвідношення між ними. Крім того, розглянуто абстрактні (зважені) симетричні простори Фока $\mathcal{F}_\eta$ над деяким гільбертовим простором E, спряжені до цих просторів $\mathcal{H}_{\eta}.$, наведено означення відтворюючого ядра.

У розділі 3 досліджено гільбертові простори симетричних аналітичних функцій на ℓ_1.

У підрозділі 3.1 описано алгебраїчні базиси в просторі симетричних поліномів $P_s(\ell_1)$, зокрема, базиси породжені степеневими, елементарними та повними симетричними поліномами. Обґрунтовано розширення формул Ньютона та формул Варінга на нескінченновимірний випадок.

У підрозділі 3.2 введено скалярний добуток на просторі симетричних поліномів $P_s(\ell_1)$ і розглянуто поповнення $H^b_s(\ell_1)$ цього простору відносно даного скалярного добутку. Обчислено радіус збіжності елементів $H^b_s(\ell_1)$ як аналітичних функцій на ℓ_1. Зроблено порівняння цього простору з рівномірною алгеброю цілих аналітичних функцій обмеженого типу на ℓ_1.

У підрозділі 3.3 досліджено зображення множини скінченних мультимножин M_0 у просторі симетричних поліномів. Введено відношення еквівалентності $\sim$ на просторі скінченних послідовностей c_{00} : $x \sim y$ тоді і тільки тоді, коли $y = \sigma(x) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, \ldots)$ для деякої підстановки $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Знайдено деяку природну метрику ρ на зображенні $\overline{\mathbb{P}}$ множини $c_{00/\sim}$ у просторі симетричних поліномів.

У підрозділі 3.4 розглянуто простір симетричних аналітичних функцій $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}$ на c_{00}, які є лінійною комбінацією деякого алгебраїчного базису симетричних поліномів $\{Q_n\}$. Встановлено ізоморфізм цього простору до простору всіх цілих функцій $H(\mathbb{C})$ на $\mathbb{C}$.

У підрозділі 3.5 встановлено зв'язок простору $H^b_s(\ell_1)$ з абстрактним простором Фока. Описано множину Ω_b яка складається з тих точок $x \in \ell_1$, що функціонали $\delta_x \colon f \mapsto f(x)$ є неперервними на $H^b_s(\ell_1)$. Також, побудовано природний ізометричний ізоморфізм симетричного простору Фока $\mathcal{F}_0$ і простіру $H^z_s(\ell_1)$. Як наслідок, отримано неоднорідні системи ортонормованих векторів у симетричному просторі Фока та перенесено відомі комбінаторні співвідношення на випадок тензорних поліномів.

У четвертому розділі розглянуто мультиплікативні оператори на гільбертових просторах симетричних аналітичних функцій.

У підрозділі 4.1 досліджено мультиплікативні функціонали на гільбертових просторах симетричних аналітичних функцій. Показано, що якщо на $H_s^b(\ell_1)$ задано мультиплікативну норму, то лінійний мультиплікативний функціонал φ на $P_s(\ell_1)$ буде неперервним тоді і тільки тоді, коли послідовність $a = \{a_k = \varphi(P_k)\}$ належить зваженому полідиску $\mathbb{D}_2^b$.

Також, побудовано зображення простору $H_s^b(\ell_1)$ у вигляді простору аналітичних функцій на множині мультиплікативних функціоналів.

У підрозділі 4.2 розглянуто оператори композиції на $H_s(\ell_1)$. Показано, що для кожної функції $h \in W$ такої, що $\|h\| = r < 1$ і $h(0) = 0$ оператор композиції $C_{F_h} : f \to f \circ F_h$ є неперервним оператором з $H_s(\ell_1)$ в $H_s(\ell_1)$.

Крім того, у цьому підрозділі досліджено оператор комозиції з симетричним множенням, умови його неперервності та самоспряженності. Встановлно формули дії цього оператора на алгебраїчних базисах.

У підрозділі 4.3 розглянуто біортогональні базиси в $H_s^z(\ell_1)$. Показано, що в просторі $H_s^z(\ell_1)$ лінійні базиси $\{H_\lambda\}$ і $\{M_\lambda\}$ є біортогональними, тобто $\langle H_\lambda, M_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu}$ для довільних розбиттів λ, μ.

У підрозділі 4.4 досліджено симетричні дробові відображення і симетричне функціональне числення.

У підрозділі 4.5 розглянуто відтворююче ядро у просторі $H_s(\ell_1)$, описано його властивості.

У підрозділі 4.6 досліджено властивості оператора симетричного зсуву $\Lambda_y \colon P_s(\ell_1) \to P_s(\ell_1)$ для кожного $y \in \ell_1$. $\Lambda_y(P)$ — лінійний оператор на просторі $P_s(\ell_1)$. Ми будемо позначати тим самим символом Λ_y — оператор на $H_s^b(\ell_1)$ з максимальною областю визначення. Показано, що Λ_y — щільно визначений в просторі $H_s^b(\ell_1)$ оператор, $y \in \ell_1$. Якщо множина Ω_b містить відкриту підмножину і $x \bullet y \in \Omega_b$ для кожного $x \in \Omega_b$, то Λ_y — замкнений (тобто має замкнений графік). Якщо існує $x_0 \in \Omega_b$ такий, що $x_0 \bullet y \notin \Omega_b$, то оператор Λ_b — необмежений.

Також, показано, що якщо Ω_b містить відкриту підмножину, то оператор Λ_y буде обмеженим тоді і тільки тоді, коли він визначений на всьому просторі $H_s^b(\ell_1)$ (і приймає значення в цьому просторі).

У підрозділі 4.7 розглянуто оператор диференціювання на просторі $H_s^b(\ell_1)$.

Розглянемо відображення $\Theta_t(P_n) = tP_n$ $t \in \mathbb{C}$, і $\Theta_t(c) = c$, де $c = const$. Продовжимо його за лінійністю і мультиплікативністю на простір поліномів $P_s(\ell_1)$.

Розглянемо оператор типу диференціювання:

$$\mathcal{D}_h f = \lim_{t\to 0} \frac{\Theta_t(\Lambda_h(f(x))) - f(x)}{t}, \quad h \in \Omega, \quad h \neq 0.$$

Доведено, що $\mathcal{D}_h, h \in \Omega, h \neq 0$ — щільновизначений оператор в просторі $H_s^b(\ell_1)$, для якого виконується правило Лейбніца $\mathcal{D}_h(fg) = \mathcal{D}_h(f)g + f\mathcal{D}_h(g)$ для всіх f, g з області визначення $\mathcal{D}_h$. Крім того, показано, що для довільного $h \in \Omega$, $h \neq 0$ оператори $\mathcal{D}_h$ та $\mathcal{D}_h^*$ в просторі $H_s(\ell_1)$ задовольняють так зване канонічне комутаційне співвідношення на просторі $H_s(\ell_1)$.

Ключові слова: симетрична аналітична функція на банаховому просторі, гільбертовий простір аналітичних функцій, симетричний простір Фока, оператор композиції в просторі аналітичних функцій, оператор диференціювання.

ABSTRACT

Holubchak O. M. Operators on Hilbert spaces of symmetric analytic functions on a Banach space with a symmetric structure. Qualifying scientific work as a manuscript.

A Thesis for a Philosophy Doctor Degree in Mathematics, speciality 111 Mathematics. — Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2021. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Lviv, 2021.

Analytical functions on infinite-dimensional Banach spaces are an important object of modern nonlinear functional analysis. Many interesting issues of operator theory and function theory can be explored in the study of Hilbert spaces of analytic functions from one and many complex variables. In the works of B. Cole, T. Gamelin,

I. Zauldendo, A. Defand, O.V. Lopushansky, A.V. Zagorodnyuk and others, were studied Hilbert spaces of analytic functions on subsets of ℓ_2 like a sphere, a half-space, a polydisk, an infinite product of finite-dimensional polydisks, etc. In many cases, such a Hilbert space can be represented as a space of linear continuous functionals on a symmetric Fock space with a certain weighted norm.

Among polynomial mappings, polynomials with certain additional properties are often distinguished. In the works of A.S. Nimerovsky, S.M. Semenov, M. Gonzalez, R. Gonzalo, H. Haramilo, R. Alencar, R. Aron, P. Galindo, I. Chernega, A.V. Zagorodnyuk and others were studied symmetric polynomials in spaces with a certain symmetric structures and algebras generated by these polynomials. It should be noted that symmetric polynomials on finite-dimensional spaces are a classical object of algebra and combinatorics. They play an important role in Galois theory, the theory of invariants, using symmetric polynomials can be modeled relations between the operators of birth and annihilation in quantum mechanics.

In functional analysis, symmetric polynomials were investigated in the problems of approximation of continuous functions on real Banach spaces. Symmetric polynomials on ℓ_1 give us examples of n-homogeneous polynomials that do not belong to the closure of the algebra generated by polynomials of degree not greater than $n-1$. Also, it was investigated topological algebras of analytic functions generated by symmetric polynomials on the spaces ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, $L_p[0,1]$, $1 \leq p \leq \infty$, and for many cases, the spectra of such algebras were described.

In this dissertation work, the properties of the Hilbert space $H_s^b(\ell_1)$, generated by the space of symmetric polynomials on ℓ_1, endowed with some Euclidean norm with a certain weight $b = b_\lambda$ are investigated. In particular, conditions of continuity of point-evaluation functionals on $H_s^b(\ell_1)$, at points of the space ℓ_1 are obtained. Operators of composition with symmetric mappings on ℓ_1 on $H_s^b(\ell_1)$ are considered, natural bases on $H_s^b(\ell_1)$ are studied, differentiation operators on space $H_s^b(\ell_1)$ are investigated.

In the introduction the relevance of the research topic is substantiated, the connection of work with scientific topics is established. The purpose and tasks of the research are formulated, the scientific novelty of the obtained results is described. The list of publications and information on approbation of results of dissertation work is given.

The first section reviews the literature on the topic of the dissertation and presents the main results of the dissertation.

The second section presents the main definitions and formulates the known results that are used in the main sections of the dissertation. In particular, Section 2.1 gives the definition of polynomial maps in Banach spaces and formulates basic properties, such as the polarization formula, describes standard algebraic bases in the algebra of symmetric polynomials on $\mathbb{C}^n$. The relationship between these bases is determined by Newton's known recurrent formulas. Also, symmetric analytic functions on space ℓ_p, generating functions $P(t)$, $G(t)$, $H(t)$ and the relationship between them are considered. In addition, the abstract (weighted) symmetric Fock spaces $\mathcal{F}_\eta$ over some Hilbert space E, conjugate to these spaces $\mathcal{H}_\eta$ are considered, and the definition of the reproducing nucleus is given.

In Section 3, Hilbert spaces are symmetric analytical functions on ℓ_1 are investigated.

In Section 3.1 algebraic bases in the space of symmetric polynomials $P_s(\ell_1)$ are described. In particular, bases are generated by power, elementary and complete symmetric polynomials are considered. The extension of Newton's formulas and Waring's formulas to an infinite-dimensional case is substantiated are given.

In Section 3.2, we introduce a scalar product on the space of symmetric polynomials $P_s(\ell_1)$ and consider the replenishment $H_s^b(\ell_1)$ of this space with respect to this scalar product. The convergence radius of the elements $H_s^b(\ell_1)$ as analytic functions on ℓ_1 is calculated. This space is compared with a uniform algebra of integer analytic functions of bounded type on ℓ_1.

In Section 3.3 the representation of the set of finite multisets M_0 in the space of symmetric polynomials is studied. The equivalence relation $\sim$ on the space of finite sequences c_{00} is introduced: $x \sim y$ if and only if $y = \sigma(x) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, \ldots)$ for some substitution $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Some natural metric ρ was found in the range $\overline{\mathbb{P}}$ of the set $c_{00}/\sim$ in the space of symmetric polynomials.

In Section 3.4 the space of symmetric analytic functions $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}$ on c_{00}, which are linear a combination of some algebraic basis of symmetric polynomials $\{Q_n\}$ considered. The isomorphism of this space to the space of all entire functions $H(\mathbb{C})$ to $\mathbb{C}$ is established.

Section 3.5 is devoted to connections between the space $H_s^b(\ell_1)$ and the abstract Fock space. It is Described the set Ω_b which consisting of all points $x \in \ell_1$ such that the functionals $\delta_x \colon f \mapsto f(x)$ are continuous on $H_s^b(\ell_1)$. Also, a natural isometric isomorphism is constructed between the symmetric Fock space $\mathcal{F}_0$ and the space $H_s^z(\ell_1)$. As a result, nonhomogeneous systems of orthonormal vectors in the symmetric Fock space are obtained and the known combinatorial relations are transferred to the case of tensor polynomials.

In the fourth section, we consider multiplicative operators on Hilbert spaces of symmetric analytic functions.

In Section 4.1, the multiplicative functionals on Hilbert spaces of symmetric analytic functions are considered. It is shown that if the norm on $H_s^b(\ell_1)$ is multiplicative, then the linear multiplicative the functional φ on $P_s(\ell_1)$ will be continuous if and only if the sequence $a = \{a_k = \varphi(P_k)\}$ belongs to the weighted poly-disk $\mathbb{D}_2^b$.

Also, it is constructed a representation of the space $H_s^b(\ell_1)$ in the form of a space of analytical functions on a set of multiplicative functionals.

In subsection 4.2 the operators of composition on $H_s(\ell_1)$ are considered. It is shown that for each function $h \in W$ such that that $\|h\| = r < 1$ and $h(0) = 0$ the composition operator $C_{F_h} : f \to f \circ F_h$ is a continuous operator from $H_s(\ell_1)$ to $H_s(\ell_1)$.

In addition, in this section investigates the composition operator with symmetric multiplication, the conditions of its continuity and self-conjugation. The formulas of action of this operator on algebraic bases are established.

Section 4.3 considers biorthogonal bases in $H_s^z(\ell_1)$. It is shown that in the space $H_s^z(\ell_1)$ the linear the bases $\{H_\lambda\}$ and $\{M_\lambda\}$ are biorthogonal, i. e. $\langle H_\lambda, M_\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu}$ for arbitrary partitions λ, μ.

In Section 4.4, symmetric fractional mappings and symmetric functional calculus are investigated.

In Section 4.5 it is discussed the reproducing kernel in the space $H_s(\ell_1)$ and is described its properties.

In Section 4.6 it is investigates the properties of the symmetric shift operator $\Lambda_y\colon P_s(\ell_1) \to P_s(\ell_1)$ for each $y \in \ell_1$. $\Lambda_y(P)$ — a linear operator on the space $P_s(\ell_1)$. We will denote it by the same symbol Λ_y the operator on $H_s^b(\ell_1)$ with the maximal domain. It is shown that Λ_y is a densely defined operator in $H_s^b(\ell_1)$, $y \in \ell_1$. If the set Ω_b contains an open subset and $x \bullet y \in \Omega_b$ for each $x \in \Omega_b$, then Λ_y is closed. If there exists $x_0 \in \Omega_b$ such that $x_0 \bullet y \notin \Omega_b$, then the operator Λ_b is unbounded.

Also, it is shown that if Ω_b contains an open subset, then the operator Λ_y will be bounded if and only if it is defined on the whole space $H_s^b(\ell_1)$.

In Section 4.7 a differentiation operator on the space $H_s^b(\ ell_1)$ is introduced.

Let us consider the mapping $\Theta_t(P_n) = tP_n\ t \in \mathbb{C}$, and $\Theta_t(c) = c$, where $c = const$. We extend it by the linearity and the multiplicity to the space of polynomials $P_s(\ell_1)$. Let us consider Consider the following differentiation type operator:

$$\mathcal{D}_h f = \lim_{t\to 0} \frac{\Theta_t(\Lambda_h(f(x))) - f(x)}{t}, \quad h \in \Omega, \quad h \neq 0.$$

It is proved that $\mathcal{D}_h, h \in \Omega, h \neq 0$ is a densely defined operator in the space $H_s^b(\ell_1)$, for which the Leibniz rule holds $\mathcal{D}_h(fg) = \mathcal{D}_h(f)g + f\mathcal{D}_h(g)$ for all f, g from the domain $\mathcal{D}_h$. In addition, it is shown that for an arbitrary $h \in \Omega$, $h \neq 0$ operators $\mathcal{D}_h$ and $\mathcal{D}_h^*$ in the spaces $H_s(\ell_1)$ satisfy the so-called canonical commutation relations on the space $H_s(\ell_1)$.

Key words: symmetric analytic functions on a Banach space, Hilbert spaces of analytic functions, symmetric Fock space, composition operators in the space of analytic functions, differentiation operators.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНІ ОСНОВНІ НАУКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Голубчак О. М. *Гільбертові простори симетричних аналітичних функцій на* ℓ_1 // Карпатські математичні публікації. – 2011. – Т.3, №1. – С. 34–39.

2. Голубчак О. М. *Гільбертовий простір симетричних функцій на* ℓ_1 // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. – Т.54, №3. – С. 49–52.

3. Голубчак О. М. *Оператори в гільбертових просторах симетричних аналітичних функцій* // Математичний вісник НТШ. – 2012. – Т. 9. – С. 44–51.

4. Голубчак О. М., Загороднюк А. В. *Топологічні та алгебраїчні структури на множині мультимножин* // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2019. – Т.62, №1. – С. 67–73.

5. Chernega I., Holubchak O., Novosad Z., Zagorodnyuk A. *Continuity and hypercyclicity of composition operators on algebras of symmetric analytic functions on Banach spaces* // Eur. J. Math. – 2020. – V.6, №1. – P. 153-163.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Holubchak O. *Hilbert spaces of symmetric polynomials on* ℓ_1 // International Scientific Conference “Infinite Dimensional Analysis and Topology”, May 27-June 1, 2009, Yaremche: book of abstrakts. – Ivano-Frankivsk, 2009. – P.62.

2. Holubchak O. *Symmetric fractional maps on Banach spaces* // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, 18-23 September 2017, Lviv: book of abstrakts. – Lviv, 2017. – P. 25.

3. Holubchak O., Zagorodnyuk A. *Algebras of symmetric analytic functions and their spectra* // International Conference “Morse theory and its applications” dedicated to the memory and 70th anniversary of Volodymyr Vasylyovych Sharko, 25-28 September 2019, Kyiv: book of abstracts. – Kyiv, 2019. – P. 59.

ЗМІСТ

СПИСОК ПОЗНАЧЕНЬ

$H(X)$ —	алгебра цілих функцій на X
$H_b(X)$ —	алгебра цілих функцій обмеженого типу (обмежених на обмежених множинах) на X
$H_{bs}(X)$ —	алгебра симетричних цілих функцій обмеженого типу на X
$H_s^b(\ell_1)$ —	гільбертів простір симетричних аналітичних функцій з вагою $b = b_\lambda$
D_h —	диференціювання в просторі $H_s^b(\ell_1)$
$P_s(\ell_1)$ —	простір симетричних поліномів на ℓ_1
$\mathcal{F}_\eta$ —	зважений симетричний простір Фока
$\mathcal{H}_\eta$ —	спряжений простір до зваженого симетричного простору Фока
δ_x —	функціонал значення в точці x
λ —	розбиття натурального числа $n = \|\lambda\|$
Ω_b —	область в просторі ℓ_1 для якої всі функціонали δ_x є неперервними в просторі $H_s^b(\ell_1)$
$\mathbb{D}_2$ —	полідиск в просторі ℓ_2
$\mathcal{I}$ —	ізоморфізм у простір $H_s^b(\ell_1)$ з відповідного простору Фока

ВСТУП

Актуальність теми. На сьогодні існує велика кількість напрямів та шляхів розвитку сучасного нелінійного функціонального аналізу, зокрема, теорія диференціальних відображень на банахових многовидах, теорія лінійних відображень, теорія про нерухому точку, теорія міри на банахових просторах та ін. Важливе місце у цьому списку займає теорія аналітичних функцій на комплексних банахових просторах. Аналітичні функції на абстрактних банахових просторах, як і у класичному випадку, подаються у вигляді локально збіжних рядів, що складаються з поліноміальних відображень (поліномів). Поліноми на банахових просторах є, у певному сенсі, найпростішими нелінійними відображеннями. Для них можна перенести значну кількість результатів лінійного функціонального аналізу. Наприклад, для поліномів на банахових просторах виконується теорема про еквівалентність неперервності та обмеженості на обмежених множинах, теорема про замкнений графік (для сепарабельних банахових просторів), аналог теореми Гана-Банаха, який називається теоремою про продовження Арона-Бернера поліноміальних функціоналів у другий спряжений простір, принцип рівномірної обмеженості Банаха-Штейнгауса, проте, не виконується повний аналог теореми Гана-Банаха, теорема про обернений оператор.

Аналітичні функції на нескінченновимірних банахових просторах є важливим об'єктом сучасного нелінійного функціонального аналізу. Багато цікавих питань теорії операторів та теорії функцій вдається дослідити при вивченні гільбертових просторів аналітичних функцій від однієї та багатьох комплексних змінних. Зокрема, важливими є простори Гарді H^2 аналітичних функцій на кулі, полідиску та напівплощині в $\mathbb{C}^n$. Також, добре відомі гільбертові простори цілих аналітичних функцій на $\mathbb{C}^n$. У роботах Б. Коула, Т. Гамеліна, І. Заульдендо, А. Дефанда, О.В. Лопушанського, А.В. Загороднюка та інших досліджено гільбертові простори аналітичних функцій на таких підмножинах в ℓ_2 як куля, напівпростір, полідиск, нескінченний добуток скінченновимірних полідисків, тощо. Результати цих досліджень мають відношення до опису моделей поведінки ідеального газу бозонів у квантовій механіці. У багатьох випадках такий гільбертів простір можна зобразити у вигляді простору лінійних неперервних функціоналів на симетричному просторі Фока з певною зваженою нормою. У квантовій механіці симетричний простір Фока описує простір станів системи бозонів.

Серед поліноміальних відображень часто вирізняють поліноми з певними додатковими властивостями. Наприклад, поліноміальні функціонали скінченного типу (скінченні суми скінченних добутків лінійних функціоналів), апроксимовані поліноми (ті, які наближаються поліномами скінченного типу), слабко неперервні поліноми та ін.

У роботах А.С. Німеровського, С.М. Семенова, М. Гонзалеза, Р. Гонзало, Х. Хараміло, Р. Аленкара, Р. Арона, П. Галіндо, І. Чернеги, А.В. Загороднюка та інших досліджувались симетричні поліноми на просторах з певною симетричною структурою та алгебри, породжені цими поліномами. Слід відзначити, що симетричні поліноми на скінченновимірних просторах є класичним об'єктом алгебри та комбінаторики. Вони відіграють важливу роль в теорії Галуа, теорії інваріантів, за допомогою симетричних поліномів можна моделювати комутаційні співвідношення між операторами народження і знищення у квантовій механіці.

У функціональному аналізі симетричні поліноми досліджувались в задачах апроксимації неперервних функцій на дійсних банахових просторах. Симетричні поліноми на ℓ_1 дають приклади для кожного n поліномів $n-$того степеня, які не лежать в замиканні алгебри, породженій поліномами степеня не більшого за $n-1$. Такі поліноми, для $n>1$, не є апроксимовними. Також, було досліджено топологічні алгебри аналітичних функцій, породжених симетричними поліномами на просторах $\ell_p, 1 \leq p < \infty$, $L_p[0,1], 1 \leq p \leq \infty$, для багатьох випадків описано спектр таких алгебр.

У даній дисертаційній роботі досліджено властивості гільбертового простору $H_s^b(\ell_1)$, породженого простором симетричних поліномів на ℓ_1, поповненим у деякій евклідовій нормі з певною вагою $b = b_\lambda$. Зокрема, досліджено умови неперервності функціоналів на $H_s^b(\ell_1)$, які визначені як значення елементів з $H_s^b(\ell_1)$ у фіксованих точках простору ℓ_1. Розглянуто оператори з $H_s^b(\ell_1)$ в себе, породжені як композиція з симетричними відображеннями на ℓ_1, досліджено природні базиси на $H_s^b(\ell_1)$, розглянуто оператори диференціювання на просторі $H_s^b(\ell_1)$.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження проводились в рамках науководослідної теми “Гомоморфізми і диференціювання в алгебрах гладких та аналітичних функцій на банахових просторах” (номер державної реєстрації 0212U004183) та “Гомоморфізми та функціональне числення в алгебрах аналітичних функцій на банахових просторах” (номер державної реєстрації 0115U002305).

Мета і задачі дослідження.

Метою роботи є дослідження лінійних функціоналів та операторів на гільбертовому просторі симетричних аналітичних функцій, встановлення умов неперервності, властивостей, опис топологічних базисів на цьому просторі, зв'язок з симетричним простором Фока, дослідження операторів композиції та операторів диференціювання.

Об'єктом дослідження є симетричні поліноми і аналітичні функції на просторі абсолютно сумовних послідовностей, гільбертові простори симетричних аналітичних функцій, ортонормовані базиси поліномів у цьому просторі, оператори композиції та диференціювання.

Предметом дослідження є властивості функціоналів та операторів на гільбертовому просторі симетричних аналітичних функцій, умови неперервності операторів композиції та диференціювання, співвідношення між різними базисами у цьому просторі, аналоги комутаційних співвідношень між операторами.

Методи досліджень. Для розв'язання задач, сформульованих вище використовується методи нескінченновимірного комплексного аналізу, теорії гільбертових просторів, теорії операторів, комбінаторики, теорії тензорних добутків.

Наукова новизна отриманих результатів. Усі результати, отримані у дисертації, є новими. У роботі вперше:

– Знайдено зображення множини мультимножин у просторах симетричних поліномів та аналітичних функцій.

– Розглянуто гільбертові простори симетричних аналітичних функцій на ℓ_1, встановлено умови за яких елементи з ℓ_1 породжують неперервні функціонали у цих просторах.

– Побудовано унітарні ізоморфізми гільбертових просторів симетричних аналітичних функцій на ℓ_1 у абстрактні (зважені) симетричні простори Фока та простори аналітичних функцій в областях гільбертового простору. Описано неоднорідні ортонормовані базиси в симетричних просторах Фока.

– Досліджено мультиплікативні функціонали у гільбертових просторах симетричних аналітичних функцій, описано множини таких функціоналів.

– Досліджено оператори композиції у гільбертових просторах симетричних аналітичних функцій пов'язані з алгебраїчними операціями на множині мультимножин, встановлено умови неперервності для таких операторів.

– Досліджено біортогональні базиси та описано відтворююче ядро у гільбертовому просторі симетричних аналітичних функцій.

– Досліджено симетричні дробові відображення в контексті функціонального числення у напівкільці мультимножин.

– Розглянуто оператор симетричного зсуву у гільбертовому просторі симетричних аналітичних функцій, досліджено умови самоспряженості.

– Досліджено оператор диференціювання у гільбертовому просторі симетричних аналітичних функцій, описано комутаційні співвідношення для оператора диференціювання і спряженого до нього оператора.

Практичне значення одержаних результатів. Результати, отримані у дисертаційній роботі носять теоретичний характер. Вони можуть бути використані в загальній теорії функцій, теорії нелінійних операторів, функціональному аналізі, математичній фізиці. Ці результати можуть бути використані в наукових дослідженнях, які проводяться в ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", Інституті прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України, Львівському національному університеті імені Івана Франка, Інституті математики НАН України та інших наукових установах та закладах вищої освіти України.

Особистий внесок здобувача.

Основні результати, наведені в дисертації, отримані самостійно. Науковому керівнику належить постановка задач та загальне керівництво роботою.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались на:

– Всеукраїнському науковому семінарі “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Івано-Франківськ–Ворохта, 25-28 березня, 2010);

– Всеукраїнській науковій конференції “Прикладні задачі математики”, присвяченій 50-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу (Яремче, 13 - 15 жовтня 2011 р.);

– Всеукраїнській науковій конференції “Алгебра, топологія, аналіз, стохастика” присвяченій 10-річчю факультету математики та інформатики Прикарпатського Національного університету імені Василя Стефаника (Микуличин, 20 - 23 вересня 2012 р.);

– Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей і математичного аналізу” (Ворохта, 20-26 лютого 2012);

– Семінарі відділу функціонального аналізу Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України (м. Львів);

– Семінарах кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”.

Крім цього, результати дисертації відображені в тезах доповідей Міжнародної конференції “Infinite dimensional Analysis and Topology” (Івано-Франківськ–Яремче, 27 травня - 1 червня, 2009); 6-ої літньої школи з алгебри, топології та аналізу (Львів – Козьова, 4-14 серпня 2009 р.); Українського математичного конгресу (Київ, вересень 2009 р.); 7-ої літньої школи з алгебри, топології і аналізу (м. Верховина, 20-27 червня 2010 р.); Міжнародної конференції “Сучасні проблеми аналізу” (м. Чернівці, 30 вересня - 3 жовтня 2010 р.); Всеукраїнських наукових конференцій “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (м. Ворохта, 23-28 лютого 2011 р., 25 лютого - 3 березня 2013 р., 25 лютого - 1 березня 2015 р., 24 лютого - 27 лютого 2016 р., 22 лютого - 25 лютого 2017 р., 27 лютого - 02 березня 2018 р., 25 лютого - 01 березня 2019 р.); IV конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я.С. Підстригача (м. Львів, 24 - 27 травня 2011 р.); International conference in functional analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (Lviv, Ukraine, 18-23 September 2017).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 27 наукових працях [62], [63], [59], [14], [64], [10], [2], [3], [4], [8], [11], [66], [12], [7], [61], [68], [65], [15], [60], [69], [9], [5], [67], [6], [13], [16], [38], з них 7 у наукових фахових виданнях та 20 у матеріалах міжнародних і всеукраїнських конференцій та семінарів. Дві статті з яких в фахових журналах, що входять в категорію A, одна стаття в закордонному журналі, який входить до наукометричних баз Scopus та Web of Science.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації 142 сторінки. Список використаних джерел займає 9 сторінок та містить 89 найменувань. Додатки займають 7 сторінок і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, встановлено зв'язок роботи з науковими темами. Сформульовано мету та завдання дослідження, описано наукову новизну отриманих результатів. Подано список публікацій та інформацію про апробації результатів дисертаційної роботи.

У першому розділі здійснено огляд літератури за темою дисертаційної роботи та подано основні результати дисертації.

У другому розділі наведено основні означення та сформульовано відомі результати, які використовуються в основних розділах дисертаційної роботи. Зокрема, у підрозділі 2.1 наведено означення поліноміального відображення на банаховому просторі та сформульовано основні властивості, такі як поляризаційна формула:

$$B(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_1 \ldots \epsilon_n B \circ \Delta_n \left(\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j x_j \right).$$

В підрозділі 2.2 введено радіус рівномірної збіжності $\varrho_x(f)$ функції f в точці x та радіус обмеженості f в точці x та сформульовано таку теорему:

Теорема 2.2.6. *Радіус рівномірної збіжності аналітичної функції f в точці x збігається з радіусом обмеженості f в x і якщо $f \in H(X, Y)$, то*

$$\varrho_0(f) := \left(\limsup_{n \to \infty} \|f_n\|^{1/n} \right)^{-1},$$

де $f_n = \frac{\widehat{d_x^k f}}{n!}$.

В підрозділі 2.3 описано стандартні алгебраїчні базиси в алгебрі симетричних поліномів на $\mathbb{C}^n$. Зокрема базиси $(P_i)_{i=1}^n$, $(G_i)_{i=1}^n$, $(H_i)_{i=1}^n$, де

$$P_i(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^i,$$

$$G_i(x) = \sum_{k_1 < \cdots < k_i} x_{k_1} \ldots x_{k_i},$$

$$H_i(x) = \sum_{k_1 \le \cdots \le k_i} x_{k_1} \ldots x_{k_i}.$$

Зв'язок між цими базисами визначається відомими рекурентними формулами Ньютона:

$$mG_m = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} G_{m-k} P_k, \quad m = 1, \ldots, n,$$

$$mH_m = \sum_{k=1}^{m} H_{m-k}P_k, \quad m = 1, \dots, n,$$

$$G_m = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} G_{m-k} Hk, \quad m = 1, \dots, n$$

та

$$H_m = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} H_{m-k} G_k, \quad m = 1, \dots, n.$$

У підрозділі 2.4 розглянуто симетричні аналітичні функції на просторі ℓ_p, генеруючі функції $P(t)$, $G(t)$, $H(t)$ та співвідношення між ними, зокрема

$$G(t)(x) = \frac{1}{H(t)(-x)}$$

та

$$G(t)(x) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{P_n(-x)}{n}\right) = \exp\left(-\int_0^t P(\xi)(-x)\, d\xi\right).$$

У підрозділі 2.5 розглянуто абстрактні (зважені) симетричні простори Фока $\mathcal{F}_\eta$ над деяким гільбертовим простором E, спряжені до цих просторів $\mathcal{H}_\eta$ та сформульовано теорему:

Теорема 2.5.1. *Припустимо, що існують константи $c > 0$ і $M > 0$ такі, що для всіх мультиіндексів $[i] \in \mathbb{N}^n$, $(k) \in \mathbb{Z}_+^n$ і $n = k_1 + \dots + k_n$ виконуються нерівності*

$$0 < c_{[i]}^{(k)} = c_{i_1 \dots i_n}^{k_1 \dots k_n} \le cM^{2n} \frac{(k_1 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdots k_n!} = cM^{2n} \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!}.$$

Тоді існує відкрита підмножина $U \subset E$, $U \ni 0$ така, що

(i) *Ряд (2.5.2) є збіжним для кожного $x \in U$ і η є аналітичним відображенням з U в $\mathcal{F}_\eta$.*

(ii) *Для кожного $\phi \in \mathcal{F}_\eta$ відображення $f_\phi(x) = \langle \eta(x) \mid \phi \rangle_\eta$ є аналітичною функцією на U.*

(iii) *Функція* $\left\langle \eta(x) \,\middle|\, e_{[i]}^{\otimes(k)} \right\rangle_\eta$ *є n-однорідним поліномом*

$$\left\langle \eta(x) \,\middle|\, e_{[i]}^{\otimes(k)} \right\rangle_\eta = x_{i_1}^{k_1} \cdots x_{i_n}^{k_n}.$$

Також наведено означення відтворюючого ядра.

У розділі 3 досліджено гільбертові простори симетричних аналітичних функцій на ℓ_1.

У підрозділі 3.1 описано алгебраїчні базиси в просторі симетричних поліномів $P_s(\ell_1)$. Нехай $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ — розбиття деякого натурального числа n. Тобто $\lambda_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots, m$ і $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = n$, $|\lambda| = n$. Розбиття λ часто записують у вигляді

$$(1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots, r^{m_r}, \ldots),$$

де показник m_j вказує скільки разів трапляється число j у λ. Позначимо

$$M_\lambda(x) = \sum_{k_1, \ldots, k_m} x_{k_1}^{\lambda_1} x_{k_2}^{\lambda_2} \ldots x_{k_m}^{\lambda_m},$$

де $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Твердження 3.1.2. *1. Поліноми $P_\lambda = P_{\lambda_1} P_{\lambda_2} \ldots P_{\lambda_m}$, $|\lambda| \in \mathbb{N}$ утворюють лінійний базис в $P_s(\ell_1)$.*

2. Поліноми $H_n = \sum_{|\lambda|=n} M_\lambda$ утворюють алгебраїчний базис в $P_s(\ell_1)$.

3. Поліноми $H_\lambda = H_{\lambda_1} H_{\lambda_2} \ldots H_{\lambda_m}$, $|\lambda| \in \mathbb{N}$ утворюють лінійний базис в $P_s(\ell_1)$.

4. Поліноми $G_\lambda = G_{\lambda_1} \ldots G_{\lambda_n}$, $|\lambda| \in \mathbb{N}$ утворюють лінійний базис в $P_s(\ell_1)$.

5. Нехай

$$z_\lambda = \prod_{r \geq 1} (r^{m_r} m_r!),$$

де r та m_r визначені в 3.1.1, тоді лінійні базиси P_λ, H_λ, G_λ пов'язані наступними формулами, які відомі як формули Варінга:

$$G_n = \sum_{|\lambda|=n} (-1)^{n-(m_1+\ldots+m_r)} z_\lambda^{-1} P_\lambda.$$

$$H_n = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} P_\lambda.$$

$$H_n = \sum_{|\lambda|=n} (-1)^{n-(m_1+\ldots+m_r)} \frac{(m_1+\ldots+m_r)!}{m_1!\ldots m_r!} G_\lambda.$$

$$G_n = \sum_{|\lambda|=n} (-1)^{n-(m_1+\ldots+m_r)} \frac{(m_1+\ldots+m_r)!}{m_1!\ldots m_r!} H_\lambda.$$

У підрозділі 3.2 введено скалярний добуток на просторі $P_s(\ell_1)$

$$\langle P_\lambda, P_\mu \rangle = b_{\lambda\mu}\delta_{\lambda\mu}$$

і розглянуто поповнення $H_s(\ell_1)$ цього простору відносно даного скалярного добутку.

Теорема 3.2.1. *Простір $H_s^b(\ell_1)$ є простором аналітичних функцій в кулі з центром в нулі радіуса*

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} d_n^{\frac{1}{n}}}$$

в ℓ_1, де константи d_n визначаються формулою $d_n = \max\limits_{|\lambda|=n} \frac{1}{\sqrt{b_\lambda}}$.

Твердження 3.2.2. *Нехай $b_\lambda \geq z_\lambda |\lambda|!$ для всіх розбиттів λ. Тоді гільбертів простір $H_s^b(\ell_1)$ є власним щільним підпростором в алгебрі $H_{bs}(\ell_1)$.*

У підрозділі 3.3 досліджено зображення множини скінченних мультимножин M_0 у просторі симетричних поліномів. Введено відношення еквівалентності $\sim$ на просторі скінченних послідовностей c_{00} :

$x \sim y$ тоді і тільки тоді, коли $y = \sigma(x) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, \ldots)$ для деякої підстановки $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Знайдено деяку природну метрику ρ на зображенні $\overline{\mathbb{P}}$ множини $c_{00/\sim}$ у просторі симетричних поліномів.

У підрозділі 3.4 розглянуто простір симетричних аналітичних функцій $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}$ на c_{00}, які є лінійною комбінацією деякого алгебраїчного базису симетричних поліномів $\{Q_n\}$.

Теорема 3.4.1. *Припустимо, що*

$$\|Q_n\|_{\ell_1} = \sup_{\|x\|_{\ell_1} \le 1} |Q_n(x)| = 1.$$

Тоді простір $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}$ *ізоморфний до простору всіх цілих функцій* $H(\mathbb{C})$ *на* $\mathbb{C}$, *а простір* $\mathcal{H}'_{\mathbb{P}}$ *ізоморфний до простору функцій експоненціального типу на* $\mathbb{C}$.

Теорема 3.4.2. *Припустимо, що*

$$\left(\limsup_{n\to\infty} \|Q_n\|_{\ell_1}^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} = r > 0.$$

Тоді для кожного $x \in \ell_1$, *такого, що* $\|x\|_{\ell_1} < r$, *лінійний функціонал, що визначається на* $\mathbb{P}$ *формулою* $\delta_x(P) = P(x)$, *є визначеним і неперервним на просторі* $E_{\mathbb{P}}$.

У підрозділі 3.5 встановлено зв'язок простору $H_s^b(\ell_1)$ з абстрактним простором Фока.

Позначимо Ω — область в ℓ_1

$$\Omega = \{x \in \ell_1 \colon |P_n(x)| < 1,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Зауважимо, що якщо $x = \sum x_k e_k \in \Omega$, то $|x_k| < 1$ для кожного k. Тобто Ω лежить у відкритій підмножині

$$\mathbb{D}_1 = \{x \in \ell_1 \colon \forall k \in \mathbb{N} \quad |x_k| < 1\}.$$

Теорема 3.5.3. *Нехай $\|P_\lambda\| = 1$ для довільного розбиття λ. Тоді $H_s(\ell_1)$ є простором аналітичних функцій на Ω. При цьому*

$$f(x) = \langle f, R_x \rangle = \langle \xi(f), \xi(R_x) \rangle,$$

$x \in \Omega,\ f \in H_s(\ell_1)$.

Нехай $Q_n = \frac{P_n}{\sqrt{n}}$.

Теорема 3.5.7. *Лінійне відображення з симетричного простору Фока $\mathcal{F}_0$ на простір $H_s^z(\ell_1)$, визначене на базисних елементах формулою:*

$$\mathcal{I} : e_{[i]}^{\otimes(k)} \mapsto Q_\lambda = Q_{i_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot Q_{i_n}^{k_n},\ \lambda = (i_1^{k_1}, i_2^{k_2}, \ldots, i_n^{k_n}),\ |\lambda| = n$$

є ізометричним ізоморфізмом гільбертових просторів.

Нехай $\lambda = (i_1^{k_1}, i_2^{k_2}, \ldots, i_n^{k_n})$, $|\lambda| = |(k)| = n$. Позначимо $e_\lambda = e_{[i]}^{\otimes(k)} = e_{i_1}^{k_1} \otimes e_{i_2}^{k_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}^{k_n}$. Розглянемо такі елементи з $\mathcal{F}_0$:

$$h_n = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} \sqrt{i_1^{k_1} i_2^{k_2} \ldots i_n^{k_n}}\, e_\lambda$$

$$g_n = \sum_{|\lambda|=n} (-1)^{n-k_1-\ldots-k_n} z_\lambda^{-1} \sqrt{i_1^{k_1} i_2^{k_2} \ldots i_n^{k_n}}\, e_\lambda.$$

Наслідок 3.5.8. *Послідовності $(h_n)_{n=1}^\infty$ та $(g_n)_{n=1}^\infty$ є ортонормованими системами векторів у просторі $\mathcal{F}_0$.*

Твердження 3.5.10. *$G(t) \in H_s^z(\ell_1)$ і $H(t) \in H_s^z(\ell_1)$ тоді і тільки тоді, коли $|t| < 1$.*

Наслідок 3.5.11. *У просторі Фока $\mathcal{F}_0$ виконується тотожність:*

$$h(t) \otimes_s g(-t) = 1,\ t \in \mathbb{C},\ |t| < 1.$$

Тобто, симетричний добуток елементів $g(t)$ і $h(t)$ для $|t| \leq 1$ лежить у просторі $\mathcal{F}_0$ і тотожно дорівнює $1 \in \mathcal{F}_0$.

У четвертому розділі розглянуто мультиплікативні оператори на гільбертових просторах симетричних аналітичних функцій.

У підрозділі 4.1 досліджено мультиплікативні функціонали на гільбертових просторах симетричних аналітичних функцій.

Означення 4.1.1. *Лінійний функціонал $\varphi : H_s^b(\ell_1) \to \mathbb{C}$ називається мультиплікативним, якщо $\varphi(PQ) = \varphi(P)\varphi(Q)$ для всіх поліномів $P, Q \in H_s(\ell_1)$. Аналогічно, лінійний оператор $\Phi : H_s^b(\ell_1) \to H_s^b(\ell_1)$ називається мультиплікативним, якщо $\Phi(PQ) = \Phi(P)\Phi(Q)$ для всіх поліномів $P, Q \in H_s^b(\ell_1)$.*

Означення 4.1.3. *Скажемо, що норма простору $H_s^b(\ell_1)$ субмультиплікативна, якщо існує константа $C > 0$, яка не залежить від λ така, що $C\|P_\lambda P_\mu\| \geq \|P_\lambda\|\|P_\mu\|$ для довільних розбиттів λ, μ. У випадку, якщо $\|P_\lambda P_\mu\| = \|P_\lambda\|\|P_\mu\|$ для довільних розбиттів λ, μ, норма простору $H_s^b(\ell_1)$ буде називатись мультиплікативною.*

Позначимо $\mathbb{D}_2^b = \{a_k \colon (a_k\sqrt{b_{\lambda_k}}) \in \ell_2,\ |a_k| < \sqrt{b_{\lambda_k}}\}$.

Теорема 4.1.4. *Припустимо, що на $H_s^b(\ell_1)$ задано мультиплікативну норму. Лінійний мультиплікативний функціонал φ на $P_s(\ell_1)$ буде неперервним тоді і тільки тоді, коли послідовність $a = \{a_k = \varphi(P_k)\}$ належить $\mathbb{D}_2^b$.*

Твердження 4.1.8. *У просторі $H_s^b(\ell_1)$ з субмультиплікативною нормою існують неперервні мультиплікативні функціонали $\psi_{s,k}$, $\psi_{s,k}(P_n) = s\delta_{kn}$ для тих і тільки тих комплексних чисел s, які задовольняють нерівність $|s| < \sqrt{b_{\lambda_k}} = \|P_k\|$.*

Позначимо $\psi_k := \sqrt{b_k}\psi_{1,k} = \|P_k\|\psi_{1,k}$, $k \in \mathbb{N}$. Нехай E_b — замкнена лінійна оболонка функціоналів ψ_k, $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.1.10. *Нехай на просторі $H_s^b(\ell_1)$ задано субмультиплікативну норму. Тоді існує абстрактний простір Фока $\mathcal{F}_\eta^b$ над гільбертовим простором E_b і унітарний бієктивний оператор $\mathcal{U} \colon H_s^b(\ell_1) \to \mathcal{H}_\eta^b = (\mathcal{F}_\eta^b)^*$ такий, що*

$$f(x) = \left\langle \eta(\delta_x), \overline{\mathcal{U}(f)} \right\rangle_{\mathcal{F}^b_\eta} = \left\langle \eta\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \langle \delta_x, \psi_k \rangle_{E_b} \psi_k \Big), \overline{\mathcal{U}(f)} \right\rangle_{\mathcal{F}^b_\eta},$$

де $\overline{\mathcal{U}(f)} = \langle \cdot, \mathcal{U}(f) \rangle_{\mathcal{H}^b_\eta} \in \mathcal{F}^b_\eta$ *і відображення* $\eta \colon E_b \to \mathcal{F}^b_\eta$ *визначено формулою*

$$\eta\Big(\sum_{n=1}^{\infty} y_n \psi_n \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \frac{b^{k_1}_{i_1} \cdots b^{k_n}_{i_n}}{b_\lambda} y^{k_1}_{i_1} \cdots y^{k_n}_{i_n} \psi^{k_1}_{i_1} \otimes_s \cdots \otimes_s \psi^{k_n}_{i_n},$$

$\lambda = (i^{k_1}_1, i^{k_2}_2, \ldots, i^{k_n}_n)$.

У підрозділі 4.2 розглянуто оператори композиції на $H_s(\ell_1)$.

Розглянемо на просторі ℓ_1 таке відношення еквівалентності: $x \sim y$, якщо $P_k(x) = P_k(y), \forall k \in \mathbb{N}$. Позначимо $\ell_1/\sim$ множину класів еквівалентності і $[x]$ — клас, який містить елемент x. Нехай $\widetilde{B_1} = \{[x] \in \ell_1/\sim\colon \|x\| < 1\}$.

Розглянемо відображення $F_h \colon \widetilde{B_1} \to \ell_1/\sim$, визначене таким чином:

$$F_h([x]) = [(h(x_1), h(x_2), \ldots, h(x_n), \ldots)], x \in \widetilde{B_1}.$$

Теорема 4.2.1. *Для кожної функції* $h \in W$ *такої, що* $\|h\| = r < 1$ *і* $h(0) = 0$ *оператор композиції* $C_{F_h} : f \to f \circ F_h$ *є неперервним оператором з* $H_s(\ell_1)$ *в* $H_s(\ell_1)$.

Теорема 4.2.4. *Припустимо, що для простору* $H^b_s(\ell_1)$ *множина функціоналів* δ_x, $x \in \Omega_b$ *розділяє точки простору* $H^b_s(\ell_1)$. *Нехай* A — *лінійний оператор на* $H^b_s(\ell_1)$, *який комутує з оператором* M_y *для довільного* $y \in \Omega_b$. *Тоді для кожного розбиття* λ *існує число* $a_\lambda \in \mathbb{C}$ *таке, що*

$$A(P_\lambda) = a_\lambda P_\lambda.$$

Іншими словами A — *нормальний оператор,* P_λ — *набір власних векторів, а* $\{a_\lambda\}$ — *точковий спектр оператора* A.

Теорема 4.2.7. *Нехай* $y \in \ell_1$. *Тоді мають місце наступні рівності*

$$G_n(x \diamond y) = \sum_{|\lambda|=n} M_\lambda(y) G_\lambda(x)$$

та

$$H_n(x \diamond y) = \sum_{|\lambda|=n} M_\lambda(y) H_\lambda(x).$$

У підрозділі 4.3 розглянуто біортогональні базиси в $H_s^z(\ell_1)$.

Теорема 4.3.1. *В просторі* $H_s^z(\ell_1)$ *лінійні базиси* $\{H_\lambda\}$ *і* $\{M_\lambda\}$ *є біортогональними, тобто* $\langle H_\lambda, M_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu}$ *для довільних розбиттів* λ, μ.

У підрозділі 4.4 досліджено симетричні дробові відображення і симетричне функціональне числення.

Теорема 4.4.1. *Нехай* $x \in \ell_1, \|x\| < 1$. *Тоді*

$$x = \bullet_{n=0}^{\infty} x^{\diamond n} \in \ell_1, x^{\diamond 0} = (1, 0, 0, \ldots) \quad і$$

1. *відображення* $x \mapsto \bullet_{n=0}^{\infty} x^{\diamond n}$ *є аналітичним на кулі* B_1 *з центром в нулі і радіуса 1 і обмеженим на довільній кулі з центром в нулі і радіусом меншим за 1;*

2. *для будь-якого* m,

$$P_m(\bullet_{n=1}^{\infty} x^{\diamond n}) = \frac{1}{1 - P_m(x)}, \quad \|x\| < 1.$$

У підрозділі 4.5 розглянуто відтворююче ядро у просторі $H_s(\ell_1)$.

Позначимо $K(x, y) = \bullet_{n=0}^{\infty} (x \diamond y)^{\diamond n}, x, y \in \ell_1$. При цьому, для $x, y \in \Omega, m \in \mathbb{N}$ визначено

$$P_m(K(x, y)) = \lim_{k \to \infty} P_m(\bullet_{n=0}^{k} (x \diamond y)^{\diamond n})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (P_m(x) P_m(y))^n = \frac{1}{1 - P_m(x) P_m(y)}.$$

Позначимо нескінченний формальний добуток

$$C(x, y) = \prod_{m=1}^{\infty} P_m(K(x, y)).$$

Лема 4.5.1. *Для кожного фіксованого $x \in \Omega$, $C(x, y)$ є функцією з $H_s(\ell_1)$ відносно y.*

Теорема 4.5.2. *Для кожного фіксованого $x \in \Omega$ і $f \in H_s(\ell_1)$ виконується рівність*

$$f(x) = \langle C(x, \cdot), f \rangle_{H_s}.$$

У підрозділі 4.6 досліджено властивості оператора симетричного зсуву.

Визначимо оператор $\Lambda_y \colon P_s(\ell_1) \to P_s(\ell_1)$ для кожного $y \in \ell_1$ таким чином:

$$\Lambda_y(P)(x) = P(x \bullet y).$$

Очевидно, що

$$\Lambda_y(P + cQ) = P(x \bullet y) + cQ(x \bullet y) = \Lambda_y(P) + c\Lambda_y(Q)$$

для всіх $P, Q \in P_s(\ell_1)$, $c \in \mathbb{C}$. Тому $\Lambda_y(P)$ — лінійний оператор на просторі $P_s(\ell_1)$. Ми будемо позначати тим самим символом Λ_y — оператор на $H_s^b(\ell_1)$ з максимальною областю визначення.

Твердження 4.6.1. *Λ_y — щільно визначений в просторі $H_s^b(\ell_1)$ оператор, $y \in \ell_1$. Якщо множина Ω_b містить відкриту підмножину і $x \bullet y \in \Omega_b$ для кожного $x \in \Omega_b$, то Λ_y — замкнений (тобто має замкнений графік).*

Твердження 4.6.2. *Якщо існує $x_0 \in \Omega_b$ такий, що $x_0 \bullet y \notin \Omega_b$, то оператор Λ_b — необмежений.*

Наслідок 4.6.3. *Припустимо, що Ω_b містить відкриту підмножину. Оператор Λ_y буде обмеженим тоді і тільки тоді, коли він визначений на всьому просторі $H_s^b(\ell_1)$ (і приймає значення в цьому просторі).*

У підрозділі 4.7 розглянуто оператор диференціювання на просторі $H_s^b(\ell_1)$.

Розглянемо відображення $\Theta_t(P_n) = tP_n$ $t \in \mathbb{C}$, і $\Theta_t(c) = c$, де $c = const$. Продовжимо його за лінійністю і мультиплікативністю на простір поліномів $P_s(\ell_1)$

Розглянемо оператор типу диференціювання:

$$\mathcal{D}_h f = \lim_{t \to 0} \frac{\Theta_t(\Lambda_h(f(x))) - f(x)}{t}, \quad h \in \Omega, \quad h \neq 0.$$

Твердження 4.7.2. $\mathcal{D}_h, h \in \Omega, h \neq 0$ *щільновизначений оператор в просторі* $H_s^b(\ell_1)$, *для якого виконується правило Лейбніца*

$$\mathcal{D}_h(fg) = \mathcal{D}_h(f)g + f\mathcal{D}_h(g)$$

для всіх f, g *з області визначення* $\mathcal{D}_h$.

Теорема 4.7.4. *Для довільного* $h \in \Omega$, $h \neq 0$ *оператори* $\mathcal{D}_h$ *та* $\mathcal{D}_h^*$ *в просторі* $H_s(\ell_1)$ *задовольняють так зване канонічне комутаційне співвідношення на просторі* $H_s(\ell_1)$:

$$\mathcal{D}_h\mathcal{D}_h^* - \mathcal{D}_h^*\mathcal{D}_h = \mathrm{I}\sum_{k=1}^{\infty} |P_k(h)|^2,$$

де I *— одиничний оператор.*

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ВІДОМИХ РЕЗУЛЬТАТІВ, ЯКІ ВІДНОСЯТЬСЯ ДО ТЕМАТИКИ ДИСЕРТАЦІЙНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Теорія аналітичних відображень на нескінченновимірних банахових просторах бере початок з праць В Вольтера [86], Д. Гільберта [57], М. Фреше [43], Р. Гато [50, 51]. Пізніше ці дослідження знайшли розвиток в публікаціях А. Майкла, Р. Мартіна, С. Бохнера, А. Кліфорда ([1, 77]). Значний вклад в розвиток теорії поліномів на нормованих просторах було зроблено вченими Львівської математичної школи довоєнного періоду. Так, в роботах С. Банаха, С. Мазура, В. Орліча [31, 79, 80] було досліджено питання обмеженості, неперервності та вимірності мультилінійних і поліноміальних відображень. Деякі з цих питань знайшли своє відображення у відомій "Шотландській книзі" [78].

У зв'язку з розвитком лінійного функціонального аналізу в сорокових-шістдесятих роках двадцятого століття було встановлено багато основних властивостей поліномів і голоморфних функцій. Більшість із цих результатів з'явились як допоміжні засоби в теорії лінійних операторів. Певний підсумок цих досліджень можна знайти в додатку до монографії Е. Хілле та Р. Філіпса [58], написаній у співпраці з М. Цорном. Систематичну теорію аналітичних функцій на банаховому просторі викладено в роботі Ж. Бохнак і Ж. Сісяк [33].

Систематичне дослідження просторів аналітичних функцій на банаховому просторі розпочалось з робіт Л. Нахбіна та було продовжено в працях Х. Мухіки, Р. Арона, Ш. Дініна та М. Валдівія (див. [41, 42, 82, 27]). Паралельно розвивалась теорія рівномірних банахових алгебр, типовими представниками яких є алгебри аналітичних функцій від багатьох змінних [49]. Алгебри аналітичних функцій обмеженого типу (тобто обмежених на обмежених многочленах) та їх спектр вперше було досліджено у роботах Р. Арона, Б. Коула, Г Гамеліна [29, 30, 48, 34]. У цих працях було вперше досліджено спектр обмеженого типу. Ці результати було узагальнено багатьма авторами, зокрема в [52, 53, 88, 89].

Гільбертові простори аналітичних функцій від нескінченної кількості змінних та пов'язані з ними гільбертові симетричні тензорні добутки вивчались Ю.М. Березанським, Ю.Г. Кондратьєвим, Ю.С. Самойленком, М.О. Качановським, О.В. Лопушанським, А.В. Загороднюком [74, 75] та ін.

Симетричні поліноми від багатьох комплексних змінних є класичним об'єктом алгебри і аналізу. Дослідження симетричних поліномів на гільбертових просторах і, більш загально, на просторах ℓ_1 і $L_p[0,1], 1 < p < \infty$ розпочато у статті А.С.Неміровського і С.М.Семьонова [23]. Ними було дано означення симетричних поліномів на даних просторах і наведено приклади. Також було доведено, що кожен симетричний поліном на гільбертовому просторі, просторах ℓ_1 і $L_p[0,1], 1 < p < \infty$ виражається через алгебраїчну комбінацію елементарних симетричних поліномів. Пізніше вказані результати було узагальнено для інших просторів у працях М. Гонзалеса, Р. Гонзало, Х Харамілло [54], Г. Галіндо, Т. Василишина, А. Загороднюка [45, 46, 47]. Алгебри симетричних поліномів та їх спектри досліджувались в [27]. В даній роботі досліджено гільбертові простори симетричних аналітичних функцій від нескінченної кількості змінних та оператори, які діють в цих просторах.

Алгебри симетричних аналітичних функцій на ℓ_p досліджувалися в [26, 36, 35, 37, 25, 71] і в інших роботах. Зокрема, у роботі [26] описано спектр алгебри $A_{us}(B_{\ell_p})$ симетричних рівномірно неперервних аналітичних функцій на одиничній кулі простору ℓ_p як поліноміально опуклу оболонку деякої підмножини в одиничній кулі простору ℓ_∞. Як наслідок цього авторами показано, що $A_{us}(B_{\ell_p})$ алгебраїчно і топологічно ізоморфна рівномірній банаховій алгебрі, породженій координатними проекціями в ℓ_∞. У [35, 37] введено та досліджено алгебраїчні операції на спектрі алгебри $H_{bs}(\ell_p)$ симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ та побудовано зображення спектру цієї алгебри, для випадку $p = 1$ у вигляді підмножини цілих функцій експоненційного типу на комплексній площині.

РОЗДІЛ 2
ОСНОВНІ МЕТОДИ ТА ПОПЕРЕДНІ РЕЗУЛЬТАТИ, ЯКІ ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ У ДИСЕРТАЦІЇ

2.1. Поліноми на банаховому просторі

Нехай X та Y – банахові простори над полем $\mathbb{K}$ комплексних $\mathbb{C}$ або дійсних $\mathbb{R}$ чисел. Для довільного натурального n будемо позначати X^n декартовий добуток n копій простору X на себе із стандартною нормою декартового добутку.

Відповідно до загальноприйнятих позначеннь з монографії Нахбіна [83], для довільного $n \in \mathbb{N}$ будемо позначати через $\mathcal{L}(^nX, Y)$ простір всіх неперервних n-лінійних відображень з X в Y. Нехай Δ_n є, так зване, *діагональне відображення* з X в X^n, визначене наступним чином:

$$\begin{aligned} \Delta_n : \quad & X \to X^n \\ & x \mapsto (x, \dots, x). \end{aligned}$$

Означення 2.1.1. *Відображення P з X в Y називається неперервним n-однорідним поліномом, якщо $P(x) = B(\Delta_n(x))$ для деякого $B \in \mathcal{L}(^nX, Y)$. Ми будемо позначати $\mathcal{P}(^nX, Y)$ лінійний простір всіх неперервних n-однорідних поліномів з X в Y.*

n-лінійне відображення B називається симетричним, якщо $B(x_1, \dots, x_n) = B(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ для довільної підстановки σ на множині $\{1, \dots, n\}$. Простір усіх симетричних n-лінійних відображень будемо позначати $\mathcal{L}_s(^nX, Y)$.

Введемо ще одне еквівалентне означення полінома.

ОЗНАЧЕННЯ 2.1.2. *Відображення* $P : X \to Y$ *є поліномом степеня* n, *якщо для довільних* $h, x \in X$ *і довільного* $t \in \mathbb{K}, P(x+th)$ *є поліномом від* t, *тобто:*

$$P(x+th) = A_n t^n + ... + A_1 t + A_0,$$

де $A_k \in Y$ *і* A_k *залежить від* h *і* x.

Розглянемо також кілька важливих властивостей, що стосуються поліномів.

ТВЕРДЖЕННЯ 2.1.3. *([41]). Простори* $\mathcal{L}(^nX, Y)$ *і* $\mathcal{L}_s(^nX, Y)$ *є банаховими просторами відносно рівномірної норми на одиничній кулі* X^n.

ТЕОРЕМА 2.1.4. *([41]). Відображення*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s(^nX, Y) &\to \mathcal{P}(^nX, Y) \\ B &\mapsto B \circ \Delta_n \end{aligned}$$

є ізоморфізмом між банаховим простором $\mathcal{L}_s(^nX, Y)$ *і простором* n*-однорідних поліномів* $\mathcal{P}(^nX, Y)$ *з топологією рівномірної збіжності на одиничній кулі простору* X. *Тобто, норма на просторі* $\mathcal{P}(^nX, Y)$ *задається формулою*

$$\|P\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|P(x)\|, \quad P \in \mathcal{P}(^nX, Y).$$

При цьому

$$\|B \circ \Delta_n\| \le \|B\| \le c(n, X)\|B \circ \Delta_n\|, \tag{2.1.1}$$

де $c(n, X)$ *–* **поляризаційна константа**, $1 \le c(n, X) \le \frac{n^n}{n!}$.

Також, має місце наступна *поляризаційна формула*

$$B(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_1 \ldots \epsilon_n B \circ \Delta_n \left(\sum_{j=1}^n \epsilon_j x_j \right). \tag{2.1.2}$$

Наслідок 2.1.5. *Простір* $\mathcal{P}({}^nX, Y)$ *є банаховим простором і для довільного полінома* $P \in \mathcal{P}({}^nX, Y)$ *існує єдине* n*-лінійне симетричне відображення* $A_P \in \mathcal{L}({}^nX, Y)$, *яке називається* **асоційованим з** P n**-лінійним відображенням,** *таке, що* $P = A_P \circ \Delta_n$.

Зауважимо, також, що аналогічно до лінійного випадку, однорідний поліном P на банаховому просторі є неперервним тоді і тільки тоді, коли P є неперервним хоча б в одній точці цього простору і це еквівалентно тому, що поліном є обмежений на обмежених множинах банахового простору і для цього достатньо, щоб P був обмежений хоча б на одній кулі ненульового радіуса.

Відомості, наведені у цьому підрозділі можна знайти в монографіях [41, 42, 82].

2.2. Аналітичні функції

Підмножина Ω банахового простору X називається *скінченно відкритою*, якщо її перетин з довільним скінченновимірним афінним підпростором є відкритою підмножиною цього підпростора.

Означення 2.2.1. *Відображення $f : \Omega \to Y$ називається G-аналітичним (позначення $f \in H_G(\Omega, Y)$), якщо звуження f на $E \cap \Omega$ є аналітичним відображенням для довільного скінченновимірного афінного підпростору E (еквівалентно, для довільного одновимірного афінного підпростору $E \in X$).*

Для G-аналітичних відображень виконується наступна властивість. Нехай $\Omega = \cup_{i \in I} \Omega_i$, де Ω_i — скінченно відкрита підмножина в X, тоді відображення $f : \Omega \to Y$ є G-аналітичним тоді і тільки тоді, коли кожне звуження $f|_{\Omega_i}$ є G-аналітичним.

Твердження 2.2.2. *Нехай Ω скінченно відкрита підмножина в X і $f \in H_G(\Omega, Y)$, $a \in \Omega$. Тоді виконуються такі умови.*

1. *Існує єдина послідовність k-однорідних поліномів (не обов'язково неперервних) $\widehat{d}_a^k f : X \to Y$ таких, що*

$$f(a + x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d}_a^k f(x)$$

для всіх x, які належать найбільшій радіальній підмножині $\omega(a)$ множини $\Omega - a$. При цьому, ряд праворуч збігається поточково.

2. *Поліноми $\widehat{d}_a^k f$ можуть бути визначені єдиним чином за допомогою рівності*

$$\frac{1}{k!} \widehat{d}_a^k f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} f(a + e^{ik\theta} x) d\theta, \quad x \in \omega(a).$$

Означення 2.2.3. *Якщо G-аналітичне відображення, визначене на відкритій підмножині $\Omega \subset X$ із значеннями в Y є неперервним в кожній точці множини Ω, то воно називається аналітичним. Простір аналітичних відображень з Ω в Y позначають $H(\Omega, Y)$.*

У випадку, коли $f \in H(\Omega, Y)$ і $a \in \Omega$, то функції $\widehat{d}_a^k f$ є неперервні k-однорідні поліноми на X, які збігаються з похідними Фреше k-того порядку функції f в точці a. При цьому, ряд

$$f(a+x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d}_a^k f(x)$$

є рядом Тейлора f в околі точки a.

Твердження 2.2.4. *Якщо f — G-аналітичне відображення, визначене на відкритій підмножині Ω банахового простору, то наступні твердження є еквівалентними:*

1. *f є аналітичним.*
2. *f є локально обмеженим, тобто, для кожної точки $x \in \Omega$ існує окіл цієї точки, який міститься в Ω такий, що f є обмеженим відображенням на цьому околі.*
3. *f є неперервним в деякій точці множини Ω.*
4. *Поліноми $\widehat{d}_a^k f$ є неперервними для кожного k.*

Означення 2.2.5. *Аналітична функція f називається* цілою, *якщо вона визначена на всьому просторі X.*

Зауважимо, що з локальної обмеженості цілої функції не випливає, в загальному випадку, обмеженість на всіх обмежених підмножинах.

Нехай $f \in H(\Omega, Y)$, де Ω відкрита підмножина в X і $x \in \Omega$. *Радіусом рівномірної збіжності* $\varrho_x(f)$ функції f в точці x називається супремум тих λ, $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, що $x + \lambda B \subset \Omega$ і ряд Тейлора функції f в околі точки

x збігається до f рівномірно на множині $x+\lambda B$, де B — одинична куля в X. *Радіус обмеженості* f в точці x визначається як супремум тих λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, що f є обмеженою функцією на множині $x+\lambda B$.

Теорема 2.2.6. *Радіус рівномірної збіжності аналітичної функції f в точці x збігається з радіусом обмеженості f в x і якщо $f \in H(X,Y)$, то*

$$\varrho_0(f) := \left(\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|^{1/n}\right)^{-1},$$

де $f_n = \frac{\widehat{d_x^k f}}{n!}$.

Таким чином, властивість аналітичності можна сформулювати у наступному вигляді. Нехай X, Y — комплексні банахові простори, а Ω — відкрита підмножина в X. Відображення $f : \Omega \to Y$ є аналітичним, тоді і тільки тоді, коли для кожного $a \in \Omega$ існує куля $B(a,r) \subset \Omega$, $r > 0$ і послідовність поліномів $P_m \in \mathcal{P}(X^m, Y)$ такі, що

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a)$$

і ряд рівномірно збігається в кулі $B(a,r)$.

Твердження 2.2.7. *Нехай*

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a)$$

— зображення аналітичної функції f У деякій кулі з центром в точці a простору X, що приймає значення в Y. Якщо існує $r > 0$ таке, що

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a) = 0$$

для всіх $x \in B(a,r)$, тоді $P_m = 0$ для кожного $m \in \mathbb{N}$.

Позначимо $H_b(X)$ простір цілих функцій *обмеженого типу,* який складається з цілих функцій на X які є обмеженими на всіх обмежених підмножинах (тобто, мають нескінченний радіус обмеженості). Зауважимо, що в довільному нескінченновимірному просторі X існує комплекснозначна ціла функція f така, для якої радіус обмеженості в кожній точці є скінченним. Простір $H_b(X)$ є алгеброю Фреше з топологією, породженою зліченною сім'єю напівнорм:

$$\|f\|_r = \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| < r\},$$

де $r > 0$ раціональні числа.

Кожен функціонал $\phi \in H_b(X)'$ є неперервним відносно топології рівномірної збіжності на деякій кулі в X. *Радіус-функція* $R(\phi)$ функціонала ϕ є визначена як інфінум всіх $r > 0$ таких, що ϕ є неперервним в нормі рівномірної збіжності на кулі rB.

Позначимо ϕ_n звуження ϕ на підпростір n-однорідних поліномів $\mathcal{P}(^n X)$. Тоді ϕ_n є неперервним лінійним функціоналом на $\mathcal{P}(^n X)$ і

$$\|\phi_n\| = \sup\{\phi(P) : P \in \mathcal{P}(^n X), \|P\| \leq 1\}.$$

Теорема 2.2.8. *Радіус-функція R на $H_b(X)'$ задовольняє рівність*

$$R(\phi) = \limsup_{n\to\infty} \|\phi_n\|^{1/n}.$$

Теорема 2.2.9. *Нехай $\phi_n \in \mathcal{P}(^n X)'$ для $n \geq 0$, для норм функціоналів ϕ_n виконується нерівність*

$$\|\phi_n\| \leq cs^n$$

для деякого $c, s > 0$. Тоді існує єдиний функціонал $\phi \in H_b(X)'$ звуження якого на $\mathcal{P}(^n X)$ збігається з ϕ_n, $n \geq 0$.

Теорема 2.2.10. *Нехай* $f \in H_b(X)$ *і* $f = \sum f_n$ *розвинення у ряд Тейлора. Тоді існує функція* $\widetilde{f} \in H_b(X'')$ *яка розвиваеться у ряд Тейлора* $\widetilde{f} = \sum \widetilde{f}_n$ *і* $\widetilde{f}_n$ *є продовженням Арона-Бернера відповідного полінома* f_n*. Крім того,* $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$ *і оператор* $f \mapsto \widetilde{f}$ *є гомоморфізмом алгебр Фреше* $H_b(X)$ *і* $H_b(X'')$.

Наведені в цьому розділі відомості та детальнішу інформацію можна знайти в працях [41, 42, 48, 56, 82].

2.3. Симетричні поліноми

Нехай $\mathcal{P}_0(X)$ — деяка підалгебра алгебри неперервних поліномів на банаховому просторі X. Послідовність поліномів $(R_i)_i$ називається *алгебраїчним базисом* в $\mathcal{P}_0(X)$, якщо для кожного $P \in \mathcal{P}_0(X)$ існує єдиний поліном $q \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ для деякого n такий, що $P(x) = q(R_1(x), \dots, R_n(x))$. Або іншими словами, якщо $\mathcal{R}$ — відображення:

$$x \in X \rightsquigarrow \mathcal{R}(x) := (R_1(x), \dots, R_n(x)) \in \mathbb{C}^n,$$

то $P = q \circ \mathcal{R}$.

У випадку, коли $\deg R_j = j$, кожен поліном $P \in \mathcal{P}_0(X)$ степеня n можна єдиним чином зобразити у вигляді

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1+2i_2+\dots ki_k=k} c_{i_1\dots i_k} R_1^{i_1} R_2^{i_2} \cdots R_k^{i_k},$$

де $c_{i_1\dots i_k}$ — деякі константи.

Нехай X — банахів простір з безумовним топологічним базисом (e_n). Тобто, кожен елемент $x \in X$ можна єдиним чином подати у вигляді

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$$

і ряд праворуч збігається безумовно. Тоді природнім є розглянути поліноми, які є інваріантними відносно перестановок базисних векторів.

Означення 2.3.1. *Поліном P на просторі X з безумовним базисом називається* симетричним, *якщо для довільного $x = \sum x_i e_i$ і підстановки σ на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$,*

$$P(x) = P\left(\sum x_i e_{\sigma(i)}\right).$$

Позначимо $\lceil p \rceil$ найменше ціле число, яке є більшим або дорівнює p. Відомо, що множина поліномів

$$P_k\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^k \tag{2.3.1}$$

для $k = \lceil p \rceil, \lceil p \rceil + 1, \ldots$ утворює алгебраїчний базис в просторі симетричних поліномів $\mathcal{P}_s(\ell_p)$.

Добре відомо, що для $n < \infty$ кожен поліном з $\mathcal{P}_s(\mathbb{C}^n)$ єдиним чином можна зобразити як поліном від *елементарних симетричних поліномів* $(G_i)_{i=1}^n$,

$$G_i(x) = \sum_{k_1 < \cdots < k_i} x_{k_1} \ldots x_{k_i}.$$

Серед класичних базисів алгебри симетричних поліномів на $\mathbb{C}^n$ слід відзначити, також, *повні* симетричні поліноми $(H_i)_{i=1}^n$,

$$H_i(x) = \sum_{k_1 \leq \cdots \leq k_i} x_{k_1} \ldots x_{k_i}.$$

Зв'язок між цими базисами визначається відомими рекурентними формулами Ньютона:

$$mG_m = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} G_{m-k} P_k, \quad m = 1, \ldots, n,$$

$$mH_m = \sum_{k=1}^{m} H_{m-k} P_k, \quad m = 1, \ldots, n,$$

$$G_m = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} G_{m-k} Hk, \quad m = 1, \ldots, n$$

та

$$H_m = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} H_{m-k} G_k, \quad m = 1, \ldots, n.$$

Ці співвідношення залишаються правильними і для симетричних поліномів на нескінченновимірному просторі ℓ_1. Ми будемо зберігати позначення P_n, G_n та H_n для степеневих, елементарних та повних симетричних поліномів на просторі ℓ_1, відповідно. Зауважимо, що на просторах ℓ_p, $p > 1$ запропоновані формули для елементарних та повних симетричних поліномів не можуть бути використаними, оскільки відповідні ряди, в цьому випадку, не збігаються.

Твердження 2.3.2. *Нехай $\{R_1, \ldots, R_n\}$ – алгебраїчний базис $\mathcal{P}_s(\mathbb{C}^n)$. Для кожного $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$, існує вектор $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ такий, що $R_i(x) = \xi_i$, $i = 1, \ldots, n$. Якщо для деякого $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $R_i(y) = \xi_i$, $i = 1, \ldots, n$, тоді $x = y$ з точністю до підстановки на множині індексів.*

У нескінченновимірному випадку аналог твердження 2.3.2 не виконується. Більше того, можна показати, що якщо $x \in \ell_p$, $1 \leq p < \infty$ і $x \neq 0$, то не існує вектора $y \in \ell_p$ такого, що $P_n(x) = -P_n(y)$ для всіх $n \geq \lceil p \rceil$.

Для довільних $x, y \in \ell_p$ запишемо $x \sim y$, якщо існує бієкція між всіма ненульовими координатами вектора x та вектора y. Для кожної точки $x \in \ell_p$ позначимо δ_x комплексний гомоморфізм $\mathcal{P}_s(\ell_p)$, що відповідає значенню полінома P в точці x, тобто, $\delta_x(P) = P(x)$. Очевидно, що якщо $x \sim y$, то $\delta_x = \delta_y$.

Теорема 2.3.3. *Нехай $x, y \in \ell_p$ і $P_i(x) = P_i(y)$ для кожного $i > \lceil p \rceil$. Тоді $x \sim y$ і $\delta_x = \delta_y$.*

Наслідок 2.3.4. *Нехай $x, y \in \ell_p$. Якщо для деякого натурального $m \geq p$, $P_i(x) = P_i(y)$ для всіх $i \geq m$, то $x \sim y$.*

Наступний факт є аналогом відомої теореми Гільберта про нулі для симетричних поліномів.

Твердження 2.3.5. *Нехай* $P_1, \dots, P_m \in \mathcal{P}_s(\ell_p)$ *такі, що* $\ker P_1 \cap \dots \cap \ker P_m = \emptyset$. *Тоді існують* $Q_1, \dots, Q_m \in \mathcal{P}_s(\ell_p)$ *такі, що*

$$\sum_{i=1}^{m} P_i Q_i \equiv 1.$$

Наведені в цьому підрозділі відомості можна знайти в роботах [26, 36, 54, 76].

2.4. Симетричні аналітичні функції

Ціла аналітична функція f на банаховому просторі X з симетричним базисом буде симетричною (інваріантною відносно перестановки базисних векторів) тоді і тільки тоді, коли у розкладі Тейлора в нулі для цієї функції

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

всі поліноми f_n будуть симетричними. Зауважимо, що якщо розкласти функцію f у ряд Тейлора в околі іншої точки, то відповідні однорідні поліноми вже не будуть симетричними, оскільки оператор зсуву $f(x) \mapsto f(x+a)$ не зберігає властивість симетричності для $a \neq 0$.

Відомо, що як і у загальному випадку, існують симетричні аналітичні функції на ℓ_1, які не є функціями обмеженого типу (тобто, не є обмеженими на всіх обмежених множинах). Тому розглядають алгебру $H_{bs}(\ell_p)$ симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі ℓ_p, яка є замкненою підалгеброю алгебри всіх аналітичних функцій обмеженого типу $H_b(\ell_p)$.

Функціонали δ_x, $x \in \ell_p$ є неперервними в топології $H_{bs}(\ell_p)$ і продовжуються до комплексних гомоморфізмів (характерів) цієї алгебри. Серед характерів алгебри $H_{bs}(\ell_p)$ є також функціонали, які неможливо подати у вигляді δ_x для жодної точки $x \in \ell_p$.

Твердження 2.4.1. *Для норм елементарних симетричних поліномів на просторі ℓ_1 маємо таку рівність $\|G_n\| = 1/n!$.*

Розглянемо генеруючі функції $G(t)$, $P(t)$ і $H(t)$ послідовностей G_n, P_n і H_n:

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n,$$

$$P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} P_n.$$

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n, \ t \in \mathbb{C}, \ G_0 = 1, \ H_0 = 1.$$

Теорема 2.4.2. *Нехай φ — деякий комплексний гомоморфізм алгебри $H_{bs}(\ell_1)$. Тоді*

$$\varphi(G(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi(G_n)$$

є функцією експоненціального типу від комплексної змінної t і, у випадку коли $\varphi = \delta_x$

$$\delta_x(G(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + t x_n)$$

є добутком Адамара з нулями $z_n = -1/x_n$ для всіх ненульових координат x_n вектора x.

На цей час немає повного опису множини комплексних гомоморфізмів алгебри $H_{bs}(\ell_1)$. Проте, відомо, що серед таких гомоморфізмів є однопараметрична сім'я ψ_s, $s \in \mathbb{C}$ така, що $\psi_s(G(t)) = e^{st}$.

Зауважимо, що формальні генеруючі функції $P(t)$ і $H(t)$, в загальному випадку, не є елементами з $H_{bs}(\ell_1)$ при фіксованих t. Точніше, формула

$$P(t)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} P_n(x)$$

визначає аналітичну функцію у відкритій одиничній кулі з центром в нулі простору ℓ_1 при $t \leq 1$, а ряд

$$H(t)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n H_n(x)$$

при кожному фіксованому $t \in \mathbb{C}$ буде аналітичною функцією в області простору ℓ_1, яка визначається нерівністю $\sup_k |x_k| > |t|$. При цьому, у спільних областях визначення виконуються наступні співвідношення:

$$G(t)(x) = \frac{1}{H(t)(-x)}$$

та

$$G(t)(x) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{P_n(-x)}{n}\right) = \exp\left(-\int_0^t P(\xi)(-x)\; d\xi\right). \qquad (2.4.1)$$

Відомості, викладені у цьому підрозділі, та додаткову інформацію можна знайти у публікаціях [26, 36, 35, 37, 71].

2.5. Симетричний простір Фока і аналітичні функції

Нехай E — комплексний сепарабельний гільбертовий простір з ортогональним базисом $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ та визначеними скалярним добутком $(x|y)_E$ та нормою

$$\|x\|_E = (x \mid x)_E^{1/2}, x, y \in E.$$

Очевидно, що для всіх $n \in \mathbb{N}$, n-ий тензорний степінь $\otimes^n E$ визначається як комплексна лінійна оболонка елементів

$$\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : \quad x_1, \ldots, x_n \in E\}.$$

Також відомо, що можна визначити норму $\|\cdot\|_{\otimes_h^n E}$ на векторному просторі $\otimes^n E$ таким чином, що відповідні степені $\otimes_h^n E$ є гільбертовим простором. А точніше, скалярний добуток на $\otimes_h^n E$ є визначений рівністю

$$\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \mid y_1 \otimes \cdots \otimes y_n \rangle_{\otimes_h^n E} = (x_1 \mid y_1)_E \cdots (x_n \mid y_n)_E$$

для всіх $x_i, y_i \in E$, $i = 1, \ldots, n$. Нехай $[i]$ означає мультиіндекс $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$. Оскільки система

$$\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \in \otimes^n E : [i] \in \mathbb{N}^n\}$$

утворює ортонормований базис в $\otimes_h^n E$, кожен такий вектор $w \in \otimes_h^n E$ може бути представлений у вигляді ряду Фур'є

$$\omega = \sum_{[i] \in \mathbb{N}^n} \alpha_{[i]} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n},$$

і визначимо

$$\|\omega\|_{\otimes_h^n E} = \langle \omega \mid \omega \rangle_{\otimes_h^n E}^{1/2} = \left(\sum_{[i] \in \mathbb{N}^n} |\alpha_{[i]}|^2 \right)^{1/2}.$$

Зрозуміло, що дана норма, породжена скалярним добутком, є крос-норма на $\otimes_h^n E$, тобто,

$$\|x_1 \otimes \cdots \otimes x_n\|_{\otimes_h^n E} = \|x_1\|_E \cdots \|x_n\|_E.$$

Позначимо через $\otimes_s^n E$ n-кратний симетричний алгебраїчний тензорний добуток простору E. Кожен елемент з $\otimes_s^n E$ є визначений формулою

$$x_1 \otimes_s \cdots \otimes_s x_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)},$$

де $x_1, \ldots, x_n \in E$ і S_n — група підстановок на множині $\{1, \ldots, n\}$.

Ми будемо використовувати наступні позначення $e_i^{\otimes k} = \underbrace{e_i \otimes \cdots \otimes e_i}_{k}$ для всіх $k, i \in \mathbb{N}$. Позначимо через (k) довільний мультиіндекс

$$(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n, |(k)| = \sum_i k_i, \ \ (k)! = \prod_i k_i!.$$

Вектори

$$\{e_{[i]}^{\otimes(k)} := e_{i_1}^{\otimes k_1} \otimes_s \cdots \otimes_s e_{i_n}^{\otimes k_n} : \quad [i] \in \mathbb{N}^n, \quad (k) \in \mathbb{Z}_+^n, \quad |(k)| = n\}$$

утворюють ортогональний базис в замиканні $\otimes_{s,h}^n E$ з $\otimes_s^n E$ в $\otimes_h^n E$ і

$$\left\| e_{[i]}^{\otimes(k)} \right\|_{\otimes_h^n E} = \sqrt{\frac{(k)!}{n!}}, \quad n = |(k)|.$$

Ермітово спряжений до гільбертового простору E ми можемо визначити з відношення

$$E^* = \{y^* := \langle \cdot | y \rangle_E \colon y \in E\}.$$

Звернемо увагу, що класичний симетричний простір Фока $\mathcal{F}$ є гільбертова сума $\otimes_{s,h}^n E$, $n = 0, 1, \ldots$, де $\otimes_{s,h}^0 E = \mathbb{C}$. Цей простір спряжений до простору аналітичних функцій на одиничній кулі E [74].

Зауважимо, що у квантовій механіці часто використовують симетричний простір Фока $\mathcal{F}_0$, який складається з елементів вигляду $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$, $u_0 \in \mathbb{C}$, $u_n \in \otimes_s^n E$ і

$$\|u\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|u_n\|^2_{\otimes_h^n E}.$$

В цьому випадку,

$$\|e_{[i]}^{\otimes k}\|^2_{\mathcal{F}_0} = (k)!, \tag{2.5.1}$$

(див. напр. [75, с. 134]).

Будемо вважати, що гільбертовий простір $\mathcal{F}_\eta$ з довільною гільбертовою нормою $\| \cdot \|_\eta$ є *(абстрактний) симетричний простір Фока над даним гільбертовим простором* E, якщо вектори

$$1, \quad e_{[i]}^{\otimes (k)} = e_{i_1}^{\otimes k_1} \otimes_s \cdots \otimes_s e_{i_n}^{\otimes k_n},$$

де $k \in \mathbb{N}$, $k_1 + \cdots + k_n = n$, $i_1 < \ldots < i_n$ утворюють ортогональний базис в $\mathcal{F}_\eta$. Таким чином, $\mathcal{F}_\eta$ може бути представлений як гільбертова пряма сума симетричних тензорних добутків

$$\mathcal{F}_\eta = \mathbb{C} \oplus E \oplus \otimes_{s,h}^2 E \oplus \cdots \oplus \otimes_{s,h}^n E \oplus \cdots .$$

Очевидно, що норма $\| \cdot \|_\eta$ повністю визначається своїми значеннями на базисних векторах. Отже, за набором $\left\| e_{[i]}^{\otimes (k)} \right\|_\eta$ довільних додатних чисел, ми можемо отримати різні симетричні простори Фока над E. Нехай $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\eta$ — скалярний добуток в $\mathcal{F}_\eta$.

Приймемо $c_{[i]}^{(k)} := \left\| e_{[i]}^{(k)} \right\|_\eta^{-2}$ і $c_0 = 1$. Розглянемо степеневий ряд

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \textstyle\sum_{k_1 + \cdots + k_n = 0}^{\infty} \sum_{i_1 < \cdots < i_n} c_{i_1 \ldots i_n}^{k_1 \ldots k_n} x_{i_1}^{k_1} \ldots x_{i_n}^{k_n} e_{i_1}^{\otimes k_1} \ldots e_{i_n}^{\otimes k_n} \\ &= \textstyle\sum_{|(k)|=0}^{\infty} \sum_{[i] \in \mathbb{N}^n} c_{[i]}^{(k)} x_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{\otimes (k)} \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

для всіх $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in E$.

Теорема 2.5.1. *Припустимо, що існують константи* $c > 0$ *і* $M > 0$ *такі, що для всіх мультиіндексів* $[i] \in \mathbb{N}^n$, $(k) \in \mathbb{Z}_+^n$ *і* $n = k_1 + \cdots + k_n$ *виконуються нерівності*

$$0 < c_{[i]}^{(k)} = c_{i_1 \ldots i_n}^{k_1 \ldots k_n} \leq cM^{2n} \frac{(k_1 + \cdots + k_n)!}{k_1! \cdots k_n!} = cM^{2n} \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!}. \tag{2.5.3}$$

Тоді існує відкрита підмножина $U \subset E$, $U \ni 0$ *така, що*

(i) *Ряд (2.5.2) є збіжним для кожного* $x \in U$ *і* η *є аналітичним відображенням з* U *в* $\mathcal{F}_\eta$.

(ii) *Для кожного* $\phi \in \mathcal{F}_\eta$ *відображення* $f_\phi(x) = \langle \eta(x) \mid \phi \rangle_\eta$ *є аналітичною функцією на* U.

(iii) *Функція* $\left\langle \eta(x) \middle| e_{[i]}^{\otimes(k)} \right\rangle_\eta$ *є* n*-однорідним поліномом*

$$\left\langle \eta(x) \middle| e_{[i]}^{\otimes(k)} \right\rangle_\eta = x_{i_1}^{k_1} \cdots x_{i_n}^{k_n}.$$

Доведення даної теореми є в ([75]).

Позначимо через $\mathcal{H}_\eta$ гільбертів простір аналітичних функцій $f_\phi = \langle \eta(\cdot) \mid \phi \rangle_\eta$, тобто ермітово спряжений до $\mathcal{F}_\eta$. Скалярний добуток в $\mathcal{H}_\eta$ позначимо символом $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\eta$.

Для довільного вектора $f \in \mathcal{H}_\eta$ позначимо $\overline{f} \in \mathcal{F}_\eta$ такий, що $f = \langle \cdot \mid \overline{f} \rangle_\eta$. Зокрема, $f(x) = \langle \eta(x) \mid \overline{f} \rangle_\eta$. Аналогічно, через $\overline{g}$, $g \in \mathcal{F}_\eta$ позначимо такий вектор з $\mathcal{H}_\eta$, що $g = \langle \cdot \mid \overline{g} \rangle_\eta$.

У випадку класичного простору Фока $\mathcal{F}$, функція η має вигляд

$$\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{\otimes n},$$

а у випадку простору $\mathcal{F}_0$ має вигляд

$$\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\otimes n}}{n!}.$$

Нагадаємо означення відтворюючого ядра.

Означення 2.5.2. *Нехай Z є деякою абстрактною множиною і $\mathcal{H}$ — гільбертів простір комплексних функцій f на Z з скалярним добутком $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$. Функція $K(x, z)$, яка визначена на $Z \times Z$ називається відтворюючим ядром замкненого підпростору $\mathcal{H}_K \subset \mathcal{H}$, якщо:*

(i) *для довільного фіксованого $z \in Z$, ядро $K(x, z)$ належить $\mathcal{H}_K$ як функція від змінної $x \in Z$;*

(ii) *для довільної функції $f \in \mathcal{H}_K$ і для кожного $z \in Z$*

$$f(z) = \langle f(\cdot) \mid K(\cdot, z) \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Гільбертів простір $\mathcal{H}_K$ називається простором з відтворюючим ядром або функціональним гільбертовим простором.

Нехай $h : Z \to \mathcal{H}$ — функція на Z така, що для кожного $f \in \mathcal{H}_K$ і $x \in Z$ виконується

$$f(x) = \langle f(\cdot) \mid h(x) \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Теорема 2.5.3. *Функція $K(x, z) = \langle h(z) \mid h(x) \rangle_{\mathcal{H}}$ є відтворюючим ядром для $\mathcal{H}_K$.*

Доведення див. [85, с. 21].

Твердження 2.5.4. *Відображення $K \colon E \times E \to \mathbb{C}$, яке визначаєтьcя формулою*

$$K(x, z) = \langle \overline{\eta}(x) \mid \overline{\eta}(z) \rangle_{\eta} = \langle \eta(z) \mid \eta(x) \rangle_{\eta}$$

є відтворюючим ядром для $\mathcal{H}_\eta$.

Доведення випливає з попередньої теореми 2.5.3 для $h(x) := \overline{\eta}(x)$.

Оскільки η утворює відтворююче ядро в $\mathcal{H}_\eta$, то можна вважати, що η є *відтворюючою функцією* в $\mathcal{H}_\eta$.

РОЗДІЛ 3
ЗОБРАЖЕННЯ ГІЛЬБЕРТОВОГО ПРОСТОРУ СИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА ℓ_1

3.1. Базиси в алгебрі симетричних поліномів

Позначимо $P_s(X)$ алгебру всіх симетричних поліномів на нормованому просторі X з безумовним базисом. Послідовність $\{Q_n\} \subset P_s(X)$ називається алгебраїчним базисом в $P_s(X)$, якщо вона алгебраїчно незалежна і для кожного $P \in P_s(X)$ існує поліном від скінченної кількості змінних $q(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ такий, що $P(x) = q(Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_m(x)), x \in X$. Послідовність $\{R_n\} \subset P_s(X)$ називається лінійним базисом в $P_s(X)$, якщо кожен поліном $P \in P_s(X)$ подається у вигляді скінченної лінійної комбінації елементів $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$.

Позначимо $(c_{00}, \mathbb{Q})$ — простір скінченних послідовностей над полем раціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\ell_1 = (\ell_1, \mathbb{C})$ — простір абсолютно сумовних послідовностей над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Послідовності $e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, \ldots, 0, \ldots)$ утворюють безумовний базис в $(c_{00}, \mathbb{Q})$ і ℓ_1.

Позначимо $P_{00} = P_s(c_{00}, \mathbb{Q}) \bigotimes \mathbb{C}$ алгебру всіх комплекснозначних симетричних поліномів на $(c_{00}, \mathbb{Q})$. Очевидно, що $(c_{00}, \mathbb{Q})$ є підмножиною в ℓ_1. Тому кожен поліном $P \in P_s(\ell_1)$ можна звузити на $(c_{00}, \mathbb{Q})$ і це звуження, очевидно, буде належати P_{00}. Позначимо $Z : P_s(\ell_1) \to P_{00}$ операцію звуження.

Теорема 3.1.1. *Оператор звуження Z є ізоморфізмом алгебр $P_s(\ell_1)$ і P_{00}.*

Доведення. Як ми знаємо (див. [54]), поліноми

$$P_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

утворюють алгебраїчний базис в $P_s(\ell_1)$. З іншого боку, добре відомо, що $p_k(x) := Z(P_k(x))$ утворюють алгебраїчний базис в P_{00}. Таким чином Z переводить алгебраїчний базис $P_s(\ell_1)$ в P_{00}. Тому, Z буде ізоморфізмом алгебр, оскільки ізоморфізм алгебр зберігає лінійну та мультиплікативну структуру, Z^{-1} переводить лінійні базиси в лінійні базиси і алгебраїчні базиси в алгебраїчні базиси. □

Базиси алгебри симетричних поліномів на $(c_{00}, \mathbb{Q})$ добре описані в комбінаториці ([76]). Використовуючи ці результати ми можемо описати лінійні та алгебраїчні базиси в $P_s(\ell_1)$.

Нехай $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ — розбиття деякого натурального числа n. Тобто $\lambda_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots, m$ і $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = n$. Ми будемо писати $|\lambda| = n$. Розбиття λ часто записують у вигляді

$$(1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots, r^{m_r}, \ldots), \tag{3.1.1}$$

де показник m_j вказує скільки разів трапляється число j у λ. Позначимо

$$M_\lambda(x) = \sum_{k_1,\ldots,k_m} x_{k_1}^{\lambda_1} x_{k_2}^{\lambda_2} \ldots x_{k_m}^{\lambda_m},$$

де $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Як було зауважено, степеневі поліноми $P_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k$ утворюють алгебраїчний базис $P_s(\ell_1)$. Елементарні симетричні поліноми $G_n(x) = \sum x_{i_1} \ldots x_{i_n}$ утворюють інший алгебраїчний базис в $P_s(\ell_1)$ і виконується рівність Ньютона

$$nG_n = G_{n-1}P_1 - G_{n-2}P_2 + \ldots + (-1)^n P_n.$$

Також, існує повний базис симетричних функцій H_n, які можуть визначатись рівністю

$$nH_n = H_{n-1}P_1 + H_{n-2}P_2 + \ldots + H_1P_{n-1} + P_n.$$

З теореми 3.1.1 і [76] маємо наступне твердження:

Твердження 3.1.2. *1. Поліноми $P_\lambda = P_{\lambda_1}P_{\lambda_2}\ldots P_{\lambda_m}$, $|\lambda| \in \mathbb{N}$ утворюють лінійний базис в $P_s(\ell_1)$.*

2. Поліноми $H_n = \sum_{|\lambda|=n} M_\lambda$ утворюють алгебраїчний базис в $P_s(\ell_1)$.

3. Поліноми $H_\lambda = H_{\lambda_1}H_{\lambda_2}\ldots H_{\lambda_m}$, $|\lambda| \in \mathbb{N}$ утворюють лінійний базис в $P_s(\ell_1)$.

4. Поліноми $G_\lambda = G_{\lambda_1}\ldots G_{\lambda_n}$, $|\lambda| \in \mathbb{N}$ утворюють лінійний базис в $P_s(\ell_1)$.

5. Нехай

$$z_\lambda = \prod_{r\geq 1}(r^{m_r}m_r!),$$

де r та m_r визначені в 3.1.1, тоді лінійні базиси P_λ, H_λ, G_λ пов'язані наступними формулами, які відомі як формули Варінга:

$$G_n = \sum_{|\lambda|=n}(-1)^{n-(m_1+\ldots+m_r)}z_\lambda^{-1}P_\lambda. \tag{3.1.2}$$

$$H_n = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1}P_\lambda. \tag{3.1.3}$$

$$H_n = \sum_{|\lambda|=n}(-1)^{n-(m_1+\ldots+m_r)}\frac{(m_1+\ldots+m_r)!}{m_1!\ldots m_r!}G_\lambda. \tag{3.1.4}$$

$$G_n = \sum_{|\lambda|=n}(-1)^{n-(m_1+\ldots+m_r)}\frac{(m_1+\ldots+m_r)!}{m_1!\ldots m_r!}H_\lambda. \tag{3.1.5}$$

Зауважимо, також, що з комбінаторики відомо, що

$$\sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} = 1 \quad i \quad \sum_{|\lambda|=n} (-1)^{n-(m_1+\ldots+m_r)} z_\lambda^{-1} = 0 \tag{3.1.6}$$

(див. [20], с. 152).

3.2. Гільбертові простори симетричних аналітичних функцій

Введемо на $P_s(\ell_1)$ скалярний добуток $\langle P_\lambda, P_\mu\rangle = b_{\lambda\mu}\delta_{\lambda\mu}$, де $\delta_{\lambda\mu}$ — символ Кронекера, $b_{\lambda\lambda} = b_\lambda > 0$. Даний скалярний добуток породжує норму

$$\|P_\lambda\| = \sqrt{\langle P_\lambda, P_\lambda\rangle} = \sqrt{b_\lambda}.$$

Поповнення простору $P_s(\ell_1)$ відносно даної норми для випадку $b_\lambda = 1$ будемо позначати $H_s(\ell_1)$, а в загальному випадку $H_s^b(\ell_1)$ — гільбертів простір симетричних функцій на ℓ_1 з вагою $b = \{b_\lambda\}_\lambda$.

Очевидно, що значення в точці $x \in \ell_1$ породжує функціонал $\delta_x : P \mapsto P(x)$, $P \in P_s(\ell_1)$. Ми розглянемо питання: при яких x, δ_x буде неперервним функціоналом?

Припустимо, що для деякого $x \in \ell_1$, δ_x — неперервний. Тоді його можна продовжити за неперервністю до лінійного функціонала $H_s^b(\ell_1)$. За теоремою Ріса існує елемент $R_x \in H_s^b(\ell_1)$ такий, що

$$\delta_x(P) = P(x) = \langle P, R_x\rangle.$$

Знайдемо цей елемент.

Якщо такий елемент R_x існує та оскільки $\dfrac{P_\lambda}{\|P_\lambda\|} = \dfrac{P_\lambda}{\sqrt{b_\lambda}}$ — ортонормований базис в $H_s^b(\ell_1)$, то

$$\delta_x\Big(\frac{P_\lambda}{\sqrt{b_\lambda}}\Big) = \frac{P_\lambda(x)}{\sqrt{b_\lambda}} = \Big\langle \frac{P_\lambda}{\sqrt{b_\lambda}}, R_x\Big\rangle.$$

Тому

$$R_x = \sum_\lambda \frac{P_\lambda}{\sqrt{b_\lambda}}\overline{\frac{P_\lambda(x)}{\sqrt{b_\lambda}}} = \sum_\lambda \frac{P_\lambda}{b_\lambda}\overline{P_\lambda(x)}. \tag{3.2.1}$$

Отже, R_x є визначеним для тих елементів x, для яких ряд (3.2.1) збігається в $H_s^b(\ell_1)$. Знайдемо область збіжності даного ряду.

$$\|R_x\|_{H_s^b} = \Big\|\sum_{\lambda}\frac{P_\lambda}{b_\lambda}\overline{P_\lambda(x)}\Big\|_{H_s^b} \le \sum_{n=1}^{\infty}\Big\|\sum_{|\lambda|=n}\frac{P_\lambda}{b_\lambda}\overline{P_\lambda(x)}\Big\|_{H_s^b} \le$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{|\lambda|=n}\Big\|\frac{P_\lambda}{b_\lambda}\Big\|_{H_s^b}|P_\lambda(x)| = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{|\lambda|=n}\frac{|P_\lambda(x)|}{\sqrt{b_\lambda}} \le$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{|\lambda|=n}\frac{\|P_\lambda\|_{\sup}\|x\|_{\ell_1}^n}{\sqrt{b_\lambda}} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{|\lambda|=n}\frac{\|x\|_{\ell_1}^n}{\sqrt{b_\lambda}}.$$

Позначимо $p(n)$ — кількість розбиттів λ натурального числа n. Нехай

$$d_n = \max_{|\lambda|=n}\frac{1}{\sqrt{b_\lambda}}. \tag{3.2.2}$$

Тоді

$$\|R_x\|_{H_s^b} \le \sum_{n=1}^{\infty} p(n) d_n \|x\|_{\ell_1}^n.$$

З відомої формули Харді-Рамануджана-Успенського маємо наступну асимптотичну оцінку для кількості розбиттів $p(n)$ числа n при $n \to \infty$:

$$p(n) \sim \frac{\exp(\pi\sqrt{2n/3})}{4n\sqrt{3}}. \tag{3.2.3}$$

Тому, використовуючи формулу Коші-Адамара, радіус збіжності ряду можна оцінити:

$$r \ge \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}(p(n)d_n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} d_n^{\frac{1}{n}}}.$$

Таким чином ми довели наступну теорему.

Теорема 3.2.1. *Простір $H_s^b(\ell_1)$ є простором аналітичних функцій в кулі з центром в нулі радіуса*

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} d_n^{\frac{1}{n}}}$$

в ℓ_1, де константи d_n визначаються формулою (3.2.2).

З теореми 3.2.1 маємо, що якщо $\|P_\lambda\|_{H_s^b} \geq 1$ для довільного розбиття λ, то $\sqrt{b_\lambda} \geq 1$, $d_n \leq 1$ для довільного n і тому радіус рівномірної збіжності r всіх функцій з $H_s^b(\ell_1)$ буде не менший ніж 1. Тобто, $H_s^b(\ell_1)$ є підпростором у просторі аналітичних функцій на одиничній кулі в ℓ_1.

Для випадку $b_\lambda = z_\lambda = \prod_{r\geq 1}(r^{m_r} m_r!)$ позначимо $H_s^b(\ell_1)$ через $H_s^z(\ell_1)$. Тоді оцінка для норми R_x буде мати вигляд

$$\|R_x\|_{H_s^z} = \left\|\sum_\lambda P_\lambda z_\lambda^{-1} P_\lambda(x)\right\|_{H_s^z} \leq$$

$$\leq \sum_n \left\|\sum_{|\lambda|=n} P_\lambda z_\lambda^{-1} P_\lambda(x)\right\|_{H_s^z} \leq \sum_n \sum_{|\lambda|=n} \left\|\frac{P_\lambda}{z_\lambda}\right\|_{H_s^z} \big|P_\lambda(x)\big| \leq$$

$$\leq \sum_n \sum_{|\lambda|=n} \big|P_\lambda(x)\big| \leq \sum_n p(n)\|x\|_{\ell_1}^n,$$

а радіус збіжності, відповідно

$$r \geq \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \big(p(n)\big)^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Тобто ряд 3.2.1 збігається при $\|x\| \leq 1, x \in \ell_1$. Іншими словами, можна стверджувати, що кожен елемент $F \in H_s^z(\ell_1)$ задає аналітичну функцію $F(x)$ на одиничній кулі в ℓ_1 за формулою:

$$F(x) = \delta_x(F) = \langle F, R_x\rangle.$$

Розглянемо випадок, коли $b_\lambda \geq |\lambda|!$. Тоді, з формули (3.2.2) випливає, що

$$d_n \leq \frac{1}{\sqrt{n!}}.$$

Враховуючи обчислення, зроблені вище і той факт, що $\sqrt{(n!)^{1/n}} \to \infty$ при $n \to \infty$ отримуємо, що в цьому випадку, радіус рівномірної збіжності

$r=\infty$. Таким чином, простір $H_s^b(\ell_1)$ у випадку коли $b_\lambda \geq |\lambda|!$, складається з цілих симетричних функцій обмеженого типу на ℓ_1. З іншого боку, $H_s^b(\ell_1)$ містить всі симетричні поліноми. Оскільки простір симетричних поліномів щільний в алгебрі $H_{bs}(\ell_1)$ цілих симетричних функцій обмеженого типу на ℓ_1, то, для цього випадку $H_s^b(\ell_1)$ є щільним підпростором в $H_{bs}(\ell_1)$. Таким чином, ми отримали наступне твердження.

Твердження 3.2.2. *Нехай $b_\lambda \geq |\lambda|!$ для всіх розбиттів λ. Тоді гільбертів простір $H_s^b(\ell_1)$ є власним щільним підпростором в алгебрі $H_{bs}(\ell_1)$ і функціонали δ_x є неперервними в цій алгебрі для всіх $x \in \ell_1$.*

Доведення. Як було показано вище, для $b_\lambda \geq |\lambda|!$ радіус рівномірної збіжності r кожної функції f з $H_s^b(\ell_1)$ дорівнює нескінченності, тому f визначена в кожній точці $x \in \ell_1$ і функціонали δ_x є неперервними. Покажемо, що $H_s^b(\ell_1) \neq H_{bs}(\ell_1)$. Але, якби така рівність мала місце, то з теореми Банаха про обернений оператор, ми б мали ізоморфізм між гільбертовим простором $H_s^b(\ell_1)$ і простором Фреше $H_{bs}(\ell_1)$, який не є нормованим. Але це не можливо. $\square$

3.3. Зображення множини скінченних мультимножин у просторі симетричних поліномів

Нехай M_0 – множина всіх скінченних мультимножин. Тобто, кожен елемент $u \in M_0$ може бути поданий у вигляді $u = \{a^m, b^n, c^k, \ldots\}$, де $a, b, c, \ldots$ – ненульові комплексні числа, $m, n, k, \ldots$ – число повторень $a, b, c, \ldots$ в u відповідно.

Нехай c_{00} – лінійний простір усіх скінченних послідовностей $x = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$. Будемо вважати, що $x \sim y, x, y \in c_{00}$, якщо існує підстановка $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, така що

$$\sigma(x) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, \ldots) = y.$$

Нехай $c_{00/\sim}$ – фактор-множина відносно цього відношення еквівалентності. Очевидно, що тотожнє відображення

$$I : \{a^m, b^n, c^k, \ldots\} \mapsto (\underbrace{a \ldots a}_{m}, \underbrace{b \ldots b}_{n}, \underbrace{c \ldots c}_{k}, \ldots, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

є бієкцією між M_0 та $c_{00/\sim}$.

Зазначимо, що M_0 – комутативна напівгрупа відносно операції об'єднання: $uv = u \cup v,\ u, v \in M_0$. Будемо казати, що поліноми $p(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$ є нормованими, якщо $a_n = 1$ і $a_0 \neq 0$. Множина всіх нормованих поліномів $P_N(\mathbb{C})$ утворює комутативну напівгрупу відносно множення.

Твердження 3.3.1. *Нехай $\mathbb{P} = \{Q_n\}$ – алгебраїчний базис в алгебрі симетричних поліномів на $c_{00}, P_s(c_{00})$. Тоді відображення $\tau_{\mathbb{P}} : c_{00/\sim} \to P_N(\mathbb{C})$*

$$\tau_{\mathbb{P}} : x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots) \mapsto t^n - Q_n(x) t^{n-1} + \ldots + (-1)^n Q_1(x)$$

є бієкцією, і, якщо $Q_n = G_n$, *то* $\tau_{\mathbb{G}} \circ I$ *є ізоморфізмом напівгруп* M_0 *і* $P_N(\mathbb{C})$.

Доведення. З теореми Вієта випливає, що кожен нормований поліном p має вигляд

$$p(t) = t^n - G_n(x)t^{n-1} + \ldots + (-1)^n G_1(x),$$

де $x = (x_1, \ldots, x_n), x_k \neq 0$ для будь-якого k, і $\{x_1, \ldots, x_n\} \in M_0$ є множиною нулів полінома p. Отже, відображення $\tau_{\mathbb{G}} \circ I$ є сюр'єктивним на $P_N(\mathbb{C})$. Навпаки, якщо $u = \{x_1, \ldots, x_n\} \in M_0$, $x = I(u) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$, то $\tau_{\mathbb{G}} \circ I(x) \in P_N(\mathbb{C})$. Отже, $\tau_{\mathbb{G}} \circ I$ є ін'єктивним. Якщо p і q належать $P_N(\mathbb{C})$, u є мультимножиною нулів p і v є мультимножиною нулів q, тоді $u \cup v$ є мультимножиною нулів pq. Таким чином, $\tau_{\mathbb{G}} \circ I$ є ізоморфізмом напівгруп. Нехай тепер $\mathbb{P} = \{Q_n\}$ є довільним однорідним алгебраїчним базисом в $P_s(c_{00})$. Тоді існує поліноміальний автоморфізм (тобто бієктивне поліноміальне відображення, обернене до якого є також поліноміальним) $\Phi_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ такий, що

$$(Q_1(x), \ldots, Q_n(x)) = (\Phi_n(G_1(x)), \ldots, \Phi_n(G_n(x))),$$

$\Phi(G_1) = aG_1$ для деяких $a \neq 0$,

$$p = t^n - Q_n(x)t^{n-1} + \ldots + (-1)^n Q_1(x) \in P_N(\mathbb{C})$$

для всіх $x = \{x_1, \ldots, x_n\} \in M_0$ і тому відображення

$$p \mapsto t^n - G_n(x)t^{n-1} + \ldots + (-1)^n G_1(x)$$

буде бієкцією. Таким чином, відображення $\tau_{\mathbb{P}}$ є композицією двох бієктивних відображень. $\square$

Нехай $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис n-однорідних симетричних поліномів на c_{00} і $\overline{\mathbb{P}}$ буде множиною $\{(Q_n(x))_{n=1}^{\infty}, x \in c_{00}\}$. Зауважимо, що якщо d — деяка метрика на c_{00}, то в загальному випадку, її не можна продовжити до метрики ρ на $c_{00/\sim}$ такої, що $\rho([x],[y]) = d(x,y)$, де $[x] = \{z \in c_{00} \colon z \sim x\}$. Проте, на $\overline{\mathbb{P}}$ існує інша природна метрика. Нехай

$$u = (u_n)_{n=1}^{\infty} = (Q_n(x))_{n=1}^{\infty}$$

і

$$v = (v_n)_{n=1}^{\infty} = (Q_n(y))_{n=1}^{\infty}.$$

Визначимо

$$\rho(u,v) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n - v_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Твердження 3.3.2. *Припустимо, що алгебраїчний базис Q_n вибраний таким чином, що $\sup_n |Q_n(x)|^{1/n} < \infty$ для будь-якого $x \in c_{00}$. Тоді функція $\rho(u,v)$ є метрикою на $\overline{\mathbb{P}}$.*

Доведення. З умови $\sup_n |Q_n(x)|^{1/n} < \infty$ випливає, що $\rho(u,v)$ приймає скінченні значення. З означення ρ маємо, що

$$\rho(u-v,0) = \rho(u,v).$$

Достатньо перевірити нерівність трикутника. Оскільки

$$|u_n + v_n|^{\frac{1}{n}} \le (|u_n| + |v_n|)^{\frac{1}{n}} \le |u_n|^{\frac{1}{n}} + |v_n|^{\frac{1}{n}},$$

ми маємо

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n + v_n|^{\frac{1}{n}} \le \sup_{n\in\mathbb{N}} (|u_n|^{\frac{1}{n}} + |v_n|^{\frac{1}{n}}) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^{\frac{1}{n}} + \sup_{j\in\mathbb{N}} |v_j|^{\frac{1}{j}},$$

і

$$\rho(u+v,0) \le \rho(u,0) + \rho(v,0).$$

Замінивши u на $u-w$ і v на $w-v$, отримаємо

$$\rho(u-v,0) \le \rho(u-w,0) + \rho(v-w,0).$$

Тому

$$\rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v),$$

що й треба було довести. □

Метрика ρ залежить від вибору алгебраїчного базису $\{Q_n\}$. Зауважимо, що умова $\sup_n |Q_n(x)|^{1/n} < \infty$ виконується, якщо відносно деякої норми $\|\cdot\|$ на c_{00} всі поліном Q_n є неперервними і послідовність $\{\|Q_n\|^{1/n}\}_n$ є обмеженою. Справді, в цьому випадку $|Q_n(x)| \leq \|Q_n\|\|x\|^n$, тому $|Q_n(x)|^{1/n} \leq \|Q_n\|^{1/n}\|x\|$. Таким чином, в якості Q_n можна брати такі базиси симетричних поліномів, визначених на ℓ_1, як P_n, G_n або H_n.

3.4. Зображення множини мультимножин у просторах симетричних аналітичних функцій

Нехай $\mathcal{F}$ — це деякий топологічний векторний простір функцій, заданих на $c_{00/\sim}$, такий, що функціонал $\delta_u : f \mapsto f(u)$ є неперервним для кожного $u \in c_{00/\sim}$. Тоді $c_{00/\sim}$ можна ототожнити з підмножиною лінійних неперервних функцій на $\mathcal{F}$ і, отже, ми можемо розглянути природну топологізацію простору $c_{00/\sim}$ і його поповнення (якщо топологія метризовна).

Розглянемо простір $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}$ поліномів на c_{00} вигляду

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n Q_n(x),$$

де $Q_n \in \mathbb{P},\ Q_0 = 1$. Очевидно, що $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}$ є лінійним підпростором і функції δ_x, $\delta_x(Q) = Q(x)$ є лінійними функціоналами на цьому просторі.

Розглянемо на c_{00} таку нормовану топологію, щоб всі поліноми з $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}$ були неперервними відносно цієї топології. Така топологія існує, зокрема, це топологія породжена нормою простору ℓ_1, $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Справді, оскільки поліноми Q_n є симетричними, то вони можуть бути подані у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів P_n, а всі P_n є визначені і неперервні на ℓ_1.

Нехай $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}$ — поповнення простору $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}$ відносно топології рівномірної збіжності на обмежених множинах ℓ_1. Тобто $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}$ є простором Фреше, породженим послідовністю норм

$$\|f\|_r = \sup_{\|x\| \le r} |f(x)|,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0,$$

де $\mathbb{Q}$ – поле раціональних чисел. Таким чином, множина скінченних мультимножин вкладається у множину лінійних неперервних функціоналів $\mathcal{H}'_{\mathbb{P}}$ простору $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}$.

Теорема 3.4.1. *Припустимо, що*

$$\|Q_n\|_{\ell_1} = \sup_{\|x\|_{\ell_1} \leq 1} |Q_n(x)| = 1.$$

Тоді простір $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}$ ізоморфний до простору всіх цілих функцій $H(\mathbb{C})$ на $\mathbb{C}$, а простір $\mathcal{H}'_{\mathbb{P}}$ ізоморфний до простору функцій експоненціального типу на $\mathbb{C}$.

Доведення. Нехай

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q_n(x) \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}}.$$

Тоді $f(x)$ є цілою функцією на ℓ_1 і радіус обмеженості ρ_0 цієї функції є нескінченний. З іншого боку, відомо (див. [40]), що

$$\rho_0(f) = \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n Q_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} = \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}.$$

Таким чином $f \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}}$ тоді і тільки тоді коли

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n \in H(\mathbb{C}).$$

Відображення $f \mapsto g$ є ізоморфізмом просторів $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}$ та $H(\mathbb{C})$. Добре відомо, що $H'(\mathbb{C})$ ізоморфний до простору функцій експоненціального типу. □

Ми можемо поповнити простір $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}$ відносно деякої гільбертової норми. Визначимо скалярний добуток на $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}$ такою формулою: $\langle Q_k, Q_m\rangle = \delta_{k,m}$, де $\delta_{k,m}$ – символ Кронекера. Позначимо $E_{\mathbb{P}}$ гільбертів простір, який є поповненням $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}$ відносно норми, породженої цим скалярним добутком.

Теорема 3.4.2. *Припустимо, що*

$$\left(\limsup_{n\to\infty} \|Q_n\|_{\ell_1}^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} = r > 0.$$

Тоді для кожного $x \in \ell_1$, такого, що $\|x\|_{\ell_1} < r$, лінійний функціонал, що визначається на $\mathbb{P}$ формулою $\delta_x(P) = P(x)$, є визначеним і неперервним на просторі $E_{\mathbb{P}}$.

Доведення. Нехай $\|x\|_{\ell_1} < r$. Згідно з умовою теореми, для будь-якої послідовності $(a_n) \in \ell_2$, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(x)$$

збігається, тобто функціонал δ_x визначено на всіх елементах

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n Q_n \in E_{\mathbb{P}}.$$

Крім того, оскільки для тих $x \in \ell_1$, що $\|x\|_{\ell_1} < r$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ абсолютно збігається, то послідовність $(Q_n(x))_{n=1}^{\infty}$ належить простору ℓ_1 і, зокрема, ця послідовність належить простору ℓ_2. Тому

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n Q_n(x)\Big|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \big|Q_n(x)\big|^2 < \infty.$$

$\square$

Приклад. Розглянемо простір $E_{\mathbb{P}}$ для випадку $\mathbb{P} = \{G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots\}$. З [37] відомо, що $\|G_n\|_{\ell_1} = \frac{1}{n!}$. Тому поліноми $Q_n = G_n$ задовольняють умови теореми для $r = \infty$. Розглянемо такі елементи $x^n \in \ell_1$:

$$x^n = (\alpha_{0,n}, \alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{n-1,n}, 0, \ldots),$$

де $\alpha_{0,n}, \ldots, \alpha_{n-1,n}$ — корені $n-$того степеня з одиниці. З теореми Вієта і властивостей коренів з одиниці випливає, що $G_k(x^n) = 0$ при $k < n$ і $G_n(x^n) = 1$. Крім того, для $k > n$, $G_k(x^n) = 0$ за означенням G_k. Отже, елементи $\{(-1)^{n+1}G_n\}$ і функціонали $\{\delta_{x^n}\}$ утворюють біортогональні послідовності. Іншими словами,

$$\langle G_n, G_n \rangle = (-1)^{n+1}\delta_{x^n}(G_n) = 1$$

і для кожного $f \in E_{\mathbb{P}}$, $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n G_n$,

$$\langle f, G_n \rangle = (-1)^{n+1} f(x^n) = (-1)^{n+1} a_n.$$

Враховуючи, що згідно з теоремою 3.4.2 для кожного $x \in \ell_1$, функціонал δ_x є неперервним на гільбертовому просторі $E_{\mathbb{P}}$, δ_x можна подати у вигляді $\delta_x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{x^n}$, і $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. При цьому $c_n = (-1)^{n+1} G_n(x)$.

3.5. Зв'язок з абстрактними просторами Фока

Використовуючи абстрактні простори Фока можна зробити точнішу оцінку області в ℓ_1 для якої функціонали δ_x будуть неперервними.

Твердження 3.5.1. *Відображення, визначене на базисних векторах простору $H_s^b(\ell_1)$ рівністю*

$$\xi\colon P_\lambda \mapsto e_{\lambda_1} \otimes_s \ldots \otimes_s e_{\lambda_m}, \qquad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$$

задає ізометричний ізоморфізм простору $H_s^b(\ell_1)$ до абстрактного симетричного простору Фока $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E)$ над деяким гільбертовим простором E для якого константи $c_{[i]}^{(k)}$ з формули (2.5.2) визначаються рівністю $c_{[i]}^{(k)} = \|P_{i_1}^{k_1} \ldots P_{i_n}^{k_n}\|^{-2}$. Ізоморфізм ξ є мультиплікативним на підпросторі поліномів у $H_s^b(\ell_1)$.

Доведення. З означень і результатів, наведених у підрозділі 2.5 маємо, що норма елемента $e_{\lambda_m} \otimes_s \ldots \otimes_s e_{\lambda_m}$ дорівнює

$$\frac{1}{\sqrt{c_{[i]}^{(k)}}} = \|P_{i_1}^{k_1} \ldots P_{i_m}^{k_m}\|.$$

Отже, відображення ξ переводить ортогональний базис простору $H_s^b(\ell_1)$ у ортогональний базис простору $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E)$ зі збереженням норми. Тому ξ є ізометоричним ізоморфізмом. Зрозуміло, що ξ переводить поліноми з $H_s^b(\ell_1)$ у тензорні поліноми і добутки поліномів у відповідні тензорні добутки. $\square$

Зауважимо, що замкнена лінійна оболонка $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ буде прообразом простору E при відображенні ξ.

Позначимо Ω — область в ℓ_1

$$\Omega = \{x \in \ell_1 \colon |P_n(x)| < 1,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Легко бачити, що Ω містить відкриту одиничну кулю простору ℓ_1 як власну підмножину.

Твердження 3.5.2. *Множина Ω є необмеженою і відкритою підмножиною в ℓ_1. Крім того, для кожного $x \in \Omega$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |P_n(x)| < \infty.$$

Доведення. Покажемо, що існує необмежена послідовність в ℓ_1, яка належить Ω. Розглянемо числову послідовність

$$x_n = (-1)^n \frac{6}{\pi^2 n}.$$

Нехай $(z_{(m)})$ — послідовність з ℓ_1 така, що

$$z_{(m)} = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots).$$

Тоді,

$$|P_1(z_m)| \le \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \frac{6 \ln 2}{\pi^2} < 1,$$

$$|P_2(z_m)| \le \frac{36}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{6}{\pi^2} < 1$$

і, для $n > 2$, $|P_n(z^m)| < |P_2(z_m)| < 1$.

Оскільки $P_n(z_{(m)}) < 1$ для всіх натуральних n, m, то $z_{(m)} \in \Omega$. З іншого боку, очевидно, що $\|z_{(m)}\| = \dfrac{6}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \to \infty$ при $m \to \infty$. Отже, Ω є необмеженою множиною.

Зауважимо, що якщо $x = \sum x_k e_k \in \Omega$, то $|x_k| < 1$ для кожного k. Тобто Ω лежить у відкритій підмножині

$$\mathbb{D}_1 = \{x \in \ell_1 \colon \forall k \in \mathbb{N} \quad |x_k| < 1\}.$$

Розглянемо відображення $\Psi(x) = (P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots)$. У роботі [36] показано, що Ψ — неперервне відображення і $\Psi \colon \mathbb{D}_1 \to \ell_1$. Тому

$\sum_{n=1}^{\infty} |P_n(x)| < \infty$. З іншого боку, Ω є прообразом відкритої множини $\mathbb{D}_1$ при відображенні Ψ. Тому Ω — відкрита підмножина. $\square$

Розглянемо абстрактний простір Фока $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ з нормою $\left\| e_{[i]}^{(k)} \right\|_\eta = 1$. Згідно формули (2.5.2) цій нормі відповідає відображення η:

$$\eta(y) = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} y_i^k e_i^k = \sum_{|(k)|=0}^{\infty} \sum_{[i]} y_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)},$$

де $y_i = (y, e_i)$ — координати вектора $y \in \ell$. В роботі [18] (див. теорему 2.5.1) показано, що η є аналітичним відображенням з $\mathbb{D}_2 \supset \mathbb{D}_1$ в $\mathcal{F}_1$, де

$$\mathbb{D}_2 = \{x \in \ell_2 \colon \forall k \in \mathbb{N} \quad |x_k| < 1\}$$

— відкрита підмножина в ℓ_2.

Оскільки відображення ξ є ізометричним ізоморфізмом з $H_s(\ell_1)$ в $\mathcal{F}_1$, то $\xi(R_x) \in \mathcal{F}_1$ для кожного $x \in \ell_1$, $\|x\| < 1$. Покажемо, що елемент R_x коректно визначений для всіх $x \in \Omega$. Для цього достатньо показати, що $\xi(R_x) \in \mathcal{F}_1$ при $x \in \Omega$. З формули (3.2.1) маємо

$$\xi(R_x) = \xi\Big(\sum_\lambda P_\lambda \overline{P_\lambda(x)}\Big) = \sum_\lambda e_\lambda \overline{P_\lambda(x)}. \tag{3.5.1}$$

Оскільки $|P_n(x)| < 1$ і ряд $\sum |P_n(x)|$ збігається для кожного $x \in \Omega$, то

$$\sum_\lambda |P_\lambda(x)|^2 \le \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |P_i(x)|^{2k} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - |P_i(x)|^2}.$$

З іншого боку

$$\ln\Big(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - |P_i(x)|^2}\Big) = -\ln \prod_{i=1}^{\infty} (1 - |P_i(x)|^2) \le$$

$$\le -\sum_{i=1}^{\infty} (-|P_i(x)|^2) = \sum_{i=1}^{\infty} |P_i(x)|^2.$$

Тому

$$\|\xi(R_x)\|^2 = \sum_\lambda |P_\lambda(x)|^2 \le \exp\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |P_i(x)|^2\Big) < \infty.$$

Отже, $\xi(R_x) \in \mathcal{F}_1$, тобто $R_x \in H_s(\ell_1)$ для всіх $x \in \Omega$. Таким чином ми довели наступну теорему.

Теорема 3.5.3. *Нехай* $\|P_\lambda\| = 1$ *для довільного розбиття* λ. *Тоді* $H_s(\ell_1)$ *є простором аналітичних функцій на* Ω. *При цьому*

$$f(x) = \langle f, R_x \rangle = \langle \xi(f), \xi(R_x) \rangle,$$

$x \in \Omega$, $f \in H_s(\ell_1)$.

Зауважимо, що якщо $x \notin \Omega$, то для деякого m, $|P_m(x)| > 1$. Тоді у формулі (3.5.1) ряд буде містити розбіжний доданок $\sum_k e_m^k \overline{(P_m(x))^k}$. Тому R_x не буде коректно визначеним. Тому область Ω у теоремі 3.5.3 є точною.

Розглянемо загальний випадок простору $H_s^b(\ell_1)$. Тобто $\langle P_\lambda, P_\mu \rangle = b_{\lambda\mu}\delta_{\lambda\mu}$ і $\|P_\lambda\| = \sqrt{b_\lambda}$. Позначимо Ω_b таку множину $x \in \ell_1$, що елементи $R_x \in H_s^b(\ell_1)$, тобто функціонали $\delta_x \in H_s^b(\ell_1)$.

Твердження 3.5.4. $x \in \Omega_b$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_n=n} \frac{|P_{\lambda_1}(x)\cdots P_{\lambda_n}(x)|^2}{b_\lambda} < \infty.$$

Доведення. Довільний елемент f з $H_s^b(\ell_1)$ можна подати у вигляді

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda P_\lambda, \quad \text{де} \quad \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} |c_\lambda|^2 b_\lambda < \infty.$$

Припустимо, що $x \in \Omega_b$. Тоді

$$\delta_x(f) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda P_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda a_\lambda < \infty.$$

З того, що $P_\lambda(x) = a_\lambda$ випливає, що

$$\delta_x = \Big\langle \cdot \,\Big|\, \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \frac{a_\lambda P_\lambda}{|P_\lambda|^2} \Big\rangle = \Big\langle \cdot \,\Big|\, \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \frac{a_\lambda P_\lambda}{b_\lambda} \Big\rangle.$$

Тому

$$\|\delta_x\|^2 = \langle \delta_x | \delta_x \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = n} \frac{|a_{\lambda_1} \cdots a_{\lambda_n}|^2}{b_\lambda}.$$

Навпаки, якщо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = n} \frac{|P_{\lambda_1} \cdots P_{\lambda_n}(x)|^2}{b_\lambda} < \infty,$$

то $\|\delta_x\| < \infty$, тому δ_x — неперервний функціонал і, отже, $x \in \Omega_b$. $\square$

Зауважимо, що з теореми 3.2.1 випливає, що якщо

$$\limsup_{|\lambda| \to \infty} \left| b_\lambda \right|^{1/|\lambda|} = 0,$$

то елементи простору $H_s^b(\ell_1)$ не є аналітичними функціями в жодному околі точки 0 простору ℓ_1. В цьому випадку множина Ω_b може складатись з однієї точки 0. Це, зокрема, так для $b_\lambda = n^n$, де $n = |\lambda|$. З іншого боку, якщо

$$\limsup_{|\lambda| \to \infty} \left| b_\lambda \right|^{1/|\lambda|} = r > 0,$$

то Ω_b містить відкриту кулю з центром в нулі, радіуса r.

Твердження 3.5.5. *Припустимо, що Ω_b містить відкриту підмножину. Тоді лінійна оболонка функціоналів δ_x, $x \in \Omega_b$ є щільною у просторі всіх лінійних неперервних функціоналів $H_s^b(\ell_1)^*$ на $H_s^b(\ell_1)$. Крім того, в цьому випадку, точки множини Ω_b розділяють елементи простору $H_s^b(\ell_1)$. Тобто, якщо $f_1 \neq f_2$ в $H_s^b(\ell_1)$, то $f_1(x) \neq f_2(x)$ для деякої точки $x \in \Omega$.*

Доведення. Припустимо, що лінійна оболонка функціоналів δ_x, $x \in \Omega_b$ не є щільною. Тоді знайдеться ненульовий вектор $f \in H_s^b(\ell_1)$ ортогональний до замкненої лінійної оболонки цих функціоналів. Це означає, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in \Omega_b$, тобто аналітична функція на Ω_b

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda P_\lambda(x) = 0$$

в кожній точці деякої відкритої множини. Але це може бути тільки тоді, коли $f = 0$. Суперечність.

Аналогічно, якщо $f_1 \neq f_2$ в $H_s^b(\ell_1)$, то $f = f_1 - f_2 \neq 0$, тому знайдеться $x \in \Omega_b$, що $f(x) \neq 0$. □

Знайдемо $\|G_\lambda\|$ та $\|H_\lambda\|$ в просторі $H_s^b(\ell_1)$. Використовуючи формули (3.1.1) та (3.1.2) маємо

$$\|H_n\|^2 = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-2} \|P_\lambda\|^2 = \sum_{|\lambda|=n} \frac{b_\lambda}{z_\lambda^2}, \tag{3.5.2}$$

$$\|G_n\|^2 = \sum_{|\lambda|=n} \left((-1)^{n-(m_1+\ldots+m_r)} z_\lambda^{-1} \right)^2 \|P_\lambda\|^2 = \sum_{|\lambda|=n} \frac{b_\lambda}{z_\lambda^2}. \tag{3.5.3}$$

Таким чином, у випадку, коли $b_\lambda = z_\lambda$, за формулою (3.1.6) маємо

$$\|H_n\| = \|G_n\| = \sum_{|\lambda|=n} \frac{1}{z_\lambda} = 1. \tag{3.5.4}$$

Отже, ми довели таке твердження.

Твердження 3.5.6. *У просторі $H_s^b(\ell_1)$ норми поліномів H_n та G_n задаються формулами (3.5.2), (3.5.3). У випадку $b_\lambda = z_\lambda$, $\|H_n\| = \|G_n\| = 1$.*

Зауважимо, що G_λ і G_μ не обов'язково ортогональні при $\lambda \neq 0$. Якщо $|\lambda| \neq |\mu|$, то очевидно, що $G_\lambda \perp G_\mu$. Проте, наприклад,

$$\langle G_2, G_1^2 \rangle = \left\langle \frac{p_1^2 - p_2}{2}, p_1^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \langle p_1^2, p_1^2 \rangle = \frac{1}{2} \|p_1^2\|^2 \neq 0.$$

Аналогічний приклад можна навести і для базису $\{H_\lambda\}$.

Оскільки, при $\lambda = (n, 0, \ldots)$, $z_\lambda = n^1 1!$, то $\|P_n\| = \sqrt{n}$ у просторі $H_s^z(\ell_1)$.

Пронормуємо послідовність $\{P_n\}$ у просторі $H_s^z(\ell_1)$. Покладемо $Q_n = \frac{P_n}{\sqrt{n}}$, тоді $\|Q_n\| = 1$. Нехай $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n}), |\lambda| = n$. Знайдемо $\|Q_\lambda\| = \|Q_{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot Q_{\lambda_n}\| = \|Q_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot Q_n^{m_n}\|$.

$$\|Q_\lambda\|^2 = \langle Q_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot Q_n^{m_n}, Q_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot Q_n^{m_n} \rangle =$$

$$\frac{\langle P_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot P_n^{m_n}, P_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot P_n^{m_n} \rangle}{1^{m_1} 2^{m_2} \ldots m^{m_n}} = \frac{z_\lambda}{1^{m_1} 2^{m_2} \ldots m^{m_n}} =$$

$$\frac{1^{m_1} \cdot \ldots \cdot 1^{m_n} m_1! \cdot \ldots \cdot m_n!}{1^{m_1} \cdot \ldots \cdot 1^{m_n}} = m_1! \cdot \ldots \cdot m_n! = (m)!.$$

Тобто $\|Q_\lambda\| = \sqrt{(m)!}$.

Порівнюючи значення норми для поліному Q_λ з формулою (2.5.1) отримуємо, що вони збігаються для випадку $k = n$. Таким чином, ми довели наступну теорему.

Теорема 3.5.7. *Лінійне відображення з симетричного простору Фока $\mathcal{F}_0$ на простір $H_s^z(\ell_1)$, визначене на базисних елементах формулою:*

$$\mathcal{I} : e_{[i]}^{\otimes(k)} \mapsto Q_\lambda = Q_{i_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot Q_{i_n}^{k_n},\ \lambda = (i_1^{k_1}, i_2^{k_2}, \dots, i_n^{k_n}),\ |\lambda| = n$$

є ізометричним ізоморфізмом гільбертових просторів.

Зауважимо, що $\mathcal{I}(e_n) = \xi^{-1}\left(\frac{e_n}{\sqrt{n}}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Застосовуючи цю теорему і формули Ньютона і Варінга, ми можемо описати ортонормовані базиси в просторі Фока $\mathcal{F}_0$, які не є однорідними тензорними поліномами.

Нехай $\lambda = (i_1^{k_1}, i_2^{k_2}, \dots, i_n^{k_n})$, $|\lambda| = |(k)| = n$. Позначимо

$$e_\lambda = e_{[i]}^{\otimes(k)} = e_{i_1}^{k_1} \otimes e_{i_2}^{k_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}^{k_n}.$$

Розглянемо такі елементи з $\mathcal{F}_0$:

$$h_n = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} \sqrt{i_1^{k_1} i_2^{k_2} \dots i_n^{k_n}} e_\lambda$$

$$g_n = \sum_{|\lambda|=n} (-1)^{n-k_1-\dots-k_n} z_\lambda^{-1} \sqrt{i_1^{k_1} i_2^{k_2} \dots i_n^{k_n}} e_\lambda.$$

Наслідок 3.5.8. *Послідовності* $(h_n)_{n=1}^\infty$ *та* $(g_n)_{n=1}^\infty$ *є ортонормованими системами векторів у просторі* $\mathcal{F}_0$.

Доведення. Зауважимо, що

$$P_\lambda = \sqrt{i_1^{k_1} i_2^{k_2} \dots i_n^{k_n}} Q_\lambda.$$

Тому формули (3.1.2-3.1.6) можна переписати у вигляді

$$H_n = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} \sqrt{i_1^{k_1} i_2^{k_2} \dots i_n^{k_n}} Q_\lambda$$

$$G_n = \sum_{|\lambda|=n} (-1)^{n-k_1-\dots-k_n} z_\lambda^{-1} \sqrt{i_1^{k_1} i_2^{k_2} \dots i_n^{k_n}} Q_\lambda.$$

Як було показано, системи векторів $(H_n)_{n=1}^\infty$ і $(G_n)_{n=1}^\infty$ є ортонормальними у просторі $H_s^z(\ell_1)$. Застосуємо ізоморфізм $\mathcal{I}$ і покладемо $g_n = \mathcal{I}(G_n)$ і $h_n = \mathcal{I}(H_n)$. □

Зауважимо, що простір $H_s^b(\ell_1)$ не є алгеброю відносно операцій додавання і множення для довільної сім'ї b_λ, тобто добуток двох елементів з $H_s^b(\ell_1)$ не завжди належить $H_s^b(\ell_1)$. Справді, нехай $Q \in H_s^b(\ell_1)$, $\|Q\| = 1$. Для кожного $c = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots) \in \ell_2$ розглянемо $f_c = \sum_{n=0}^{\infty} c_n Q^n$. Очевидно, що $f_c \in H_s^b(\ell_1)$. Проте $f_c \cdot f_{c'}$ буде належати $H_s^b(\ell_1)$ тільки тоді коли згортка двох елементів c і c' належить до ℓ_2. Це не завжди так, зокрема, для прикладу можна взяти $c_n = c'_n = \dfrac{1}{n}$. З іншого боку, очевидно, що якщо $f \in H_s^b(\ell_1)$ і $p \in P_s(\ell_1)$, то $fp \in H_s^b(\ell_1)$.

Твердження 3.5.9. *Для довільного* $f \in H_s^z(\ell_1)$ *і* $P \in P_s(\ell_1)$ *має місце рівність*

$$\mathcal{I}(fP) = \mathcal{I}(f) \otimes_s \mathcal{I}(P). \tag{3.5.5}$$

Доведення. Внаслідок неперервності оператора $\mathcal{I}$ та дистрибутивності операції симетричного тензорного множення, достатньо перевірити рівність 3.5.5 на базисних векторах. Отже,

$$\mathcal{I}(Q_\lambda Q_\mu) = \mathcal{I}(Q_{i_1}^{k_1} Q_{i_2}^{k_2} \dots Q_{i_n}^{k_n} Q_{j_1}^{s_1} Q_{j_2}^{s_2} \dots Q_{j_m}^{s_m}) =$$

$$e_{i_1}^{k_1} \otimes_s \dots \otimes_s e_{i_m}^{k_m} \otimes_s e_{j_1}^{s_1} \otimes_s \dots \otimes_s e_{j_m}^{s_m} = e_\lambda \otimes_s e_\mu.$$

Тут ми скористались також тим, що операція $\otimes_s$ є асоціативною. □

Позначимо $G(t)$ і $H(t)$ генеруючі функції послідовностей G_n і H_n. А саме:

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n$$

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n,\ t \in \mathbb{C},\ G_0 = 1,\ H_0 = 1.$$

Твердження 3.5.10. $G(t) \in H_s^z(\ell_1)$ *і* $H(t) \in H_s^z(\ell_1)$ *тоді і тільки тоді, коли* $|t| < 1$.

Доведення. Враховуючи, що $\|G\| = \|H\| = 1$, отримуємо, що ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} |t^n|^{2n} \|G_n\|^2 \quad \text{і} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |t^n|^{2n} \|H_n\|^2$$

збігаються тоді і тільки тоді, коли $|t| < 1$. □

Позначимо $g(t) = \mathcal{I}(G(t))$ і $h(t) = \mathcal{I}(H(t))$.

Наслідок 3.5.11. *У просторі Фока* $\mathcal{F}_0$ *виконується тотожність:*

$$h(t) \otimes_s g(-t) = 1,\ t \in \mathbb{C},\ |t| < 1.$$

Тобто, симетричний добуток елементів $g(t)$ і $h(t)$ для $|t| \leq 1$ лежить у просторі $\mathcal{F}_0$ і тотожно дорівнює $1 \in \mathcal{F}_0$.

Доведення. Тотожність

$$H(t)(x)G(-t)(x) = 1 \tag{3.5.6}$$

є відомою з комбінаторики для випадку, коли x — елемент простору фінітних послідовностей c_{00} (див. [76], ст.3). Тому, прирівнявши коефіцієнти при відповідних степенях, маємо

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k G_k(x) H_{n-k}(x) = 0, \ x \in c_{00}, \ n > 1. \tag{3.5.7}$$

Оскільки простір c_{00} є щільним в ℓ_1 і поліноми G_k та H_k — неперервними, то (3.5.7) виконується і для $\forall x \in \ell_1$. Тому рівність (3.5.6) буде виконуватись для того випадку, коли $H(t)$ і $G(t)$ належать $H_s^z(\ell_1)$. Як було показано, це має місце тоді і тільки тоді, коли $|t| \leq 1$. Застосувавши ізоморфізм $\mathcal{I}$ до (3.5.6) і твердження 3.5.9, отримаємо шукану тотожність. $\square$

В подібний спосіб ми можемо отримати інші тотожності і для $g(t)$ і $h(t)$ з відомих комбінаторних тотожностей для $G(t)$ і $H(t)$.

Позначимо

$$P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n t^{n-1}.$$

Тоді (див. [76], с.4) з формул

$$\frac{d}{dt} H(t) = P(t) H(t)$$

і

$$\frac{d}{dt} G(t) = P(-t) G(t)$$

отримаємо наступне твердження

Твердження 3.5.12. *Виконуються такі тотожності:*

$$\frac{d}{dt}h(t) = p(t)h(t)$$

і

$$\frac{d}{dt}g(t) = p(-t)g(t),$$

де $|t| \leq 1$ *і*

$$p(t) = \mathcal{I}(P(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}(p_n)t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{\sqrt{n}} t^{n-1}.$$

Доведення. Для доведення достатньо зауважити, що $\frac{d}{dt} \circ \mathcal{I} = \mathcal{I} \circ \frac{d}{dt}$. □

Зауважимо, також, що використовуючи формулу (2.4.1)

$$G(t)(x) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{P_n(-x)}{n}\right) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(-tx)}{n}\right)$$

та співвідношення між генеруючими функціями $G(t)$ і $H(t)$ ми можемо записати

$$g(t) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{p_n(-t)}{n}\right),$$

$$h(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{p_n(t)}{n}\right),$$

де $|t| \leq 1$ і експоненту від елемента простору $\mathcal{F}_0$ слід розуміти як ряд

$$e^w = \exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{\otimes n}}{n!}, \quad w \in \mathcal{F}_0.$$

Позначимо продовження $E(g_n)$ — гільбертів простір, породжений ортонормованою системою векторів $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ у $\mathcal{F}_0$. $E(g_n)$ є замкненим підпростором в $\mathcal{F}_0$. Розглянемо симетричний простір Фока $\mathcal{F}_0(g_n)$, породжений простором $E(g_n)$. Тобто,

$$\mathcal{F}_0(g_n) = \mathbb{C} \oplus E(g_n) \oplus \otimes_{s,h}^2 E(g_n) \oplus \ldots \oplus \otimes_{s,h}^k E(g_n) \oplus \ldots$$

і вектори $g_{i_1}^{k_1} \otimes_s \ldots \otimes_s g_{i_n}^{k_n}$ є ортогональним базисом в цьому просторі,

$$\|g_{i_1}^{k_1} \otimes_s \ldots \otimes_s g_{i_n}^{k_n}\|^2 = k_1! \ldots k_n!. \tag{3.5.8}$$

Оскільки елементи g_n можна виразити за допомогою тензорних добутків $e_1, \ldots, e_n$, то простори $\mathcal{F}_0$ і $\mathcal{F}_0(g_n)$ мають спільний щільний підпростір, який містить довільну скінченну лінійну комбінацію базисних векторів $g_{i_1}^{k_1} \otimes_s \ldots \otimes_s g_{i_n}^{k_n}$.

Твердження 3.5.13. *Норми просторів $\mathcal{F}_0$ і $\mathcal{F}_0(g_n)$ не еквівалентні і, отже, $\mathcal{F}_0 \neq \mathcal{F}_0(g_n)$.*

Доведення. Розглянемо послідовність $(g_2^n)_{n=1}^{\infty}$. Враховуючи, що

$$G_2 = \frac{P_1^2 - P_2}{2} = \frac{Q_1^2 - \sqrt{2}Q_2}{2}$$

і відображення $\mathcal{I}$, маємо, що

$$g_2^n = \left(\frac{e_1^2 - \sqrt{2}e_2}{2}\right)^n.$$

Крім того, згідно означення (3.5.8) норми у просторі $\mathcal{F}_0(g_n)$ маємо, що $\|g_2^n\|^2_{\mathcal{F}_0(g_n)} = n!$.

Знайдемо оцінку для норми $\|g_2^n\|^2_{\mathcal{F}_0}$.

$$\|g_2^n\|^2_{\mathcal{F}_0} = \left\|\left(\frac{e_1^2 - \sqrt{2}e_2}{2}\right)^n\right\|^2 = \frac{1}{2^{2n}}\left\|(e_1^2 - \sqrt{2}e_2)^n\right\|^2 =$$
$$\frac{1}{2^{2n}}\left\|e_1^{2n} - e_1^{2(n-1)} \otimes_s \sqrt{2}e_2 + \ldots + (-1)^{n+1}(\sqrt{2})^n e_2^n\right\|^2 =$$
$$\frac{1}{2^{2n}}\left(\|e_1^{2n}\|^2 + \|e_1^{2(n-1)} \otimes_s \sqrt{2}e_2\|^2 + \ldots + 2^n\|e_2^n\|^2\right) =$$
$$\frac{1}{2^{2n}}\left((2n)! + 2(2(n-1))! + \ldots + 2^n n!\right) \geq \frac{(2n)!}{2^{2n}}.$$

Тому

$$\frac{\|g_2^n\|^2_{\mathcal{F}_0}}{\|g_2^n\|^2_{\mathcal{F}_0(g_n)}} = \frac{(2n)!}{n!4^n} \geq \frac{n!}{4^n} \to \infty$$

при $n \to \infty$.

Тому норми $\|\cdot\|^2_{\mathcal{F}_0}$ і $\|\cdot\|^2_{\mathcal{F}_0(g_n)}$ не є еквівалентними. Зокрема, елемент

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_2^n}{n\sqrt{n!}}$$

належить простору $\mathcal{F}_0(g_n)$, але не належить простору $\mathcal{F}_0$. $\square$

Висновки до розділу 3

У цьому розділі розглянуто гільбертові простори $H_s^b(\ell_1)$ симетричних аналітичних функцій, визначених в областях ℓ_1 та обґрунтовано використання алгебраїчних і лінійних базисів поліномів у цих просторах. Вказано умови за яких функціонали δ_x значення в точках x простору ℓ_1 будуть неперервними та обчислено радіуси рівномірної збіжності функцій з $H_s^b(\ell_1)$. Описано максимальні області таких точок x. Крім того, побудовано приклад простору $H_s^b(\ell_1)$, який складається з цілих симетричних аналітичних функцій обмеженого типу і є щільним підпростором в алгебрі всіх цілих симетричних аналітичних функцій обмеженого типу.

Також, знайдено зв'язок між симетричними поліномами та функціями на множині мультимножин. Множина скінченних мультимножин утворює напівкільце відносно операцій об'єднання та добутку. Існує бієкція між простором скінченних послідовностей профакторизованого відносно відношення еквівалентності щодо дії симетричної групи і множиною скінчених мультимножин. Таким чином, кожну функцію на множині мультимножин можна продовжити до симетричної функції на просторі скінченних послідовностей. У розділі описано зображення множини мультимножин у просторі поліномів, аналітичних функцій та побудовано природну метрику на цій множині.

Крім того, отримано ізоморфізми просторів $H_s^b(\ell_1)$ в абстрактні симетричні простори Фока. Використовуючи цей підхід встановлено область визначення в $\Omega \in \ell_1$ аналітичних функцій, які є елементами $H_s^b(\ell_1)$. Описано неоднорідні ортогональні системи тензорних поліномів $\{g_n\}$ та $\{h_n\}$ в симетричних просторах Фока. Перенесено комбінаторні співвідношення між базисами симетричних поліномів на системи $\{g_n\}$ та $\{h_n\}$. Розглянуто як співвідноситься симетричний простір Фока, побудований на просторі з ортонормованим базисом $\{P_n\}$ з симетричним простором Фока, побудованим на просторі з ортонормованим базисом $\{G_n\}$.

Результати цього розділу опубліковано в роботах [5, 6, 16, 62, 63, 59, 64, 10, 2, 4].

РОЗДІЛ 4

МУЛЬТИПЛІКАТИВНІ ОПЕРАТОРИ НА ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ СИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

4.1. Мультиплікативні функціонали на гільбертових просторах симетричних аналітичних функцій

Як було зауважено, $H_s^b(\ell_1)$ не є алгеброю відносно поточкового множення. Проте, добуток двох поліномів з $H_s^b(\ell_1)$ належить $H_s^b(\ell_1)$.

Означення 4.1.1. *Лінійний функціонал $\varphi : H_s^b(\ell_1) \to \mathbb{C}$ називається мультиплікативним, якщо $\varphi(PQ) = \varphi(P)\varphi(Q)$ для всіх поліномів $P, Q \in H_s(\ell_1)$. Аналогічно, лінійний оператор $\Phi : H_s^b(\ell_1) \to H_s^b(\ell_1)$ називається мультиплікативним, якщо $\Phi(PQ) = \Phi(P)\Phi(Q)$ для всіх поліномів $P, Q \in H_s^b(\ell_1)$.*

Оскільки ортонормований базис простору $H_s^b(\ell_1)$ утворюють скінченні добутки поліномів P_k, то кожен мультиплікативний функціонал φ на $H_s^b(\ell_1)$ повністю визначається своїми значеннями на $P_k, k = 1, 2, \ldots$.

Навпаки, поклавши $\varphi(P_k) = a_k$ для деякої послідовності чисел a_k, ми можемо однозначно продовжити за лінійністю і мультиплікативністю φ до лінійного мультиплікативного функціонала на щільний підпростір $P_s(\ell_1) \subset H_s^b(\ell_1)$. Якщо при цьому функціонал φ буде обмеженим, а отже, неперервним, то його можна продовжити за неперервністю на $H_s^b(\ell_1)$. Таким чином, задача опису множини $M(H_s^b(\ell_1))$ лінійних мультиплікативних функціоналів на $H_s^b(\ell_1)$ зводиться до опису множини послідовностей a_k, для яких функціонал $\varphi(P_k) = a_k$ буде обмеженим на $P_s^b(\ell_1)$.

Лема 4.1.2. *Лінійний мультиплікативний функціонал φ на підпросторі поліномів $P_s^b(\ell_1) \subset H_s^b(\ell_1)$ буде обмеженим тоді і тільки тоді, коли для послідовності значень $a_k = \varphi(P_k)$, $k \in \mathbb{N}$ множина*

$$\left\{ \frac{a_\lambda}{\sqrt{b_\lambda}} = \frac{a_{\lambda_1} \cdots a_{\lambda_n}}{\sqrt{b_\lambda}} : |\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \in \mathbb{N} \right\}$$

є абсолютно сумовною в квадраті. В цьому випадку

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = n} \frac{|a_{\lambda_1} \cdots a_{\lambda_n}|^2}{b_\lambda}.$$

Доведення. Нехай f — довільний елемент з $H_s^b(\ell_1)$. За означенням простору $H_s^b(\ell_1)$, f можна подати у вигляді

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda P_\lambda, \quad \text{де} \quad \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} |c_\lambda|^2 b_\lambda < \infty.$$

Припустимо, що $\varphi \in M(H_s^b(\ell_1))$. Тоді

$$\varphi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda \varphi(P_\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda a_\lambda < \infty.$$

З того, що $\varphi(P_\lambda) = a_\lambda$ випливає, що

$$\varphi = \left\langle \cdot \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \frac{a_\lambda P_\lambda}{|P_\lambda|^2} \right\rangle = \left\langle \cdot \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \frac{a_\lambda P_\lambda}{b_\lambda} \right\rangle. \tag{4.1.1}$$

Тому

$$\|\varphi\|^2 = \langle \varphi | \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = n} \frac{|a_{\lambda_1} \cdots a_{\lambda_n}|^2}{b_\lambda}.$$

Навпаки, якщо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = n} \frac{|a_{\lambda_1} \cdots a_{\lambda_n}|^2}{b_\lambda} < \infty,$$

то формула (4.1.1) визначає функціонал

$$\varphi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = n} c_\lambda \varphi(P_\lambda)$$

кожної функції $f \in H_s^b(\ell_1)$ і

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_n=n} \frac{|a_{\lambda_1}\cdots a_{\lambda_n}|^2}{b_\lambda}.$$

$\square$

Означення 4.1.3. *Скажемо, що норма простору $H_s^b(\ell_1)$ субмультиплікативна, якщо існує константа $C > 0$, яка не залежить від λ така, що $C\|P_\lambda P_\mu\| \geq \|P_\lambda\|\|P_\mu\|$ для довільних розбиттів λ, μ. У випадку, якщо $\|P_\lambda P_\mu\| = \|P_\lambda\|\|P_\mu\|$ для довільних розбиттів λ, μ, норма простору $H_s^b(\ell_1)$ буде називатись мультиплікативною.*

Очевидно, що норма простору $H_s^b(\ell_1)$ є мультиплікативною тоді і тільки тоді, коли для довільного розбиття $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $b_\lambda = b_{\lambda_1}\cdots b_{\lambda_n}$. Випадок $b_\lambda \equiv 1$ є, звичайно, прикладом мультиплікативної норми. Легко бачити, що випадок $b_\lambda = z_\lambda$ визначає субмультиплікативну але не мультиплікативну норму. Проте, якщо зобразити λ у вигляді

$$\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots, r^{m_r}, \ldots),$$

то

$$b_\lambda = \frac{z_\lambda}{\prod_{z\geq 1} m_r!} = \prod_{z\geq 1} r^{m_r}$$

визначає мультиплікативну норму на $H_s^b(\ell_1)$. Зауважимо, що не існує мультиплікативної норми на $H_s^b(\ell_1)$ такої, що радіус рівномірної збіжності всіх функцій з $H_s^b(\ell_1)$ є нескінченним. Справді, нехай $\|P_1\| = c > 0$. З мультиплікативності норми випливає, що

$$\|P_1^n\| = \sqrt{b_{(1,\ldots,1)}} = \sqrt{c^n}.$$

Тому, з теореми 3.2.1 маємо, що радіус рівномірної збіжності r функцій з $H_s^b(\ell_1)$ не перевищує $\sqrt{c}$.

Позначимо $\mathbb{D}_2^b = \{a_k\colon (a_k\sqrt{b_{\lambda_k}}) \in \ell_2,\ |a_k| < \sqrt{b_{\lambda_k}}\}$.

Для випадку мультиплікативної норми маємо наступну теорему.

Теорема 4.1.4. *Припустимо, що на $H_s^b(\ell_1)$ задано мультиплікативну норму. Лінійний мультиплікативний функціонал φ на $P_s(\ell_1)$ буде неперервним тоді і тільки тоді, коли послідовність $a = \{a_k = \varphi(P_k)\}$ належить $\mathbb{D}_2^b$.*

Доведення. Нехай $|a_k| < \sqrt{b_{\lambda_k}}$. Тоді $|a_k|/\sqrt{b_{\lambda_k}} < 1$. Тому

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_n=n} \frac{|a_{\lambda_1}\cdots a_{\lambda_n}|^2}{b_{\lambda_1}\ldots b_{\lambda_n}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-|a_k|^2(b_{\lambda_k})^{-1}}.$$

Цей добуток праворуч збігається, оскільки прологарифмувавши, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| -\log \frac{1}{1-|a_k|^2(b_{\lambda_k})^{-1}} \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 b_{\lambda_k} = \|(a_k(\sqrt{b_{\lambda_k}})^{-1})\|^2.$$

Таким чином, з того, що послідовність $(a_k/\sqrt{b_{\lambda_k}}) \in \ell_2$, за лемою 4.1.2, маємо

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_n=n} \frac{|a_{\lambda_1}\cdots a_{\lambda_n}|^2}{b_{\lambda_1}\ldots b_{\lambda_n}}$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-|a_k|^2(b_{\lambda_k}^{-1})} \le e^{\|(a_k/\sqrt{b_{\lambda_k}})\|^2}$$

і, отже, φ — обмежений функціонал.

Навпаки, якщо φ — обмежений функціонал, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2/b_{\lambda_k} \le \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_n=n} \frac{|a_{\lambda_1}\cdots a_{\lambda_n}|^2}{b_{\lambda_1}\ldots b_{\lambda_n}} = \|\varphi\|^2.$$

Тому послідовність $(a_k/\sqrt{b_{\lambda_k}}) \in \ell_2$.

Припустимо, що для деякого k, $|a_k|/\sqrt{b_{\lambda_k}} \ge 1$. Розглянемо елемент $f \in H_s^b(\ell_1)$ вигляду

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_k^m}{(b_{\lambda_k})^{m/2} m}.$$

Очевидно, що

$$\|f\|^2 = \left|\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}\right| < \infty.$$

Тоді

$$\varphi(f) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_k^m}{m(b_{\lambda_k})^{m/2}} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{\sqrt{b_{\lambda_k}}}\right)^m \frac{1}{m} = \infty,$$

тобто в цьому випадку φ не визначений на $H_s^b(\ell_1)$. Отже, $|a_k| < 1$ для кожного k, тобто $a \in \mathbb{D}_2^b$. □

Зауважимо, що у попередньому розділі показано, що функціонал значення в точці $\delta_x(f) = f(x), f \in H_s(\ell_1)$ буде неперервним мультиплікативним функціоналом тоді і тільки тоді, коли

$$x \in \Omega = \{x \in \ell_1 \colon |P_k(x)| < 1, k \in \mathbb{N}\}.$$

Таким чином, якщо $\varphi = \delta_x$ для деякого $x \in \ell_1$ і $|a_k| = |\varphi(P_k)| = |P_k(x)| < 1$, то $a = \{a_k\}$ автоматично належить множині $\mathbb{D}_2 \subset \ell_2$.

Покажемо, що існують елементи з $M(H_s(\ell_1))$, які не є функціоналами значення в точці.

Приклад 4.1.5. *Розглянемо скінченну послідовність $\{a_1, \dots, a_m \colon |a_i| < 1\}$, для якої не всі $a_i = 0$. За теоремою 4.1.4, для будь-якої такої послідовності існує такий функціонал $\varphi \in M(H_s(\ell_1))$ такий, що $\varphi(P_k) = a_k, 1 \le k \le m$ і $\varphi(P_k) = 0, k > m$. З роботи* [26] *відомо, що не існує елемента $x \in \ell_1$, для якого $\varphi(P_k) = \delta_x(P_k)$ для всіх k. Тому, φ не є функціоналом значення в точці.*

Приклад 4.1.6. *Нехай*

$$z = \{z_n \colon |z_n| < 1, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

— *деяка обмежена послідовність така, що для деякого* $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{m+1} < \infty \text{ і ряд } \sum_{n=1}^{\infty} z_n^k$$

збігається умовно (але не абсолютно) для всіх $k \le m$. *Тоді*

$$P_k(z) := \sum_{n=1}^{\infty} z_n^k$$

є визначені для всіх $k \in \mathbb{N}$ *і* $\{a_k\} = \{P_k(z)\} \in \ell_2$.

За теоремою 4.1.4 існує функціонал $\varphi \in M(H_s(\ell_1))$ *такий, що* $\varphi(P_k) = P_k(z)$. *Але* $z \notin \ell_1$, *тому* φ *не є функціоналом значення в точці.*

Позначимо через $\mathcal{H}_s$ простір $H_s^b(\ell_1)$ для випадку $b_\lambda \ge |\lambda!|$. У попередньому розділі було показано, що $\mathcal{H}_s$ — щільний підпростір в алгебрі симетричних аналітичних функцій $H_{bs}(\ell_1)$ на ℓ_1. Таким чином, кожен характер алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ буде лінійним мультиплікативним функціоналом на $\mathcal{H}_s$. Зокрема, серед характерів $H_{bs}(\ell_1)$ є однопараметрична сім'я ψ_s, $s \in \mathbb{C}$ така, що

$$\psi_s(P) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\underbrace{\frac{s}{n}, \frac{s}{n}, \dots, \frac{s}{n}}_{n}, 0, 0, \dots\Big).$$

При цьому $\psi_s(P_1) = s$ і $\psi_s(P_k) = 0$ для $k > 1$. Очевидно, що функціонал ψ_s на $\mathcal{H}_s$ має вигляд $\psi_s(f) = \langle f | sP_1 \rangle$. В подібний спосіб $\psi_{s,k}(f) = \dfrac{\langle f | sP_k \rangle}{\|P_k\|^2}$ можна задати мультиплікативні функціонали на $\mathcal{H}_s$ такі, що $\psi_{s,k}(P_n) = s\delta_{kn}$ для достатньо малих s (див. наступне твердження). Проте, функціонали $\psi_{s,k}$ вже не будуть неперервними в топології простору $H_{bs}(\ell_1)$ [36]. Тобто, не всі мультиплікативні функціонали на просторі $\mathcal{H}_s$ продовжуються до характерів алгебри $H_{bs}(\ell_1)$.

Аналоги функціоналів $\psi_{s,k}$ існують для широкого класу просторів $H_s^b(\ell_1)$.

Лема 4.1.7. *На просторі* $H_s^b(\ell_1)$ *з субмультиплікативною нормою* $\|\cdot\|$ *існує мультиплікативна гільбертова норма* $|||\cdot|||$, *неперервна відносно* $\|\cdot\|$ *і базис* $\{P_\lambda\}$ *буде ортогональним у* $\big(H_s^b(\ell_1), |||\cdot|||\big)$.

Доведення. Для того, щоб визначити норму на гільбертовому просторі, достатньо її визначити на ортогональному базисі $\{P_\lambda\}$. Покладемо $|||P_k||| = \|P_k\|$, $k \in \mathbb{N}$ і якщо $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, то

$$|||P_\lambda||| := |||P_{\lambda_1}||| \cdots |||P_{\lambda_m}|||.$$

Таким, чином, умова мультиплікативності для норми $|||\cdot|||$ виконується. Покажемо, що ця норма є неперервною відносно $\|\cdot\|$ і коректно визначеною на всьому просторі. З умови ортогональності $\{P_\lambda\}$ і умови субмультиплікативності, для довільної скінченної суми $\sum_\lambda c_\lambda P_\lambda \in H_s^b(\ell_1)$ маємо:

$$\Big|\Big|\Big|\sum_\lambda c_\lambda P_\lambda\Big|\Big|\Big|^2 = \sum_\lambda |c_\lambda|^2 |||P_\lambda|||^2 = \sum_{\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)} |c_\lambda|^2 \|P_{\lambda_1}\|^2 \cdots \|P_{\lambda_m}\|^2$$

$$\le C \sum_{\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)} |c_\lambda|^2 \|P_{\lambda_1} \cdots P_{\lambda_m}\|^2 = C\Big\|\sum_\lambda c_\lambda P_\lambda\Big\|^2$$

для деякої константи $C > 0$. Отже, норма $|||\cdot|||$ є обмеженою, а тому неперервною відносно норми $\|\cdot\|$ і, тому буде коректно визначеною на всьому просторі $H_s^b(\ell_1)$. □

Твердження 4.1.8. *У просторі* $H_s^b(\ell_1)$ *з субмультиплікативною нормою існують неперервні мультиплікативні функціонали* $\psi_{s,k}$, $\psi_{s,k}(P_n) = s\delta_{kn}$ *для тих і тільки тих комплексних чисел* s, *які задовольняють нерівність* $|s| < \sqrt{b_{\lambda_k}} = \|P_k\|$.

Доведення. Нехай норма простору $H_s^b(\ell_1)$ — мультиплікативна. За теоремою 4.1.4 мультиплікативний функціонал $\psi_{s,k}$ буде неперервним тоді і тільки тоді, коли $|s| = |\psi_{s,k}(P_k)| < b_{\lambda_k}$. В загальному випадку субмультиплікативної норми, за лемою 4.1.7 на $H_s^b(\ell_1)$ існує неперервна мультиплікативна норма $|||\cdot|||$. За доведеним вище, функціонали $\psi_{s,k}$ є обмеженими відносно цієї норми. Тому вони будуть обмеженими і відносно норми $\|\cdot\|$. □

Позначимо $\psi_k := \sqrt{b_k}\psi_{1,k} = \|P_k\|\psi_{1,k}$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\|\psi_k\| = \psi_k\Big(\frac{P_k}{\|P_k\|}\Big) = 1$$

і функціонали $\{\psi_k\}$ є попарно ортогональними в просторі лінійних неперервних функціоналів на $H_s^b(\ell_1)$. Позначимо E_b — замкнену лінійну оболонку функціоналів ψ_k, $k \in \mathbb{N}$.

Твердження 4.1.9. *Для кожного $x \in \Omega_b$ функціонал $\delta_x \in E_b$.*

Доведення. Оскільки функціонали ψ_k біортогональні до поліномів $\dfrac{P_k}{\|P_k\|}$, то

$$\langle \delta_x, \psi_k \rangle = \delta_x\Big(\frac{P_k}{\|P_k\|}\Big) = \frac{P_k(x)}{\|P_k\|}.$$

Тому функціонал δ_x повністю визначається послідовністю $\{\langle \delta_x, \psi_k \rangle\}$ і, оскільки δ_x мультиплікативний, то за теоремою 4.1.4

$$|\delta_x(P_k)| = |P_k(x)| \leq \sqrt{b_k} = \|P_k\|.$$

Таким чином, поклавши $a_k = P_k(x)$, за лемою 4.1.2 маємо

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} \langle \delta_x, \psi_k \rangle \psi_k\Big\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|P_k(x)|^2}{\|P_k\|^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{b_k} < \infty.$$

Отже, елемент

$$\delta_x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \delta_x, \psi_k \rangle \psi_k$$

належить простору E_b. □

Теорема 4.1.10. *Нехай на просторі $H^b_s(\ell_1)$ задано субмультиплікативну норму. Тоді існує абстрактний простір Фока $\mathcal{F}^b_\eta$ над гільбертовим простором E_b і унітарний бієктивний оператор $\mathcal{U}\colon H^b_s(\ell_1)\to\mathcal{H}^b_\eta=(\mathcal{F}^b_\eta)^*$ такий, що*

$$f(x)=\Big\langle\eta(\delta_x),\overline{\mathcal{U}(f)}\Big\rangle_{\mathcal{F}^b_\eta}=\Big\langle\eta\Big(\sum_{k=1}^\infty\langle\delta_x,\psi_k\rangle_{E_b}\psi_k\Big),\overline{\mathcal{U}(f)}\Big\rangle_{\mathcal{F}^b_\eta},$$

де $\overline{\mathcal{U}(f)}=\langle\cdot,\mathcal{U}(f)\rangle_{\mathcal{H}^b_\eta}\in\mathcal{F}^b_\eta$ і відображення $\eta\colon E_b\to\mathcal{F}^b_\eta$ визначено формулою

$$\eta\Big(\sum_{n=1}^\infty y_n\psi_n\Big)=\sum_{n=1}^\infty\sum_{|\lambda|=n}\frac{b^{k_1}_{i_1}\cdots b^{k_n}_{i_n}}{b_\lambda}y^{k_1}_{i_1}\cdots y^{k_n}_{i_n}\psi^{k_1}_{i_1}\otimes_s\cdots\otimes_s\psi^{k_n}_{i_n},\qquad(4.1.2)$$

$\lambda=(i^{k_1}_1,i^{k_2}_2,\ldots,i^{k_n}_n)$.

Доведення. Розглянемо абстрактний простір Фока $\mathcal{F}^b_\eta$ над простором E_b, з твірною функцією η, яка визначається формулою (4.1.2). З результатів, наведених у підрозділі 2.5 маємо, що

$$\|\psi^{k_1}_{i_1}\otimes_s\cdots\otimes_s\psi^{k_n}_{i_n}\|^2_{\mathcal{F}^b_\eta}=\frac{b_\lambda}{b^{k_1}_{i_1}\cdots b^{k_n}_{i_n}}.$$

З іншого боку, з теореми 2.5.1 маємо, що

$$\Big\langle\eta(\delta_x),\psi^{k_1}_{i_1}\otimes_s\cdots\otimes_s\psi^{k_n}_{i_n}\Big\rangle_{\mathcal{F}^b_\eta}=\Big\langle\eta\Big(\sum_{k=1}^\infty\langle\delta_x,\psi_k\rangle_{E_b}\psi_k\Big),\psi^{k_1}_{i_1}\otimes_s\cdots\otimes_s\psi^{k_n}_{i_n}\Big\rangle_{\mathcal{F}^b_\eta}$$

$$=\langle\delta_x,\psi_{i_1}\rangle^{k_1}\cdots\langle\delta_x,\psi_{i_n}\rangle^{k_n}=\frac{P^{k_1}_{i_1}(x)}{(\sqrt{b_{i_1}})^{k_1}}\cdots\frac{P^{k_n}_{i_n}(x)}{(\sqrt{b_{i_n}})^{k_n}}=\frac{P_\lambda(x)}{\sqrt{b^{k_1}_{i_1}\cdots b^{k_n}_{i_n}}}.$$

Визначимо оператор $\mathcal{U}\colon H^b_s(\ell_1)\to(\mathcal{F}^b_\eta)^*$ на ортогональному базисі таким чином

$$\mathcal{U}\colon P_\lambda\mapsto\Big\langle\cdot,\psi_\lambda\sqrt{b^{k_1}_{i_1}\cdots b^{k_n}_{i_n}}\Big\rangle_{\mathcal{F}^b_\eta},$$

де $\psi_\lambda = \psi_{i_1}^{k_1} \otimes_s \cdots \otimes_s \psi_{i_n}^{k_n}$. Тоді, для кожної функції $f \in H_s^b(\ell_1)$,

$$f(x) = \sum_\lambda c_\lambda P_\lambda(x)$$

маємо, що

$$\left\langle \eta(\delta_x), \overline{\mathcal{U}\Big(\sum_\lambda c_\lambda P_\lambda(x)\Big)} \right\rangle_{\mathcal{F}_\eta^b} = f(x).$$

Таким чином, ми отримали шукану рівність. Крім того,

$$\|\psi_\lambda\| \sqrt{b_{i_1}^{k_1} \cdots b_{i_n}^{k_n}} = \sqrt{b_\lambda} = \|P_\lambda\|.$$

Отже, $\mathcal{U}$ відображає ортонормований базис в ортонормований, зберігаючи норму базисних векторів. Тому $\mathcal{U}$ є унітарним оператором. $\square$

4.2. Оператори композиції на $H_s^b(\ell_1)$

Розглянемо на просторі ℓ_1 таке відношення еквівалентності: $x \sim y$, якщо $P_k(x) = P_k(y), \forall k \in \mathbb{N}$. Позначимо $\ell_1/\sim$ множину класів еквівалентності і $[x]$ — клас, який містить елемент x. Відомо (див. [36]), що $\ell_1/\sim$ не є лінійним простором. Проте, легко бачити, що якщо $[x] = [y]$, то $\|x\| = \|y\|$. Тому ми будемо писати $\|[x]\| = \|x\|$.

Під оператором композиції C_F будемо розуміти неперервний оператор $C_F : H_s^b(\ell_1) \to H_s^b(\ell_1)$, для якого існує відображення $F\colon \ell_1/\sim \to M(H_s(\ell_1))$ таке, що $C_F(f) = \hat{f} \circ F$, де $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f), \forall \varphi \in M(H_s(\ell_1))$. Зауважимо, що оператори композиції є прикладами мультиплікативних операторів.

Позначимо $\widetilde{B_1} = \{[x] \in \ell_1/\sim\colon \|x\| < 1\}$. Зауважимо, що $\widetilde{B_1}$ можна розглядати як підмножину у $M(H_s(\ell_1))$. Нагадаймо, що символом $H_s(\ell_1)$ ми позначаємо простір $H_s^b(\ell_1)$ для випадку $b_\lambda \equiv 1$.

Нехай $h(t)$ — деяка функція однієї комплексної змінної, аналітична у відкритому крузі $|t| < 1$ і має абсолютно збіжний ряд Тейлора. Розглянемо відображення $F_h\colon \widetilde{B_1} \to \ell_1/\sim$, визначене таким чином:

$$F_h([x]) = [(h(x_1), h(x_2), \ldots, h(x_n), \ldots)], x \in \widetilde{B_1}.$$

Очевидно, що значення F_h не залежить від вибору представника $x \in [x]$. Покажемо, що $F_h([x]) \in \ell_1/\sim$ для кожного $x \in \ell_1, \|x\| < 1$. Справді, нехай $h(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} h_k t^k$ — розклад функції h у ряд Тейлора. Тоді

$$\|F_h([x])\| = \sum_{n=0}^{\infty} |h(x_n)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |h_k||x_n|^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} |h_k| \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h_k| < \infty.$$

Позначимо W алгебру всіх аналітичних в крузі функцій однієї змінної з абсолютно збіжним рядом Тейлора. Відомо, що W — банахова алгебра відносно норми $\|h\| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |h_k|$.

Теорема 4.2.1. *Для кожної функції $h \in W$ такої, що $\|h\| = r < 1$ і $h(0) = 0$ оператор композиції $C_{F_h} : f \to f \circ F_h$ є неперервним оператором з $H_s(\ell_1)$ в $H_s(\ell_1)$.*

Доведення. Зауважимо, що

$$C_{F_h}(P_m)(x) = P_m(F_h(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} h^m(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} h_k x_n^k \Big)^m =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{\infty} h_{k_1} \cdots h_{k_m} x_n^{k_1+\cdots+k_m} = \sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{\infty} h_{k_1} \cdots h_{k_m} P_{k_1+\cdots+k_m}(x).$$

Тому

$$\|P_m \circ F_h\|^2 = \sum_{k_1,\ldots,k_m=0}^{\infty} |h_{k_1}|^2 \cdots |h_{k_m}|^2 =$$

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} |h_k|^2 \Big)^m \le \|h\|^{2m} = r^{2m} \le 1.$$

Аналогічно для $P_\lambda = P_{\lambda_1} P_{\lambda_2} \cdots P_{\lambda_n}$,

$$\|P_\lambda \circ F_h\|^2 \le r^{2(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}.$$

Нехай $f \in H_s(\ell_1)$, $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{|\lambda|=n} c_\lambda P_\lambda$, $\sum |c_\lambda|^2 = \|f\|^2$. Тоді

$$\|C_{F_h}(f)\| = \|f \circ F_h\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} |c_\lambda| \|P_\lambda \circ F_n\| \le$$

$$\|f\| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} r^n = \|f\| \sum_{n=0} p(n) r^n,$$

де $p(n)$ — кількість розбиттів натурального n на натуральні доданки. З відомої асимптотичної формули (3.2.3) випливає, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p(n) r^n$

збігається для кожного r, $|r| < 1$. Тому оператор C_{F_h} — обмежений і $\|C_{F_h}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} p(n) r^n$. $\square$

На множині $\ell_1/\sim$ введемо наступні операції. Для довільних $x, y \in \ell_1$ позначимо

$$[x] \bullet [y] = [(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)]$$

— клас, який містить елемент з ℓ_1, що має всі координати вектора x та вектора y.

$$[x] \diamond [y] = [(x_1 y_1, x_2 y_1, \ldots, x_1 y_2, \ldots, x_i y_j, \ldots)]$$

— клас, який містить елемент з ℓ_1, координати якого є всеможливі попарні добутки координат вектора x на координати вектора y. Очевидно, що вказані операції коректно визначені на всіх $[x], [y] \in \ell_1$ і $\|[x] \bullet [y]\| = \|x\| + \|y\|$, $\|[x] \diamond [y]\| = \|x\| \|y\|$.

Зауважимо, що $P_\lambda(x \diamond y) = P_\lambda(x) P_\lambda(y)$ і $P_m(x \bullet y) = P_m(x) + P_m(y)$.

Твердження 4.2.2. *Для довільного $y \in \Omega_b$ і $f \in H_s^b(\ell_1)$, елемент $f(x \diamond y) \in H_s^b(\ell_1)$ і оператор $M_y \colon f(x) \mapsto f(x \diamond y)$ є неперервним на $H_s^b(\ell_1)$ і $\|M_y\| = \sup_\lambda \left| \frac{P_\lambda(y)}{\sqrt{b_\lambda}} \right|$.*

Доведення. Нехай $f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda P_\lambda$. Тоді

$$\|M_y(f)\|^2 = \Big\| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda M_y(P_\lambda) \Big\|^2 =$$

$$= \Big\| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda P_\lambda(y) P_\lambda \Big\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \big| c_\lambda P_\lambda(y) \big|^2 \leq$$

$$\leq \sup_\lambda \left| \frac{P_\lambda(y)}{\sqrt{b_\lambda}} \right|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \big| c_\lambda \big|^2 = \sup_\lambda \left| \frac{P_\lambda(y)}{\sqrt{b_\lambda}} \right|^2 \|f\|^2.$$

Таким чином M_y — обмежений оператор композиції і $\|M_y\| \le \sup\limits_\lambda \left|\dfrac{P_\lambda(y)}{\sqrt{b_\lambda}}\right|$.

З іншого боку, очевидно що цей супремум досягається на множині $\dfrac{P_\lambda(y)}{\sqrt{b_\lambda}}$. Тому $\|M_y\| = \sup\limits_\lambda \left|\dfrac{P_\lambda(y)}{\sqrt{b_\lambda}}\right|$.

□

Твердження 4.2.2 доведено без формального припущення про те, що $x \diamond y \in \Omega_b$. Проте, якщо $x \diamond y \notin \Omega_b$, то знайдеться функція з $H_s^b(\ell)$, яка не визначена в точці $x \diamond y$. Тому, в цьому випадку, оператор M_y не може бути визначеним на всьому просторі $H_s^b(\ell)$. Таким чином, ми довели такий наслідок.

Наслідок 4.2.3. *Множина Ω_b є напівгрупою відносно операції "$\diamond$".*

Зауважимо, що оператор $f(x) \to f(x \bullet y)$ є, в загальному випадку, необмеженим, якщо $y \ne 0$. Справді, якщо y — такий вектор з ℓ_1, що $x \bullet y \notin \Omega_b$, для деякого $x \in \Omega_b$, то оператор $f(x) \to f(x \bullet y)$ визначний не для всіх $f \in H_s^b(\ell)$. З іншого боку, цей оператор завжди визначений на щільному підпросторі поліномів. Тому, зокрема, в цьому випадку, цей оператор буде необмеженим. Детальніше ми розглянемо цей оператор у наступних розділах.

Теорема 4.2.4. *Припустимо, що для простору $H_s^b(\ell_1)$ множина функціоналів δ_x, $x \in \Omega_b$ розділяє точки простору $H_s^b(\ell_1)$ (тобто виконуються умови твердження 3.5.5). Нехай A — лінійний оператор на $H_s^b(\ell_1)$, який комутує з оператором M_y для довільного $y \in \Omega_b$. Тоді для кожного розбиття λ існує число $a_\lambda \in \mathbb{C}$ таке, що*

$$A(P_\lambda) = a_\lambda P_\lambda. \tag{4.2.1}$$

Іншими словами A — нормальний оператор, P_λ — набір власних векторів, а $\{a_\lambda\}$ — точковий спектр оператора A.

Доведення. Нехай

$$A(P_\lambda) = f = \sum_\mu c_\mu P_\mu \in H_s(\ell_1).$$

Тоді $\forall y \in \Omega_b$

$$M_y(A(P_\lambda)) = \sum_\mu c_\mu P_\mu(y) P_\mu = A(M_y(P_\lambda)) = P_\lambda(y) \sum_\mu c_\mu P_\mu.$$

З цієї рівності отримаємо, що для кожного розбиття μ

$$c_\mu P_\mu(y) = c_\mu P_\lambda(y).$$

Оскільки це виконується для всіх $y \in \Omega_b$, то, вихористовуючи той факт, що функціонали значень в точках Ω_b розділяють елементи простору $H_s(\ell_1)$, маємо, що $c_\mu = 0$ для $\mu \neq \lambda$. Таким чином, оператор A в базисі P_λ має вигляд $A(P_\lambda) = c_\lambda P_\lambda$. Залишилось покласти $a_\lambda := c_\lambda$. $\square$

Очевидно, що вірно й навпаки: кожен оператор вигляду 4.2.1 комутує з M_y, $y \in \Omega_b$.

В загальному випадку, якщо $y \in \ell_1$, оператор $f(x) \mapsto f(x \diamond y)$ є визначеним на деякому щільному підпросторі $D(M_y)$ в $H_s^b(\ell_1)$, який містить всі поліноми з $H_s^b(\ell_1)$. Ми будемо зберігати позначення M_y для цього оператора, припускаючи що область визначення $D(M_y)$ є максимальною.

Твердження 4.2.5. *Оператор M_y, $y \in \ell_1$ має діагональний вигляд у базисі P_λ простору $H_s^b(\ell_1)$. Якщо $y \in \Omega_b$, то M_y є нормальним.*

Доведення. Перша частина твердження очевидна, оскільки $M_y(P_\lambda) = P_\lambda(y) P_\lambda$. Тому $M_y^*(P_\lambda) = \overline{P_\lambda(y)} P_\lambda$, де риска зверху означає комплексне спряження. Тому, у випадку коли $y \in \Omega_\lambda$, M_y є неперервним і, отже, нормальним. $\square$

Для довільного елемента $y \in \ell_1$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$ позначимо $\overline{y} = (\overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots)$ і будемо називати $\overline{y}$ комплексно спряженим до y. Скажемо, що $y \in \ell_1$ є самоспряженим елементом, якщо $y \sim \overline{y}$, тобто $[y] = [\overline{y}]$.

Твердження 4.2.6. *Нехай $y \in \ell_1$. Наступні умови є еквівалентними:*

1. *y є самоспряженим.*
2. *$P_n(y) \in \mathbb{R}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.*
3. *$P(y) \in \mathbb{R}$ для кожного полінома $P \in P_s(\ell_1)$.*
4. *M_y є самоспряженим оператором.*

Доведення. $(1 \Rightarrow 2)$ Якщо y — самоспряжений, то $[y] = [\overline{y}]$, тому $P_n(y) = P_n(\overline{y})$, $n \in \mathbb{N}$. З іншого боку $P_n(\overline{y}) = \overline{P_n(y)}$. Тому $P_n(y) = \overline{P_n(y)}$ і, отже $P_n(y) \in \mathbb{R}$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Оскільки $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ є алгебраїчним базисом в $P_s(\ell_1)$, то з того, що $P_n(y) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ випливає, що $P(y) \in \mathbb{R}$ для кожного $P \in P_s(\ell_1)$.

$(3 \Rightarrow 2)$ Очевидно, оскільки $P_n \in P_s(\ell_1)$, $n \in \mathbb{N}$.

$(3 \Rightarrow 4)$ Враховуючи, що оператор M_y має діагональний вигляд, область визначення оператора M_y є максимальною і всі $P_\lambda(y) \in \mathbb{R}$ отримуємо, що M_y — самоспряжений.

$(4 \Rightarrow 1)$ З того, що M_y — самоспряжений, маємо, що власні значення M_y є дійсні. Зокрема $P_\lambda(y) \in \mathbb{R}$. □

Зауважимо, що спектром оператора M_y буде замикання множини $\{P_\lambda(y)\} \subset \mathbb{C}$, де λ пробігає множину розбиттів всіх натуральних чисел.

Обчислимо $G_n(x \diamond y)$ і $H_n(x \diamond y)$.

Теорема 4.2.7. *Нехай $y \in \ell_1$. Тоді мають місце наступні рівності*

$$G_n(x \diamond y) = \sum_{|\lambda|=n} M_\lambda(y) G_\lambda(x)$$

та

$$H_n(x\diamond y)=\sum_{|\lambda|=n}M_\lambda(y)H_\lambda(x).$$

Доведення. Зауважимо, що для генеруючої функції послідовності $\{G_n\}$ має місце рівність

$$\sum_{n=0}^{\infty}G_n(tx)=\sum_{n=0}^{\infty}t^nG_n(x)=\prod_{i=1}^{\infty}(1+tx_i)$$

(див. напр. [76], [71]).

Ця рівність виконується для тих t та x, для яких ряди збігаються. Зокрема, для $\|x\|\leq 1$, $|t|<1$. Тому

$$\sum_{n=0}^{\infty}G_n(x\diamond y)=\prod_{i,j=1}^{\infty}(1+y_jx_i)=$$

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+y_1x_i)\prod_{i=1}^{\infty}(1+y_2x_i)\ldots\prod_{i=1}^{\infty}(1+y_jx_i)\ldots=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}y_1^nG_n(x)\sum_{n=0}^{\infty}y_2^nG_n(x)\ldots\sum_{n=0}^{\infty}y_j^nG_n(x)\ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1+\ldots+k_n=n}\sum_{j_1<j_2<\ldots<j_n}y_{j_1}^{k_1}y_{j_2}^{k_2}\ldots y_{j_n}^{k_n}G_{k_1}(x)\ldots G_{k_n}(x)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|\lambda|=n}M_\lambda(y)G_\lambda(x).$$

Аналогічно, для генеруючої функції послідовності $\{H_n\}$ маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty}H_n(tx)=\sum_{n=0}^{\infty}t_nH_n(x)=\prod_{i=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{1-tx_i}\Big).$$

Тому

$$\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x\diamond y)=\prod_{i,j=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{1-y_jx_i}\Big)=$$

$$\prod_{i=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{1-y_1x_i}\Big)\prod_{i=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{1-y_2x_i}\Big)\ldots\prod_{i=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{1-y_jx_i}\Big)\ldots=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_1^n H_n(x) \sum_{n=0}^{\infty} y_2^n H_n(x) \dots \sum_{n=0}^{\infty} y_j^n H_n(x) \dots =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} M_\lambda(y) H_\lambda(x).$$

$\square$

4.3. Біортогональні базиси в $H_s^z(\ell_1)$

Теорема 4.3.1. *В просторі $H_s^z(\ell_1)$ лінійні базиси $\{H_\lambda\}$ і $\{M_\lambda\}$ є біортогональними, тобто $\langle H_\lambda, M_\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu}$ для довільних розбиттів λ, μ.*

Доведення. Враховуючи теорему 4.2.7 та формулу (3.1.3) у твердженні 3.1.2 маємо

$$\sum_{|\lambda|=n} H_\lambda(x)M_\lambda(y) = H_n(x \diamond y) = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} P_\lambda(x \diamond y) = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} P_\lambda(x)P_\lambda(y).$$

Тому

$$\Big\langle \sum_{|\lambda|=n} H_\lambda(\cdot)M_\lambda(y), M_\mu(\cdot)\Big\rangle = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} P_\lambda(y)\langle P_\lambda, M_\mu\rangle.$$

З іншого боку, оскільки $\dfrac{P_\lambda}{\sqrt{z_\lambda}}$ — ортонормований базис,

$$M_\mu = \sum_\lambda \Big\langle \frac{P_\lambda}{\sqrt{z_\lambda}}, M_\mu\Big\rangle \frac{P_\lambda}{\sqrt{z_\lambda}} = \sum_{|\lambda|=|\mu|=n} \Big\langle \frac{P_\lambda}{\sqrt{z_\lambda}}, M_\mu\Big\rangle \frac{P_\lambda}{\sqrt{z_\lambda}}$$

і якщо вибрати y так, що функціонал $\delta\colon f \mapsto f(y)$, $f \in H_s^z(\ell_1)$ неперервний (тобто $y \in \Omega$) то

$$\delta_y(M_\mu) = M_\mu(y) = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} P_\lambda(y)\langle P_\lambda, M_\mu\rangle.$$

Отже

$$\Big\langle \sum_{|\lambda|=n} H_\lambda(\cdot)M_\lambda(y), M_\mu(\cdot)\Big\rangle = \sum_{|\lambda|=n} M_\lambda(y)\langle H_\lambda, M_\mu\rangle = M_\mu(y).$$

Оскільки це виконується для всіх $y \in \Omega$ і множина таких y розділяє елементи простору $H_s^z(\ell_1)$, то

$$\langle H_\lambda, M_\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu}.$$

$\square$

Позначимо $\omega\colon H_s^b(\ell_1)\to H_s^b(\ell_1)$ лінійний мультиплікативний оператор, визначений на поліномах P_n наступним чином: $\omega(P_n)=(-1)^{n-1}P_n$. Внаслідок мультиплікативності ω маємо, що для $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=(1^{m_1},2^{m_2},\ldots,z^{m_r})$, $|\lambda|=n$

$$\omega\big(P_\lambda\big)=(-1)^{(1-1)m_1}(-1)^{(2-1)m_2}\cdots(-1)^{(r-1)m_r}P_1^{m_1}P_2^{m_2}\cdots P_r^{m_r}=$$

$$(-1)^{n-(m_1+\ldots+m_r)}P_\lambda.$$

З комбінаторики відомо (див. [76] с. 12), що відображення ω має властивість:

$$\omega(G_\lambda)=H_\lambda \quad \text{і} \quad \omega(H_\lambda)=G_\lambda \tag{4.3.1}$$

для кожного розбиття λ.

Твердження 4.3.2. *Оператор $\omega\colon H_s^b(\ell_1)\to H_s^b(\ell_1)$ є унітарним оператором і $\omega^2=I$, де I — одиничний оператор.*

Доведення. З означення оператора ω бачимо, що ω — неперервний та ізометричний. Крім того, з (4.3.1) випливає, що $\omega^2=I$. Тому $\omega^*=\omega=\omega^{-1}$. Отже, ω — унітарний. □

Зауважимо, що оператор ω буде необмеженим в топології рівномірної збіжності на обмежених підмножинах простору ℓ_1 [37].

Позначимо $\widetilde{M}_\lambda=\omega(M_\lambda)$.

Наслідок 4.3.3. *Лінійні базиси $\{G_\lambda\}$ і $\{\widetilde{M}_\lambda\}$ є біортогональними в просторі $H_s^z(\ell_1)$.*

Доведення. Враховуючи теорему 4.3.1 та твердження 4.3 маємо

$$\langle G_\lambda,\widetilde{M}_\mu\rangle=\langle\omega(G_\lambda),\omega(\widetilde{M}_\mu)\rangle=\langle H_\lambda,M_\mu\rangle=\delta_{\lambda\mu}.$$

□

Нагадаємо, що пара базисів $\{e_i\}$ та $\{u_j\}$ у гільбертовому просторі E називається *біортогональними базисами Ріса*, якщо $(e_i, u_j)_E = \delta_{ij}$, $i, j \in \mathbb{N}$ і

$$\sup_n \|e_n\| \|u_n\| < \infty.$$

З властивості біортогональності випливає, що для кожного $x \in E$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n) e_n.$$

Як було показано, $\|G_n\| = \|H_n\| = 1$. Але $\|M_n\| = \|\widetilde{M}_n\| = \|P_n\| = \sqrt{n}$, тому $\sup\limits_{\lambda} \|M_\lambda\| \|H_\lambda\| = \infty$ і $\sup\limits_{\lambda} \|\widetilde{M}_\lambda\| \|G_\lambda\| = \infty$. Тому ні пара $\{H_\lambda\}$, $\{M_\lambda\}$ ні пара $\{G_\lambda\}$, $\{\widetilde{M}_\lambda\}$ не є біортогональними базисами Ріса в $H_s^z(\ell_1)$. Проте, для кожного $f \in H_s^z(\ell_1)$ виконуються рівності

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \langle f, \widetilde{M}_\lambda \rangle G_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \langle f, G_\lambda \rangle \widetilde{M}_\lambda$$

та

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \langle f, M_\lambda \rangle H_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \langle f, H_\lambda \rangle M_\lambda.$$

4.4. Симетричні дробові відображення і симетричне функціональне числення

У попередніх розділах (див. також [35, 37]) було введено наступні операції на ℓ_1

$$x \bullet y = (x_1, y_1, x_2, y_2,)$$

і

$$x \diamond y = (x_i y_j)_{i,j=1}^{\infty\infty}.$$

При цьому,

$$P_k(x \bullet y) = P_k(x) + P_k(y) \quad \text{і} \quad P_k(x \diamond y) = P_k(x) P_k(y), x, y \in \ell_1.$$

Нехай $\mathbb{I} = (1, 0, \ldots) \in \ell_1$. Очевидно, що $P_k(x \bullet 0) = P_k(x)$ і $P_k(x \diamond \mathbb{I}) = P_k(x)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $x \in \ell_1$.

В [37] доведено, що якщо $x \neq 0$, то не існує $y \in \ell_1$ такого, що $P_k(x \bullet y) = 0$ для всіх k.

Також $P_k(x \diamond y) = 1$ для будь-якого k тоді і тільки тоді $x = \lambda \mathbb{I}$ і $y = \frac{1}{\lambda}\mathbb{I}$ для деяких $\lambda \neq 0$.

В [37] показано, що алгебраїчний гомоморфізм $P : P_s(\ell_1) \to P_s(\ell_1) \to$ вигляду $P(P_k) = a_k P_k$ є неперервним в топології рівномірної збіжності на обмежених множинах ℓ_1 тоді і тільки тоді, коли $a_k = \varphi(P_k)$ для деяких неперервних комплексних гомоморфізмів φ. Зокрема, гомоморфізм

$$P_k \mapsto -P_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

є розривним. Нагадаємо, що $H_{bs}(\ell_1)$ є поповненням простору на $P_s(\ell_1)$ в топології рівномірної збіжності на обмежених множинах.

Ми покажемо, що для будь-якого $x \in \ell_1, \|x\| < 1$ існує $h \in \ell_1$ такий, що $P_k(h) = \dfrac{1}{1 - P_k(x)}$ і гомоморфізм в алгебру симетричних аналітичних функцій в кулі простору ℓ_1 з центром в нулі, радіуса 1, що повністю визначається відображенням $P_k \mapsto \dfrac{1}{1-P_k}$, є неперервним.

Позначимо $\bullet_{n=1}^m u_n \bullet \ldots \bullet u_n$ і $\diamond_{n=1}^m u_n = u_1 \diamond \ldots \diamond u_m, u_n \in \ell_1$. Якщо існує границя $\lim_{n\to\infty} \bullet_{n=1}^m u_n$ в ℓ_1, ми позначимо її $\bullet_{n=1}^\infty u_n$. Також, ми використаємо позначення $x^{\diamond n} = \underbrace{x \diamond \ldots \diamond x}_{n}$.

Теорема 4.4.1. *Нехай $x \in \ell_1, \|x\| < 1$. Тоді*

$$x = \bullet_{n=0}^\infty x^{\diamond n} \in \ell_1, x^{\diamond 0} = (1, 0, 0, \ldots) \quad i$$

1. *відображення $x \mapsto \bullet_{n=0}^\infty x^{\diamond n}$ є аналітичним на кулі B_1 з центром в нулі і радіуса 1 і обмеженим на довільній кулі з центром в нулі і радіусом меншим за 1;*

2. *для будь-якого m,*

$$P_m(\bullet_{n=1}^\infty x^{\diamond n}) = \frac{1}{1-P_m(x)}, \quad \|x\| < 1.$$

Доведення. З [37] маємо

$$\|x \bullet y\| \le \|x\| + \|y\|$$

і

$$\|x \diamond y\| \le \|x\|\|y\|.$$

Отже

$$\| \bullet_{n=1}^\infty x^{\diamond n}\| \le \sum_{n=0}^\infty \|x\|^n = \frac{1}{1-\|x\|} < \infty.$$

Більше того, якщо $\|x\| \le r < 1$, то $\| \bullet_{n=1}^\infty x^{\diamond n}\| \le \frac{1}{1-r} < \infty$. Тому,

$$P_m(\bullet_{n=1}^\infty x^{\diamond n}) = \sum_{n=0}^\infty P_m(x^{\diamond n}) = \sum_{n=0}^\infty (P_m(x))^n = \frac{1}{1-P_m(x)} < \infty.$$

Тому $\|P_m(x)\| < 1$, якщо $\|x\| < 1$. $\square$

В загальному випадку, повторюючи міркування теореми 4.4.1, отримаємо, що для будь-якого числа c, $|c| \leq 1/r$ відображення

$$x \mapsto \bullet_{n=k}^{\infty} (cx)^{\diamond n} \tag{4.4.1}$$

є аналітичним відображенням кулі B_r з центром в нулі, радіуса r і для будь-якого натурального m,

$$P_m(\bullet_{n=k}^{\infty} (cx)^{\diamond n}) = \frac{c^{mk} P_m^k(x)}{1 - c^m P_m(x)}.$$

Таким чином, відображення вигляду (4.4.1) можна розглядати як дробові відображення на множині мультимножин. Тобто, для функції $g\colon t \mapsto \frac{1}{1-t}$ ми побудували відображення, яке можна інтерпретувати як $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \in \ell_1$, $\|x\| < 1$ і розглядати як "симетричне функціональне числення" на множині мультимножин. Наведена вище конструкція може бути узагальнена для функцій $g(t)$ більш загального вигляду.

Зауважимо, що якщо $x \in \ell_1$ і $x \sim y$, то $\|x\| = \|y\|$. Тому ми можемо позначити $\|[x]\| := \|x\|$. Позначимо

$$B_r\big(\ell_1/\sim\big) = \{[x] \in \ell_1/\sim\colon \|x\| < r\}.$$

Твердження 4.4.2. *Нехай*

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n t^n$$

— функція однієї комплексної змінної, аналітична в крузі з центром в нулі радіуса r і всі коефіцієнти k_n є цілими невід'ємними числами. Тоді існує відображення $L_g\colon B_r\big(\ell_1/\sim\big) \to \ell_1/\sim$ таке, що

$$L_g(x) = \bullet_{n=0}^{\infty} \underbrace{\big(x^{\diamond n}\big) \bullet \cdots \bullet \big(x^{\diamond n}\big)}_{k_n}, \quad [x] \in B_r\big(\ell_1/\sim\big).$$

При цьому мають місце такі властивості:

1. $P_m(L_g(x)) = g(P_m(x))$, $m \in \mathbb{N}$;

2. $L_{g_1+g_2}(x) = L_{g_1}(x) \bullet L_{g_2}(x)$;
3. $L_{g_1 g_2}(x) = L_{g_1}(x) \diamond L_{g_2}(x)$;

Доведення. Зауважимо, що якщо $x \sim y$, то $L_g(x) \sim L_g(y)$. Покажемо, що якщо $\|x\| < r$, то $\|L_g(x)\| < \infty$. Справді,

$$\|L_g(x)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} k_n \|x\|^n = g(\|x\|) < \infty.$$

Отже, $L_g(x) \in \ell_1/\sim$. Крім того,

$$P_m(L_g(x)) = P_m\left(\bullet_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(x^{\diamond n}\right) \bullet \cdots \bullet \left(x^{\diamond n}\right)}_{k_n}\right) = P_m g(P_m(x)).$$

Властивості 2 і 3 безпосередньо випливають з властивостей операцій "$\bullet$" і "$\diamond$".

$\square$

4.5. Відтворююче ядро у просторі $H_s(\ell_1)$

Ми будемо використовувати скорочені позначення:

$$\bullet_{n=1}^{m} x_n = x_1 \bullet \cdots \bullet x_m \text{ і } x^{\diamond m} = \underbrace{x \diamond \cdots \diamond x}_{m},$$

зокрема,

$$x^{\diamond 0} = (1, 0, \ldots, 0, \ldots).$$

Позначимо $K(x, y) = \bullet_{n=0}^{\infty}(x \diamond y)^{\diamond n}, x, y \in \ell_1$. Зауважимо, що для кожного $x, y \in \ell_1, \|x\| < 1, \|y\| < 1$,

$$\|K(x, y)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|xy\|^n = \frac{1}{1 - \|x\|\|y\|}.$$

При цьому, для $x, y \in \Omega, m \in \mathbb{N}$ визначено

$$P_m(K(x, y)) = \lim_{k \to \infty} P_m(\bullet_{n=0}^{k}(x \diamond y)^{\diamond n})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (P_m(x) P_m(y))^n = \frac{1}{1 - P_m(x) P_m(y)}.$$

Позначимо нескінченний формальний добуток

$$C(x, y) = \prod_{m=1}^{\infty} P_m(K(x, y)).$$

Лема 4.5.1. *Для кожного фіксованого $x \in \Omega$, $C(x, y)$ є функцією з $H_s(\ell_1)$ відносно y.*

Доведення. Легко бачити, що

$$C(x, y) = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (P_m(x) P_m(y))^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} P_\lambda(x) P_\lambda(y).$$

Як було зауважено, $\{P_k(x)\} = \{a_k\} \in \mathbb{D}_2$. Повторюючи міркування теореми 4.1.4, отримуємо, що $\{P_\lambda(x)\} \in \ell_2$, тому за означенням простору $H_s(\ell_1)$, $C(x, y) \in H_s(\ell_1)$ для кожного фіксованого $x \in \Omega$. $\square$

Теорема 4.5.2. *Для кожного фіксованого* $x \in \Omega$ *і* $f \in H_s(\ell_1)$ *виконується рівність*

$$f(x) = \langle C(x, \cdot), f \rangle_{H_s}.$$

Доведення. Нехай

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda P_\lambda(y).$$

Тоді

$$\langle C(x, \cdot), f \rangle_{H_s} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \langle P_\lambda(x) P_\lambda, c_\lambda P_\lambda \rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda P_\lambda(x) = f(x).$$

□

З теореми, зокрема, випливає, що $C(x, y)$ є абстрактним відтворюючим ядром простору $H_s(\ell_1)$ і $\langle C(x, \cdot), f \rangle = R_x(f), f \in H_s(\ell_1)$.

4.6. Властивості оператора симетричного зсуву

Визначимо оператор $\Lambda_y\colon P_s(\ell_1) \to P_s(\ell_1)$ для кожного $y \in \ell_1$ таким чином:

$$\Lambda_y(P)(x) = P(x \bullet y).$$

Очевидно, що

$$\Lambda_y(P + cQ) = P(x \bullet y) + cQ(x \bullet y) = \Lambda_y(P) + c\Lambda_y(Q)$$

для всіх $P, Q \in P_s(\ell_1)$, $c \in \mathbb{C}$. Тому $\Lambda_y(P)$ — лінійний оператор на просторі $P_s(\ell_1)$. Ми будемо позначати тим самим символом Λ_y — оператор на $H_s^b(\ell_1)$ з максимальною областю визначення.

Твердження 4.6.1. *Λ_y — щільно визначений в просторі $H_s^b(\ell_1)$ оператор, $y \in \ell_1$. Якщо множина Ω_b містить відкриту підмножину і $x \bullet y \in \Omega_b$ для кожного $x \in \Omega_b$, то Λ_y — замкнений (тобто має замкнений графік).*

Доведення. Область визначення оператора Λ_y містить щільний підпростір $P_s(\ell_1)$, тому Λ_y — щільно визначений.

З умови твердження випливає, що множина Ω_b розділяє точки простору $H_s^b(\ell_1)$. Нехай $\{f_n\}$ — деяка послідовність в $H_s^b(\ell_1)$ така, що $f_n \to f_0$ і $\Lambda_y(f_n) \to g$ при $n \to \infty$ для деяких $f_0, g \in H_s^b(\ell_1)$. З того, що

$$\Lambda_y(f)(x) = f(x \bullet y) = \delta_{x \bullet y}(f)$$

і функціонал $\delta_{x \bullet y}$ неперервний в $H_s^b(\ell_1)$, маємо

$$\Lambda_y(f_n)(x) = f_n(x \bullet y) = \delta_{x \bullet y}(f_n) \to \delta_{x \bullet y}(f_0) = \Lambda_y(f_0)(x) = g(x).$$

Оскільки це виконується для всіх $x \in \Omega_b$, то $f = g$. Тому оператор Λ_y має замкнений графік. □

Твердження 4.6.2. *Якщо існує $x_0 \in \Omega_b$ такий, що $x_0 \bullet y \notin \Omega_b$, то оператор Λ_b — необмежений.*

Доведення. Припустимо, що Λ_y — обмежений. Тоді спряжений оператор Λ_y^* — також обмежений і діє з $H_s^{b*}(\ell_1)$ в $H_s^{b*}(\ell_1)$. Згідно з означенням Ω_b, функціонал значення в точці δ_{x_0}, буде неперервним, тобто $\delta_{x_0} \in H_s^{b*}(\ell_1)$. Тоді,

$$(\Lambda_y^*)(\delta_{x_0}) = \delta(x_0 \bullet y) \in H_s^{b*}(\ell_1).$$

А це означає, що $x_0 \bullet y \in \Omega_b$ — суперечність. Отже, Λ_y — необмежений. $\square$

Наслідок 4.6.3. *Припустимо, що Ω_b містить відкриту підмножину. Оператор Λ_y буде обмеженим тоді і тільки тоді, коли він визначений на всьому просторі $H_s^b(\ell_1)$ (і приймає значення в цьому просторі).*

Доведення. З твердження 4.6.1 випливає, що Λ_y має замкнений графік. За теоремою Банаха про замкнений графік, Λ_y — обмежений. $\square$

Зауважимо, що з того, що $x \bullet y \in \Omega_b$ для всіх $x \in \Omega_b$ не випливає, що Λ_y — обмежений. Можлива ситуація коли існує елемент $f \in H_s^b(\ell_1)$ такий, що функція $\Lambda_y(f)(x) = f(x \bullet y)$ визначена для всіх $x \in \Omega_b$, але не $\Lambda_y(f)$ належить простору $H_s^b(\ell_1)$. Детальніше, приклад такого випадку буде розглянуто у наступному розділі.

Приклад 4.6.4. *Розглянемо випадок, коли $H_s^b(\ell_1) = H_s(\ell_1)$, тобто, коли $b_\lambda \equiv 1$. У цьому випадку, як було доведено,*

$$\Omega = \Omega_b = \{x \in \ell_1 \colon |P_n(x)| < 1, \, n \in \mathbb{N}\}.$$

Припустимо, що Λ_y — обмежений оператор для деякого $y \neq 0$. Оскільки $y \neq 0$, існує номер n такий, що $P_n \neq 0$. Тому, для деякого натурального

m,

$$\Big|P_n\Big(\underbrace{y\bullet\cdots\bullet y}_{m}\Big)\Big| > 1.$$

Таким чином, $\underbrace{y\bullet\cdots\bullet y}_{m} \notin \Omega$ *і*

$$\big(\Lambda_y\big)^m(f)(0) = f\Big(\underbrace{y\bullet\cdots\bullet y}_{m}\Big).$$

Тому оператор $\big(\Lambda_y\big)^m$ *є необмеженим, і, отже,* Λ_y *є необмеженим оператором для кожного* $y \neq 0$.

Приклад 4.6.5. *Нехай* $b_\lambda \geq |\lambda|!$. *Тоді, як було показано у твердженні 3.2,* $\Omega_b = \ell_1$. *Тому, в цьому випадку,* Λ_y *є замкненим оператором для всіх* $y \in \ell_1$.

Покажемо, що оператор Λ_y не є симетричним. Для цього знайдемо вигляд оператора Λ_y^* у просторі $H_s^{b*}(\ell_1)$. Нехай $\varphi \in H_s^{b*}(\ell_1)$, тоді існує $g \in H_s^b(\ell_1)$ такий, що $\varphi(f) = \langle f, g\rangle$. Нехай $g = \sum\limits_{|\lambda|=0}^{\infty} d_\lambda P_\mu$.

Тоді

$$\langle \Lambda_y^*(\varphi), P_n\rangle = \langle \varphi, \Lambda_y(P_n)\rangle =$$

$$\langle \varphi, P_n(y\bullet\cdot)\rangle = \langle \varphi, P_n(y) + P_n\rangle =$$

$$\left\langle \sum_{|\lambda|=0}^{\infty} d_\lambda P_\lambda, P_n(y) + P_n \right\rangle = d_0 P_n(y) + \langle \varphi, P_n\rangle = d_n b_n.$$

В загальному випадку, для довільного розбиття $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ натурального числа $|\lambda|$, отримаємо

$$\langle \Lambda_y^*(\varphi), P_\lambda\rangle = \langle \varphi, (P_{\lambda_1}(y) + P_{\lambda_1})\cdot\ldots\cdot(P_{\lambda_n}(y) + P_{\lambda_n})\rangle =$$

$$\left\langle \varphi, \sum_{\lambda'\cup\lambda''=\lambda} P_{\lambda'}(y) P_{\lambda''} \right\rangle = \sum_{\lambda'\cup\lambda''=\lambda} d_{\lambda''} b_{\lambda''} P_{\lambda'}(y).$$

Тут, під об'єднанням двох розбиттів $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots \lambda'_m)$ і $\lambda'' = (\lambda''_1, \ldots \lambda''_k)$ ми розуміємо розбиття $(\lambda'_1, \ldots \lambda'_m, \lambda''_1, \ldots \lambda''_k)$.

Обчислимо

$$\Lambda_y(g) = \sum_{|\mu|=0}^{\infty} d_\mu P_\mu(y \bullet x) = \sum_{|\mu|=0}^{\infty} d_\mu \big(P_{\mu_1}(y) + P_{\mu_1}(x)\big) \dots \big(P_{\mu_n}(y) + P_{\mu_n}(x)\big) =$$

$$\sum_{|\mu|=0}^{\infty} d_\mu \sum_{k+r=|\lambda|, i_1<\dots<i_k, j_1<\dots<j_r} P_{\mu_{i_1}}(y) \dots P_{\mu_{i_k}}(y) P_{\mu_{j_1}} \cdot \dots \cdot P_{\mu_{j_r}}.$$

Нехай $|\lambda| = r, \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, тоді

$$\langle \Lambda_y(g), P_\lambda \rangle = \Big\langle \sum_{|\mu|=m} d_\mu \sum_{k+r=m, i_1<\dots<i_k, j_1<\dots<j_r} P_{\mu_{i_1}}(y) \cdot \dots$$

$$\dots \cdot P_{\mu_{i_k}}(y) P_{\mu_{j_1}} \cdot \dots \cdot P_{\mu_{j_r}}, P_\lambda \Big\rangle =$$

$$\Big\langle \sum_{|\mu|=m} d_\mu \sum_{k+r=m, i_1<\dots<i_k, j_1<\dots<j_r} P_{\mu_{i_1}}(y) \cdot \dots$$

$$\cdot P_{\mu_{i_k}}(y) P_{\mu_{j_1}} \cdot \dots \cdot P_{\mu_{j_r}}, P_{\lambda_1} \cdot \dots \cdot P_{\lambda_n} \Big\rangle =$$

$$\sum_{\mu_{i_1}+\dots+\mu_{i_k}=0} d_{\mu i_1 \dots \mu i_k \lambda_1 \dots \lambda_n} P_{\mu_{i_1}}(y) \dots P_{\mu_{i_k}}(y).$$

Легко бачити, що $\Lambda_y \neq \Lambda_y^*$. Справді, для випадку $g = P_1 + P_2 - P_1 P_2, P_\lambda = P_1 P_2$ безпосередні обчислення показують, що у просторі $H_s(\ell_1)$, $\Lambda_y^*(g) = P_1(y) + P_2(y) - 1, \Lambda_y(g) = -1$.

4.7. Оператор диференціювання

Розглянемо відображення $\Theta_t(P_n) = tP_n$, $t \in \mathbb{C}$ і $\Theta_t(c) = c$, де $c = const$. Продовжимо його за лінійністю і мультиплікативністю на простір поліномів $P_s(\ell_1)$:

$$\Theta_t(P_\lambda) = \Theta_t(P_{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot P_{\lambda_m}) = \Theta_t(P_{\lambda_1}) \cdot \ldots \cdot \Theta_t(P_{\lambda_m}) = t^m P_\lambda$$

$$\Theta_t\Big(\sum_{|\lambda|=n} P_\lambda\Big) = \sum_{|\lambda|=n} \Theta_t(P_\lambda).$$

При кожному фіксованому t, Θ_t діє з $P_s(\ell_1)$ в $P_s(\ell_1)$.

Має місце така оцінка:

$$\|\Theta_t(P_\lambda)\| = |t|^{l(\lambda)}\|P_\lambda\|,$$

де $l(\lambda) = m$ означає, що $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$.

Твердження 4.7.1. *Оператор Θ_t буде обмеженим в просторі $H_s^b(\ell_1)$ для $|t| < 1$ і $\|\Theta_t\| \leq 1$.*

Доведення. Нехай $|t| < 1$, і $f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda P_\lambda \in H_s^b(\ell_1)$. Тоді

$$\|\Theta_t(f)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} |c_\lambda|^2 t^{2l(\lambda)} b_\lambda \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} |c_\lambda|^2 b_\lambda = \|f\|^2.$$

Тому оператор Θ_t — обмежений, і $\|\Theta_t\| \leq 1$.

□

На просторі $H_s(\ell_1)$ оператор Θ_t буде необмеженим при $|t| > 1$. Справді, наприклад, для $P_\lambda = P_1^n$, $\|P_1^n\| = 1$, отримаємо $\|\Theta_t(P_1^n)\| = t^n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Розглянемо оператор типу диференціювання:

$$\mathcal{D}_h f = \lim_{t \to 0} \frac{\Theta_t(\Lambda_h(f(x))) - f(x)}{t}, \quad h \in \Omega, \quad h \neq 0.$$

Твердження 4.7.2. *$\mathcal{D}_h, h \in \Omega, h \neq 0$ щільновизначений оператор в просторі $H^b_s(\ell_1)$, для якого виконується правило Лейбніца*

$$\mathcal{D}_h(fg) = \mathcal{D}_h(f)g + f\mathcal{D}_h(g)$$

для всіх f, g з області визначення $\mathcal{D}_h$.

Доведення. Щільновизначеність випливає з того, що $\mathcal{D}_h$ визначено на щільному просторі поліномів $P_s(\ell_1)$, а правило Лейбніца перевіряється безпосередньо, використовуючи стандартні міркування. □

Зауважимо, що $\mathcal{D}_h(P_n) = P_n(h)$ для всіх n. Також,

$$\mathcal{D}_h(P_\lambda) = \sum_{k=1}^{n} P_{\widetilde{\lambda^k}} P_{\lambda_k}(h),$$

де $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ і $\widetilde{\lambda}^k = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n)$.

Знайдемо загальний вигляд оператора $\mathcal{D}^*_h$ в просторі $H^b_s(\ell_1)$. Враховуючи, що множина $\left\{ \dfrac{P_\lambda}{\sqrt{b_\lambda}} \right\}$ утворює ортонормований базис в $H^b_s(\ell_1)$, знайдемо $\left\langle D^*_h \dfrac{P_\mu}{\sqrt{b_\mu}}, \dfrac{P_\lambda}{\sqrt{b_\lambda}} \right\rangle$.

$$\left\langle D^*_h \frac{P_\mu}{\sqrt{b_\mu}}, \frac{P_\lambda}{\sqrt{b_\lambda}} \right\rangle = \left\langle \frac{P_\mu}{\sqrt{b_\mu}}, D_h \frac{P_\lambda}{\sqrt{b_\lambda}} \right\rangle = \left\langle \frac{P_\mu}{\sqrt{b_\mu}}, \frac{\sum_{k=1}^{n} P_{\widetilde{\lambda^k}} P_{\lambda_k}(h)}{\sqrt{b_\lambda}} \right\rangle.$$

Бачимо, що ця величина не дорівнює нулю тільки, якщо $\widetilde{\lambda^k} = \mu$, тобто $\lambda = (\mu, j) = (\mu_1, \ldots, \mu_m, j)$ для деякого $j \in \mathbb{N}$. При цьому

$$\left\langle D^*_h \frac{P_\mu}{\sqrt{b_\mu}}, \frac{P_{(\mu,j)}}{\sqrt{b_{(\mu,j)}}} \right\rangle = \sqrt{\frac{b_\mu}{b_{(\mu,j)}}}\,\overline{P_j(h)}.$$

Тому

$$D^* \frac{P_\mu}{\sqrt{b_\mu}} = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\frac{b_\mu}{b_{(\mu,j)}}}\,\overline{P_j(h)} \frac{P_{(\mu,j)}}{\sqrt{b_{(\mu,j)}}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{b_\mu}}{b_{(\mu,j)}} \overline{P_j(h)} P_{(\mu,j)}. \qquad (4.7.1)$$

Твердження 4.7.3. *Якщо $h \in \Omega_b$, то оператор D_h^* щільновизначений.*

Доведення. З рівності (4.7.1) маємо, що

$$\left\| D^* \frac{P_\mu}{\sqrt{b_\mu}} \right\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_\mu}{b_{(\mu,j)}^2} b_{(\mu,j)} |P_j(h)|^2 = b_\mu \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{b_{(\mu,j)}} |P_j(h)|^2.$$

Згідно з твердженням 3.5.4, $h \in \Omega_b$ тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \frac{|P_\lambda(h)|^2}{b_\lambda} < \infty.$$

Зафіксуємо розбиття $\lambda = \mu$. Тоді

$$|P_\mu(h)|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|P_j(h)|^2}{b_{(\mu,j)}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|P_{(\mu,j)}(h)|^2}{b_{(\mu,j)}} \le \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \frac{|P_\lambda(h)|^2}{b_\lambda} < \infty.$$

Тому

$$\left\| D^* \frac{P_\mu}{\sqrt{b_\mu}} \right\|^2 < \infty.$$

Отже, оператор D^* визначений на всіх базисних векторах простору $H_s^b(\ell_1)$, тому і на їх лінійні оболонці, яка є щільним підпростором у $H_b^s(\ell_1)$. □

З рівності (4.7.1) випливає, що

$$\mathcal{D}_h \mathcal{D}_h^*(P_\lambda) = \sum_{k=1}^{n} P_{\lambda_k}(h) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_\lambda}{b_{(\lambda,j)}} P_{(\widetilde{\lambda}^k,j)} \overline{P_j(h)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_\lambda}{b_{(\lambda,j)}} P_\lambda \left| P_j(h) \right|^2 \quad (4.7.2)$$

і

$$\mathcal{D}_h^* \mathcal{D}_h(P_\lambda) = \sum_{k=1}^{n} P_{\lambda_k}(h) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_{\widetilde{\lambda}^k}}{b_{(\widetilde{\lambda}^k,j)}} P_{(\widetilde{\lambda}^k,j)} \overline{P_j(h)}. \quad (4.7.3)$$

Розглянемо випадок, коли $b_\lambda \equiv 1$, тобто, $H_s^b(\ell_1) = H_s(\ell_1)$.

Теорема 4.7.4. *Для довільного $h \in \Omega$, $h \neq 0$ оператори $\mathcal{D}_h$ та $\mathcal{D}_h^*$ є необмеженими і щільновизначеними в просторі $H_s(\ell_1)$ та задовольняють так зване канонічне комутаційне співвідношення:*

$$\mathcal{D}_h\mathcal{D}_h^* - \mathcal{D}_h^*\mathcal{D}_h = \mathrm{I}\sum_{k=1}^{\infty} |P_k(h)|^2,$$

де I — *одиничний оператор.*

Доведення. Враховуючи рівності (4.7.2) та (4.7.3) для випадку $b_\lambda \equiv 1$ маємо

$$\mathcal{D}_h^*\mathcal{D}_h(P_\lambda) = \sum_{k=1}^{n} P_{\lambda_k}(h) \sum_j P_{(\widetilde{\lambda}^k, j)}\overline{P_j(h)}.$$

$$\mathcal{D}_h\mathcal{D}_h^*(P_\lambda) = \sum_{k=1}^{n} P_{\lambda_k}(h) \sum_j P_{(\widetilde{\lambda}^k, j)}\overline{P_j(h)} + \sum_j P_\lambda \big|P_j(h)\big|^2.$$

Тому

$$(\mathcal{D}_h\mathcal{D}_h^* - \mathcal{D}_h^*\mathcal{D}_h)(P_\lambda) = P_\lambda \sum_j \big|P_j(h)\big|^2.$$

□

Зауважимо, що якщо $h_1, h_2 \neq 0$, то $\mathcal{D}_{h_1}\mathcal{D}_{h_2} = \mathcal{D}_{h_2}\mathcal{D}_{h_1}$ і $\mathcal{D}_{h_1}^*\mathcal{D}_{h_2}^* = \mathcal{D}_{h_2}^*\mathcal{D}_{h_1}^*$.

Нагадаємо, що оператор a гільбертового простору називається оператором народження, якщо виконується канонічне комутаційне співвідношення $a^*a - aa^* = \mathrm{I}$. При цьому a^* називається оператором знищення.

Наслідок 4.7.5. *Для кожного $h \in \Omega$, $h \neq 0$ оператори*

$$a_h = \frac{\mathcal{D}_h}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |P_k(h)|^2}}$$

та

$$a_h^* = \frac{\mathcal{D}_h^*}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |P_k(h)|^2}}$$

є операторами народження та знищення відповідно.

Відзначимо деякі очевидні властивості операторів a_h та a_h^*.

Твердження 4.7.6. 1. *Для довільних $h_1, h_2 \in \Omega$ таких, що $h_1 \bullet h_2 \in \Omega$*

$$a^*_{h_1 \bullet h_2}(P_n) = \frac{\mathcal{D}_{h_1}(P_n)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |P_k(h_1) + P_k(h_2)|^2}} + \frac{\mathcal{D}_{h_2}(P_n)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |P_k(h_1) + P_k(h_2)|^2}} =$$
$$\frac{P_n(h_1)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |P_k(h_1) + P_k(h_2)|^2}} + \frac{P_n(h_2)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |P_k(h_1) + P_k(h_2)|^2}}.$$

2. *Для довільних $h_1, h_2 \in \Omega$ таких, що $h_1 \bullet h_2 \in \Omega$*

$$a_{h_1 \bullet h_2}(P_n) = \frac{\mathcal{D}^*_{h_1}(P_n)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |P_k(h_1) + P_k(h_2)|^2}} + \frac{\mathcal{D}^*_{h_2}(P_n)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |P_k(h_1) + P_k(h_2)|^2}} =$$
$$\frac{\sum_j P_n P_j P_j(h_1)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |P_k(h_1) + P_k(h_2)|^2}} + \frac{\sum_j P_n P_j P_j(h_2)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |P_k(h_1) + P_k(h_2)|^2}}.$$

3. *Нехай $h \in \Omega$ і t — комплексне число таке, що $th \in \Omega$. Тоді*

$$a^*_{th}(P_n) = t^n a^*(P_n).$$

4. *Нехай $h \in \Omega$ і t — комплексне число таке, що $th \in \Omega$. Тоді*

$$a_{th}(P_n) = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} t^j P_n P_j P_j(h)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |P_k(h)|^2}}.$$

Висновки до розділу 4

У цьому розділі досліджено властивості мультиплікативних операторів і функціоналів на просторі $H_s^b(\ell_1)$. Лінійні мультиплікативні відображення є гомоморфізмами алгебри поліномів з простору $H_s^b(\ell_1)$, тому вони визначаються своїми значеннями на поліномах P_n, $n \in \mathbb{N}$.

У підрозділі 4.1 досліджено мультиплікативні лінійні функціонали на просторі $H_s^b(\ell_1)$ і встановлено необхідні і достатні умови неперервності таких функціоналів. Також, розглянуто випадки, коли норма простору $H_s^b(\ell_1)$ є мультиплікативною або субмультиплікативною. Зокрема, показано, що якщо на $H_s^b(\ell_1)$ визначено субмультиплікативну норму, то $H_s^b(\ell_1)$ можна подати у вигляді простора аналітичних функцій на гільбертовому просторі мультиплікативних функціоналів.

У підрозділі 4.2 розглянуто оператори композиції на просторі $H_s^b(\ell_1)$. Встановлено неперервність операторів композиції пов'язаних з функціями, які належать алгебрі Вінера. Досліджено умови обмеженості і самоспряженості оператора $M_y\colon f(x) \mapsto f(x \diamond y)$.

Використовуючи результати підрозділу 4.2, у підрозділі 4.3 показано, що базиси $\{H_\lambda\}$ і $\{M_\lambda\}$ є біортогональними в просторі $H_s^z(\ell_1)$. Знайдено біортогональний базис до базису $\{G_\lambda\}$.

У підрозділі 4.4 побудовано певний аналог функціонального числення симетричних аналітичних функцій, зокрема, дробових симетричних функцій. У підрозділі 4.5 застосовано цей підхід до побудови відтворюючого ядра простору $H_s(\ell_1)$.

У підрозділі 4.6 детальніше досліджено властивості оператора симетричного зсуву, який є ще одним прикладом оператора композиції. Знайдено умови замкненості та обмеженості цього оператора. Використовуючи ці результати, у підрозділі 4.7 побудовано оператор диференціювання. Показано, що оператор диференціювання є щільно визначеним, досліджено спряжений оператор до нього та доведено комутаційні співвідношення між цими операторами. Розглянуто властивості відповідних операторів народження і знищення.

Основні результати четвертого розділу опубліковано у [3, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 38, 60, 61, 65, 66, 67, 69].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню гільбертових просторів симетричних поліномів та аналітичних функцій і дії операторів на цих просторах. Простір симетричних поліномів від нескінченної кількості змінних має найбагатшу алгебраїчну структуру, коли ці поліноми визначені на ℓ_1. В цьому випадку всі поліноми P_n є коректно визначеними і утворюють алгебраїчний базис в алгебрі симетричних поліномів $P_s(\ell_1)$, а поліноми $P_\lambda = P_{\lambda_1} \cdots P_{\lambda_n}$, де λ пробігає множину розбиттів натуральних чисел, утворює лінійний базис в цій алгебрі. В дисертаційній роботі, вибираючи різні евклідові норми на просторі $P_s(\ell_1)$, отримано у поповненні різні гільбертові простори $H_s^b(\ell_1)$. Елементами цих просторів є степеневі ряди, які, у багатьох випадках, є аналітичними функціями у деякій області простору ℓ_1.

У дисертації знайдено необхідні і достатні умови, того, що простір $H_s^b(\ell_1)$ складається з аналітичних функцій в деякій області $\Omega_b \subseteq \ell_1$ та описано цю область. Також, описано природні ізоморфізми $H_s^b(\ell_1)$ і зважених (абстрактних) симетричних просторів Фока. Цей підхід дозволяє, використовуючи різні алгебраїчні базиси симетричних поліномів і відомі комбінаторні тотожності будувати різні, в тому числі неоднорідні ортогональні базиси у симетричних просторах Фока.

Значне місце в дисертації займає дослідження лінійних функціоналів і операторів, породжених внутрішньою структурою простору $H_s^b(\ell_1)$. На просторі ℓ_1 (точніше, на множині класів еквівалентності цього простору відносно дії групи симетрій) існують природні алгебраїчні операції симетричного зсуву та симетричного добутку. Використовуючи ці операції можна побудувати оператори композиції на просторі $H_s^b(\ell_1)$. У роботі досліджено умови, коли ці оператори щільно визначені, замкнені, обмежені, самоспряжені, тощо. Через оператори композиції вдалось виразити відтворююче ядро простору $H_s(\ell_1)$ та побудувати певний аналог функціонального числення.

Серед операторів композиції цікавим є оператор симетричного зсуву. Використовуючи цей оператор побудовано оператори диференціювання в $H_s^b(\ell_1)$ та досліджено їх властивості. Описано спряжений оператор до диференціювання. Показано, що в спеціальному випадку оператор диференціювання та спряжений є операторами народження і знищення, тобто задовольняють канонічне комутаційне співвідношення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бохнер С., Мартин У. *Функции многих комплексных переменных* // Москва: Издательство иностранной литературы – 1951. – 301 с.

2. Голубчак О. М. *Гільбертові простори симетричних аналітичних функцій на* ℓ_1// Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 23-28 лютого, 2011, Ворохта: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2011. – С. 38–39 .

3. Голубчак О. М. *Гільбертові простори симетричних аналітичних функцій на* ℓ_1 // IV конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача, 24-27 травня, 2011, Львів: тези доповідей. – Львів, 2011. – С. 304 .

4. Голубчак О. М., Загороднюк А. В. *Гільбертові простори симетричних аналітичних функцій на* ℓ_1 // Всеукраїнська наукова конференція "Прикладні задачі математики", 13-15 жовтня, 2011, Яремче: тези доповідей. – Яремче, 2011. – С.46.

5. Голубчак О. М. *Гільбертові простори симетричних аналітичних функцій на* ℓ_1 // Карпатські математичні публікації. – 2011. – Т.3, №1. – С. 34–39.

6. Голубчак О. М. *Гільбертовий простір симетричних функцій на* ℓ_1 // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. – Т.54, №3. – С. 49–52.

7. Голубчак О. М. *Застосування симетричних поліномів до аналітичних автоморфізмів банахового простору* // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 24 - 27 лютого, 2016, Ворохта: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2016. – С. 71.

8. Голубчак О. М. *Мультиплікативні функціонали у гільбертових просторах симетричних аналітичних функцій на* ℓ_1 // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірно-

стей та математичного аналізу”, 20-26 лютого, 2012, Ворохта: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2012. – С. 30.

9. Голубчак О. М. *Оператори в гільбертових просторах симетричних аналітичних функцій* // Математичний вісник НТШ. – 2012. – Т. 9. – С. 44–51.

10. Голубчак О. М. *Оператори в гільбертових просторах симетричних аналітичних функцій* // Міжнародна конференція “Сучасні проблеми аналізу”, 30 вересня - 3 жовтня, 2010, Чернівці: тези доповідей. – Чернівці, 2010. – С.60–61.

11. Голубчак О. М. *Оператори композиції на гільбертовому просторі симетричних аналітичних функцій* // Всеукраїнська наукова конференція “Алгебра, топологія, аналіз, стохастика”, 20-23 вересня, 2012, Микуличин: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2012. – С. 13 – 14.

12. Голубчак О. М. *Оператори симетричного зсуву на гільбертовому просторі симетричних аналітичних функцій* // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, 25 лютого - 01 березня, 2015, Ворохта: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2015. – С. 18 – 19.

13. Голубчак О. М. *Оператори симетричного зсуву в гільбертовому просторі симетричних аналітичних функцій* // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2015. – Т. 13. – С. 31–35.

14. Голубчак О. М. *Спектр операторів композиції на гільбертовому просторі симетричних аналітичних функцій* // Всеукраїнський науковий семінар “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, 25-28 березня, 2010, Ворохта: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2010. – С. 30.

15. Голубчак О. М. *Топологічні та алгебраїчні структури на множині мультимножин* // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, 25 лютого - 01 березня, 2019, Ворохта: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2019. – С. 31 – 32.

16. Голубчак О. М., Загороднюк А. В. *Топологічні та алгебраїчні структури на множині мультимножин* // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2019. – Т.62, №1. – С. 67–73.

17. Дьедонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д. *Геометрическая теория инвариантов* // Москва: Мир, 1974. – 278 с.

18. Загороднюк А. В., Митрофанов М. А. *Аналітичні функції на одиничному диску гільбертового простору* // Вісник Львів. ун-ту, серія мех.-мат. – 2004. – Вип. 63. – С. 80–87.

19. Загороднюк А., Можировська З. *Гільбертові простори цілих функцій від нескінченної кількості змінних* //Математичний вісник НТШ – 2006. – С. 44–55.

20. Заторський Р. А. *Числення трикутних матриць та його застосування* // Івано-Франківськ: Вид-во Сімик, 2010. – 508 с.

21. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ*// Москва: Наука, 1984. – 750 с.

22. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа* // Москва: Наука, 1989. – 624 с.

23. Немировский А. С., Семенов С. М. *О полиномиальной апроксимации функций на гильбертовом пространстве* // Математический зборник. – 1973. – Т.92, №2. – С. 257–281.

24. Никольский С. М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*// Москва: Наука, 1977. – 456 с.

25. Чернега І. В. *Симетричні поліними на банахових просторах* // Карпатські математичні публікації. – 2009. – Т.1, №2. – С. 105–125.

26. Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A. *Algebra of symmetric holomorphic functions on* ℓ_p // Bull. Lond. Math. Soc. – 2003. – V.35. – P. 55–64.

27. Aron R., Prolla J. *Polynomial approximation of differentiable functions on Banach spaces* // J. Reine Angew. Math. – 1980. – V.313. – P. 195–216.

28. Aron R., Galindo P., Garcia D., Maestre M. *Regularity and algebras of analytic functions in infinite dimensions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1996. – V.348. – P. 543–559.

29. Aron R., B. Cole, T. Gamelin *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space* // J. Reine Angew. Math. – 1991. – V.415. – P. 51–93.

30. Aron R., Cole B., Gamelin T. *Weak-star continuous analytic funtions* // Can. J. Math. – 1995. – V. 47. – P. 673–683.

31. Banach S. *Über homogene polynome in* (L^2)// Studia Math. – 1938. – V. 7. – P. 36–44.

32. Benyamini Y., Lindenstrauss J. *Geometric Nonlinear Functional Analysis*// Providence, Rhode Island: AMS Colloquium Publications, V. 48, 2000. – 481 p.

33. Bochnak J., Siciak J. *Analytic functions in topological vector spaces* // Studia Math.– 1971. – V. 39. – P. 77–112.

34. Carne T. K., Cole B., Gamelin T. W. *A uniform algebra of analytic functions on a Banach space* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – V. 314. – P. 639–659

35. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. *A multiplicative convolution on the spectra of algebras of symmetric analytic functions* // Revista Matematica Complutense – 2014. – V. 27 (2) P. 575–585.

36. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. *Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra* // Proc. Amer. Math. Soc. – 2012. – V. 55. – P. 125–142.

37. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. *The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions* // Jour. Math. Anal. App. – 2012. – V. 395 (2). – P. 569–577.

38. Chernega I., Holubchak O., Novosad Z., Zagorodnyuk A. *Continuity and hypercyclicity of composition operators on algebras of symmetric analytic functions on Banach spaces* // European Journal of Mathematics. – 2020. – V.6, №1. – P. 153-163.

39. Diestel J., Jarchov H., Tonge A. *Absolutely summing operators* // Cambridge University Press, V. 43, 1995. – 474 p.

40. Dineen S. *Analysis in Infinite Dimensional Spaces* Springer, London, 1999.

41. Dineen S. *Complex Analysis in Locally Convex Spaces* // North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford: Mathematics Studies, V. 57, 1981. – 492 p.

42. Dineen S. *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces* // Springer, New York: Monographs in Mathematics, 1999. – 543 p.

43. Fréchet M. *Une definition fontionelle des polinômes* // Nouv. Ann. Math. – 1909. – V. 9. – P. 145–162.

44. Galindo P., Garcia D., Maestre M. *Holomorphic mappings of bounded type* // J. Math. Anal. Appl. – 1992. – V.166. – P. 236–246.

45. Galindo, P.; Vasylyshyn, T.; Zagorodnyuk A. *The algebra of symmetric analytic functions on* L_∞. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. – 2017. – V 147, 743–761.

46. P. Galindo, T. Vasylyshyn and A. Zagorodnyuk. *Symmetric and finitely symmetric polynomials on the spaces* ℓ_∞ *and* $L_\infty[0,+\infty)$. // Mathematische Nachrichten **291** (2018), 1712–1726.

47. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. *Analytic structure on the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions on* L_∞. // RACSAM 2020, **114** (56), 13 pages.

48. Gamelin T. W. *Analytic functions on Banach spaces* // Kluwer Acad. Publ., NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. – 1994. – V. 439. – P. 187–233.

49. Gamelin T. W. *Uniform algebras* // Chelsea, New York, second ed., 1984. – 257 p.

50. Gâteaux R. *Fonctionnelles d'une infinité des variables indépendantes* // Bull. Soc. Math. Frane. – 1919. – V. 47. – P. 70—96.

51. Gâteaux R. *Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analitiques* // C.R. Acad Sci. Pris, Ser. A – 1913. – V. 157. – P. 325—327.

52. Garsía D., Lourenço M. L., Maestro M., Moraes L. A. *The spectrum of analytic mappings of bounded type* // Jour. Math. Anal. Appl. – 2000. – V. 254. – P. 447—470.

53. Garsía D., Lourenço, M. L., Moraes L. A., Paques O. W. *The spectra of some algebras of analytic mappings* // Indag. Mathem. – 1999. – V. 10. – P. 393—406.

54. Gonzalez M., Gonzalo R., Jaramillo J. *Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces* // Jour. London Math. Soc. – 1999. – V.59. – P. 681—697.

55. Hájek P. *Polynomial algebras on classical Banach Spaces* // Israel J. Math. – 1998. – V. 106. – P. 209–220.

56. Hervé M. *Analyticity in Infinite Dimensional Spaces* //Berlin, New York: de Gruyter Stud. in Math., Walter de Gruyter, V. 10, 1989. – 206 p.

57. Hilbert D. *Wesen und Zieleiner Analysis der unendlich vielen unabhangigen Variaben* // Rend. del Circolo Mat. di Palermo. – 1909. – V. 27. – P. 59–74.

58. Hille E., Philips R. S.*Functional analysis and semigroups* // Coloq. Publ., Amer. Math. Soc., V. 31, 1957. – 808 p.

59. Holubchak O. M., Zagorodnyuk A. V. *A Hilbert-space strukture of the space of symmetric polynomials on* ℓ_1 // Український математичний конгрес, 14 вересня, 2009, Київ: тези доповідей. – Київ, 2009. – С. 47.

60. Holubchak O., Zagorodnyuk A. *Algebras of symmetric analytic functions and their spectra* // International Conference “Morse theory and its applications” dedicated to the memory and 70th anniversary of Volodymyr Vasylyovych Sharko, 25-28 September 2019, Kyiv: book of abstrakts. – Kyiv, 2019. – P. 59.

61. Holubchak O. M., Zagorodnyuk A. V. *Analytic structures on metric spaces multisets* // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу 22 - 25 лютого, 2017, Ворохта: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2017. – С. 3 – 4.

62. Holubchak O. *Hilbert spaces of symmetric polynomials on* ℓ_1 // International Scientific Conference “Infinite Dimensional Analysis and Topology”, May 27-June 1, 2009, Yaremche: book of abstrakts. – Ivano-Frankivsk, 2009. – P.62.

63. Holubchak O. M., Zagorodnyuk A.V. *Hilbert spaces of symmetric polynomials on* ℓ_1 // VIth Summer School “Algebra, Topology and Analysis”, Setember 4-14, 2009, Lviv-Kozova: book of abstrakts. – Lviv, 2009. – P. 7.

64. Holubchak O. M. *Hilbert spaces of symmetric polynomials on* ℓ_1 // VIIth Summer School “Algebra, Topology and Analysis”, July 5-16, 2010, Verkhovyna: book of abstrakts. – Verkhovyna, 2010. – P. 79.

65. Holubchak O. M., Zagorodnyuk A. V. *Hilbertian structures on spectra of algebras of symmetric analytic function on* ℓ_1 // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, 27 лютого - 02 березня, 2018, Ворохта: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2018. – С. 47.

66. Holubchak O. *On bidual bases in the spaces of symmetric analytik funktions on* ℓ_1 // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, 25 лютого - 03 березня, 2013, Ворохта: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2013. – С. 46 – 47.

67. Holubchak O. M., Zagorodnyuk A. V. *On bidual bases in the space of symmetric analytic functions on* ℓ_1 // Carpathian mathematical publications. – 2013. – V.5, №1. – P. 47–49.

68. Holubchak O. *Symmetric fractional maps on Banach spaces* // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, 18-23 September 2017, Lviv: book of abstrakts. – Lviv, 2017. – P. 25.

69. Holubchak O. *Symmetric fractional mappings on* ℓ_1 // International conference dedicated to the 70th anniversary of professor Oleh Lopushansky “Infinite-dimensional analysis and topology”, 16-20 October 2019, Ivano-Frankivsk: book of abstrakts. – Ivano-Frankivsk, 2019. – P. 23.

70. Hyers D. *Polynomial operators* // Topics in mathematical Analysis. – 1989. – P. 410–444.

71. Jawad F., Zagorodnyuk A. *Supersymmetric Polynomials on the Space of Absolutely Convergent Series* // Symmetry – 2019. – **11** (9), – 1111.

72. Kalton N. *The nonlinear geometry of Banach spaces* // Rev. Mat. Complut. – 2008. – V. 21, № 1. – P. 7–60.

73. Lindestrauss J., TzafririClassical L. *Banach Spaces* // Springer-Verlag, New York, 1977. – 190 p.

74. Lopushansky O., Zagorodnyuk A. *Function Hilbert space of infinitely many variables* // Methods of Functional Analysis and Topology – 2004. – P. 13–20.

75. Lopushansky O., Zagorodnyuk A. *Infinite Dimensional Holomorphy. Spectra and Hilbertian Structures* // AGH University of Science and Technology Press, Krakow – 2013.

76. Macdonald I. G. *Symmetric Functions and Orthogonal Polynomials. University lec-ture series* // Providence, American Mathematical Society, 1997. – 64 p.

77. Martin R. S. *Contributions to the theory of functionals. Ph. D. thesis* // University of California, 1932. – 123 p.

78. Mauldin R. D. *The Scottish Book* // Boston: Birkhäuser, 1981. – 281 p.

79. Mazur S., Orlicz W. *Grundlegende eigenschaften der polynomischen operationen I, II* // Studia Math. – 1935. – V. 5. – P.50–68, 179–189.

80. Mazur S., Orlicz W. *Sur la divisibilité des polynomes absraitsá* // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1936. – V. 207. – P. 621–623.

81. Michal A., Martin R. *Some expansions in vector spaces* // J. Math. Pures. Appl. – 1934. – V. 13, № 9. – P. 69–91.

82. Mujica J. *Complex Analysis in Banach Spaces* // North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1986. – 434 p.

83. Nachbin L. *Topology on spaces of holomorphic mappings* // Erd. der Math., Springer-Verlag, New York – 1969.–vol. 47

84. Rudin W. *Functional Analysis* // McGraw-Hill, New York, 1973. – 407 p.

85. Saitoh S. *Integral transforms, reproducig kernels and their applications* // Pitman Research Notes in Math. Ser. , Longman – 1997. – vol. 369.

86. Volterra V. *Leçons sur les fonctions de lignes* // Gauthier-Villars, Collection de Monographies sur le théorie des Fonctions, Paris, 1913. – 230 p.

87. Wiener N. *Note on a paper of Banach* // Fund. Math. – 1923. – V. 4. – P. 136–143.

88. Zagorodnyuk A. *Spectra of Algebras of Entire Functions on Banach Spaces* // Proc. Amer. Math. Soc. – 2006. – V. 134. – P. 2559–2569.

89. Zagorodnyuk A. *Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces* // Contemporary Math. – 2007. – V. 435. – P. 381–394.

ДОДАТКИ

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Голубчак О. М. *Гільбертові простори симетричних аналітичних функцій на* ℓ_1 // Карпатські математичні публікації. – 2011. – Т.3, №1. – С. 34–39.

2. Голубчак О. М. *Гільбертовий простір симетричних функцій на* ℓ_1 // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. – Т.54, №3. – С. 49–52.

3. Голубчак О. М. *Оператори в гільбертових просторах симетричних аналітичних функцій* // Математичний вісник НТШ. – 2012. – Т. 9. – С. 44–51.

4. Holubchak O. M., Zagorodnyuk A. V. *On bidual bases in the space of symmetric analytic functions on* ℓ_1 // Carpathian mathematical publications. – 2013. – V.5, №1. – P. 47–49.

5. Голубчак О. М. *Оператори симетричного зсуву в гільбертовому просторі симетричних аналітичних функцій* // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2015. – Т. 13. – С. 31–35.

6. Голубчак О. М., Загороднюк А. В. *Топологічні та алгебраїчні структури на множині мультимножин* // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2019. – Т.62, №1. – С. 67–73.

7. Chernega I., Holubchak O., Novosad Z., Zagorodnyuk A. *Continuity and hypercyclicity of composition operators on algebras of symmetric analytic functions on Banach spaces* // European Journal of Mathematics. – 2020. – V.6, №1. – P. 153-163.

8. Holubchak O. *Hilbert spaces of symmetric polynomials on* ℓ_1 // International Scientific Conference "Infinite Dimensional Analysis and

Topology", May 27-June 1, 2009, Yaremche: book of abstrakts. – Ivano-Frankivsk, 2009. – P.62.

9. Holubchak O. M., Zagorodnyuk A. V. *A Hilbert-space strukture of the space of symmetric polynomials on* ℓ_1 // Український математичний конгрес, 14 вересня, 2009, Київ: тези доповідей. – Київ, 2009. – С. 47.

10. Holubchak O. M., Zagorodnyuk A.V. *Hilbert spaces of symmetric polynomials on* ℓ_1 // VIth Summer School "Algebra, Topology and Analysis", Setember 4-14, 2009, Lviv-Kozova: book of abstrakts. – Lviv, 2009. – P. 7.

11. Голубчак О. М. *Спектр операторів композиції на гільбертовому просторі симетричних аналітичних функцій* // Всеукраїнський науковий семінар "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 25-28 березня, 2010, Ворохта: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2010. – С. 30.

12. Holubchak O. M. *Hilbert spaces of symmetric polynomials on* ℓ_1 // VIIth Summer School "Algebra, Topology and Analysis", July 5-16, 2010, Verkhovyna: book of abstrakts. – Verkhovyna, 2010. – P. 79.

13. Голубчак О. М. *Оператори в гільбертових просторах симетричних аналітичних функцій* // Міжнародна конференція "Сучасні проблеми аналізу", 30 вересня - 3 жовтня, 2010, Чернівці: тези доповідей. – Чернівці, 2010. – С.60–61.

14. Голубчак О. М. *Гільбертові простори симетричних аналітичних функцій на* ℓ_1// Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 23-28 лютого, 2011, Ворохта: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2011. – С. 38–39 .

15. Голубчак О. М. *Гільбертові простори симетричних аналітичних функцій на* ℓ_1 // IV конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача, 24-27 травня, 2011, Львів: тези доповідей. – Львів, 2011. – С. 304 .

16. Голубчак О. М., Загороднюк А. В. *Гільбертові простори симетричних аналітичних функцій на* ℓ_1 // Всеукраїнська наукова конференція “Прикладні задачі математики”, 13-15 жовтня, 2011, Яремче: тези доповідей. – Яремче, 2011. – С.46.

17. Голубчак О. М. *Мультиплікативні функціонали у гільбертових просторах симетричних аналітичних функцій на* ℓ_1 // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, 20-26 лютого, 2012, Ворохта: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2012. – С. 30.

18. Голубчак О. М. *Оператори композиції на гільбертовому просторі симетричних аналітичних функцій* // Всеукраїнська наукова конференція “Алгебра, топологія, аналіз, стохастика”, 20-23 вересня, 2012, Микуличин: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2012. – С. 13 – 14.

19. Holubchak O. *On bidual bases in the spaces of symmetric analytik funktions on* ℓ_1 // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, 25 лютого - 03 березня, 2013, Ворохта: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2013. – С. 46 – 47.

20. Голубчак О. М. *Оператори симетричного зсуву на гільбертовому просторі симетричних аналітичних функцій* // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, 25 лютого - 01 березня, 2015, Ворохта: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2015. – С. 18 – 19.

21. Голубчак О. М. *Застосування симетричних поліномів до аналітичних автоморфізмів банахового простору* // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, 24 - 27 лютого, 2016, Ворохта: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2016. – С. 71.

22. Holubchak O. M., Zagorodnyuk A. V. *Analytic structures on metric spaces multisets* // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу 22 - 25 лютого, 2017, Ворохта: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2017. – С. 3 – 4.

23. Holubchak O. *Symmetric fractional maps on Banach spaces* // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, 18-23 September 2017, Lviv: book of abstrakts. – Lviv, 2017. – P. 25.

24. Holubchak O. M., Zagorodnyuk A. V. *Hilbertian structures on spectra of algebras of symmetric analytic function on* ℓ_1 // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 27 лютого - 02 березня, 2018, Ворохта: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2018. – С. 47.

25. Голубчак О. М. *Топологічні та алгебраїчні структури на множині мультимножин* // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 25 лютого - 01 березня, 2019, Ворохта: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2019. – С. 31 – 32.

26. Holubchak O., Zagorodnyuk A. *Algebras of symmetric analytic functions and their spectra* // International Conference "Morse theory and its applications" dedicated to the memory and 70th anniversary of Volodymyr Vasylyovych Sharko, 25-28 September 2019, Kyiv: book of abstrakts. – Kyiv, 2019. – P. 59.

27. Holubchak O. *Symmetric fractional mappings on* ℓ_1 // International conference dedicated to the 70th anniversary of professor Oleh Lopushansky "Infinite-dimensional analysis and topology", 16-20 October 2019, Ivano-Frankivsk: book of abstrakts. – Ivano-Frankivsk, 2019. – P. 23.

ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Результати дисертації доповідалися і обговорювалися на таких конференціях та семінарах:

1. Міжнародній конференції “Infinite dimensional Analysis and Topology”(Івано-Франківськ–Яремче, 27 травня - 1 червня, 2009);

2. 6-ій літній школі з алгебри, топології та аналізу (Львів – Козьова, 4-14 серпня 2009 р.);

3. Українському математичному конгресі (Київ, вересень 2009 р.);

4. Всеукраїнському науковому семінарі “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Івано-Франківськ–Ворохта, 25-28 березня, 2010);

5. 7-ій літній школі з алгебри, топології і аналізу (м. Верховина, 20-27 червня 2010 р.);

6. Міжнародній конференції “Сучасні проблеми аналізу” (м. Чернівці, 30 вересня - 3 жовтня 2010 р.);

7. Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (м. Ворохта, 23-28 лютого 2011 р.);

8. IV конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я.С. Підстригача (м. Львів, 24 - 27 травня 2011 р.);

9. Всеукраїнській науковій конференції “Прикладні задачі математики”, присвяченій 50-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу (Яремче, 13 - 15 жовтня 2011 р.);

10. Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта, 20-26 лютого 2012 р.);

11. Всеукраїнській науковій конференції "Алгебра, топологія, аналіз, стохастика" присвячена 10-річчю факультету математики та інформатики Прикарпатського Національного університету імені Василя Стефаника (Микуличин, 20 - 23 вересня 2012 р.);

12. Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта, 25 лютого - 3 березня 2013 р.);

13. Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта, 25 лютого - 1 березня 2015 р.);

14. Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта, 24 лютого - 27 лютого 2016 р.);

15. Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта, 22 лютого - 25 лютого 2017 р.);

16. International conference in functional analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (Lviv, Ukraine, 18-23 September 2017);

17. Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта, 27 лютого - 02 березня 2018 р.);

18. Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта, 25 лютого - 01 березня 2019 р.);

19. International Conference “Morse theory and its applications” dedicated to the memory and 70th anniversary of Volodymyr Vasylyovych Sharko (Kyiv, Ukraine, 25-28 September 2019);

20. International conference dedicated to the 70th anniversary of professor Oleh Lopushansky “Infinite-dimensional analysis and topology” (Ivano-Frankivsk, Ukraine, 16-20 October 2019);

21. Семінарі відділу функціонального аналізу Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України (м. Львів);

22. Семінарах кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”.