ДВНЗ “ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА”
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Приймак Галина Миколаївна

УДК 517.98

ДИСЕРТАЦІЯ

Структура множини гомоморфізмів та функціонального числення в алгебрах аналітичних функцій на банахових просторах

01.01.01 — математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело __________________________ Г. М. Приймак

Науковий керівник
Загороднюк Андрій Васильович,
доктор фізико-математичних наук, професор

ІВАНО-ФРАНКІВСЬК — 2019

АНОТАЦІЯ

Приймак Г. М. Структура множини гомоморфізмів та функціонального числення в алгебрах аналітичних функцій на банахових просторах. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”, Івано-Франківськ, 2019.

Теорія аналітичних відображень банахових просторів є важливою складовою сучасного нелінійного функціонального аналізу і має численні застосування у суміжних галузях математики. Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах досліджувалися в роботах Л. Нахбіна, Т. Гамеліна, Р. Арона, Б. Коула, Л. Мораес, М. Маестре, П. Галіндо, А. Загороднюка, С. Шарина, І. Чернеги та багатьох інших авторів.

Серед основних проблем, які виникають при дослідженні алгебр аналітичних функцій є питання опису спектру (множини комплексних гомоморфізмів) даної алгебри. Зокрема, важливим є опис множини комплексних гомоморфізмів алгебри $H_b(X)$ цілих функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі X. У роботах Р. Арона, Б. Коула, Т. Гамеліна розвинуто метод, який ґрунтується на так званому продовженні Арона-Бернера. В рамках цього методу ми можемо продовжити кожну аналітичну функцію f до другого спряженого X'' простору X і визначити комплексні гомоморфізми, як функціонали значень в точках другого спряженого. Проте, такий підхід не дає повного опису спектру $H_b(X)$ в загальному випадку.

В роботах А. В. Загороднюка застосовано механізм продовження Арона-Бернера не тільки до простору X, а й до проективних тензорних

степеней цього простору. В результаті отримано повний опис множини комплексних гомоморфізмів алгебри $H_b(X)$.

У дисертаційній роботі узагальнено вказані підходи для дослідження довільних гомоморфізмів з алгебри $H_b(X)$ в деяку комутативну банахову алгебру A. При цьому замість функціоналів значень в точках доцільно використовувати гомоморфізми функціонального числення.

Таким чином, для досягнення мети дисертаційного дослідження, було описано клас гомоморфізмів алгебри $H_b(X)$, які можна наблизити гомо морфізмами функціонального числення, узагальнено для A-значних гомоморфізмів алгебри $H_b(X)$ поняття радіус-функції, доведено властивості згортки в алгебрі A-значних аналітичних функцій обмеженого типу, знайдено умови за яких продовження Арона-Бернера A-значних функцій є гомомрфізмом алгебр. Використовуючи це, було отримано результати, які стосуються опису структури A-значних гомоморфізмів та застосування до диференціювань.

У розділі 2 наведено формулювання основних означень та теорем. Розглянуто поняття поліноміальних відображень, висвітлено основні властивості тензорних добутків банахових просторів та аналітичних функцій. Описано механізм продовження Арона-Бернера оператора та функціональне числення як метод асоціації оператора $f(A)$ з функцією f, який буде належати до топологічної алгебри "A-функцій". Також, сформульовано деякі властивості оператора зсуву та операції згортки на $H_b(X)$.

У третьому розділі описано встановлення умов на банахів простір X, комутативну банахову алгебру A та гомоморфізм $\Phi : H_b(X) \to A$ за яких існує напрямленість $(\overline{a}_\alpha) \subset A \otimes_\pi X$ така, що оператори функціонального числення $(\theta_{\overline{a}_\alpha})$ наближають гомоморфізм Φ на поліномах з $H_b(X)$ (рівність 3.1.1) або на всіх функціях з $H_b(X)$ (рівність 3.1.2). Позитивні результати отримано для скінченновимірного банахового простору $\mathbb{C}^n$, банахового простору з базисом Шаудера, банахового простору з властивістю апроксимації, банахового простору з H_b-властивістю апроксимації. При цьому використано або алгебру $\mathcal{H}^\infty_{uc}(B)$ всіх рівномірно неперервних аналітичних комплекснозначних функцій на замкненій одиничній кулі B, або скінченновимірну напівпросту комутативну банахову алгебру. Встановлення умов існування такої напрямленості узагальнює результати Р. Арона, В. Коула та Т. Гамеліна [18], отримані для випадку комплексних гомоморфізмів.

Також доведено, що для алгебри з ненульовим нільпотентним елементом існує розривний гомоморфізм $\Phi : H_b(X) \to A$. Наведено приклад гомоморфізму, який не наближається гомоморфізмами функціонального числення.

У четвертому розділі центральною ідеєю є застосування продовження Арона-Бернера до A-значних гомоморфізмів функціонального числення $\overline{f} \in H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ у другий спряжений простір. За основу взято продовження аналітичних функцій з $H_b(X)$ у X''. Застосування цього підходу стало можливим після встановлення того факту, що $A \bigotimes_\pi X'' \subset (A \bigotimes_\pi X)''$ і $A'' \bigotimes_\pi X \subset (A \bigotimes_\pi X)''$. В результаті було доведено:

— якщо A — комутативна банахова алгебра, $f \in H_b(X)$, то $r(\widetilde{\overline{f}})$ приймає значення в A і $r(\widetilde{\overline{f}}) = \overline{\widetilde{f}}$, де $r(\widetilde{\overline{f}})$ — оператор звуження відображення $\widetilde{\overline{f}} \in H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$ на підпростір $A \bigotimes_\pi X''$;

— якщо A — скінченновимірна комутативна банахова алгебра, виконується рівність $(A \bigotimes_\pi X)'' = A \bigotimes_\pi X''$ і $\overline{\widetilde{f}} = \widetilde{\overline{f}}$ для всіх $f \in H_b(X)$, то відображення $f \mapsto \widetilde{\overline{f}}$ є гомоморфізмом алгебр $H_b(X)$ і $H_b(A \bigotimes_\pi X'', A)$;

— якщо A не обов'язково скінченновимірна, то для кожного $\overline{u} \in A \bigotimes_\pi X''$ відображення $f \mapsto \theta_{\overline{u}}(\widetilde{f}) = \overline{\widetilde{f}}(\overline{u})$ є гомоморфізмом з $H_b(X)$ в $H_b(X'')$ і $\widetilde{f} \mapsto \theta_{\overline{u}}(\widetilde{f})$ — гомоморфізм з $H_b(X'')$ в A;

— якщо A'' комутативна напівпроста банахова алгебра, то відображення $g \mapsto \widetilde{g}$ є гомоморфізмом алгебр $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ і $H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$, $g \in H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$;

— якщо A'' напівпроста комутативна банахова алгебра, то відображення $f \mapsto \widetilde{\overline{f}}$ є гомоморфізмом алгебри $H_b(X)$ в $H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$.

Стосовно алгебри $H_b(A'' \bigotimes_\pi X, A'')$, де A'' є алгеброю, у якій добуток визначається як продовження Аренса добутку алгебри A, то для $\overline{f} \in H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ продовження $\overline{f}$ до відображення з $H_b(A'' \bigotimes_\pi X, A'')$ не обов'язково є функціональним численням в алгебрі A''.

У розділі 4 також показано, що для операторів, визначених на $H_b(X)$ можна ввести аналог радіус-функції, яку було запропоновано у [18] для функціоналів. Через $\mathcal{L}(H_b(X), Y)$ позначимо множину всіх лінійних і неперервних операторів з алгебри $H_b(X)$ в банахів простір Y. Продовжуючи цю ідею, означимо радіус-функцію лінійного оператора $R(\Phi)$, $\Phi \in \mathcal{L}(H_b(X), Y)$ як нижню грань всіх r, таких, що Φ є неперервним відносно норми рівномірної збіжності на кулі rB. Таким чином, радіус-функцію R на $\mathcal{L}(H_b(X), Y)$ визначає формула $R(\Phi) = \lim\sup\limits_{m\to\infty} \|\Phi_m\|^{\frac{1}{m}}$, де Φ_m звуження $\Phi \in \mathcal{L}(H_b(X), Y)$ на банахів простір всіх неперервних n-однорідних комплекснозначних поліномів $\mathcal{P}(^m X)$.

Вдалося встановити, що якщо Φ_n — лінійний неперервний оператор з простору $\mathcal{P}(^n X)$ у деякий банахів прострі Y для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ і для норми Φ_n на $\mathcal{P}(^n X)$ виконується нерівність $\|\Phi_n\| \le cs^n$ для деяких $c, s > 0$, тоді існує єдиний лінійний оператор $\Phi \in \mathcal{L}(H_b(X), Y)$, звуження якого на $\mathcal{P}(^n X)$ співпадає з Φ_n для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $R(\Phi) \le s$.

Основні результати розділу 5 наведено у підрозділах 5.4 і 5.5. Для цього у підрозділах 5.1-5.3 було узагальнено властивості оператора зсуву для A-значних аналітичних функцій обмеженого типу та операції згортки для A-значних гомоморфізмів. У підрозділі 5.4 доведено основну структурну теорему для гомоморфізму Φ з алгебри $H_b(X)$ в деяку комутативну банахову алгебру A, який може бути наближений гомоморфізмами функціонального числення у слабкополіноміальній топології: існують послідовності спряжених просторів $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ і відображень $\theta_{\overline{a}}^{(n)} : Z_n \to A$ такі, що $Z_1 = (A \bigotimes_\pi X)'', Z_n = \mathcal{L}(H_b(A \bigotimes_\pi X); A), \theta_{\overline{a}}^{(1)} = \widetilde{\theta}_{\overline{a}''}$ і довільний гомоморфізм $\Phi \in \Omega$ має зображення $\Phi = \mathop{\circledast}\limits_{n=1}^{\infty} \theta_{\overline{a}}^{(n)}(u_n)$ для деякої послідовності $u_n \in Z_n, n = 1, 2, \dots$. Підмножина Ω при цьому має вигляд $\Omega = \{\Phi \in M_A(H_b(A \bigotimes_\pi X), A) : \forall \quad P \in \mathcal{P}((A \bigotimes_\pi X), A) \quad \exists$ $(\overline{x}_\alpha) \subset A \bigotimes_\pi X \quad$ така, що $\quad \lim\limits_{\alpha} P(\overline{x}_\alpha) = \Phi(P)\}$.

У підрозділі 5.5 описано некласичні A-значні диференціювання алгебри $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$. Під класичними диференціюваннями алгебри $H_b(X)$ ми розуміємо оператори диференціювання за напрямками $h \in X$: $\partial(h)(f)(x) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$. Аналогічно, ми визначаємо класичні A-значні диференціювання алгебри $H_b(X)$ за формулою

$$\overline{\partial}(\overline{h})(f)(\overline{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{\overline{f}(\overline{a} + t\overline{h}) - f(\overline{a})}{t},$$

де $\overline{h}, \overline{a} \in A \bigotimes_\pi X$ і h — фіксований ненульовий вектор.

Некласичні диференціювання будуємо за допомогою лінійного оператора $\overline{\partial}_{(k)}(u_k)$ на $H_b(X)$, який визначаємо рівністю:

$$\overline{\partial}_{(k)}(u_k)(f)(\overline{x}) := \eta(u_k) \circ \tau_{\overline{a}}(\overline{f}), \overline{f} \in H_b((A \bigotimes_\pi X), A).$$

Доведено, що оператор $\overline{\partial}_{(k)}(u_k)$ є неперервним диференціюванням на $H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$, і наведено формули знаходження "алгеброзначних похідних" для $P \in \mathcal{P}(^n(A \bigotimes_\pi X), A)$ і $\overline{f} \in H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$.

Ключові слова: аналітичні функції на банаховому просторі, гомоморфізми алгебри аналітичних функцій, функціональне числення, тензорні добутки банахових просторів.

ABSTRACT

Pryimak H. M. On structures of the set of homomorphisms and functional calculus in algebras of analytic functions on Banach space. — Qualifying scientific work as a manuscript.

A Thesis for a Candidate Degree in Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.01 — mathematical analysis. — Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2019.

The theory of analytic mappings of Banach spaces is an important component of modern nonlinear functional analysis and has numerous applications in related fields of mathematics. Algebras of analytic functions on Banach spaces were studied by L. Nachbin, T. Gamelin, R. Aron, B. Cole, L. Moraes, M. Maestre, P. Galindo, A. Zagorodnyuk, S. Sharyn, I. Chernega and many other authors.

Among the main problems that arise in the study of algebras of analytic functions is the question of the description of spectra (set of complex homomorphisms) of these algebras. In particular, it is important to describe the set of complex homomorphisms of $H_b(X)$, algebra of entire functions of bounded type in a complex Banach space X. In works of R. Aron, B. Cole, T. Gamelin, a method, based on the so-called Aron-Berner extension was developed. Using this method, we can extend every analytic function f to the second dual space X'' of X and define a complex homomorphism as a point evaluation functional at the elements of the second dual space. However, this approach does not provide a complete description of the spectrum of $H_b(X)$ in the general case.

Due to A. V. Zagorodnyuk the mechanism of the Aron-Berner extension was applied not only to space X, but also to the projective tensor degrees of

this space. Using this approach a complete description of the set of complex homomorphisms of algebra $H_b(X)$ was obtained.

In the dissertation, these approaches are generalized for investigating of continuous homomorphisms from $H_b(X)$ into some commutative Banach algebra A. In this case, instead of point evaluation functionals, it is advisable to use functional calculus homomorphisms.

Therefore, to get our purpose it was described a class of homomorphisms of $H_b(X)$ which can be approximated by functional calculus homomorphisms, generalized the concept of radius function for A-valued homomorphisms of $H_b(X)$ and proved some properties of the convolution in the algebra of A-valued analytic functions of bounded type. Also, it was found some conditions under which the Aron-Berner extensions of A-valued functions is an algebra homomorphisms. By using these results we obtained a description of the structure of A-valued homomorphisms and some applications for differentiation.

In section 2 there are some basic definitions and preliminary resylts. The concept of polynomial mappings is considered and are indicated basic properties of tensor products Banach spaces and analytical functions. The Aron-Berner extension operator and functional calculus method which allows us to assign an A-valued function $\overline{f}$ of A to any function in $H_b(X)$ are described. Also, we set some properties of the translation operator and the convolution operation on $H_b(X)$.

The third section describes setting conditions for a Banach space X, a commutative Banach algebra A and a homomorphism $\Phi : H_b(X) \to A$ for which there exists a net $(\overline{a}_\alpha) \subset A \otimes_\pi X$ such that operators of functional calculus $(\theta_{\overline{a}_\alpha})$ approximate the homomorphism Φ on polynomials in $H_b(X)$ (equation 3.1.1) or on all functions from $H_b(X)$ (equation 3.1.2). Some affirmative results were obtained for the finite-dimensional Banach space $\mathbb{C}^n$, Banach spaces with Schauder bases, Banach spaces with the approximation property, Banach spaces with the H_b-approximation property. For this we use either $\mathcal{H}^{\infty}_{uc}(B)$, the algebra of all uniformly continuous analytic complex functions on closed unit ball B, or a finite-dimensional semisimple commutative Banach algebra. The establishing of conditions of the existence of such a net generalizes results of R. Aron, B. Cole and T. Gamelin, [18], which were obtained for the case of complex homomorphisms.

Also, it is proved, that for an algebra which admits a nilpotent element there is a discontinuous homomorphism $\Phi : H_b(X) \to A$. An example of homomorphism which is not approaching by functional calculus homomorphisms is given.

In the fourth section, the central idea is the application of the Aron-Berner extension to A-valued functional calculus homomorphisms $\overline{f} \in H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ to the second dual space. We use the known facts about extensions of analytic functions from $H_b(X)$ to X''. This approach it is possible to use because of establishing the fact that $A \bigotimes_\pi X'' \subset (A \bigotimes_\pi X)''$ and $A'' \bigotimes_\pi X \subset (A \bigotimes_\pi X)''$. Therefore it was proved:

— if A is a commutative Banach algebra, $f \in H_b(X)$, then $r(\widetilde{\overline{f}})$ is A-value and $r(\widetilde{\overline{f}}) = \overline{\widetilde{f}}$, where $r(\widetilde{\overline{f}})$ is the operator restriction of $\widetilde{\overline{f}} \in H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$ to the subspace $A \bigotimes_\pi X''$;

— if A is a finite-dimensional commutative Banach algebra, then we have $(A \bigotimes_\pi X)'' = A \bigotimes_\pi X''$ and $\widetilde{\overline{f}} = \overline{\widetilde{f}}$ for all $f \in H_b(X)$, the mapping $f \mapsto \widetilde{\overline{f}}$ is a homomorphism between algebras $H_b(X)$ and $H_b(A \bigotimes_\pi X'', A)$;

— if A is not necessarily finite-dimensional, then for every $\overline{u} \in A \bigotimes_\pi X''$ the mapping $f \mapsto \theta_{\overline{u}}(\widetilde{f}) = \overline{\widetilde{f}}(\overline{u})$ is an algebra homomorphism from $H_b(X)$ to $H_b(X'')$ and $\widetilde{f} \mapsto \theta_{\overline{u}}(\widetilde{f})$ is a homomorphism between algebras $H_b(X'')$ and A;

— if A'' is a semisimple commutative Banach algebra, then the mapping $g \mapsto \widetilde{g}$ is a homomorphism between algebras $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ and $H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$, $g \in H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$;

— if A'' is a semisimple commutative Banach algebra, then the mapping $f \mapsto \widetilde{\widetilde{\overline{f}}}$ is a homomorphism between algebras $H_b(X)$ and $H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$. We observed that for $H_b(A'' \bigotimes_\pi X, A'')$, where A'' is the algebra for which the product is defined as the Arens extension of the product of A, and for $\overline{f} \in H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ the extension $\overline{f}$ to a mapping $H_b(A'' \bigotimes_\pi X, A'')$ is not necessary a functional calculus in algebra A''.

In section 4 is also shown that for operators, defined on $H_b(X)$ it is possible to introduce an analogue of the radius function which was proposed in [18] for complex homomorphisms. Let us denote by $\mathcal{L}(H_b(X), Y)$ the set of all linear and continuous operators from algebra $H_b(X)$ to Banach space Y. Following to the idea of the radius function, we define the radius function of the linear operator $R(\Phi)$, $\Phi \in \mathcal{L}(H_b(X), Y)$ as the infimum of all numbers r such that Φ is bounded with respect to the norm of uniform convergence on the ball rB. So, the radius function R on $\mathcal{L}(H_b(X), Y)$ can be calculated by the formula $R(\Phi) = \lim\sup_{m \to \infty} \|\Phi_m\|^{\frac{1}{m}}$, where Φ_m is the restriction of $\Phi \in \mathcal{L}(H_b(X), Y)$ on the Banach space of all continuous n-homogeneous complex-valued polynomials $\mathcal{P}(^m X)$.

It is proved that if Φ_n is a linear continuous operator from space $\mathcal{P}(^n X)$ to some Banach space Y for every $n \in \mathbb{Z}_+$ and for the norm of Φ_n on $\mathcal{P}(^n X)$ we have to inequality $\|\Phi_n\| \leq cs^n$ for some $c, s > 0$, then there is a unique linear operator $\Phi \in \mathcal{L}(H_b(X), Y)$, whose restriction onto $\mathcal{P}(^n X)$ coincides with Φ_n for all $n \in \mathbb{Z}_+$ and $R(\Phi) \leq s$.

The main results of section 5 are in subsections 5.4 and 5.5. In subsections 5.1 – 5.3 were generalized some properties of the translation operator for A-valued analytic functions of bounded type and convolution operations for A–valued homomorphisms. In sebsection 5.4 we proved the basic structural theorem for homomorphism Φ from algebra $H_b(X)$ into some commutative Banach algebra A which can be approximated by homomorphisms of functional calculus in the weak-polynomial topology: there exists a sequence of dual spaces $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ and a sequence of maps $\theta_{\overline{a}}^{(n)} : Z_n \to A$ such that $Z_1 = (A \bigotimes_\pi X)'', Z_n = \mathcal{L}(H_b(A \bigotimes_\pi X); A), \theta_{\overline{a}}^{(1)} = \widetilde{\theta}_{\overline{a}''}$ and an arbitrary homomorphism $\Phi \in \Omega$ has a represesentation $\Phi = \mathop{\circledast}\limits_{n=1}^{\infty} \theta_{\overline{a}}^{(n)}(u_n)$ for some $u_n \in Z_n, n = 1, 2, \ldots,$ where Ω is the following set $\Omega = \{\Phi \in M_A(H_b(A \bigotimes_\pi X), A) : \forall \quad P \in \mathcal{P}((A \bigotimes_\pi X), A) \quad \exists$ $(\overline{x}_\alpha) \subset A \bigotimes_\pi X \quad$ such that $\quad \lim\limits_{\alpha} P(\overline{x}_\alpha) = \Phi(P)\}.$

In subsection 5.5 non-classical A-valued differentiations of algebra $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ are described. Under classical differentiation of algebra $H_b(X)$ we understand operators of differentiation by direction $h \in X$: $\partial(h)(f)(x) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$. Similarly, we define a classical A-valued differentiation of algebra $H_b(X)$ by formula

$$\overline{\partial}(\overline{h})(f)(\overline{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{\overline{f}(\overline{a} + t\overline{h}) - f(\overline{a})}{t},$$

where $\overline{h}, \overline{a} \in A \bigotimes_\pi X$ and h is a fixed nonzero vector.

Nonclassical differentiations can be constructed as a linear operator $\overline{\partial}_{(k)}(u_k)$ on $H_b(X)$ by

$$\overline{\partial}_{(k)}(u_k)(f)(\overline{x}) := \eta(u_k) \circ \tau_{\overline{a}}(\overline{f}), \overline{f} \in H_b((A \bigotimes_\pi X), A).$$

It is proved that the operator $\overline{\partial}_{(k)}(u_k)$ is a continuous differentiation on $H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$ and proposed formulas of calculation of the algebra-valued derivatives $P \in \mathcal{P}(^n(A \bigotimes_\pi X), A)$ and $\overline{f} \in H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$.

Key words:analytic functions in Banach space, homomorphisms of algebra of analytic functions, functional calculus, tensor products of Banach spaces

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНІ ОСНОВНІ НАУКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Загороднюк А. В., Петрів Г. М. *Гомоморфізми алгебри цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі* // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2013. – Вип. 11. – С. 7–11.

2. Pryimak H. M. *Homomorphisms and functional calculus in algebras of entire functions on Banach spaces* // Carpathian Mathematical Publications. — 2015. – Vol. 7, № 1. – P. 108–113.

3. Pryimak H. *Description of homomorphisms of algebras of analytic functions on Banach spaces* // International Journal of Mathematical Analysis. — 2016. – Vol. 10, № 14. – P. 669–676.

4. Приймак Г. *Некласичні диференціювання в алгебрах аналітичних функцій обмеженого типу спеціального вигляду* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2017. – Т. 60, № 3. – С. 133–137.

5. Pryimak H. M. *On approximation of homomorphisms of algebras of entire functions on Banach spaces* // Carpathian Mathematical Publications. — 2019. – Vol. 11, № 1. – P. 158 – 162.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Петрів Г. М. *Гомоморфізми алгебри цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі* // V Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу", 19-21 вересня, 2013, Івано-Франківськ: тези доповідей. — Івано-Франківськ, 2013. — С. 56.

2. Петрів Г. М. *Про гомоморфізми спеціального вигляду алгебри цілих функцій обмеженого типу* // IX-а Літня школа Всеукраїнська на-

укова конференція “Алгебра, топологія і аналіз”, 7-18 липня, 2014, Поляниця: тези лекцій і доповідей. — Поляниця, 2014. — С. 66.

3. Pryimak H. M. *Homomorphisms and functional calculus on algebras of analytic functions on Banach spaces* // II International Seminar on Analytic Functions, June 1-3, 2015. — Ivano-Frankivsk, 2015. — C.13–14.

4. Pryimak H. *Description of homomorphisms of algebras of analytic functions on Banach spaces* // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”. 22-25 лютого, 2017, Ворохта: тези доповідей. — Ворохта, 2017. – С.115–116.

5. Приймак Г. М. *Некласичні диференціювання в алгебрах аналітичних функцій обмеженого типу* // VI Всеукраїнська наукова конференція “Нелінійні проблеми аналізу”, 26-28 вересня, 2018, Івано-Франківськ – Микуличин: тези доповідей. — Івано-Франківськ, 2018. — С. 44.

ЗМІСТ

СПИСОК ПОЗНАЧЕНЬ

$H_b(X)$ —	алгебра цілих аналітичних функцій обмеженого типу на X ($H_b(X)$ складається з усіх аналітичних функцій, які є обмеженими на обмежених множинах)
$\mathcal{H}^\infty_{uc}(B)$ —	алгебра рівномірно неперервних аналітичних комплекснозначних функцій на замкненій одиничній кулі B
$\mathcal{L}(X, Y)$ —	множина лінійних і неперервних операторів з X в Y
$\mathcal{L}(H_b(X), Y)$ —	множина лінійних і неперервних операторів з $H_b(X)$ в Y
$\mathcal{L}(H_b(X), A)$ —	множина лінійних і неперервних операторів з $H_b(X)$ в алгебру A
$\mathcal{L}(\mathcal{P}(^nX), A)$ —	простір неперервних n-лінійних операторів з $\mathcal{P}(^nX)$ в алгебру A
$\mathcal{L}(H_b(A \otimes_\pi X), A)$ —	простір лінійних і неперервних операторів з $H_b(A \otimes_\pi X)$ в алгебру A
$\mathcal{L}(H_b(A \otimes_\pi X); A)$ —	простір лінійних і неперервних операторів з $H_b(A \otimes_\pi X, A)$ в алгебру A
M_b —	спектр алгебри $H_b(X)$, тобто множина усіх неперервних комплекснозначних гомоморфізмів $H_b(X)$.

$M_A(H_b(X))$ —	множина всіх гомоморфізмів з $H_b(X)$ в A
$M_A(H_b(A\otimes_\pi X))$ —	множина всіх гомоморфізмів з $H_b(A\otimes_\pi X)$ в A
$\mathcal{P}(X)$ —	простір неперервних комплекснозначних поліномів на X.
$\mathcal{P}({}^nX)$ —	простір всіх неперервних n-однорідних комплекснозначних поліномів на X
$\mathcal{P}({}^nX, Y)$ —	простір n-однорідних поліномів на X зі значеннями в Y.
$\bigotimes^n X$ —	тензорний степінь простору X
$\bigotimes^n_s X$ —	симетричний тензорний степінь простору X
$\bigotimes^n_{s,\pi} X$ —	симетричний проективний тензорний степінь простору X
$A\bigotimes_\pi X$ —	проективний тензорний добуток алгебри A і простору X
$\mathcal{P}({}^k\otimes^m_{s,\pi}(A\otimes_\pi X))$ —	простір n-однорідних неперервних комплекснозначних поліномів на ${}^k\otimes^m_{s,\pi}(A\otimes_\pi X)$
$H_b((A\otimes_\pi X''), A)$ —	алгебра цілих функцій обмеженого типу на просторі $A\otimes_\pi X''$ зі значеннями в алгебрі A
$H_b((A\otimes_\pi X)''), A)$ —	алгебра цілих функцій обмеженого типу на просторі $(A\otimes_\pi X)''$ зі значеннями в алгебрі A

$\overline{a}$ —	елемент тензорного добутку $A \otimes_\pi X$
$\delta_x(f)$ —	функціонал "значення в точці"
$\theta_{\overline{a}}(f)$ —	гомоморфізм "значення в точці" для фіксованих елементів тензорного добутку
$\mathfrak{A}$ —	множина індексів
$\overline{f}$ —	елемент алгебри $H_b(A \otimes_\pi X, A)$
$\widetilde{\overline{f}}$ —	продовження Арона-Бернера для $\overline{f}$
$\widetilde{P}$ —	продовження Арона-Бернера полінома P
ℓ_1 —	банахів простір всіх абсолютно збіжних послідовностей
ℓ_∞ —	банахів простір обмежених послідовностей $(x_k)_{k=1}^\infty$ з нормою $\|\|x\|\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\|$
$\mathcal{A}_n(X)$ —	замикання алгебри, породженої k-однорідними поліномами на X, де $k \leq n$
$T^\star$ —	спряжений оператор до T
rB —	куля радіуса r з центром в точці 0
$\ker\Phi$ —	ядро гомоморфізму Φ
A_P —	симетричне n-лінійне неперервне відображення асоційоване з n-однорідним поліномом P
$\mathbb{Z}_+$ —	множина цілих додатніх чисел

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. Дослідження гомоморфізмів алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на нескінченновимірному банаховому просторі знаходиться на перетині теорії аналітичних функцій на банахових просторах, теорії комутативних топологічних алгебр та функціонального числення. Питання про опис спектру множини комплексних гомоморфізмів алгебри аналітичних функцій обмеженого типу $H_b(X)$ на банаховому просторі X було поставлено в роботах Р. Арона, Б. Коула, Т. Гамеліна. У цих працях було побудовано й важливі інструменти для дослідження вказаних об'єктів. Дослідження комплексних гомоморфізмів алгебри $H_b(X)$ було продовжено в статтях Х. Мухіки, П. Галіндо, М. Маестре, Ш. Дініна, А. Загороднюка, С. Шарина, І. Чернеги та інших. В результаті, у багатьох випадках, ми можемо описати множину комплексних гомоморфізмів алгебри $H_b(X)$ як аналітичний многовид над другим спряженим простором X''. Інший підхід до опису спектру алгебри $H_b(X)$ дозволяє поставити у відповідність кожному комплексному гомоморфізму алгебри $H_b(X)$ послідовність функціоналів вигляду δ_w — "значення" в точці w, де w можна вибрати з другого спряженого простору до проективного тензорного степеня простору X. Ці результати було узагальнено для різних алгебр векторнозначних функцій обмеженого типу Л. Мораес, М. Маестре, Д. Гарсія та інших.

У дисертаційній роботі розглянуто випадок A-значних гомоморфізмів алгебри $H_b(X)$, де A — деяка комутативна банахова алгебра. З цією метою використано техніку функціонального числення для A-значних функцій від нескінченної кількості змінних, розвинену Л. Валебруком, Ш. Дініном, Р. Хартом, С. Тейлором. Для того, щоб перенести результати, які відомі для комплексних гомоморфізмів, на випадок A-значних гомоморфізмів необхідно мати аналог функціоналу значення в точці. В дисертації запропоновано розглядати гомоморфізми функціонального числення $\theta_{\overline{a}}$, які кожній функції $f \in H_b(X)$ ставлять у відповідність значення продовження $\overline{f}$ на тензорний добуток $A \bigotimes_\pi X$, в сенсі функціонального числення, в деякій точці $\overline{a} \in A \bigotimes_\pi X$. Такий підхід показав свою ефективність і дозволив довести низку результатів, які характеризують A-значні гомоморфізми алгебри $H_b(X)$. З іншого боку, для вирішення поставлених задач, необхідно було розвинути нові методи та інструменти для роботи з A-значними гомоморфізмами. Тому отримані результати є важливими та актуальними як для теорії аналітичних відображень на банахових просторах так і для теорії банахових алгебр та алгебр Фреше.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, що складають основу дисертації, проводились на кафедрі математичного і функціонального аналізу ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" в рамках науководослідної теми "Гомоморфізми та функціональне числення в алгебрах аналітичних функцій на банахових просторах" (номер державної реєстрації 0115U002305).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є зображення гомоморфізмів алгебри цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі за допомогою операторів функціонального числення в деякій комутативній банаховій алгебрі, дослідження властивостей цих гомоморфізмів та їх зображень.

Основними *завданнями дослідження* є встановлення умов апроксимації гомоморфізмів алгебри $H_b(X)$ в деяку комутативну банахову алгебру A операторами функціонального числення в A та операторами отриманими за допомогою продовження Арона-Бернера операторів функціонального числення, встановлення формули обчислення радіус-функції для A-значних гомоморфізмів алгебри $H_b(X)$, опис структури цих гомоморфізмів та застосування до побудови A-значних диференціювань.

Об'єктом дослідження є гомоморфізми алгебри цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі та диференціювання, пов'язані з цими гомоморфізмами.

Предметом дослідження є структура гомоморфізмів алгебри цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі, умови апроксимації цих гомоморфізмів операторами функціонального числення, характеристики та властивості цих гомоморфізмів.

Методи дослідження. В роботі використано методи теорії функцій від нескінченної кількості змінних, методи загальної топології, теорії топологічних алгебр, функціональне числення в алгебрах аналітичних функцій на банаховому просторі, теорія топологічних тензорних добутків.

Наукова новизна отриманих результатів. Усі результати, отримані у дисертації, є новими. У роботі вперше отримано наступні результати:

— уведено поняття H_b-властивості апроксимації та досліджено умови наближення гомоморфізмів алгебри на просторах з цією властивістю;

— описано застосування оператора згортки та оператора композиції для зображення і наближення гомоморфізмів;

— вивчено властивості гомоморфізмів алгебри аналітичних функцій обмеженого типу у скінченновимірні та нескінченновимірні алгебри та досліджено продовження Арона-Бернера гомоморфізмів функціонального числення у другий спряжений простір;

— уведено поняття радіус-функції гомоморфізма та наведено формулу для його обчислення;

— доведено теорему про можливість продовження лінійного оператора до гомоморфізму на тензорному добутку банахової алгебри A і банахового простору X;

— досліджено оператор зсуву та оператор згортки на алгебрі цілих аналітичних функцій обмеженого типу, які визначені на проективному тензорному добутку банахової алгебри A і банахового простору X;

— описано структуру алгеброзначних гомоморфізмів $H_b(X)$ і показано, що за певних умов їх можна подати у вигляді функціонального числення на послідовностях банахових просторів, які є другими спряженими до відповідних проективних тензорних добутків;

— описано некласичні A-значні диференціювання алгебри $H_b(X)$.

Практичне значення отриманих результатів. Результати, отримані у дисертаційній роботі, носять теоретичний характер. Вони можуть бути використані в нескінченновимірному комплексному аналізі, в теорії узагальнених функцій, теорії операторів, геометрії банахових просторів. Ці результати можуть бути використані в наукових дослідженнях, які проводяться у ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”, Інституті прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України, Львівському національному університеті імені І. Франка, Інституті математики НАН України, Чернівецькому національному університеті імені Ю. Федьковича, Національному педагогічному університеті імені М. П. Драгоманова та інших наукових установах та вищих навчальних закладах України.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, висвітлені в дисертації, отримано здобувачем самостійно. У праці [1] А. В. Загороднюку належить постановка задач та аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи були представлені на таких конференціях та семінарах:

– V Всеукраїнська наукова конференція “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ, 19–21 вересня 2013 р.);

– Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 24 лютого – 2 березня 2014 р.);

– П’ятнадцятанадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 15–17 травня 2014 р.);

– IX-а Літня школа “Алгебра, топологія і аналіз” (Поляниця, 7–18 липня 2014 р.);

– Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 22–25 лютого 2017. р.);

– VI Всеукраїнська наукова конференція “Нелінійні проблеми аналізу”(Микуличин, 26–28 вересня 2018. р.);

– звітних науково-практичних конференціях ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”;

– наукових семінарах кафедри математичного і функціонального аналізу “Прикладний нелінійний аналіз ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника” (керівник – д. фіз.-мат. н., проф. А. В. Загороднюк)(2014, 2016, 2018, 2019).

Публікації. Результати дисертаційного дослідження опубліковано в 13 працях, серед яких 5 – у фахових виданнях із фізико-математичних наук [1, 86, 87, 6, 90], 3 з них – у виданнях, включених до наукометричних баз “Scopus” та/або Web of Science ([86, 87, 90]). Решту 8 – у матеріалах міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій [2, 3, 4, 5, 84, 88, 89, 7].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, п’ятьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації 142 сторінки. Список використаних джерел займає 13 сторінок та містить 109 найменувань. Додатки займають 3 сторінки і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

У вступі обгрунтовано актуальність теми дослідження, встановлено зв'язок роботи з науковими темами. Сформульовано мету та завдання дослідження, описано наукову новизну отриманих результатів. Подано список публікацій та інформацію про апробації результатів дисертаційної роботи.

У першому розділі здійснено огляд літератури за темою дисертаційної роботи та подано основні результати дисертації.

У підрозділі 2.1 наведено формулювання основних означень та теорем які описують властивості поліноміальних відображень. Для комплексних банахових просторів X, Y відображення $A : X \times \cdots \times X \to Y$ називається n-лінійним відображенням, якщо воно лінійне по кожній змінній. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ простір n-лінійних відображень позначають $\mathcal{L}_a(^nX, Y)$, відповідно $\mathcal{L}(^nX, Y)$ — векторний простір всіх неперервних n-лінійних відображень з нормою

$$||A|| = \sup\{||A(x_1, \ldots, x_n)|| : x_j \in X, \quad \max ||x_j|| \leq 1\}. \tag{2.1.1}$$

Підпростір усіх неперервних симетричних n-лінійних відображень позначають $\mathcal{L}_s(^nX, Y)$. При $n = 1$ отримаємо простір всіх лінійних неперевних операторів $\mathcal{L}(X, Y)$ що діють з X в Y. Якщо $Y = \mathbb{C}$, то $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ — спряжений простір до X. Простори $\mathcal{L}(^nX, Y)$ і $\mathcal{L}_s(^nX, Y)$ є банаховими відносно норми (2.1.1) на одиничній кулі в X^n.

Для довільних $n, m \in \mathbb{N}$ декартів добуток n копій X та m копій Y позначають через X^nY^m, тобто елемент $x^ny^m = (x, \ldots, x, y, \ldots, y)$ належить до X^nY^m.

Відображення $P : X \to Y$ називається *n-однорідним поліномом*, якщо існує деяке n-лінійне відображення $A : X^n \to Y$ таке, що

$$P(x) = A(x^n) = A(x, \ldots, x)$$

для всіх $x \in X$. При $n = 1$ n-однорідний поліном є просто лінійним відображенням з X в Y. Простір всіх n-однорідних поліномів з X в Y позначають $\mathcal{P}_a(^n X, Y)$.

З поляризаційної формули випливає, що для n-однорідного полінома $P \in \mathcal{P}_a(^n X, Y)$ існує єдине n-лінійне симетричне відображення A_P яке однозначно визначає даний n-однорідний поліном P, тобто $P(x) = A_P(x^n)$. Це відображення називають n-лінійним симетричним відображенням, асоційованим із даним n-однорідним поліномом.

Відображення $P : X \to Y$ називається *неперервним n-однорідним поліномом*, якщо

$$P(x) = A_P(x^n) \quad \text{для деякого } A_P \in \mathcal{L}_s(^n X, Y).$$

Відповідно $\mathcal{P}(^n X, Y)$ – векторний простір всіх неперервних n-однорідних поліномів з нормою: $||P|| = \sup_{x \in B} ||P(x)||$.

Відображення $P : X \to Y$ називають *поліномом степеня n* (*поліноміальним відображенням*), якщо

$$P = P_0 + P_1 + \ldots P_n, \quad \text{де}$$

$$P_0 \in Y, \qquad P_k \in \mathcal{P}(^n X, Y), k = 1, 2, \ldots, n, \quad P_n \neq 0.$$

Простір всіх поліномів з X в Y позначимо $\mathcal{P}(X, Y)$, якщо $Y = \mathbb{C}$, то $\mathcal{P}(X, \mathbb{C}) = \mathcal{P}(X)$.

У підрозілі 2.2 наведено коротку характеристику тензорних добутків на банахових просторах. Нехай $\bigotimes^n X$ — алгебраїчний тензорний добуток простору X з проективною тензорною нормою

$$||w|| = \inf\Big\{ \sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N}} ||x_{i_1}||\ldots||x_{i_n}|| : w = \sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N}} (x_{i_1}\otimes\ldots\otimes x_{i_n}) \in \otimes^n X\Big\},$$

де інфімум берется по всіх можливих зображеннях $w \in \bigotimes^n X$. Поповнення простору $\bigotimes^n X$ за проективною тензорною нормою позначають $\bigotimes_\pi^n X$ і називають *проективним тензорним добутком простору* X. Важливим є той факт, що простір $\mathcal{L}(^n X, Y)$ ізометрично ізоморфний до простору лінійних неперервних відображень $\mathcal{L}(\bigotimes_\pi^n X, Y)$ з проективного тензорного степеня $\bigotimes_\pi^n X$ в Y.

Означення та властивості аналітичних функцій обмеженого типу висвітлено в підрозділі 2.3. Якщо $B_r(a)$ – відкрита куля радіуса $r > 0$ із центром у точці $a \in X$ комплексного банахового простору X, U – відкрита підмножина простору X, то відображення $f : U \to \mathbb{C}$ називається *аналітичним в точці* $a \in U$, якщо існує куля $B_r(a) \subset U$ і послідовність n-однорідних неперервних поліномів $P_n \in \mathcal{P}(^n X)$ таких, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x-a)$ збігається до $f(x)$ рівномірно на $B_r(a)$. Функція f називається *аналітичною* (*аналітичним відображенням*), якщо вона є аналітичною в кожній точці з підмножини U, тобто існує куля $B_r(a) \subset U$ і послідовність n-однорідних неперервних поліномів $P_n \in \mathcal{P}(^n X)$ таких, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x-a)$ збігається до $f(x)$ рівномірно на $B_r(a)$. Лінійний простір всіх аналітичних відображень з U в Y позначають $H(U, Y)$. Якщо $Y = \mathbb{C}$, тоді $H(U, \mathbb{C}) = H(U)$. Якщо $U = X$, тоді відображення $f \in H(X, Y)$ називають *цілим*.

Позначимо $H_b(X)$ — простір всіх цілих комплекснозначних функцій обмеженого типу, тобто простір всіх аналітичних функцій які є обмеженими на обмежених підмножинах X з топологією, яка породжена зліченою системою напівнорм $||f||_r = \sup_{x\in B_r} |f(x)|, \quad f \in H_b(X)$, де r – раціональні невід'ємні числа.

Простір $H_b(X)$ з топологією, яка породжена зліченою системою напівнорм $q_j(xy) \leq q_j(x)q_j(y), \qquad j = 1, 2, \ldots$ є локально-опуклим метризованим простором, тобто є алгеброю Фреше [52].

Розглянемо $H_b(X)'$ – спряжений простір до $H_b(X)$, де φ_n – звуження функціонала φ на простір n-однорідних поліномів $\mathcal{P}(^nX)$. Тоді φ_n є лінійним обмеженим функціоналом на $\mathcal{P}(^nX)$, а, отже, неперервним з нормою

$$||\varphi_n|| = \sup_{||P||\leq 1} \Big\{|\varphi(P)| : P \in \mathcal{P}(^nX)\Big\}.$$

Спряжений простір до простору всіх лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{P}(^nX)$ позначимо $\mathcal{P}(^nX)'$.

У підрозділі 2.3 розглянуто також властивості множини комплексних гомоморфізмів алгебри $H_b(X)$ та оператора зсуву.

Розділ 2 містить опис продовження добутку із банахової алгебри A в A'' таким чином, що A'' із отриманим добутком також є банаховою алгеброю (продовження Аренса). Операцію множення алгебри A можна продовжити до операції множення алгебри A'' двома способами. Таким чином, отримуємо на A'' дві різні операції множення $\Box$ і $\Diamond$ так, що $(A'', \Box)$ і $(A'', \Diamond)$ є банаховими алгебрами. Кажемо, *що A є регулярною за Аренсом*, якщо для всіх $\Phi, \Psi \in A''$ виконується рівність $\Phi\Box\Psi = \Phi\Diamond\Psi$.

Також наведено означення продовження Арона-Бернера яке кожній функції $f \in H_b(X)$ ставить у відповідність функцію $\widetilde{f} \in H_b(X'')$ і відображення $f \mapsto \widetilde{f}$ є гомоморфізмом алгебр $H_b(X)$ та $H_b(X'')$. Продовження Арона-Бернера можна визначити і для векторнозначних функцій і продовження Аренса є частковим випадком продовження Арона-Бернера.

Розглянуто функціональне числення на просторах функцій від нескінченної кількості змінних зі значеннями в комутативній банаховій алгебрі A. Відомо, що для кожної функції $f \in H_b(X)$ існує A-значна функція $\overline{f} \in H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ така, що для кожного елемента $\overline{a} \in A \bigotimes_\pi X$ відображення $\theta_{\overline{a}}(f) = \overline{f}(\overline{a})$ є гомоморфізмом з $H_b(X)$ в A і відображення $f \mapsto \overline{f}$ є гомоморфізмом алгебр $H_b(X)$ та $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$.

Наведено означення збіжності напрямленостей та збіжності за ультрафільтрами у топологічному просторі та основні властивості фільтрів і ультрафільтрів, які були використані у третьому розділі.

Основним завданням третього розділу є встановлення умов на банахів простір X, комутативну банахову алгебру A та гомоморфізм $\Phi : H_b(X) \to A$ за яких існує напрямленість $(\overline{a}_\alpha) \subset A \otimes_\pi X$ така, що оператори функціонального числення $(\theta_{\overline{a}_\alpha})$ наближають гомоморфізм Φ на поліномах з $H_b(X)$ або на всіх функціях з $H_b(X)$.

У підрозділі 3.1 сформульовано задачу про апроксимацію гомоморфізмів загальним питанням: *за яких умов для довільного гомоморфізму* Φ *з* $H_b(X)$ *на* A *існує напрямленість* $(\overline{a}_\alpha) \subset A \bigotimes_\pi X$ *така, що*

$$\Phi(P) = \lim_\alpha \theta_{\overline{a}}(P) = \lim_\alpha \overline{P}(\overline{a}_\alpha),\ \forall P \in \mathcal{P}(X)? \tag{3.1.1}$$

Розглянемо випадок, коли $A = \mathcal{H}^\infty_{uc}(B)$ — алгебра рівномірно неперервних аналітичних комплекснозначних функцій на замкненій одиничній кулі B, $X = \mathbb{C}^n$ і $\Phi = I\colon H_b(\mathbb{C}^n) = H(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow \mathcal{H}^\infty_{uc}(B)$ — оператор звуження на B.

У цьому випаку показано, що за деяких умов існує напрямленість $(\overline{a}_\alpha) \in \mathcal{H}^\infty_{uc}(B) \bigotimes_\pi X$ така, що

$$\Phi(f)(x) = \lim_\alpha \overline{f}(\overline{a}_\alpha) \quad \forall\, f \in H_b(X) \tag{3.1.2}$$

для $\Phi = I$ і для більш загального випадку Φ.

Твердження 3.1.1. *Для гомоморфізму $\Phi = I$ існує елемент $\overline{a}$ такий, що для довільної функції $f \in \mathcal{H}^\infty_{uc}(B)$ виконується рівність:*

$$I(f)(x) = \overline{f}(\overline{a})(x) = \theta_{\overline{a}}(f)(x).$$

Зауважимо, що в цьому випадку потрібен лише один алгеброзначний функціонал $\theta_{\overline{a}}$.

Теорема 3.1.1. *Нехай Φ — довільний гомоморфізм з $H(\mathbb{C}^n)$ в $\mathcal{H}^\infty_{uc}(B)$. Тоді існує $\overline{a} \in \mathcal{H}^\infty_{uc}(B) \bigotimes_\pi \mathbb{C}^n$ такий, що $\Phi(f)(x) = \overline{f}(\overline{a})(x)$ для кожного $x \in B$.*

У підрозділі 3.2 узагальнено твердження 3.1.1 для випадку нескінченновимірного банахового простору з базисом Шаудера і довели, що рівність (3.1.2) виконується для деякої послідовності $\overline{a}_m \in \mathcal{H}^\infty_{uc}(B) \bigotimes_\pi X$.

У підрозділі 3.3 розглядається простір з властивістю апроксимації. Кажуть, що банахів простір X має властивість апроксимації (за Гротендіком), якщо для кожної компактної множини K в X і для довільного $\varepsilon > 0$ існує оператор $T : X \to X$ скінченного рангу такий, що $\|Tx - x\| \leq \varepsilon$ для всіх $x \in K$.

Теорема 3.3.1. *Нехай X — банахів простір з властивістю апроксимації. Тоді рівність (3.1.2) виконується для $\Phi = I$.*

У підрозділі 3.4 властивість апроксимації може бути послаблена, оскільки нам достатньо збіжності на елементах простору $H_b(X)$. Розглянемо H_b-слабку топологію на X як обмеження топології Гельфанда на X, тобто найслабшу топологію на X таку, що всі $f \in H_b(X)$ є неперервними.

Означення 3.4.1. *Кажемо, що X має H_b-властивість апроксимації якщо для кожної компактної множини K у $H_b(X)$-слабкій топології і для всіх $\varepsilon > 0$ існує оператор скінченного рангу T такий, що*

$$|f(T(x) - x)| < \varepsilon$$

для кожного полінома $f \in H_b(X)$ і для кожного $x \in K$.

Аналогом теореми 3.3.2. є наступна теорема.

Теорема 3.4.1. *Якщо X має H_b-властивість апроксимації, то рівність (3.1.2) виконується для $\Phi = I$.*

Як наслідок, кожен банахів простір X з властивістю апроксимації має H_b-властивість апроксимації. На даний момент невідомо, чи буде правильне зворотнє твердження. Також не знайдено жодних прикладів, при яких рівність (3.1.2) не виконується.

Умови рівності (3.1.1) для більш загального випадку доведено у наступній теоремі.

Теорема 3.4.2. *Нехай X має H_b-властивість апроксимації. Нехай Φ — гомоморфізм з $H_b(X)$ в $\mathcal{H}^\infty_{uc}(B)$ такий, що існує аналітичне відображення $F : B \to B$ з $\Phi = C_F \circ I$, де C_F є оператором композиції з F. Тоді рівність (3.1.2) виконується для деякої напрямленості $(\overline{a}_\alpha) \subset A \otimes_\pi X$.*

Цей результат можна поширити і на гомоморфізми, які утворені композиціями з оператором зсуву.

Твердження 3.4.1. *Для деякого характера $\varphi \in M_b$ відображення τ_φ вигляду $\tau_\varphi(f)(x) = (\delta_x * \varphi)(f), x \in X$ є неперервним гомоморфізмом з $H_b(X)$ в $H_b(X)$.*

Твердження 3.4.3. *Припустимо, що X має H_b-властивість апроксимації. Нехай Φ — гомоморфізм з $H_b(X)$ в $\mathcal{H}^\infty_{uc}(B)$ вигляду $\Phi(f) = I(\tau_\varphi(f))$. Тоді для кожного $P \in \mathcal{P}(X)$ виконується рівність (3.1.1) для деякої напрямленості $(\overline{a}_\eta) \subset \mathcal{H}^\infty_{uc}(B) \bigotimes_\pi X$.*

Поєднюючи теореми 3.4.2 і 3.4.3 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 3.4.1. *Нехай X має H_b-властивість апроксимації і Φ — гомоморфізм з $H_b(X)$ в $\mathcal{H}^\infty_{uc}(B)$ вигляду*

$$\Phi = C_F \circ I \circ \tau_\varphi,$$

де C_F — оператор композиції з деяким аналітичним відображенням $F : B \to B$, $\varphi \in M_b$. Тоді рівність (3.1.1) виконується для деякої напрямлености $(\overline{a}_\alpha) \subset \mathcal{H}^\infty_{uc}(B) \otimes_\pi X$.

У підрозділі 3.5 досліджено випадок скінченновимірної напівпростої комутативної банахової алгебри A. Відомо, що існує лінійний базис іденпотентів $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \subset A$ і $c_k c_j = 0$ при $k \neq j$. З означення іденпотента маємо, що $c_k^2 = c_k$ і $c_k \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$. Нехай $\Phi : H_b(X) \to A$ — деякий гомоморфізм. Оскільки A — n-вимірний простір, то Φ можна подати у вигляді $\Phi(f) = (\Phi_1(f), \ldots, \Phi_n(f))$, $f \in H_b(X)$, де $\Phi_k(f) = \varphi_k(f)c_k$ для деяких лінійних функціоналів $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Крім того $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ є комплексними гомоморфізмами.

Теорема 3.4.6. *Нехай A — скінченновимірна напівпроста комутативна банахова алгебра і $\Phi : H_b(X) \to A$ — довільний гомоморфізм. Тоді існує деяка напрямленість $(\overline{a}_\alpha) \subset A \bigotimes_\pi X$ для якої виконується рівність (3.1.1).*

Зауважимо, що зображення комплексних гомоморфізмів на $H_b(X)$ у вигляді границі слабкополіноміально збіжної напрямленості функціоналів значень у точках простору X доведено у роботі [18] Р. Арона, Б. Коула, Т. Гамеліна не тільки для неперервних комплексних гомоморфізмів, а й для розривних, якщо такі існують. Проблема існування розривного комплексного гомоморфізму на алгебрі Фреше була сформульована у [77] Майклом Е. у 1952 році і залишається відкритою. Добре відомо, що всі комплексні гомоморфізми банахової алгебри є неперервними. Проте, існування розривного комплексного гомоморфізму на алгебрі $H_b(X)$ є еквівалентним до проблеми Майкла. Таким чином, теорема 3.5.1 формально залишається правильною і для розривних гомоморфізмів з алгебри $H_b(X)$ в A, якщо такі існують.

Оскільки A є напівпростою, то існування розривного гомоморфізму з $H_b(X)$ в A є еквівалентним до проблеми Майкла. У випадку коли A містить ненульовий нільпотентний елемент (і, отже, не є напівпростою) існує комутативна алгебра B і розривний гомоморфізм $\psi : B \to A$. У цьому випадку в якості A можна вибрати скінченновимірну комутативну алгебру, наприклад, $A = \mathbb{C}^2$ з множенням $(z_1, w_1)(z_2, w_2) = (z_1 z_2, z_1 w_1 + z_2 w_2)$, а в якості B — алгебру $C^{(n)}[0,1]$ n-раз неперервно диференційовних функцій на $[0,1]$ з нормою

$$\|f\|_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \sup\{|f^{(j)}(t)| : t \in [0,1], f \in C^{(n)}[0,1]\}.$$

Показано, що для такої алгебри A існує розривний гомоморфізм з $H_b(X)$ в A для довільного нескінченновимірного простору X.

Теорема 3.5.2. *Нехай A — комутативна банахова алгебра з ненульовим нільпотентним елементом. Тоді існує розривний гомоморфізм з $H_b(X)$ в A для довільного нескінченновимірного простору X.*

У підрозділі 3.6 для комутативної банахової алгебри з одиницею, яка містить нільпотентний елемент a_0 і h — деякий ненульовий вектор в X визначено деякий гомоморфізм рівністю:

$$d_h(f) = \frac{\partial}{\partial t} f(th)|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(th)}{t}, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Теорема 3.6.2. *Гомоморфізм Φ, визначений формулою*

$$\Phi(f) = f(0)e + d_h(f)a_0,$$

не наближається гомоморфізмами функціонального числення, тобто не існує напрямленості $(\overline{a}_\alpha) \subset A \bigotimes_\pi X$ для якої виконується рівність (3.1.1).

Важливим інструментом для дослідження множини комплексних гомоморфізмів алгебри $H_b(X)$ є продовження Арона-Бернера функцій з $H_b(X)$ до функцій з $H_b(X'')$.

У розділі 4 розглянуто аналоги цього продовження для аналітичних відображень які належать $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ і визначені в сенсі функціонального числення.

Нехай A — комутативна банахова алгебра з одиницею. Для кожного $\overline{a} \in A \bigotimes_\pi X$ існує гомоморфізм функціонального числення $\theta_{\overline{a}}$, такий, що

$$\theta_{\overline{a}}(f) = \overline{f}(\overline{a}) \in A \quad \text{для всіх} \quad f \in H_b(X).$$

Таким чином, $\overline{f}$ належить алгебрі $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ A-значних аналітичних функцій на $A \bigotimes_\pi X$ і відображення $f \mapsto \overline{f}$ є гомоморфізмом з алгебри $H_b(X)$ в алгебру $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$. Застосуємо до $\overline{f}$ продовження Арона-Бернера $\overline{f} \mapsto \widetilde{\overline{f}}$. Тоді $\widetilde{\overline{f}}$ належить $H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$.

Твердження 4.1.1. *Існує ізометричне вкладення простору $A \bigotimes_\pi X''$ в простір $(A \bigotimes_\pi X)''$, яке на елементах вигляду $a \otimes z$, $z \in X''$ задається формулою*

$$a \otimes z \mapsto \varphi_{(a,z)}.$$

Позначимо $r(\widetilde{\overline{f}})$ оператор звуження відображення $\widetilde{\overline{f}} \in H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$ на підпростір $A \bigotimes_\pi X''$. Оскільки оператор звуження є гомоморфізмом, то відображення $\widetilde{\overline{f}} \mapsto r(\widetilde{\overline{f}})$ є гомоморфізмом з $H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$ в $H_b(A \bigotimes_\pi X'', A'')$.

Запропоновано також інший підхід для узагальнення продовження Арона-Бернера для функціонального числення.

Кожній функції $f \in H_b(X)$ ставимо у відповідність $\widetilde{f}$ — її продовження Арона-Бернера у X''. Після цього розглядаємо функціональне числення $\overline{\widetilde{\widetilde{f}}} : A\bigotimes_\pi X'' \to A$. Той факт, що ці два підходи є еквівалентними, доведено у теоремі.

Теорема 4.1.1. *Нехай A — комутативна банахова алгебра. Якщо $f \in H_b(X)$, то $r(\widetilde{\widetilde{\overline{f}}})$ приймає значення в A і $r(\widetilde{\widetilde{\overline{f}}}) = \overline{\widetilde{\widetilde{f}}}$.*

У випадку коли A — скінченновимірна комутативна банахова алгебра виконується рівність $(A\bigotimes_\pi X)'' = A\bigotimes_\pi X''$ і $\widetilde{\widetilde{\overline{f}}} = \overline{\widetilde{\widetilde{f}}}$ для всіх $f \in H_b(X)$. Тому, в цьому випадку відображення $f \mapsto \widetilde{\widetilde{\overline{f}}}$ є гомоморфізмом алгебр $H_b(X)$ і $H_b(A\bigotimes_\pi X'', A)$.

В загальному випадку (коли A не обов'язково скінченновимірна) для кожного $\overline{u} \in A\bigotimes_\pi X''$ відображення

$$f \mapsto \theta_{\overline{u}}(\widetilde{f}) = \overline{\widetilde{\widetilde{f}}}(\overline{u})$$

є гомоморфізмом з $H_b(X)$ в $H_b(X'')$ і $\widetilde{f} \mapsto \theta_{\overline{u}}(\widetilde{f})$ — гомоморфізм з $H_b(X'')$ в A.

Оскільки в просторі $A\bigotimes_\pi X$ банахові простори A та X є рівноправними множниками, то, аналогічно як у розділі 4.1, показано, що $A''\bigotimes_\pi X \subset (A\bigotimes_\pi X)''$. Таким чином, змогли продовжити відображення з $H_b(A\bigotimes_\pi X, A)$ до відображення з $H_b(A''\bigotimes_\pi X, A'')$, де A'' є алгеброю, на якій задано добуток, що є продовженням Аренса добутку алгебри A. Проте, в цьому випадку для функцій вигляду $\overline{f} \in H_b(A\bigotimes_\pi X, A)$, $f \in H_b(X)$ продовження $\overline{f}$ до відображення з $H_b(A''\bigotimes_\pi X, A'')$ не обов'язково є функціональним численням в алгебрі A'', оскільки A'' може бути некомутативною алгеброю, навіть якщо A — комутативна. При цьому відображення з $H_b(X)$ в $H_b(A''\bigotimes_\pi X, A'')$ не буде гомоморфізмом. У підрозділі 4.2 наведено приклад, який ілюструє дані міркування.

У підрозділі 4.3 розглянуто загальний випадок продовження Арона-Бернера.

Теорема 4.3.1. *Припустимо, що A'' комутативна напівпроста банахова алгебра. Тоді відображення $g \mapsto \widetilde{g}$ є гомоморфізмом алгебр $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ і $H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$, $g \in H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$.*

Наслідок 4.3.1. *Якщо A'' напівпроста комутативна банахова алгебра, то відображення $f \mapsto \widetilde{\widetilde{\overline{f}}}$ є гомоморфізмом алгебри $H_b(X)$ в $H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$.*

Розглянемо загальний випадок коли $\widetilde{\widetilde{\overline{f}}} \in H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$ для довільної комутативної банахової алгебри A, $f \in H_b(X)$. Нагадаємо, що X є лівим A-модулем (X є лівим модулем над A), якщо існує білінійне відображення $A \times X \to X$, $(a, x) \mapsto a \cdot x$ таке, що $(a_1 \cdot a_2) \cdot x = a_1 \cdot (a_2 \cdot x)$, де $a_1, a_2 \in A, x \in X$. Також можна переконатися, що $A \bigotimes_\pi X$ є лівим A-модулем.

Відомо, що якщо Z — деякий лівий A-модуль, то Z'' — лівий A-модуль над A'', де A'' є алгеброю відносно операції множення, що є продовженням Аренса операції, визначеної на A. Таким чином, отримуємо, що $(A \bigotimes_\pi X)''$ є лівим модулем над A''.

Нехай u, v — довільні фіксовані елементи з $(A \bigotimes_\pi X)''$ і $f \in H_b(X)$. Визначимо

$$f_{(u,v)}(a) = \widetilde{\widetilde{\overline{f}}}(u + av), \quad a \in A''.$$

Твердження 4.3.1. *Відображення $f_{(u,v)}$ є A''-значною аналітичною функцією обмеженого типу від змінної $a \in A''$.*

У підрозділі 4.4 наведено приклад, у якому кожному елементу $\overline{a} \in A \bigotimes_\pi X$ гомоморфізм функціонального числення $\theta_{\overline{a}}$ ставить у відповідність функції $f \in H_b(X)$ елемент $\overline{f}(\overline{a}) \in H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ і відображення $f \mapsto \overline{f}$ є гомоморфізмом алгебр $H_b(X)$ і $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$. В загальному випадку цей гомоморфізм не є сюр'єктивним, тобто не кожен елемент з алгебри $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ можна подати у вигляді $g = \overline{f}$ для деякої функції $f \in H_b(X)$.

У підрозділі 4.5, аналогічно до результатів статі [1] про радіус-функцію для функціоналів, для операторів, визначених на $H_b(X)$ введено аналог радіус-функції та знайдено формулу для її обчислення.

Теорема 4.5.1. *Радіус-функцію R на $L(H_b(X), Y)$ визначає формула*

$$R(\Phi) = \limsup_{m\to\infty} \|\Phi_m\|^{\frac{1}{m}}.$$

Застосовуючи цю теорему, знайдено оцінку радіус-функції гомоморфізму $\theta_{\overline{z}}$ і показано, що отриманий результат збігається із значенням, отриманим безпосереднім обчисленням норми у відповідному просторі, тобто для довільного елемента простору $M_n^+ \bigotimes l_1$ виконується співвідношення

$$R(\theta_{\overline{z}}) = \|\overline{z}\| \leq c.$$

Теорема 4.5.2. *Нехай Φ_n — лінійний неперервний оператор з простору $\mathcal{P}(^nX)$ у деякий банахів простір Y для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ і для норми Φ_n на $\mathcal{P}(^nX)$ виконується нерівність*

$$\|\Phi_n\| \leq cs^n$$

для деяких $c, s > 0$.

Тоді існує єдиний лінійний оператор $\Phi \in \mathcal{L}(H_b(X), Y)$, звуження якого на $\mathcal{P}(^nX)$ співпадає з Φ_n для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і

$$R(\Phi) \leq s.$$

У статті [104] доведено лему про продовження лінійного функціонала $\varphi \in H_b(X)'$ до характера $\psi \in M_b$. У підрозділу 5.1 описано узагальнення цієї леми, яке дозволяє продовжити лінійний оператор до гомоморфізму.

Нагадаємо, що $\mathcal{A}_m(Y, A)$ — найменша замкнена підалгебра в $H_b(Y, A)$, породжена A-значними поліномами степеня $\leq m$. Для скорочення введемо наступне позначення: $\mathcal{L}(H_b(A \bigotimes_\pi X, A), A) = \mathcal{L}(H_b(A \bigotimes_\pi X); A)$ — простір лінійних неперервних операторів, які діють з алгебри $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ в алгебру A.

Теорема 5.1.1. *Нехай* $\Phi \in \mathcal{L}(H_b(A \bigotimes_\pi X); A)$ *— лінійний оператор такий, що* $\Phi(P) = 0$ *для кожного*

$$P \in \mathcal{P}(^m(A \bigotimes_\pi X), A) \cap \mathcal{A}_{m-1}((A \bigotimes_\pi X), A),$$

де m *є фіксоване натуральне число і* Φ_m *є ненульовим звуженням* Φ *на* $\mathcal{P}(^m(A \bigotimes_\pi X), A)$.

Тоді існує гомоморфізм $\Psi \in M_A(H_b(X))$ *такий, що його звуження* Ψ_k *на* $\mathcal{P}(^k(A \bigotimes_\pi X), A)$ *задовольняє умови:* $\Psi_k = 0$ *для всіх* $k < m$ *і* $\Psi_m = \Phi_m$. *Крім цього, радіус-функцію можна оцінити за формулою*

$$\|\Phi_m\|^{1/m} \leq R(\Psi) \leq e\|\Phi_m\|^{1/m}.$$

У підрозділі 5.2 узагальнено властивості оператора зсуву для A-значних аналітичних функцій обмеженого типу та операції згортки A-значних гомоморфізмів.

Означення 5.2.1. *Для довільного фіксованого елемента* $\overline{a} \in A \bigotimes_\pi X$ *визначимо оператор зсуву* $\tau_{\overline{a}}$ *на* $H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$ *рівністю*

$$(\tau_{\overline{a}}\overline{f})(\overline{z}) = \overline{f}(\overline{a} + \overline{z}), \quad \overline{z} \in A \bigotimes_\pi X, \overline{f} \in H_b((A \bigotimes_\pi X), A).$$

Показано, що $\tau_{\overline{a}}\overline{f}$ є A-значною аналітичною функцією на $A \bigotimes_\pi X$ і обмеженою на обмежених підмножинах в $A \bigotimes_\pi X$. Таким чином, $\tau_{\overline{a}}\overline{f} \in H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$.

Теорема 5.2.1. *Для фіксованого оператора* $\Phi \in \mathcal{L}(H_b(A \bigotimes_\pi X); A)$ *і функції* $\overline{f} \in H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$ *функція*

$$\overline{a} \mapsto \Phi(\tau_{\overline{a}}\overline{f}) = \Phi(\overline{f}(\overline{a} + \cdot)), \quad \overline{a} \in A \bigotimes_\pi X$$

належить $H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$.

Означення 5.3.1. *Для довільних* $\Phi, \Theta \in \mathcal{L}(H_b(A \bigotimes_\pi X); A)$ *операцію згортки* $\Phi * \Theta$ *в* $H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$ *визначимо рівністю*

$$(\Phi * \Theta)(\overline{f}) = \Phi(\Theta(\tau_{\overline{a}}\overline{f})).$$

Нехай Φ, Θ є мультиплікативними операторами, тобто $\Phi, \Theta \in M_A(H_b(A \bigotimes_\pi X), A)$. Із усіх гомоморфізмів, які належать $M_A(H_b(A \bigotimes_\pi X), A)$, виберемо ті, для яких виконується умова

$$\Phi(P) = \lim_\alpha P(\overline{x}_\alpha) \quad \text{для всіх} \quad P \quad \text{на} \quad A \bigotimes_\pi X,$$

де $(\overline{x}_\alpha)$ — напрямленість в $A \bigotimes_\pi X$. Таким чином, отримали підмножину

$$\Omega = \{\Phi \in M_A(H_b(A \bigotimes_\pi X), A) : \forall P \in \mathcal{P}((A \bigotimes_\pi X), A) \exists (\overline{x}_\alpha) \subset A \bigotimes_\pi X$$

$$\text{така, що} \quad \lim_\alpha P(\overline{x}_\alpha) = \Phi(P)\}.$$

У розділі 3 було показано, що клас Ω є достатньо широким. Це означає, що $(\overline{x}_\alpha) \to \Phi$ в слабкополіноміальній топології для всіх $\Phi \in \Omega$. Нехай $(\overline{y}_\beta) \to \Theta$ в слабкополіноміальній топології, $\Theta \in \Omega$.

У цьому випадку для всіх гомоморфізмів, які належать Ω, можемо записати

$$(\Phi * \Theta)(P) = \lim_\alpha \lim_\beta P(\overline{x}_\alpha + \overline{y}_\beta).$$

Для скорочення введемо позначення $\Phi_1 * \ldots * \Phi_n = \mathop{\ast}\limits_{k=1}^{n} \Phi_k$.

Нехай I_k — мінімальний замкнений ідеал в $H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$, породжений всіма m-однорідними поліномами $\mathcal{P}(^{\leq k}(A \bigotimes_\pi X), A)$, де $0 < m \leq$

k. Тоді I_k є власним ідеалом і тому міститься в деякому максимальному замкненому ідеалі.

Позначимо $\mathcal{F}_k = \{\Phi \in \Omega : \ker \Phi \supset I_k\}$ і покладемо $\mathcal{F}_0 = \Omega$.

Наслідок 5.3.1. *Якщо для деякого $m \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{A}_m((A \bigotimes_\pi X), A) \neq \mathcal{A}_{m-1}((A \bigotimes_\pi X), A),$$

тоді існує гомоморфізм $\Psi \in \mathcal{F}_{m-1}$ такий, що $\Psi \notin \mathcal{F}_m$.

Лема 5.3.1. *Нехай $\Phi, \Psi \in \Omega$ і $\Psi \in \mathcal{F}_{k-1}$. Тоді для кожного $P \in \mathcal{P}(^k(A \bigotimes_\pi X), A)$ виконується рівність*

$$\Phi * \Psi(P) = \Phi(P) + \Psi(P).$$

Лема 5.3.2. *Якщо $P \in \mathcal{P}(^k(A \bigotimes_\pi X), A)$ і $\Phi_j \in \mathcal{F}_{j-1}$, тоді для кожного $m > k$ виконується рівність*

$$\mathop{\ast}_{j=1}^{m} \Phi_j(P) = \mathop{\ast}_{j=1}^{k} \Phi_j(P).$$

Для послідовності гомоморфізмів $(\Phi_n)_{n=1}^\infty \subset \Omega$ таких, що $\Phi_n \in \mathcal{F}_{n-1}$, нескінченна згортка $\mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ є лінійним мультиплікативним оператором на алгебрі поліномів $\mathcal{P}((A \bigotimes_\pi X), A)$ таким, що $\mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n(P) = \mathop{\ast}\limits_{n=1}^{k} \Phi_n(P)$ для кожного $P \in \mathcal{P}(^k(A \bigotimes_\pi X), A)$ для довільного натурального k. Цей мультиплікативний оператор єдиним чином визначає деякий гомоморфізм з Ω, який ми будемо позначати тим самим символом $\mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$, якщо він неперервний.

У підрозділі 5.4 доведено основну структурну теорему для гомоморфізму Φ з алгебри $H_b(X)$ в деяку комутативну банахову алгебру A, який може бути наближеним гомоморфізмами функціонального числення у слабкополіноміальній топології.

Теорема 5.4.2. *Існують послідовності спряжених просторів* $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ *і відображень*

$$\theta_{\overline{a}}^{(n)} : Z_n \to A$$

такі, що

$$Z_1 = (A \bigotimes_{\pi} X)'', Z_n = \mathcal{L}(H_b(A \bigotimes_{\pi} X); A), \theta_{\overline{a}}^{(1)} = \widetilde{\theta}_{\overline{a}''}$$

і довільний гомоморфізм $\Phi \in \Omega$ *має зображення*

$$\Phi = \mathop{\ast}_{n=1}^{\infty} \theta_{\overline{a}}^{(n)}(u_n)$$

для деякої послідовності $u_n \in Z_n, n = 1, 2, \ldots$.

У підрозділі 5.5 описано некласичні A-значні диференціювання алгебри $H_b(A \bigotimes_{\pi} X, A)$. Під класичними диференціюваннями алгебри $H_b(X)$ розуміють оператори диференціювання за напрямками $h \in X$:

$$\partial(h)(f)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}.$$

Аналогічно, визначено класичні A-значні диференціювання алгебри $H_b(X)$ за формулою

$$\overline{\partial}(\overline{h})(f)(\overline{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{\overline{f}(\overline{a} + t\overline{h}) - f(\overline{a})}{t},$$

де $\overline{h}, \overline{a} \in A \bigotimes_{\pi} X$ і h — фіксований ненульовий вектор.

Некласичні диференціювання будуємо за допомогою лінійного оператора $\overline{\partial}_{(k)}(u_k)$ на $H_b(X)$, який визначаємо рівністю:

$$\overline{\partial}_{(k)}(u_k)(f)(\overline{x}) := \eta(u_k) \circ \tau_{\overline{a}}(\overline{f}), \overline{f} \in H_b((A \bigotimes_{\pi} X), A).$$

Доведено, що оператор $\overline{\partial}_{(k)}(u_k)$ є неперервним диференціюванням на $H_b((A \bigotimes_{\pi} X), A)$, і наведено формули знаходження "алгеброзначних похідних" для $P \in \mathcal{P}(^n(A \bigotimes_{\pi} X), A)$ і $\overline{f} \in H_b((A \bigotimes_{\pi} X), A)$.

Теорема 5.5.2. *Нехай* $u_k \in Z_k$. *Оператор* $\overline{\partial}_{(k)}(u_k)$ *є неперервним* A*-значним диференціюванням на* $H_b(X)$,

$$\overline{\partial}_{(k)}(u_k)(P)(\overline{x}) = \binom{n}{k} \widetilde{\overline{A}}_P \left(\overline{x}^{n-k}, u_k\right), \qquad \overline{x} \in A \bigotimes_\pi X$$

для всіх $P \in \mathcal{P}(^n(A \bigotimes_\pi X), A)$ *і*

$$\theta^{(k)}(u_k)(\overline{f})(\overline{x}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+} \frac{(k!)^m}{(mk)!} \overline{\partial}^m_{(k)}(u_k)(\overline{f})(\overline{x}), \qquad \overline{x} \in A \bigotimes_\pi X$$

для всіх $\overline{f} \in H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівникові Андрію Васильовичу Загороднюку за цінні поради, підтримку і допомогу у написанні дисертації.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ, ВИБІР МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Дослідження аналітичних функцій на нескінченновимірних топологічних лінійних просторах розпочалося у роботах М. Фреше [52, 53] на початку 20-го століття. Пізніше питання пов'язані з умовами неперервності, обмеженості та вимірності поліноміальних відображень на нормованих просторах досліджувалися в роботах математиків Львівської математичної школи (С. Банах, С. Орліч, В. Орліч, див. [23]), також, у роботах М. Цорна [108, 109], Р. Мартіна [75], А. Тейлора [97, 98]. Підсумок цих досліджень було зроблено у додатку до монографії написаної М. Цорном [69].

Поліноми та аналітичні функції на банахових просторах є, в певному сенсі, найпростішими нелініними відображеннями. Тому природнім є питання про узагальнення властивостей лінійних операторів на поліноміальні та аналітичні. Було швидко зауважено, що для поліноміальних відображень виконуються аналоги теорем про еквівалентність обмеженості і неперервності та принципу рівномірної обмеженості Банаха-Штейнгауса. Аналог теореми про замкнений графік для поліномів на сепарабельному банаховому просторі доведено в [85]. У [16] Р. Арон і П. Бернер показали, що для поліноміальних функціоналів, в загальному випадку, не виконується аналог теореми Гана-Банаха. Деякі умови існування продовження однорідних поліномів з підпростору банахового простору на весь простір було розглянуто у [17, 29, 56, 65]. У [16], також встановлено, що кожна аналітична функція яка є обмеженою на кулі банахового простору X продовжується до аналітичної функції на кулі другого спряженого X'' і оператор продовження зберігає лінійність та мультиплікативність. Пізніше, А. Давіе і Т. Гамелін в [38] показали, що продовження Арона-Бернера для однорідного полінома P, можна зобразити у вигляді послідовних границь значень відповідної симетричної полілінійної форми A_P полінома P на $*$-слабко збіжних напрямленостях. В цьому сенсі, продовження Арона-Бернера є узагальненням відомого продовження Аренса [14] (див. також [15, 39, 67, 99, 100, 101, 102]).

Аналітичні функції на банахових просторах можна розглядати з точки зору теорії функції багатьох змінних і комплексного аналізу. Системний виклад результатів, які грунтуються на цьому підході можна знайти в працях [24, 25, 40, 44, 63, 68, 76, 80].

Дослідження просторів аналітичних функцій розпочалось з монографії Л. Нахбіна [81] і було продовжено багатьма авторами (див. [26, 27, 41, 46, 47, 48, 49, 54, 55, 56, 66, 83, 91, 92]). Зокрема, у [91] Р. Раян дослідив тензорну структуру предуального простору до простору неперервних поліномів на X. У цих роботах було виділено різні підпростори поліномів на банаховому просторі та їх поповнення у різних топологіях.

Для нас цікавою є топологія рівномірної збіжності на кулях банахового простору. Ця топологія є метризовною і поповнення простору всіх неперервних поліномів у цій топології є алгеброю цілих функцій обмеженого типу на X, яка позначається $H_b(X)$. У роботах П. Галіндо, Д. Гарсіа та М. Маестре [54, 55] було показано що $H_b(X)$ є спряженим простором до деякого DF-простору $G_b(X)$ і описано тензорну структуру простору $G_b(X)$. У [31] розглянуто питання опису спектру алгебри $H_b(X)$. У фундаментальній праці Р. Арона, Б. Коула і Т. Гамеліна [18] розроблено основні інструменти дослідження алгебри $H_b(X)$ та її спектру. Зокрема, показано, що елементи другого спряженого простору X'' породжують комплексні гомоморфізми алгебри $H_b(X)$ як функціонали значень в точках простору X'' продовжень Арона-Бернера функцій з $H_b(X)$. Також, у [18] введено поняття радіус-функції, виведено формулу для обчислення радіус-функції елементів з $H_b(X)'$ та показано, що множина комплексних гомоморфізмів, для яких радіус-функція не перевищує заданої константи є компактним підпростором в топології Гельфанда у топологічному просторі всіх комплексних гомоморфізмів $H_b(X)$. Ці дослідження було продовжено у [19], де було повністю описано спектр підалгебри $H_b(X)$, яка породовжується поліномами скінченного типу (скінченна алгебраїчна комбінація лінійних функціоналів). У [21] Р. Арон, П. Галіндо, Д. Гарсіа, М. Маестре показали, що якщо X — симетрично регулярний банахів простір, то спектр алгебри $H_b(X)$ має структуру аналітичного многовиду над простором X''. Подальші дослідження в цьому напрямку та узагальнення для інших алгебр було зроблено в роботах [30, 58, 59, 60, 71, 79]. Дослідження алгебр симетричних аналітичних функцій на просторах з симетричною структурою розпочалося з робіт [11, 64] та було продовжено у [13, 33, 34] та інших.

У [104, 105] А. Загороднюк застосував продовження Арона-Бернера до поліномів на проективних симетричних тензорних степенях $\bigotimes_{s,\pi}^n X$ простору X і показав, що елементи другого спряженого $(\bigotimes_{s,\pi}^n X)''$ також породжують комплексні гомоморфізми простору $H_b(X)$. В такий спосіб вдалося повністю описати спектр алгебри $H_b(X)$ в термінах функціоналів, породжених елементами з $(\bigotimes_{s,\pi}^n X)'$ (див. також [72]).

У даній роботі досліджено множину гомоморфізмів алгебри $H_b(X)$ зі значеннями в деякій комутативній банаховій алгебрі A. Для того, щоб перенести методи і результати, які відомі для комплексних гомоморфізмів, необхідно мати аналог функціоналу значення в точці δ_x, $\delta_x(f) = f(x)$. Таким аналогом є гомоморфізм функціонального числення в $H_b(X)$ зі значеннями в A. Функціональне числення від аналітичних функцій багатьох комплексних змінних є стандартним об'єктом в теорії комутативних алгебр (див. [57]). Для випадку алгебр аналітичних функцій від нескінченної кількості змінних було запропоновано Л. Вальбруком [103] і розвинуто для цілих функцій обмеженого типу в роботах Ш. Дініна, Р. Харта, С. Тейлора [44, 45].

РОЗДІЛ 2
ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ І ВЛАСТИВОСТІ

2.1. Поліноміальні відображення

Нехай X, Y – комплексні банахові простори. Розглянемо відображення $A : X \times \cdots \times X \to Y$, яке називають n-лінійним відображенням, оскільки лінійність виконується для кожного аргумента. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ простір n-лінійних відображень позначимо $\mathcal{L}_a(^n X, Y)$. Відповідно $\mathcal{L}(^n X, Y)$ — векторний простір всіх неперервних n-лінійних відображень з нормою

$$||A|| = \sup\{||A(x_1, \dots, x_n)|| : x_j \in X, \quad \max ||x_j|| \leq 1\}. \tag{2.1.1}$$

Підпростір усіх неперервних симетричних n-лінійних відображень таких, що

$$A(x_1, \dots, x_n) = A(x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)}), \qquad s \in \sigma_n,$$

де σ_n – група підстановок $s : \{1, \dots, n\} \to \{s(1), \dots, s(n)\}$ позначають $\mathcal{L}_s(^n X, Y)$. У випадку, коли неперервність не вимагається, то простір n-лінійних симетричних відображень позначають $\mathcal{L}_{as}(^n X, Y)$.

Зауважимо, що при $n = 1$ отримаємо простір всіх лінійних неперевних операторів $\mathcal{L}(X, Y)$ що діють з X в Y. Якщо $Y = \mathbb{C}$, то $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ — спряжений простір до X. Простори $\mathcal{L}(^n X, Y)$ і $\mathcal{L}_s(^n X, Y)$ є банаховими відносно норми (2.1.1) на одиничній кулі в X^n.

Теорема 2.1.1 ([80]). *Нехай* $A \in \mathcal{L}(^nX, Y)$. *Тоді для будь-яких* $x, y \in X$ *справедлива біноміальна формула*

$$A(x+y, \ldots, x+y) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A(\underbrace{x, \ldots, x}_{n-j}, \underbrace{y, \ldots, y}_{j})$$

і поляризаційна формула

$$A(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$\frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \quad A(\underbrace{x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \ldots \varepsilon_n x_n, \ldots, x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \ldots \varepsilon_n x_n}_{n}).$$

Нехай X, Y – комплексні банахові векторні простори. Для довільних $n, m \in \mathbb{N}$ позначимо декартів добуток n копій X та m копій Y через $X^n Y^m$, тобто елемент $x^n y^m = (x, \ldots, x, y, \ldots, y)$ належить до $X^n Y^m$.

Відображення $P : X \to Y$ називається *n-однорідним поліномом* або *однорідним поліномом степеня* n, якщо існує деяке n-лінійне відображення $A : X^n \to Y$ таке, що

$$P(x) = A(x^n) = A(x, \ldots, x)$$

для всіх $x \in X$.

При $n = 1$ n-однорідний поліном є просто лінійним відображенням з X в Y. Вважаємо, що однорідний поліном степеня 0 є тотожнім відображенням. Якщо $P : X \to Y$ є n-однорідним поліном, то

$$P(tx) = t^n P(x)$$

для всіх $t \in \mathbb{C}$.

Простір всіх n-однорідних поліномів з X в Y будемо позначати $\mathcal{P}_a(^nX, Y)$. Зауважимо, що n-однорідні поліноми у цьому просторі не обов'язково непереререрввні.

З поляризаційної формули випливає, що для n-однорідного полінома $P \in \mathcal{P}_a(^nX, Y)$ існує єдине n-лінійне симетричне відображення A_P яке однозначно визначає даний n-однорідний поліном P, тобто $P(x) = A_P(x^n)$. Це відображення називають n-лінійним симетричним відображенням, асоційованим із даним n-однорідним поліномом.

Відображення $P : X \to Y$ називається *неперервним n-однорідним поліномом*, якщо

$$P(x) = A_P(x^n) \quad \text{для деякого } A_P \in \mathcal{L}_s(^nX, Y).$$

Позначимо $\mathcal{P}(^nX, Y)$ – векторний простір всіх неперервних n-однорідних поліномів з нормою:

$$||P|| = \sup_{x \in B} ||P(x)||.$$

Дану норму називають *нормою рівномірної збіжності на одиничній кулі B з центром в точці* 0 *в* X. Якщо $Y = \mathbb{C}$, то позначимо $\mathcal{P}(^nX, \mathbb{C}) = \mathcal{P}(^nX)$. Простір $\mathcal{P}(^0X, Y)$ складається зі сталих функцій, $\mathcal{P}(^1X, \mathbb{C})$ збігається зі спряженим простором X'.

Теорема 2.1.2 ([80]). *Відображення $A_P \to P$ є ізоморфізмом між банаховим простором $\mathcal{L}_s(^nX, Y)$ і простором n-однорідних неперервних поліномів $\mathcal{P}(^nX, Y)$.*

Відображення $P : X \to Y$ називається *поліномом степеня n* (*поліноміальним відображенням*), якщо

$$P = P_0 + P_1 + \dots P_n,$$

$$\text{де } P_0 \in Y, \quad P_k \in \mathcal{P}(^nX, Y), k = 1, 2, \dots, n, \quad P_n \neq 0.$$

Простір всіх поліномів з X в Y позначимо $\mathcal{P}(X,Y)$, якщо $Y = \mathbb{C}$, то $\mathcal{P}(X,\mathbb{C}) = \mathcal{P}(X)$. За побудовою простір $\mathcal{P}(X,Y)$ складається з неперервних поліномів у топології, яка породжена нормою рівномірної збіжності на одиничній кулі

$$\|P\| = \sup\{\|P(x)\| : \|x\| \leq 1\}. \tag{2.1.2}$$

Таким чином, $\mathcal{P}(X,Y)$ є (неповним) нормованим простором. Використовують позначення $\mathcal{P}(^{\leq n}X,Y)$ — простір всіх неперервних поліномів степеня меншого або рівного n на X.

Слабкополіноміальною топологією на банаховому просторі X називається найслабша топологія, в якій всі поліноми з $\mathcal{P}(X)$ є неперервними. Іншими словами, базу слабкополіноміальної топології утворюють прообрази відкритих множин при дії поліноміального відображення P для всіх $P \in \mathcal{P}(X)$.

2.2. Тензорні добутки банахових просторів

Позначимо $X^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ — векторний простір скінчених формальних сум вигляду:

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N}} \lambda_{i_1,\ldots,i_n}(x_{i_1},\ldots,x_{i_n}), \qquad \lambda_{i_1,\ldots,i_n}\in\mathbb{C}, (x_{i_1},\ldots,x_{i_n})\in X^n.$$

Позначимо через I підпростір в $X^{(n)}$, для всіх $1 \le k \le n$, $\lambda \in \mathbb{C}$, породжений елементами вигляду

$$(x_{i_1},\ldots,x_{i_k}+x_{i'_k},\ldots,x_{i_n}) - (x_{i_1},\ldots,x_{i_k},\ldots,x_{i_n}) - (x_{i_1},\ldots,x_{i'_k},\ldots,x_{i_n}),$$
$$(x_{i_1},\ldots,\lambda x_{i_k},\ldots,x_{i_n}) - \lambda(x_{i_1},\ldots,x_{i_k},\ldots,x_{i_n}).$$

Фактор-простір $\bigotimes^n X := X^{(n)}/I$ називається *n-тим тензорним степенем простору X*. На $\bigotimes^n X$ розглянемо проективну тензорну норму

$$||w|| = \inf\Big\{\sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N}} ||x_{i_1}||\ldots||x_{i_n}|| :$$
$$w = \sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N}} (x_{i_1}\otimes\ldots\otimes x_{i_n}) \in \otimes^n X\Big\},$$

де інфімум береться по всіх можливих зображеннях $w \in \bigotimes^n X$. Позначимо $\bigotimes^n_\pi X$ – поповнення $\bigotimes^n X$ за проективною тензорною нормою. Простір $\bigotimes^n_\pi X$ називається *проективним тензорним степенем простору X*.

Теорема 2.2.1 ([80]). *Простір $\mathcal{L}({}^nX, Y)$ ізометрично ізоморфний до простору лінійних неперервних відображень $\mathcal{L}(\bigotimes^n_\pi X, Y)$ з проективного тензорного степеня $\bigotimes^n_\pi X$ в Y.*

Симетричний тензорний степінь $\bigotimes_s^n X$ простору X є підпростором $\bigotimes^n X$ і породжений векторами вигляду

$$x_1 \otimes_s \ldots \otimes_s x_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)},$$

де $x_i \in X$ і S_n – група підстановок на множині $\{1, \ldots, n\}$.

Кожен елемент симетричного тензорного степеня $w_n \in \bigotimes_s^n X$ простору X має зображення $w_n = \sum_i \underbrace{x_i \otimes \ldots \otimes x_i}_{n}$, $x_i \in X$ з еквівалентною нормою до проективної тензорної норми:

$$|||w_n||| := \inf \Big\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} ||x_i||^n : w_n = \sum_{i \in \mathbb{N}} (x_i \otimes \ldots \otimes x_i) \in \otimes_s^n X \Big\},$$

де інфімум береться по всіх можливих зображеннях елемента w_n. Таке зображення не є єдиним. *Симетричний проективний тензорний степінь* $\bigotimes_{s,\pi}^n X$ банахового простору X – поповнення $\bigotimes_s^n X$ за нормою $|||\cdot|||$ і є замкненим підпростором в $\bigotimes^n X$. Позначимо $x^{\otimes n} := \underbrace{x \otimes \ldots \otimes x}_{n}$.

Теорема 2.2.2 ([40]). *Простір $\mathcal{L}(\bigotimes_{s,\pi}^n X, Y)$ ізоморфний до простору $\mathcal{L}_s(^n X, Y)$.*

Теорема 2.2.3 ([72]). *Простір лінійних неперервних відображень $\mathcal{L}((\bigotimes_{s,\pi}^n X, |||\cdot|||), Y)$ з $\bigotimes_{s,\pi}^n X$ в Y ізометричний до простору n-однорідних неперервних поліномів $\mathcal{P}(^n X, Y)$ для кожного банахового простору Y.*

З теореми випливає, що

$$\Big(\bigotimes_{s,\pi}^n X, |||\cdot||| \Big)' \simeq \mathcal{P}(^n X).$$

Також, $\mathcal{P}(^{\leq n} X)$ ізоморфний прямій сумі просторів $(\bigotimes_{s,\pi}^k X)'$, $0 \leq k \leq n$.

Нехай $P \in \mathcal{P}({}^{km}X)$ для деяких натуральних чисел k, m, A_P – відповідна симетрична km-лінійна форма, яка асоційована із поліномом P. Розглянемо $A_P(x_1^m, \ldots, x_k^m)$ для деяких $x_1, \ldots, x_k \in X$. Для фіксованих

$$x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k, \qquad 1 \leq j \leq k,$$

форма $A_P(x_1^m, \ldots, x_j^m, \ldots, x_k^m)$ є m-однорідним поліномом для $x_j \in X$, а, отже, на неї можна дивитися як на неперервний лінійний функціонал на $\bigotimes_{s,\pi}^n X$ в точці $x_j^{\otimes m}$. Оскільки це справедливо для кожного $1 \leq j \leq k$, то існує неперервне симетричне m-лінійне відображення $A_{P_{(m)}} : (\bigotimes_{s,\pi}^m X)^m \to \mathbb{C}$ таке, що

$$A_{P_{(m)}}(x_1^{\otimes m}, \ldots, x_k^{\otimes m}) = A_P(x_1^m, \ldots, x_k^m). \tag{2.2.1}$$

Позначимо $P_{(m)}(x^{\otimes m}) := A_{P_{(m)}}(x_1^{\otimes m}, \ldots, x_k^{\otimes m})$.

2.3. Аналітичні функції обмеженого типу

Нехай X – комплексний банахів простір. Позначимо $B_r(a)$ – відкрита куля радіуса $r > 0$ із центром у точці $a \in X$. Нехай U – відкрита підмножина простору X. Відображення $f : U \to \mathbb{C}$ називається *аналітичним в точці* $a \in U$, якщо існує куля $B_r(a) \subset U$ і послідовність n-однорідних неперервних поліномів $P_n \in \mathcal{P}(^n X)$ таких, що ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x-a)$$

збігається до $f(x)$ рівномірно на $B_r(a)$. Цей ряд називається *рядом Тейлора* функції f в точці $a \in X$. Функція f називається *аналітичною* (*аналітичним відображенням*), якщо вона є аналітичною в кожній точці з підмножини U. Лінійний простір всіх аналітичних відображень з U в Y позначають $H(U, Y)$. Якщо $Y = \mathbb{C}$, тоді $H(U, \mathbb{C}) = H(U)$. Якщо $U = X$, тоді відображення $f \in H(X, Y)$ називають *цілим.*

Позначимо $H_b(X)$ — простір всіх цілих комплекснозначних функцій обмеженого типу, тобто простір всіх аналітичних функцій які є обмеженими на обмежених підмножинах X з топологією, яка породжена зліченою системою напівнорм

$$||f||_r = \sup_{x \in B_r} |f(x)|, \quad f \in H_b(X), \tag{2.3.1}$$

де r – раціональні невід'ємні числа, B_r — куля з центром в 0 і радіусом r в X. Якщо X — нескінченновимірний банахів простір, то $H_b(X) \neq H(X)$. Наприклад, функція $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^n \in H(\ell_2)$ але не належить $H_b(\ell_2)$.

Алгеброю Фреше називають локально-опуклий метризований простір Z з топологією, яка породжена зліченою системою напівнорм q_j таких, що для довільних $x, y \in Z$

$$q_j(xy) \leq q_j(x) q_j(y), \qquad j = 1, 2, \ldots .$$

Простір $H_b(X)$ з топологією, яка породжена зліченою системою напівнорм (2.3.1) є локально-опуклим метризованим простором, тобто є алгеброю Фреше [52]. Довільну аналітичну функцію $f \in H_b(X)$ можна розкласти в ряд Тейлора в точці 0: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x)$, де $P_n \in \mathcal{P}(^nX)$, $n \geq 0$, який збігається рівномірно в $H_b(X)$ на кожній кулі B_r скінченного радіуса в X. Отже, будь-яку аналітичну функцію з $H_b(X)$ можна наблизити поліномами з $\mathcal{P}(X)$, тобто простір поліномів $\mathcal{P}(X)$ є щільною підмножиною $H_b(X)$ [18].

Розглянемо $H_b(X)'$ – спряжений простір до $H_b(X)$.

Позначимо φ_n – звуження функціонала φ на простір n-однорідних поліномів $\mathcal{P}(^nX)$. Тоді φ_n є лінійним обмеженим функціоналом на $\mathcal{P}(^nX)$, а, отже, неперервним. Визначимо норму лінійного неперервного функціонала φ_n на $\mathcal{P}(^nX)$:

$$||\varphi_n|| = \sup_{||P|| \leq 1} \Big\{ |\varphi(P)| : P \in \mathcal{P}(^nX) \Big\}.$$

Спряжений простір до простору всіх лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{P}(^nX)$ позначимо $\mathcal{P}(^nX)'$.

Теорема 2.3.1. [18] *Нехай $\varphi_n \in \mathcal{P}(^nX)'$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ такі, що*

$$||\varphi_n|| \leq cr^n$$

для деяких $c, r > 0$. Тоді існує єдиний функціонал $\varphi \in H_b(X)'$ такий, що його звуження на $\mathcal{P}(^nX)$ дорівнює φ_n для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$.

Кожен функціонал $\varphi \in H_b(X)'$ є неперервним як функціонал на нормованому просторі $H_b(X)$ відносно норми (2.3.1) на кулі B_r в X, для деякого $r > 0$. Інфінум таких $r >$ називається радіус-функцією функціонала φ і позначається $R(\varphi)$. У [18] показано, що радіус-функцію функціонала φ можна обчислити за формулою

$$R(\varphi) = \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Позначимо $\mathcal{H}^\infty_{uc}(B_r)$ алгебру аналітичних функцій на кулі B_r радіуса 1 банахового простору X, які є рівномірно неперервними на замкненій кулі $\overline{B_r}$. У [18] показано, що $H_b(X) = \bigcup\limits_{r>0} \mathcal{H}^\infty_{uc}(B_r)$, тобто $H_b(X)$ є проективною границею алгебр $\mathcal{H}^\infty_{uc}(B_r)$.

З теорії Гельфанда для комутативних топологічних алгебр (див. напр. [8, 12, 36, 58, 74, 93]) ми знаємо, що кожен елемент a комутативної алгебри A можна подати як функцію $\widehat{a}$ на множині комплексних гомоморфізмів $M(A)$, визначену як $\widehat{a}(\varphi) = \varphi(a), \varphi \in M(A)$. Відображення $a \mapsto \widehat{a}$ називається перетворенням Гельфанда.

Позначимо M_b множину комплексних гомоморфізмів алгебри $H_b(X)$ і M^r — множину комплексних гомоморфізмів алгебри $\mathcal{H}^\infty_{uc}(B_r)$. Ці множини є топологічними просторами у відповідних топологіях Гельфанда які задаються як найслабші топології на M_b та M^r такі, що всі функції $\widehat{f}$ на M_b та M^r, відповідно, і $\widehat{f}$ — перетворення Гельфанда функції f.

У [18] показано, що $M_b = \bigcap\limits_{r>0} M_r$ тобто, M_b є індуктивною границею топологічних просторів M^r, підпростори M^r є компактними в M_b і $M^r = \{\varphi \in M_b : R(\varphi) \le r\}$.

Зсув та згортка характерів на $H_b(X)$

Для довільного фіксованого елемента $x \in X$, оператор зсуву τ_x визначається на $H_b(X)$ рівністю

$$(\tau_x f)(y) = f(y + x), \qquad f \in H_b(X).$$

Відомо, що $\tau_x f \in H_b(X)$ і для довільного фіксованого функціонала $\phi \in H_b(X)'$ функція

$$x \longrightarrow \phi(\tau_x f), \qquad x \in X,$$

належить $H_b(X)$ (див. [18]).

Для довільних $\phi, \theta \in H_b(X)'$ операція згортки $\phi * \theta$ в $H_b(X)$ визначається рівністю

$$(\phi * \theta)(f) = \phi(\theta(\tau_x f)), \qquad f \in H_b(X).$$

Нехай $\phi, \theta \in M_b$. Згідно з наслідком 2.6 ([72], ст. 24) існує напрямленість $(x_\alpha), (y_\beta) \subset X$ така, що

$$\phi(P) = \lim_\alpha P(x_\alpha), \qquad \theta(P) = \lim_\beta P(y_\beta)$$

для кожного полінома P. Іншими словами, $x_\alpha \to \phi$ і $y_\beta \to \theta$ в слабко поліноміальній топології. Таким чином, у цьому випадку ми можемо записати:

$$(\phi * \theta)(P) = \lim_\beta \lim_\alpha P(x_\alpha + y_\beta) \tag{2.3.2}$$

для кожного полінома P. Зауважимо, що M_b є напівгрупою відносно операції згортки. Позначимо для скорочення $\phi_1 * \dots * \phi_n$ через $\mathop{\ast}\limits_{k=1}^{n} \phi_k$.

2.4. Продовження Арона-Бернера та регулярність за Аренсом

У 1951 р. Р. Аренс [14] знайшов спосіб продовження добутку із банахової алгебри A в A'' таким чином, що A'' із отриманим добутком також є банаховою алгеброю. Нагадаємо означення регулярної за Аренсом алгебри з посиланням на статтю [39].

Нехай A – комутативна банахова алгебра, X – банахів простір над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Позначимо $\langle \lambda, x \rangle = \lambda(x)$ для $x \in X$ і $\lambda \in X'$. Для кожного $a, b \in A, \lambda \in A'$ і $\Phi \in A''$ визначимо $a.\lambda \in A', \lambda.a \in A', \lambda.\Phi \in A'$ і $\Phi.\lambda \in A'$ як

$$a.\lambda : b \mapsto \langle \lambda, ba \rangle, \lambda.a : b \mapsto \langle \lambda, ab \rangle$$

$$\lambda.\Phi : b \mapsto \langle \Phi, b.\lambda \rangle, \Phi.\lambda : b \mapsto \langle \Phi, \lambda.b \rangle$$

і визначимо два добутки $\Box$ і $\Diamond$ на A'' так:

$$\langle \Phi \Box \Psi, \lambda \rangle = \langle \Phi, \Psi.\lambda \rangle, \langle \Phi \Diamond \Psi, \lambda \rangle = \langle \Psi, \lambda.\Phi \rangle (\Phi, \Psi \in A'')$$

Тоді $(A'', \Box)$ і $(A'', \Diamond)$ є банаховими алгебрами. Кажемо, *що A є регулярною за Аренсом*, якщо для всіх $\Phi, \Psi \in A''$ маємо $\Phi \Box \Psi = \Phi \Diamond \Psi$.

Продовження Аренса операції множення алгебри A до операції в алгебрі A'' є чатковим випадком продовження Арона-Бернера.

Розглянемо $\mathcal{P}(^n X)$ — банахів простір всіх неперервних n-однорідних комплекснозначних поліномів на X. Вперше питання про продовження кожного елемента з $\mathcal{P}(^n X)$ до неперервного n-однорідного полінома $\widetilde{P}$ на X'' зацікавилися Арон і Бернер у 1978 році і пізніше показали, що таке продовження завжди існує.

Нехай $B : X \times \ldots \times X \to \mathbb{C}$ — симетричне n-лінійне відображення, асоційоване з P. Спочатку продовжимо B до n-лінійного відображення

$\widetilde{B}\ : X'' \times \ldots \times X'' \to \mathbb{C}$. Нехай $(z_1, \ldots, z_n) \in X'' \times \ldots \times X''$. Виберемо напрямленість (x_{α_k}) у X, яка збігається до z_k у $*$-слабкій топології простору X'' для кожного фіксованого $k, 1 \leqslant k \leqslant n$. Покладемо

$$\widetilde{B}(z_1, \ldots, z_n) = \lim_{\alpha_1} \ldots \lim_{\alpha_n} B(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}).$$

Тоді *продовження Арона-Бернера полінома* P з X до X'' визначається за формулою

$$\widetilde{P}(z) = \widetilde{B}(z, \ldots, z),$$

де B є такою єдиною симетричною неперервною n-лінійною формою, що $P(x) = B(x, \ldots, x)$, для кожного $x \in X$.

Розглянемо векторно-значні n-лінійні відображення ([65]). Нехай задано Y-значний оператор $B : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$. Тоді оператор $\widetilde{B} : X_1'' \times \ldots \times X_n'' \to Y''$ називається *продовженням Арона-Бернера оператора* B, якщо виконується рівність

$$\widetilde{B}(z_1, \ldots, z_n)(\psi) = \widetilde{\psi \circ B}(z_1, \ldots, z_n), \quad \psi \in X',$$

де $\widetilde{\psi \circ B}$ є фіксованим продовженням Арона-Бернера для $\psi \circ B$.

Якщо $P \in \mathcal{P}(^n X, Y)$ і B — асоційований симетричний оператор, то *продовження Арона-Бернера полінома* P є поліном $\widetilde{P} \in \mathcal{P}(^n X'', Y'')$ який задається рівністю

$$\widetilde{P}(z) = \widetilde{B}(z, \ldots, z) \quad (z \in X'').$$

Зауважимо, що продовження Арона-Бернера полінома є єдине, оскільки всі продовження Арона-Бернера для B збігаються по діагоналі.

Теорема 2.4.1. [18] *Продовження Арона-Бернера $f \mapsto \widetilde{f}$ задає неперервний гомоморфізм алгебри $H_b(X)$ в алгебру $H_b(X'')$.*

Наслідок 2.4.1. [18] *Кожен вектор* $z \in X''$ *визначає комплексний гомоморфізм* $\widetilde{\delta}_z$ *алгебри* $H_b(X)$ *за формулою*

$$\delta_z(f) = \widetilde{f}(z).$$

Зауважимо, що у випадку, коли всі поліноми алгебри $H_b(X)$ наближаються скінченними алгебраїчними комбінаціями лінійних функціоналів, всі комплексні гомоморфізми $H_b(X)$ мають вигляд $\widetilde{\delta}_z$ для деякого $z \in X''$ [19]. Це виконується, зокрема для випадку коли $X = C_0$ [20]. Проте, для просторів $\ell_p, 1 \leq p \leq \infty$ існують комплексні гомоморфізми, які не можуть бути зображеними у вигляді $\widetilde{\delta}_z$ (див. [18, 104, 105]).

2.5. Функціональне числення

Функціональне числення — це теорія, яка вивчає як будувати функції залежно від оператора, тобто як надати зміст виразу $f(A)$, де f — функція, а A — оператор. В загальному випадку такий запис не є коректним. Починаючи з 20 століття науковцями було запропоновано декілька способів у цьому напрямку. Зокрема, один з них розглядає функціональне числення як метод асоціації оператора $f(A)$ з функцією f, який буде належати до топологічної алгебри "A-функцій". Якщо ми маємо такий метод, то це означає що ми маємо неперервний гомоморфізм з алгебри "A-функцій" в топологічну алгебру оператрів A. В такому розумінні функціональне числення ми будемо ототожнювати з вищезгаданим гомоморфізмом (але як теорія функціональне числення вивчає такі гомоморфізми).

Нехай A — комплексна комутативна банахова алгебра. Розглянемо проективний тензорний добуток $A \bigotimes_\pi X$, де кожен елемент цього добутку можна подати у вигляді формальної суми $\overline{a} = \sum_k a_k \otimes_\pi x_k$, де $a_k \in A,\ x_k \in X$ і норма задається формулою із наступного означення.

Означення 2.5.1. [44] *Проективною нормою на тензорному добутку* $A \bigotimes_\pi X$ *називають норму*

$$\|\overline{a}\|_\pi = \inf \sum_k \|a_k\| \|x_k\|,$$

де $\inf$ *береться по всіх зображеннях* $\overline{a} = \sum\limits_k a_k \otimes x_k$.

Позначимо $A \bigotimes_\pi X$—поповненя $A \bigotimes X$ за нормою $\|.\|_\pi$.

Для кожного $f \in H_b(X)$ визначимо функцію $\overline{f} : A \bigotimes_\pi X \to A$ таку, що для кожного $\overline{a} \in A \bigotimes_\pi X$, $\overline{f}(\overline{a})$ є "значення функції"f в точці $\overline{a}$ в сенсі функціонального числення для аналітичних функцій на банахових просторах ([45]). Це означає, що $\overline{f}$ належить простору $H_b(A\bigotimes_\pi X)$ всіх цілих комплекснозначних функцій обмеженого типу на $A\bigotimes_\pi X$. Тоді $\widetilde{\widetilde{\overline{f}}}$– продовження Арона-Бернера для $\overline{f}$. Тоді відображення $f\mapsto\overline{f}$ є гомоморфізмом алгебр $H_b(X)$ і $(H_b(A\bigotimes_\pi X), A)$. Для кожного фіксованого $\overline{a}$ позначимо $\theta_{\overline{a}}(f)=\overline{f}(\overline{a})$ і θ є гомоморфізмом з $H_b(X)$ на A ([86, 1]).

Відомо, що оператор $x\mapsto\delta_x$, $\delta_x(f)=f(x)$ відображає X в M_b, а оператор $\widetilde{\delta}_{x''}(f)=\widetilde{f}(x'')$ є продовженням δ_x на X''. Аналогічно, позначимо $\theta_{\overline{a}}(f)=\overline{f}(\overline{a})$. Тоді $\widetilde{\theta}_{\overline{a}''}(\overline{f})=\widetilde{\widetilde{\overline{f}}}(\overline{a}'')$ — продовження оператора $\theta_{\overline{a}}$ на $(A\bigotimes_\pi X)''$.

Через $\mathcal{L}(H_b(X), A)$ будемо позначати простір всіх неперервних n-лінійних операторів з $H_b(X)$ в A, а через $M_A(H_b(X))$ — множину всіх гомоморфізмів з $H_b(X)$ в A.

2.6. Напрямленості

Нехай $\mathfrak{A}$ — деяка множина. Задамо на $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ відношення " $\leq$", яке є транзитивним і рефлексивним. Тоді множину $\mathfrak{A}$ із вказаним відношенням порядку " $\leq$" називають *частково впорядкованою множиною* і позначають $(\mathfrak{A}, \leq)$.

Непорожня частково впорядкована множина $(\mathfrak{A}, \leq)$ називається *напрямленою множиною*, якщо для будь-яких $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{A}$ існує $\alpha_3 \in \mathfrak{A}$ таке, що $\alpha_3 \geq \alpha_1$ і $\alpha_3 \geq \alpha_2$.

Прикладом напрямленої множини є $\{N_x\}$ — деяка непорожня система околів елемента x довільного простору X. Відношення порядку вводиться таким чином: $N_1 \leq N_2$ тоді і тільки тоді, коли $N_1 \supseteq N_2$. Легко бачити, що $(N_x, \leq)$ є напрямленою множиною.

Напрямленістю в X називають функцію $f : N_x \to X$, де в якості напрямленої множини $\mathfrak{A}$ можна взяти систему околів елемента x. Позначають або $(x_\alpha) \subset X$, де $\alpha \in \mathfrak{A}$. Напрямленість (x_α) в просторі X є *збіжною* до x, якщо для кожного $N \in \{\mathfrak{A}\}$ і для кожного $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$: $x_\alpha \in X$ для всіх $\alpha \geq \alpha_0$. Цей факт записують формулою:

$$\lim_{\alpha} x_\alpha = x.$$

Теорема 2.6.1. [32] *Простір X є гаусдорфовим тоді і тільки тоді, коли кожна напрямленість в X є збіжною принаймні в одній точці $x \in X$.*

Нехай X'' — другий спряжений простір до X.

Означення 2.6.1. [72] *Напрямленість $(x_\alpha) \subset X$ є збіжною у $*$-слабкій топології до $z \in X''$, якщо для будь-якої $f \in X'$*

$$f(x_\alpha) \to \lim_{\alpha} f(x_\alpha).$$

Теорема 2.6.2 ([51] Теорема Голдстейна). *Відкрита одинична куля B простору X є щільною у одиничній кулі B'' простору X'' у $*$-слабкій топології, тобто для кожної точки $z \in B''$ існує напрямленість $(x_\alpha) \subset B$ така, що $x_\alpha \to z$ у $*$-слабкій топології простору X''.*

Означення 2.6.2. [10] *Напрямленість (x_α) є збіжною до функціонала $\varphi \in \mathcal{P}(X)'$ в слабкополіноміальній топології, якщо*

$$P(x_\alpha) \to \varphi(P) = \lim_\alpha P(x_\alpha)$$

для всіх поліномів $P \in \mathcal{P}(X)$.

Ультрафільтри. *Фільтром* на множині X називають сім'ю $\mathcal{F}$ підмножин X, яка задовольняє наступні умови:

1. $X \in \mathcal{F}$, але $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
2. якщо $A \in \mathcal{F}$ і $A \subset B \subset X$, тоді $B \in \mathcal{F}$;
3. перетин скінченної кількості множин $\mathcal{F}$ належить до $\mathcal{F}$.

Приклад 2.6.1. [9] *Множина всіх множин, які містять деякий окіл фіксованої точки в топологічному просторі є фільтром на цьому просторі.*

Множина всіх фільтрів на X є частково впорядкованою відносно включення.

Ультрафільтром на множині X називають фільтер $\mathcal{U}$ на X, який є максимальним (тобто не міститься в ніякому іншому фільтрі).

Твердження 2.6.1 ([96]). *Довільний фільтер міститься в деякому ультрафільтрі.*

Нехай $\mathcal{U}$ – ультрафільтер на множині X. Кажемо, що послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ *збігається до точки* $x \in X$ по деякому ультрафільтру

$\mathcal{U}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного околу U елемента x множина $\{x_n : x_n \in U, n \in \mathbb{N}\}$ належить до $\mathcal{U}$. Елемент x називаємо *границею по ультрафільтру* $\mathcal{U}$ і позначаємо $x = \lim_{\mathcal{U}} x_n$.

Твердження 2.6.2 ([96]). *Нехай X – компактний гаусдорфовий простір, $\mathcal{U}$ – ультрафільтер на X. Тоді для будь-якої послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ існує єдина границя по ультрафільтру $\mathcal{U}$:*

$$x = \lim_{\mathcal{U}} x_n, \qquad x \in X.$$

Детальніше про застосування техніки ультрафільтрів та напрямленостей можна прочитати в монографії [9] (ст. 88-94).

РОЗДІЛ 3
АПРОКСИМАЦІЯ ГОМОМОРФІЗМІВ АЛГЕБРИ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО ТИПУ

3.1. Формулювання задачі. Скінченновимірний випадок

Нехай X — банахів простір над полем комплексних чисел, $H_b(X)$ — алгебра цілих функцій обмеженого типу на X, тобто $H_b(X)$ складається з усіх аналітичних функцій на X які є обмеженими на всіх обмежених множинах. Відомо, що $H_b(X)$ є алгеброю Фреше відносно наступної сім'ї норм

$$\|f\|_r = \sup_{\|x\| \leq r} |f(x)|, \quad f \in H_b(x),$$

де r є додатнім раціональним числом. M_b — спектр алгебри $H_b(X)$, тобто множина усіх неперервних комплекснозначних гомомморфізмів $H_b(X)$. M_b є топологічним простором який наділений топологією Гельфанда, тобто найслабшою топологією в якій усі відображення $\widehat{f}(\varphi) := \varphi(f)$ є неперервними. Прикладом елемента з M_b є функціонал "значення в точці" δ_x, $x \in X$, який задається рівністю $\delta_x(f) = f(x)$, $f \in H_b(X)$.

У [18] було доведено, що для кожного комплексного гомоморфізму $\varphi \in M_b$ існує напрямленість $(x_\alpha) \subset X$ така, що $\varphi(P) = \lim_\alpha P(x_\alpha)$ для всіх $P \in \mathcal{P}(X)$, де $\mathcal{P}(X)$ є алгеброю усіх неперервних поліномів на X. Цю властивість було використано для дослідження спектрів у [104, 105, 71, 33]. Наше завдання — узагальнити цю формулу у випадку гомоморфізмів з $H_b(X)$ в деяку комутативну банахову алгебру A.

Розглянемо наступне загальне питання: *за яких умов для довільного гомоморфізму* Φ *з* $H_b(X)$ *на* A *існує напрямленість* $(\overline{a}_\alpha) \subset A \bigotimes_\pi X$ *така,* *що*

$$\Phi(P) = \lim_{\alpha} \theta_{\overline{a}}(P) = \lim_{\alpha} \overline{P}(\overline{a}_\alpha), \ \forall P \in \mathcal{P}(X)? \tag{3.1.1}$$

Розглянемо випадок, коли $A = \mathcal{H}^\infty_{uc}(B)$. Спочатку ми припускаємо що Φ є тотожнім відображенням, тобто $\Phi = I\colon H_b(X) \hookrightarrow \mathcal{H}^\infty_{uc}(B)$ і $I(f)$ є звуження f на B.

Наша мета показати, що за деяких умов існує напрямленість $(\overline{a}_\alpha) \in \mathcal{H}^\infty_{uc}(B) \bigotimes_\pi X$ така, що

$$\Phi(f)(x) = \lim_{\alpha} \overline{f}(\overline{a}_\alpha) \quad \forall\, f \in H_b(X) \tag{3.1.2}$$

для $\Phi = I$ і для більш загального випадку Φ.

Розглянемо випадок, коли $X = \mathbb{C}^n$ і $\Phi = I\colon H_b(\mathbb{C}^n) = H(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow \mathcal{H}^\infty_{uc}(B)$.

Кожен елемент $x \in \mathbb{C}^n$ можна подати як

$$x = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k,$$

де $\{e_k\}_{k=1}^n$ є базисом в $\mathbb{C}^n$ і $\{e_k^*\}_{k=1}^n$ є спряженим базисом покоординатних функціоналів. Виберемо елемент $\overline{a} \in \mathcal{H}^\infty_{uc}(B) \bigotimes_\pi \mathbb{C}^n$ визначений рівністю $\overline{a} = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k^* \otimes e_k$, тобто

$$\overline{a}(x) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k = x.$$

З іншого боку, в сенсі функціонального числення маємо:

$$\begin{aligned} I(f)(x) &= I(f(x)) = f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k\right) \\ &= \overline{f}(\overline{a})(x) = \overline{f}\left(\sum_{k=1}^{n} e_k^* \otimes e_k\right)(x). \end{aligned}$$

Таким чином, ми довели наступне твердження:

Твердження 3.1.1. *Для гомоморфізму $\Phi = I$ існує елемент $\overline{a}$ такий, що для довільної функції $f \in \mathcal{H}_{uc}^{\infty}(B)$ виконується рівність:*

$$I(f)(x) = \overline{f}(\overline{a})(x) = \theta_{\overline{a}}(f)(x).$$

Зауважимо, що в цьому випадку нам потрібен лише один алгеброзначний функціонал $\theta_{\overline{a}}$.

Нехай Φ — довільний гомоморфізм з $H(\mathbb{C}^n)$ в $\mathcal{H}_{uc}^{\infty}(B)$ такий, що існує аналітичне відображення $F : B \to B$ таке, що $\Phi = C_F \circ I$, де C_F є оператором композиції, тобто $C_F(f)(x) = f(F(x))$, $f \in \mathcal{H}_{uc}^{\infty}(B)$, $x \in B$. Покладемо

$$\overline{a} = \sum_{k=1}^{n} (e_k^* \circ F) \otimes e_k \in \mathcal{H}_{uc}^{\infty}(B) \bigotimes \mathbb{C}^n.$$

Тоді $\Phi(f)(x) = \overline{f}(\overline{a})(x)$.

Зауважимо, що не кожен гомоморфізм $\Phi : H(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{H}_{uc}^{\infty}(B)$ можна подати у вигляді $\Phi = C_F \circ I$. Справді, нехай $z \in \mathbb{C}^n, z \neq 0$ — деякий фіксований вектор. Позначимо $\tau_z(f)$ — оператор зсуву, $(\tau_z(\delta))(x) = f(x+z)$. Нехай $\Phi = I \circ \tau_z$. Припустимо, що $I \circ \tau_z = C_F \circ I$ для деякого аналітичного відображення $F : B \to B$. Тоді оператор C_F буде неперервним продовженням оператора Φ на алгебру $\mathcal{H}_{uc}^{\infty}(B)$, оскільки C_F визначений і неперервний на $\mathcal{H}_{uc}^{\infty}(B)$ і, за нашим припущенням $C_F(f) = C_F \circ I(f) = \Phi(f)$ для всіх $f \in H(\mathbb{C}^n)$. Але це не можливо, оскільки оператор зсуву є необмеженим на $\mathcal{H}_{uc}^{\infty}(B)$.

Нехай $G : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — деяке аналітичне відображення. Тоді $G(x) = (g_1(x), \ldots, g_n(x)) \in \mathbb{C}^n$, де g_k — аналітичні функції з $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}, k = 1, 2, \ldots, n$. Тоді, в сенсі функціонального числення, ми можемо визначити для довільної комутативної алгебри A, $\overline{g}_k(\overline{a})$, де $\overline{a} \in A \bigotimes \mathbb{C}^n$. Тому визначимо

$$\overline{G}(\overline{a}) := (\overline{g}_1(\overline{a}), \ldots, \overline{g}_n(\overline{a})) \in A \bigotimes \mathbb{C}^n.$$

Твердження 3.1.2. *Нехай $\Phi : H(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{H}^\infty_{uc}(B)$ деякий гомоморфізм. Тоді існують аналітичні оператори $F : B \to B$ та $G : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ такі, що $\Phi = C_F \circ I \circ C_G$.*

Доведення. Нехай $\Phi^\star : \mathcal{H}^\infty_{uc}(B)' \to H(\mathbb{C}^n)$ — спряжений оператор. Позначимо $\Phi^\sharp$ — звуження $\Phi^\star$ на лінійні функціонали δ_x, $x \in B$. Тобто $\Phi^\sharp(\delta_x) = \varphi \in H(\mathbb{C}^n)'$ так, що

$$\varphi(f) = \Phi^\sharp(\delta_x)(f) = \Phi(f)(x). \tag{3.1.3}$$

Оскільки Φ — гомоморфізм, то з рівності (3.1.3) бачимо, що φ — комплексний гомоморфізм. Оскільки всі комплексні гомоморфізми алгебри $H(\mathbb{C}^n)$ є функціоналами значення у точках (див [30] для більш загального випадку), то $\exists\ y \in \mathbb{C}^n$ такий, що $\varphi(f) = \delta_y(f) = f(y)$. Тобто $\Phi^\sharp : \delta_x \mapsto \delta_y$. Утотожнивши δ_x з вектором x, отримаємо, що $\Phi^\sharp : B \to \mathbb{C}^n$. Тобто, можна записати, що $\Phi(f)(x) = f(\Phi^\sharp(x)) = g(y)$, де g — деяка функція з $H(\mathbb{C}^n)$. Зауважимо, що у випадку, коли $\Phi = I$, $I^\sharp$ буде оператором "включення" $B \hookrightarrow \mathbb{C}^n$. Оскільки $f(\Phi^\sharp(x))$ аналітична функція від x для кожної функції $f \in \mathcal{H}^\infty_{uc}(B)$, то згідно з [80] $\Phi^\sharp$ — аналітичне відображення з B в $\mathbb{C}^n$. Оскільки $\Phi^\sharp$ — неперервне, то $\{\Phi^\sharp(B)\}$ — обмежена множина. Тому існує бієктивне аналітичне відображення $S : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ таке, що $\{S(\Phi^\sharp(B))\} \subset B$. Позначимо $F = S \circ \Phi^\sharp$ і $G = S^{-1}$. Тоді $\Phi^\sharp = G \circ I^\sharp \circ F$. Отже,

$$\Phi = C_{\Phi^\sharp} = C_{G\circ I^\sharp \circ F} = C_F \circ I \circ C_G.$$

$\square$

Теорема 3.1.1. *Нехай Φ — довільний гомоморфізм з $H(\mathbb{C}^n)$ в $\mathcal{H}^\infty_{uc}(B)$. Тоді існує $\overline{a} \in \mathcal{H}^\infty_{uc}(B) \bigotimes_\pi \mathbb{C}^n$ такий, що $\Phi(f)(x) = \overline{f}(\overline{a})(x)$ для кожного $x \in B$.*

Доведення. Нехай $\Phi = C_F \circ I \circ C_G$ — зображення, існування якого доведено у твердженні. Визначимо елемент $\overline{a}$ рівністю $\overline{a} = \overline{G}(\sum_{k=1}^n (e_k^* \circ F) \otimes e_k)$. Як було показано вище,

$$\sum_{k=1}^n (e_k^* \circ F) \otimes e_k \in \mathcal{H}_{uc}^\infty(B) \bigotimes \mathbb{C}^n,$$

тому $\overline{a} \in \mathcal{H}_{uc}^\infty(B) \bigotimes \mathbb{C}^n$. Таким чином,

$$\overline{f}(\overline{a})(x) = \overline{f}(\overline{G}(\sum_{k=1}^n (e_k^* \circ F) \otimes e_k)) = C_F \circ I \circ C_G(f)(x) = \Phi(f)(x).$$

$\square$

3.2. Випадок просторів з базисом Шаудера

Ми узагальнимо твердження 3.1.1 для випадку нескінченновимірного банахового простору з базисом Шаудера.

Нагадаємо, що послідовність $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в банаховому просторі називається базисом Шаудера (або топологічним базисом) простору X, якщо для всіх $x \in X$ існує єдина послідовність скалярів $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ така, що

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n,$$

і ряд збігається за нормою в X, тобто,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| = 0.$$

Через e_n^* будемо позначати координатні функціонали, $e_n^*(x) = x_n$.

Твердження 3.2.1. *Нехай X — банахів простір з базисом Шаудера, $A = \mathcal{H}_{uc}^{\infty}(B)$, $\Phi = I \colon H_b(X) \to \mathcal{H}_{uc}^{\infty}(B)$. Тоді рівність* (3.1.2) *виконується для деякої послідовності $\overline{a}_m \in \mathcal{H}_{uc}^{\infty}(B) \bigotimes_{\pi} X$.*

Доведення. Нехай $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис Шаудера простору X. Тоді кожен елемент $x \in X$ можна зобразити як $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} e_k^*(x) e_k$. Вважаємо, що

$$\overline{a}_m = \sum_{k=1}^{m} e_k^* \otimes e_k = \sum_{k=1}^{m} e_k^* e_k.$$

В сенсі функціонального числення маємо:

$$\overline{f}(\overline{a}_m)(x) = \overline{f}\left(\sum_{k=1}^{m} e_k^* \otimes e_k\right)(x) = f\left(\sum_{k=1}^{m} e_k^*(x) e_k\right) = f\left(\sum_{k=1}^{m} x_k e_k\right).$$

Оскільки $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ є базисом Шаудера, то $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k(e_k) \to x$ при $m \to \infty$. Це означає, що

$$I(f)(x) = \lim_{m\to\infty} \overline{f}(\overline{a}_m)(x) = \lim_{m\to\infty} \theta_{\overline{a}_m}(f),$$

що й треба було довести. □

Аналог теореми 3.1.1 для нескінченновимірного простору доведено у підрозділі 3.4 для більш загального випадку.

3.3. Випадок банахового простору з властивістю апроксимації за Гротендіком

У загальному випадку розглянемо простір з властивістю апроксимації.

Означення 3.3.1. [47] *Кажуть, що банахів простір X має властивість апроксимації (за Гротендіком), якщо для кожної компактної множини K в X і для довільного $\varepsilon > 0$ існує оператор $T : X \to X$ скінченного рангу такий, що $\|Tx - x\| \leq \varepsilon$ для всіх $x \in K$.*

Теорема 3.3.1. *Нехай X — банахів простір з властивістю апроксимації. Тоді рівність* (3.1.2) *виконується для* $\Phi = I$.

Доведення. Нехай $\mathfrak{A}$ — множина індексів: якщо $\alpha \in \mathfrak{A}$, тоді $\alpha = (K, \varepsilon, n)$, де K є компактною множиною в X, $\varepsilon > 0$ і $n \in \mathbb{N}$. Введемо частковий порядок на $\mathfrak{A}$ наступним чином: $\alpha_1 \leq \alpha_2$ тоді і тільки тоді, коли $K_1 \subset K_2$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ і $n_1 \leq n_2$. Очевидно, що для довільних $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{A}$ існує елемент $\alpha_3 \in \mathfrak{A}$ такий, що $\alpha_1 \leq \alpha_3$ і $\alpha_2 \leq \alpha_3$. Таким чином $\mathfrak{A}$ — напрямлена множина. Оскільки X має властивість апроксимації, то для всіх $\alpha = (K_\alpha, \varepsilon_\alpha, n_\alpha) \in \mathfrak{A}$ існує оператор T_α рангу n_α такий, що для довільного $x \in K_\alpha$, $\|T_\alpha x - x\| \leq \varepsilon_\alpha$. Таким чином, $(T_\alpha)_\alpha$ — напрямленість операторів така, що $x = \lim_\alpha T_\alpha x$ для всіх $x \in X$.

Нехай $\{\gamma_{k,\alpha}\}_{k=1}^{n_\alpha}$ — базис в образі оператора T_α в X і $\{\gamma^*_{k,\alpha}\}_{k=1}^{n_\alpha} \in X'$ — лінійні функціонали, які є біортогональними до $\{\gamma_{k,\alpha}\}_{k=1}^{n_\alpha}$. Тоді $T_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n_\alpha} \gamma^*_{k,\alpha}(x)\gamma_{k,\alpha}$. Таким чином можемо подати

$$\overline{a}_\alpha = \sum_{k=1}^{n_\alpha} \gamma^*_{k,\alpha} \otimes \gamma_{k,\alpha},$$

Отже, для кожного $f \in H_b(X)$ виконується рівність

$$I(f)) = \lim_{\alpha} \overline{f}(\overline{a}_\alpha) \in \mathcal{H}^\infty_{uc}(B).$$

Тобто виконується рівність (3.1.2). $\square$

3.4. H_b-властивість апроксимації

З вищенаведених результатів можна зробити висновок, що властивість апроксимації може бути послаблена, оскільки нам достатньо збіжності на елементах простору $H_b(X)$. Розглянемо H_b-слабку топологію на X як обмеження топології Гельфанда на X, тобто найслабшу топологію на X таку, що всі $f \in H_b(X)$ є неперервними. Для цієї H_b-слабкої топології введемо означення H_b-властивості апроксимації.

Означення 3.4.1. *Кажемо, що X має H_b-властивість апроксимації якщо для кожної компактної множини K у $H_b(X)$-слабкій топології і для всіх $\varepsilon > 0$ існує оператор скінченного рангу T такий, що*

$$|f(T(x) - x)| < \varepsilon$$

для кожного полінома $f \in H_b(X)$ і для кожного $x \in K$.

Міркуючи подібним чином, як у теоремі 3.3.1 ми можемо довести наступну теорему.

Теорема 3.4.1. *Якщо X має H_b-властивість апроксимації, то рівність* (3.1.2) *виконується для $\Phi = I$.*

Доведення. Розглянемо множину індексів $\mathfrak{A}$ елементами якої є $\alpha = (K, \varepsilon, n, f_1, \ldots, f_m)$, де K — компактна підмножина у H_b-слабкій топології простору X, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_m$ — деякий скінченний набір функцій з $H_b(X)$. На $\mathfrak{A}$ існує частковий порядок $\alpha_1 \leq \alpha_2$ тоді і тільки тоді, коли $K_1 \subset K_2$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, $n_1 \leq n_2$ і $\{f_1^1, \ldots, f_{m_1}^1\} \subset \{f_1^2, \ldots, f_{m_1}^2\}$, де $\alpha_1 = (K_1, \varepsilon_1, n_1, f_1^1, \ldots, f_{m_1}^1)$ і $\alpha_2 = (K_2, \varepsilon_2, n_2, f_1^2, \ldots, f_{m_2}^2)$. Очевидно, що $\mathfrak{A}$ є напрямленою множиною. З означення H_b-властивості апроксимації маємо, що для кожного $\alpha = (K_\alpha, \varepsilon_\alpha, n_\alpha, f_1^\alpha, \ldots, f_{m_\alpha}^\alpha)$ існує оператор T_α

рангу n_α такий, що для довільного $x \in K_\alpha$, $\|f_k^\alpha(T_\alpha(x) - x)\| < \varepsilon_\alpha$. Тобто, для кожного $x \in X$,

$$x = \lim_\alpha T_\alpha x,$$

де границя існує у H_b-топології. Вибравши скінченний базис $\{\gamma_{k,\alpha}\}_{k=1}^{n_\alpha}$ в образі оператора T_α та відповідну систему біортогональних функціоналів як у доведенні теореми (3.3.1) отримаємо, що

$$\overline{a}_\alpha = \sum_{k=1}^{n_\alpha} \gamma_{k,\alpha}^* \otimes \gamma_{k,\alpha}.$$

□

Легко бачити, що кожен банахів простір X з властивістю апроксимації має H_b-властивість апроксимації, але ми не знаємо чи буде правильне зворотнє твердження. Також ми не знаємо жодних прикладів, при яких рівність (3.1.2) не виконується.

Розглянемо умови рівності (3.1.1) для більш загального випадку.

Теорема 3.4.2. *Нехай X має H_b-властивість апроксимації. Нехай Φ — гомоморфізм з $H_b(X)$ в $\mathcal{H}_{uc}^\infty(B)$ такий, що існує аналітичне відображення $F : B \to B$ з $\Phi = C_F \circ I$, де C_F є оператором композиції з F. Тоді рівність* (3.1.2) *виконується для деякої напрямленості* $(\overline{a}_\alpha) \subset A \otimes_\pi X$.

Доведення. Нехай

$$\sum_{k=1}^{n_\alpha} \gamma_{k,\alpha}^* \otimes \gamma_{k,\alpha}$$

є напрямленістю яка наближає тотожнє відобаження I як у доведенні теореми 3.3.1. Для доведення достатньо виконати підстановку

$$\overline{a}_\alpha = \sum_{k=1}^{n_\alpha} (\gamma_{k,\alpha}^* \circ F) \otimes \gamma_{k,\alpha}.$$

□

Зауважимо, що в загальному випадку не кожен гомоморфізм Φ може бути представлений як $\Phi = C_F \circ I$. У [30] розглянуто деякі проблеми, які пов'язані з представленням гомоморфізмів у вигляді операторів композиції.

Твердження 3.4.1. *Для деякого характера $\varphi \in M_b$ відображення τ_φ вигляду*

$$\tau_\varphi(f)(x) = (\delta_x * \varphi)(f), x \in X$$

є неперервним гомоморфізмом з $H_b(X)$ в $H_b(X)$.

Доведення. Нехай (x_α) — напрямленість в X така, що

$$P(x * \varphi) = \lim_\alpha P(x + x_\alpha)$$

(див. розділ 2.6, формула (2.3.2)). Розглянемо напрямленість (y_α), $y_\alpha = -x_\alpha$. Якщо P_n — n-однорідний поліном, то

$$P_n(x + y_\alpha) = P_n(x - x_\alpha) = (-1)^n P_n((-x) + x_\alpha).$$

Тобто

$$\lim_\alpha P_n(x + y_\alpha) = (-1)^n \lim_\alpha((-x) + x_\alpha) = (-1)^n(\delta_{-x} * \varphi)P_n.$$

Це означає, зокрема, що $\psi_n(P_n) = \lim_\alpha P_n(y_\alpha)$ визначає деякий лінійний неперервний функціонал на просторі n-однорідних поліномів $\mathcal{P}(^nX)$ і $\|\psi_n\| = \|\varphi_n\|$, де φ_n — звуження φ на $\mathcal{P}(^nX)$. З означення радіус-функції та теореми 2.3.1 отримуємо, що існує характер $\psi \in M_b$ такий, що

$$\psi(P) = \lim_\alpha P(y_\alpha) \quad \forall \quad P \in \mathcal{P}(X)$$

і $R(\varphi) = R(\psi)$.

Крім того, $\delta_x * \varphi * \psi = \delta_x$, або, іншими словами $\tau_\varphi \circ \tau_\psi$ — тотожній оператор. Тобто τ_φ — бієктивний оператор і $\tau_\varphi^{-1} = \tau_\psi$. Крім того, очевидно, що

$$\tau_\varphi(f + \lambda g) = \tau_\varphi(f) + \lambda \tau_\varphi(g)$$

і

$$\tau_\varphi(fg) = \tau_\varphi(f)\tau_\varphi(g).$$

Тому τ_φ є бієктивним гомоморфізмом $H_b(X)$ в себе.

Розглянемо таку систему норм на $H_b(X)$:

$$|||f|||_r = \sup_{|x| \le r} |\tau_\varphi(f)(x)|.$$

Якщо оператор τ_φ розривний, то ця система породжує топологію алгебри Фреше на $H_b(X)$ яка не є еквівалентною до даної. А це суперечить відомому факту про єдиність топології на алгебрі Фреше. $\square$

Теорема 3.4.3. *Припустимо, що X має H_b-властивість апроксимації. Нехай Φ — гомоморфізм з $H_b(X)$ в $\mathcal{H}_{uc}^\infty(B)$ вигляду $\Phi(f) = I(\tau_\varphi(f))$. Тоді для кожного $P \in \mathcal{P}(X)$ виконується рівність (3.1.1) для деякої напрямлeності $(\overline{a}_\eta) \subset \mathcal{H}_{uc}^\infty(B) \bigotimes_\pi X$.*

Доведення. Нехай $(x_\beta) \subset X$ напрямленість така, що $\varphi(P) = \lim_\beta P(x_\beta)$ $\forall P \in \mathcal{P}(X)$. Вважаємо, що β пробігає деяку напрямлену множину індексів $\mathfrak{A}_0$. Виберемо, як в доведенні теореми 3.4.1 напрямленість операторів T_α скінченного рангу, $\alpha \in \mathfrak{A}$ та нехай $\{\gamma_{k,\alpha}\}$ — скінченний базис в образі T_α і $\{\gamma_{k,\alpha}^*\}$ — набір біортогональних функціоналів до $\{\gamma_{k,\alpha}\}$. Розглянемо множину $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}_0$. Введемо на цій множині частковий порядок $(\alpha_1, \beta_1) \le (\alpha_2, \beta_2)$. Очевидно, що $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}_0$ буде напрямленою множиною. Нехай $\eta = (\alpha, \beta) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}_0$. Визначимо $\overline{a}_\eta = \sum_{k=1}^{n_\alpha} \gamma_{k,\alpha}^* \otimes \gamma_{k,\alpha} + \gamma_{k,\alpha}^*(x_\beta)$. Тоді, для кожного $P \in \mathcal{P}(X)$

$$\lim_{\eta} \overline{P}(\overline{a}_\eta)(x) = \lim_{(\alpha,\beta)} P(x_\alpha + \sum \gamma^*_{k,\alpha}(x_\beta)) = \tau_\varphi(P)(x).$$

□

Поєднюючи теореми 3.4.2 і 3.4.3 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 3.4.1. *Нехай X має H_b-властивість апроксимації і Φ — гомоморфізм з $H_b(X)$ в $\mathcal{H}^\infty_{uc}(B)$ вигляду*

$$\Phi = C_F \circ I \circ \tau_\varphi,$$

де C_F — оператор композиції з деяким аналітичним відображенням $F : B \to B$, $\varphi \in M_b$. Тоді рівність (3.1.1) *виконується для деякої напрямленості $(\overline{a}_\alpha) \subset \mathcal{H}^\infty_{uc}(B) \otimes_\pi X$.*

3.5. Випадок скінченновимірної комутативної банахової алгебри

Нехай A — напівпроста комутативна банахова алгебра і $\dim A = n < \infty$. Відомо, що в цьому випадку існує лінійний базис іденпотентів $\{c_1, c_2, \dots, c_n\} \subset A$ і $c_k c_j = 0$ при $k \neq j$ (див. [61], ст 1-2). З означення іденпотента маємо, що $c_k^2 = c_k$ і $c_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n$. Нехай $\Phi : H_b(X) \to A$ — деякий гомоморфізм. Оскільки A — n-вимірний простір, то Φ можна подати у вигляді $\Phi(f) = (\Phi_1(f), \dots, \Phi_n(f))$, $f \in H_b(X)$, де $\Phi_k(f) = \varphi_k(f)c_k$ для деяких лінійних функціоналів $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Легко бачити, що $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ є комплексними гомоморфізмами. Справді,

$$c_k\Phi(fg) = (0, \dots, 0, \varphi_k(fg)c_k, 0, \dots, 0) = c_k\Phi(f)\Phi(g) =$$
$$= (0, \dots, 0, \varphi_k(f)\varphi_k(g)c_k, 0, \dots, 0), k = 1, \dots, n.$$

Теорема 3.5.1. *Нехай A — скінченновимірна напівпроста комутативна банахова алгебра і $\Phi : H_b(X) \to A$ — довільний гомоморфізм. Тоді існує деяка напрямленість $(\overline{a}_\alpha) \subset A \bigotimes_\pi X$ для якої виконується рівність (3.1.1).*

Доведення. Як було зауважено вище Φ можна подати у вигляді

$$\Phi(f) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(f)c_k, \quad f \in H_b(X)$$

для деяких комплексних гомоморфізмів $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ та іденпотентів алгебри A, $c_1, c_2, \dots, c_n$. З [18] маємо, що для кожного φ_n існує напрямленість $(x_{\alpha_n}) \subset X$ така, що

$$\varphi_n(P) = \lim_{\alpha_n} P(x_{\alpha_n}), P \in \mathcal{P}(X),$$

і індекс α_n пробігає деяку напрямлену множину $\mathfrak{A}_n$. Нехай $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n$. Визначимо на $\mathfrak{A}$ частковий порядок:

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \preceq \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$$

тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 \preceq \beta_1, \ldots, \alpha_n \preceq \beta_n$ Очевидно, що $\mathfrak{A}$ є напрямленою множиною. Крім того

$$\Phi(f) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(f) c_k = \lim_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} \sum_{k=1}^{n} f(x_{\alpha_k}) c_k. \tag{3.5.1}$$

Покладемо $\overline{a}_\alpha = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{\alpha_k} \otimes c_k$. Тоді

$$\overline{f}(\overline{a}_\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{f}_m(\overline{a}_\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n_1+\ldots+n_m=m} c_{k_1}^{n_1} c_{k_2}^{n_2} \ldots c_{k_m}^{n_m} A_{f_m}(x_{\alpha_{k_1}}, \ldots, x_{\alpha_{k_m}}),$$

де A_{f_m} — m-лінійне симетричне відображення, асоційоване з m-однорідним поліномом f_m. Враховуючи біортогональність іденпотентів c_k маємо,

$$\overline{f}(\overline{a}_\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k f_m(x_{\alpha_k}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{\alpha_k}) c_k.$$

Тому, з рівності (3.5.1) отримуємо, що

$$\Phi(f) = \lim_{\alpha} \overline{f}(\overline{a}_\alpha).$$

$\square$

Зауважимо, що зображення комплексних гомоморфізмів на $H_b(X)$ у вигляді границі слабкополіноміально збіжної напрямленості функціоналів значень у точках простору X доведено у [18] не тільки для неперервних комплексних гомоморфізмів, а й для розривних, якщо такі існують. Проблема існування розривного комплексного гомоморфізму на алгебрі Фреше була сформульована Майклом Е. [77] у 1952 році і залишається відкритою. Добре відомо, що всі комплексні гомоморфізми банахової алгебри є неперервними. Проте, існування розривного комплексного гомоморфізму на алгебрі $H_b(X)$ є еквівалентним до проблеми Майкла (див. [80], ст. 236). Таким чином, теорема 3.5.1 формально залишається правильною і для розривних гомоморфізмів з алгебри $H_b(X)$ в A, якщо такі існують. Оскільки A є напівпростою, то існування розривного гомоморфізму з $H_b(X)$ в A є еквівалентним до проблеми Майкла (див. [37], ст. 137).

У випадку коли A містить ненульовий нільпотентний елемент (і, отже, не є напівпростою) існує комутативна алгебра B і розривний гомоморфізм $\psi : B \to A$. У цьому випадку, в якості A можна вибрати скінченновимірну комутативну алгебру, наприклад, $A = \mathbb{C}^2$ з множенням $(z_1, w_1)(z_2, w_2) = (z_1 z_2, z_1 w_1 + z_2 w_2)$, а в якості B — алгебру $C^{(n)}[0,1]$ n-раз неперервно диференційовних функцій на $[0,1]$ з нормою

$$\|f\|_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \sup\{|f^{(j)}(t)| : t \in [0,1], f \in C^{(n)}[0,1]\}$$

(див [37]).

Покажемо, що для такої алгебри A існує розривний гомоморфізм з $H_b(X)$ в A для довільного нескінченновимірного простору X.

Теорема 3.5.2. *Нехай A — комутативна банахова алгебра з ненульовим нільпотентним елементом. Тоді існує розривний гомоморфізм з $H_b(X)$ в A для довільного нескінченновимірного простору X.*

Доведення. Нехай B — комутативна банахова алгебра для якої існує розривний гомоморфізм $\psi : B \to A$. Як було зауважено вище, така алгебра існує. Нехай $\{x_n\} \subset X$ деяка базисна послідовність в X і $\{f_n\} \subset X'$ — послідовність біортогональних функціоналів. Тобто $\{x_n\}$ — лінійно незалежна, $\|x_n\| = 1, \|f_n\| = 1$ і $f_n(x_n) = \delta_{nk}$, де δ_{nk} — символ Кронекера.

З [73] відомо, що в нескінченновимірному банаховому просторі X така послідовність існує.

З розривності відображення ψ випливає існування збіжної до нуля послідовності $\{b_n\} \subset B$ такої, що $\{\psi(b_n)\}$ — необмежена множина. Перейшовши до підпослідовності, якщо необхідно, можемо вважати, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|b_n\| < \infty$ і $\|\psi(b_n)\| \to \infty$ при $n \to \infty$. Розглянемо елемент $\overline{b} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \otimes x_n$. Очевидно, що

$$\|\overline{b}\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|b_n\| \|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|b_n\| < \infty,$$

тому $\overline{b} \in B \bigotimes_{\pi} X$. Покажемо, що гомоморфізм $\psi \circ \theta$ буде розривним. Справді,

$$\|\psi \circ \theta_{\overline{b}}(f_n)\| = \|\psi(\overline{f}_n(\overline{b}))\| = \|\psi(b_n f_n(x_n))\| = \|\psi(b_n)\| \to \infty.$$

Таким чином $\psi \circ \theta_{\overline{b}}$ є необмеженим і, отже, розривним гомоморфізмом. $\square$

3.6. Приклад гомоморфізму з $H_b(X)$ в комутативну банахову алгебру A, який не наближається гомоморфізмами функціонального числення

Нехай A — комутативна банахова алгебра з одиницею, яка містить нільпотентний елемент a_0 і h — деякий ненульовий вектор в X. Позначимо

$$d_h(f) = \frac{\partial}{\partial t} f(th)|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(th)}{t}, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Легко бачити, що

$$d_h(fg) = d_h(f)g(0) + f(0)d_h(g), \quad f, g \in H_b(X). \tag{3.6.1}$$

Теорема 3.6.1. *Гомоморфізм Φ, визначений формулою*

$$\Phi(f) = f(0)e + d_h(f)a_0, \tag{3.6.2}$$

не наближається гомоморфізмами функціонального числення, тобто не існує напрямленості $(\overline{a}_\alpha) \subset A \bigotimes_\pi X$ для якої виконується рівність (3.1.1).

Доведення. Переконаємось спочатку, що лінійний оператор Φ є гомоморфізмом. Справді, враховуючи властивість (3.6.1) та нільпотентність a_0 маємо

$$\Phi(fg) = f(0)g(0)e + (d_h(f)g(0) + f(0)d_h(g))a_0 =$$

$$= (f(0)e + d_h(f)a_o)(g(0)e + d_h(f)a_0) = \Phi(f)\Phi(g).$$

Нехай f така функція з $H_b(X)$, що $d_h(f) = 0$. Тоді $\Phi(f) = \overline{f}(0)$ — значення $\overline{f}$ у нульовій точці простору $A \bigotimes_\pi X$. Умова $d_h(f) = 0$ виконується, зокрема, для функцій вигляду $f(x) = (g(x))^2$, де $g \in X'$. Таким чином, якщо існує напрямленість $(\overline{a}_\alpha) \subset A \bigotimes_\pi X$ для якої виконується умова 3.1.1 то для поліномів P першого і другого степеня $\overline{P}(\overline{a}_\alpha) \to \overline{P}(0) =$

$\Phi(P)$. Нехай $g_h \in X'$ такий елемент з X', що $g_h(h) = \|h\| \neq 0$. Такий функціонал існує за теоремою Гана-Банаха. Як було зауважено,

$$\Phi(g_h) = \lim_{\alpha} \overline{g}_h(\overline{a}_\alpha) = \overline{g}_h(0) = 0.$$

З іншого боку, з рівності (3.6.2) маємо:

$$\Phi(g_h) = g_h(0)e + d_h(g)a_o = \|h\|a_0 \neq 0.$$

Отримали суперечність. $\square$

Ми не знаємо чи кожен гомоморфізм Φ з $H_b(X)$ в алгебру A, яка не містить нільпотентних елементів (зокрема, коли A — напівпроста) наближається гомоморфізмами функціонального числення в сенсі рівності (3.1.1)?

Висновки до розділу 3. Основним завданням третього розділу є встановлення умов на банахів простір X, комутативну банахову алгебру A та гомоморфізм $\Phi : H_b(X) \to A$ за яких існує напрямленість $(\overline{a}_\alpha) \subset A \otimes_\pi X$ така, що оператори функціонального числення $(\theta_{\overline{a}_\alpha})$ наближають гомоморфізм Φ на поліномах з $H_b(X)$ (рівність (3.1.1)) або на всіх функціях з $H_b(X)$ (рівність (3.1.2)). Встановлення умов існування такої напрямленості узагальнює результат Р. Арона, В. Коула та Т. Гамеліна [18], отримані для випадку комплексних гомоморфізмів.

Вдалося встановити, що повний аналог результату [18] має місце для випадку, коли A — скінченновимірна напівпроста алгебра. У випадку, коли A — довільна комутативна банахова алгебра, а X має базис Шаудера або властивість апроксимації Гротендіка описано умови на гомоморфізм Φ за яких виконується рівність (3.1.1) або (3.1.2). Для випадку скінченновимірного простору X кожен гомоморфізм з X в A має вигляд $\theta_{\overline{a}}$ для деякого $a \in A \otimes_\pi X$. Також, введено поняття H_b-властивості апроксимації, яке є формально слабшим за властивість апроксимації і гарантує існування шуканої напрямленості для широкого класу гомоморфізмів. Гомоморфізми, які задовольняють умови (3.1.1) додатково досліджуються у наступних розділах і для них вдається довести структурні теореми, які узагальнюють результати [104].

Також, використовуючи техніку функціонального числення, показано, що алгебра $H_b(X)$ допускає існування розривного гомоморфізму у довільну комутативну банахову алгебру A, яка містить нільпотентний елемент у випадку, коли X — нескінченновимірний.

Результати розділу опубліковані в працях [7], [90].

РОЗДІЛ 4
ПРОДОВЖЕННЯ АРОНА-БЕРНЕРА ДЛЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ТА A-ЗНАЧНИХ ГОМОМОРФІЗМІВ АЛГЕБРИ $H_B(X)$

Важливим інструментом для дослідження множини комплексних гомоморфізмів алгебри $H_b(X)$ є продовження Арона-Бернера функцій з $H_b(X)$ до функцій з $H_b(X'')$.

У цьому розділі розглянуто аналоги цього продовження для аналітичних відображень які належать $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ і визначені в сенсі функціонального числення. Зауважимо, що такі продовження не завжди визначені як функціональне числення.

4.1. Продовження Арона-Бернера для функціонального числення

Нехай A — комутативна банахова алгебра з одиницею. Як було зауважено, для кожного $\overline{a} \in A \bigotimes_\pi X$ існує гомоморфізм функціонального числення $\theta_{\overline{a}}$, такий, що

$$\theta_{\overline{a}}(f) = \overline{f}(\overline{a}) \in A \quad \text{для всіх} \quad f \in H_b(X).$$

Таким чином, $\overline{f}$ належить алгебрі $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ A-значних аналітичних функцій на $A \bigotimes_\pi X$ і відображення $f \mapsto \overline{f}$ є гомоморфізмом з алгебри $H_b(X)$ в алгебру $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$. Застосуємо до $\overline{f}$ продовження Арона-Бернера $\overline{f} \mapsto \widetilde{\overline{f}}$. Тоді $\widetilde{\overline{f}}$ належить $H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$. Нехай ω — деякий елемент з $(A \bigotimes_\pi X)'$, тобто $\omega(a, x)$ — білінійний функціонал на $A \times X$. Для довільної пари $(a, z) \in A \times X''$ визначимо лінійний функціонал $\varphi_{(a,z)}$

на просторі $\mathcal{L}(^2A, X)$ білінійних форм на $A \times X$ за формулою

$$\varphi_{(a,z)}\omega = \widetilde{\omega}(a, z),$$

де $\widetilde{\omega}$ — продовження Арона-Бернера ω за другою змінною, тобто $\widetilde{\omega} \in \mathcal{L}(^2A, X'')$. Оскільки $\|\omega\| = \|\widetilde{\omega}\|$, то $\|\varphi_{(a,z)}\| = 1$. Таким чином, ми довели наступне твердження.

Твердження 4.1.1. *Існує ізометричне вкладення простору $A \bigotimes_\pi X''$ в простір $(A \bigotimes_\pi X)''$, яке на елементах вигляду $a \otimes z$, $z \in X''$ задаєтьcя формулою*

$$a \otimes z \mapsto \varphi_{(a,z)}.$$

Позначимо $r(\widetilde{\overline{f}})$ оператор звуження відображення $\widetilde{\overline{f}} \in H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$ на підпростір $A \bigotimes_\pi X''$. Оскільки оператор звуження є гомоморфізмом, відображення $\widetilde{\overline{f}} \mapsto r(\widetilde{\overline{f}})$ є гомоморфізмом з $H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$ в $H_b(A \bigotimes_\pi X'', A'')$.

Можна запропонувати й інший підхід для узагальнення продовження Арона-Бернера для функціонального числення.

Кожній функції $f \in H_b(X)$ ставимо у відповідність $\widetilde{f}$ — її продовження Арона-Бернера у X''. Після цього розглядаємо функціональне числення $\overline{\widetilde{f}} : A \bigotimes_\pi X'' \to A$. Наступна теорема показує, що ці два підходи є еквівалентними.

Теорема 4.1.1. *Нехай A — комутативна банахова алгебра. Якщо $f \in H_b(X)$, то $r(\widetilde{\overline{f}})$ приймає значення в A і $r(\widetilde{\overline{f}}) = \overline{\widetilde{f}}$.*

Доведення. Нехай $u \in (A \bigotimes_\pi X)''$ і u_α — деяка напрямленість з $(A \bigotimes_\pi X)$, $\|u_\alpha\| \leq \|u\|$, яка збігається до u в $*$-слабкій топології простору $(A \bigotimes_\pi X)''$. Тоді елементи u_α мають вигляд

$$u_\alpha = \sum a_{k,\alpha} \otimes x_{k,\alpha}$$

і, якщо $B(x_1, \dots, x_n)$ — деяка n-лінійна форма на $X \times \dots \times X$, то $\overline{\widetilde{\overline{B}}}(u, \dots, u)$ визначається як послідовна границя $\lim\limits_{\alpha} \dots \lim\limits_{\alpha} \overline{B}(u_\alpha, \dots, u_\alpha)$.

Дія оператора звуження r означає, що ми розглядаємо напрямленості вигляду $u_\alpha = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \otimes x_{k,\alpha}$, $a_k \in A$ і $x_{k,\alpha} \to z_k \in X''$.

Тоді

$$\widetilde{\overline{B}}(u, \dots, u) = \lim_{\alpha} \dots \lim_{\alpha} \sum_{k_1, \dots, k_n} a_{k_1} \dots a_{k_n} B(x_{k,\alpha}, \dots, x_{k,\alpha}). \qquad (4.1.1)$$

Оскільки, згідно з властивістю проективного тензорного добутку

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k \otimes x_{k,\alpha}\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\| \|x_{k,\alpha}\| < \infty,$$

ряд у (4.1.1) абсолютно збігається, тому ми можемо занести границі під знак суми і, отже,

$$\widetilde{\overline{B}}(u, \dots, u) = \sum_{k_1, \dots, k_n} a_{k_1} \dots a_{k_n} \widetilde{B}(z_{k_1}, \dots, z_{k_n}) = \overline{\widetilde{B}}(u, \dots, u).$$

Перейшовши від n-лінійних форм до поліномів та аналітичних функцій обмеженого типу, отримуємо доведення теореми.

$\square$

У випадку, коли A — скінченновимірна комутативна банахова алгебра, виконується рівність $(A \bigotimes_\pi X)'' = A \bigotimes_\pi X''$ і $\widetilde{\overline{f}} = \overline{\widetilde{f}}$ для всіх $f \in H_b(X)$. Тому, в цьому випадку, відображення $f \mapsto \widetilde{\overline{f}}$ є гомоморфізмом алгебр $H_b(X)$ і $H_b(A \bigotimes_\pi X'', A)$. В загальному випадку (коли A не обов'язково скінченновимірна), для кожного $\overline{u} \in A \bigotimes_\pi X''$ відображення

$$f \mapsto \theta_{\overline{u}}(\widetilde{f}) = \overline{\widetilde{f}}(\overline{u})$$

є гомоморфізмом з $H_b(X)$ в $H_b(X'')$ і $\widetilde{f} \mapsto \theta_{\overline{u}}(\widetilde{f})$ — гомоморфізм з $H_b(X'')$ в A. Згідно з результатами розділу 3.5 існує напрямленість

$(\overline{a}_\alpha) \subset A \bigotimes_\pi X$ така, що

$$\overline{\widetilde{P}} = \lim_\alpha \overline{P}(\overline{a}_\alpha)$$

для кожного полінома $P \in H_b(X)$. Проте, той факт, що $(\overline{u}_\alpha) \subset A \bigotimes_\pi X''$ і $A \bigotimes_\pi X'' \subset (A \bigotimes_\pi X)''$ дозволяє нам цю напрямленість замінити на слабко збіжну напрямленість $(\overline{u}_\alpha) \subset A \bigotimes_\pi X$, яка в $*$-слабкій топології простору збігається до $\overline{u} \in A \bigotimes_\pi X'' \subset (A \bigotimes_\pi X)''$ і процедуру продовження Арона-Бернера.

Покажемо, що не кожен гомоморфізм φ з $H_b(X)$ в M_2^+ має вигляд $\theta_{\overline{z}}$ для деякого $\overline{z} \in M_2^+ \bigotimes X''$. Розглянемо алгебру $H_b(M_2^+ \bigotimes_\pi l_2, M_2^+)$.

Приклад 4.1.1. *Нехай M_2^+ — комутативна підалгебра в алгебрі матриць 2×2 в M_2, яка містить елемент* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Нехай

$$\overline{a} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \otimes x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \otimes e_k \in M_2^+ \bigotimes_\pi l_2,$$

де $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in l_2$, $a_k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & a_{12}^k \\ a_{21}^k & a_{22}^k \end{pmatrix} \in M_2^+$, e_k *— елементи стандартної бази простору* l_2. *Позначимо* $P_2(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2$ *поліном другого степеня від* x. *Тоді* $\overline{P}_2(\overline{a}) = \overline{P}_2(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \otimes e_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$.

Нехай $F \in H_b(l_2)$. *Визначимо* $\varphi(F) = \lim\limits_U \overline{F}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e_n\right)$, *де границя обчислюється за деяким вільним ультрафільтром* U.

Тоді

$$\varphi(P_2) = \lim_U \overline{P}_2\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e_n\right) = \lim_U \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.2)$$

З іншого боку, за теоремою Рісса для довільного лінійного функціоналу існує така послідовність $(g_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$, *що* $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k x_k$, *де* $(g_k) \to 0$ *із умови збіжності ряду. Тому*

$$\varphi(g) = \lim_U \overline{g}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e_n\right) = \lim_n g_n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, якщо $\phi = \theta_{\overline{z}}$, *то* $\overline{z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *А це суперечить рівності (4.1.2).*

4.2. Випадок продовження Аренса

Оскільки в просторі $A \bigotimes_\pi X$ банахові простори A та X є рівноправними множниками, то, аналогічно як у розділі 4.1, ми можемо показати, що $A'' \bigotimes_\pi X \subset (A \bigotimes_\pi X)''$. Таким чином, ми можемо продовжити відображення з $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ до відображення з $H_b(A'' \bigotimes_\pi X, A'')$, де A'' є алгеброю, на якій задано добуток, що є продовженням Аренса добутку алгебри A. Проте, в цьому випадку, для функцій вигляду $\overline{f} \in H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$, $f \in H_b(X)$ продовження $\overline{f}$ до відображення з $H_b(A'' \bigotimes_\pi X, A'')$ не обов'язково є функціональним численням в алгебрі A'', оскільки A'' може бути некомутативною алгеброю, навіть якщо A — комутативна. При цьому відображення з $H_b(X)$ в $H_b(A'' \bigotimes_\pi X, A'')$ не буде гомоморфізмом.

Приклад 4.2.1. *Нехай $A = l_1$, $X = \mathbb{C}^2$. Треба довести, що для*

$$F : H_b(\mathbb{C}^2) \to H_b(l_1'' \bigotimes_\pi \mathbb{C}^2, l_1'')$$

існують такі $f, g \in H_b(\mathbb{C}^2)$, що

$$F(fg) \neq F(f)F(g).$$

Для кожного $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2$ покладемо $f(t) = t_1, g(t) = t_2$ та послідовно застосуємо оператор продовження $\mathbb{C}^2 \ni t \rightsquigarrow x \in l_1 \times l_1$ та продовження Арона-Бернера $l_1 \times l_1 \ni x \rightsquigarrow u = (u_1, u_2) \in l_\infty \times l_\infty$.
Тоді

$$\overline{f}(x) = x_1 \in l_1, \quad \overline{g}(x) = x_2 \in l_1, \quad \overline{f}(x)\overline{g}(x) = x_1 * x_2,$$

де "$*$" — згортка в l_1. Припустимо, що

$$\widetilde{\overline{f}}(u) = u_1 \in l_1'', \quad \widetilde{\overline{g}}(u) = u_2 \in l_1''$$

Тоді $\widetilde{\overline{f}}(u)\widetilde{\overline{g}}(u) = u_1 \Box u_2$ *і* $\widetilde{\overline{g}}(u)\widetilde{\overline{f}}(u) = u_1 \Diamond u_2 = u_1 \Box u_2$.

Оскільки $u_1 \Diamond u_2 \neq u_1 \Box u_2$ *в загальному випадку, то робимо висновок, що відображення* F *не є гомоморфізмом.*

З іншого боку, $fg(t) = t_1 \cdot t_2 = P(t)$ *— однорідний поліном другого степеня від векторної змінної* t. *Відомо, що* $P(t) = B(t,t)$ *— білінійна форма, яка однозначно визначається за допомогою поляризаційної формули:*

$$B(t,t) = \frac{t_1 t_2 + t_2 t_1}{2}.$$

Тоді

$$\overline{B}(x,x) = \frac{x_1 * x_2 + x_2 * x_1}{2}.$$

Тому

$$\widetilde{\overline{B}}(u) = \frac{u_1 \Box u_2 + u_1 \Diamond u_2}{2} = \frac{u_2 \Box u_1 + u_2 \Diamond u_1}{2}$$

Таким чином, $\widetilde{\overline{B}}(u,u) = \widetilde{\overline{P}}(u) = \widetilde{\overline{fg}}(t)$ *визначається однозначно через продовження Арона-Бернера для білінійної форми.*

4.3. Загальний випадок продовження Арона-Бернера

Теорема 4.3.1. *Припустимо, що A'' комутативна напівпроста банахова алгебра. Тоді відображення $g \mapsto \widetilde{g}$ є гомоморфізмом алгебр $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ і $H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$, $g \in H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$.*

Доведення. Нехай ψ — деякий комплексний гомоморфізм алгебри A''. Тоді для кожної A''-значної функції $h \in H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$ відображення $\psi \circ h$ буде аналітичною функцією обмеженого типу на $(A \bigotimes_\pi X)''$ зі значеннями в $\mathbb{C}$, тобто $\psi \circ h \in H_b((A \bigotimes_\pi X)'')$. Нехай, тепер, $h = \widetilde{g}$ для деякого $g \in H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ і $g = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n$ — розклад у ряд Тейлора. Тоді $\widetilde{g} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \widetilde{P}_n$, де кожен поліном $\widetilde{P}_n$ визначається за допомогою процедури продовження Арона-Бернера як звуження на діагональ продовження відповідного симетричного n-лінійного відображення. Тобто

$$\widetilde{P}_n(v) = \lim_{\mathcal{U}} \ldots \lim_{\mathcal{U}} A_{P_n}(u_\alpha, \ldots, u_\alpha),$$

де $u_\alpha \in A \bigotimes_\pi X$, $u_\alpha \to v$ в $*$-слабкій топології простору $(A \bigotimes_\pi X)''$. Тому $\psi \circ \widetilde{P}_n(v) = \lim\limits_{\mathcal{U}} \ldots \lim\limits_{\mathcal{U}} A_{\psi \circ P_n}(u_\alpha, \ldots, u_\alpha) = \lim\limits_{\mathcal{U}} \ldots \lim\limits_{\mathcal{U}} \psi(A_{P_n}(u_\alpha, \ldots, u_\alpha))$. Тобто $\psi \circ \widetilde{P}_n$ є продовження Арона-Бернера поліномів $\psi \circ P_n$. Таким чином, $\psi \circ \widetilde{g}$ є продовження Арона-Бернера функції $\psi \circ g$. Відомо, що продовження Арона-Бернера алгебри цілих (комплекснозначних) функцій обмеженого типу є гомоморфізмом. Тобто

$$\psi \circ \widetilde{g_1 g_2} = (\psi \circ \widetilde{g_1})(\psi \circ \widetilde{g_2}). \tag{4.3.1}$$

Нехай тепер $g = g_1 g_2 \in H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$. Якщо $\widetilde{g} \neq \widetilde{g_1}\widetilde{g_2}$, то з напівпростоти A'' випливає, що знайдеться комплексний гомоморфізм ψ такий, що

$$\psi(\widetilde{g}) = \psi(\widetilde{g_1}\widetilde{g_2}) \neq (\psi \circ \widetilde{g_1})(\psi \circ \widetilde{g_2}),$$

а це суперечить рівності (4.3.1). $\square$

Наслідок 4.3.1. *Якщо A'' напівпроста комутативна банахова алгебра, то відображення $f \mapsto \overline{\widetilde{f}}$ є гомоморфізмом алгебри $H_b(X)$ в $H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$.*

Розглянемо загальний випадок, коли $\overline{\widetilde{f}} \in H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$ для довільної комутативної банахової алгебри A, $f \in H_b(X)$. Нагадаємо, що X є лівим A-модулем (X є лівим модулем над A), якщо існує білінійне відображення $A \times X \to X$, $(a, x) \mapsto a \cdot x$ таке, що $(a_1 \cdot a_2) \cdot x = a_1 \cdot (a_2 \cdot x)$, де $a_1, a_2 \in A, x \in X$. Легко переконатися, що $A \bigotimes_\pi X$ є лівим A-модулем.

У роботі ([94], ст. 298) доведено що, якщо Z — деякий лівий A-модуль, то Z'' — лівий A-модуль над A'', де A'' є алгеброю відносно операції множення, що є продовженням Аренса операції, визначеної на A. Таким чином, застосовуючи результат з [94] до $A \bigotimes_\pi X$ отримуємо, що $(A \bigotimes_\pi X)''$ є лівим модулем над A''.

Нехай u, v — довільні фіксовані елементи з $(A \bigotimes_\pi X)''$ і $f \in H_b(X)$. Визначимо

$$f_{(u,v)}(a) = \overline{\widetilde{f}}(u + av), \quad a \in A''.$$

Твердження 4.3.1. *Відображення $f_{(u,v)}$ є A''-значною аналітичною функцією обмеженого типу від змінної $a \in A''$.*

Доведення. З того, що $\overline{f}$ є аналітичною функцією обмеженого типу та властивості функціонального числення на $A \bigotimes_\pi X$ випливає, що для довільних фіксованих $u_0, v_0 \in A \bigotimes_\pi X$ існують елементи алгебри A: $B_1(u_0, v_0), \ldots, B_n(u_0, v_0), \ldots$, які залежать тільки від u_0 як аналітичні функції обмеженого типу та від v_0 як n-однорідні поліноми такі, що

$$\overline{f}(u_0 + a_0 v_0) = \sum_{n=0}^{\infty} B(u_0, a_0 v_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n B_n(u_0, v_0). \qquad (4.3.2)$$

Застосувавши продовження Арона-Бернера до відображень $\overline{f}$ та B_n, отримаємо, що

$$\widetilde{\overline{f}}(u+av)=\sum_{n=0}^{\infty}a_0^n B_n(u_0,v_0).$$

Враховуючи, що $\widetilde{\overline{f}}$ є обмеженим відображенням на обмежених множинах з $(A\bigotimes_\pi X)''$ отримаємо, що $\widetilde{\overline{f}}(u+av)$ є обмеженим відображенням на обмежених множинах в A'' при фіксованих u та v. Крім того з (4.3.2) бачимо, що $\widetilde{\overline{f}}(u+av)$ аналітично залежить від $a\in A''$. $\square$

4.4. Зауваження щодо функціонального числення та алгебри $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$

Як було відзначено у цьому розділі та у розділі 2.5, для кожного елемента $\overline{a} \in A \bigotimes_\pi X$, гомоморфізм функціонального числення $\theta_{\overline{a}}$ ставить у відповідність функції $f \in H_b(X)$ елемент $\overline{f}(\overline{a}) \in H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ і відображення $f \mapsto \overline{f}$ є гомоморфізмом алгебр $H_b(X)$ і $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$. Проте, цей гомоморфізм, в загальному випадку, не є сюр'єктивним. Тобто, не кожен елемент з алгебри $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ можна подати у вигляді $g = \overline{f}$ для деякої функції $f \in H_b(X)$. Це можна проілюструвати наступним прикладом.

Приклад 4.4.1. *Нехай $A = \mathbb{C}^2$ з покоординатним множенням $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$ і $a_i, b_i \in \mathbb{C}$. Тоді $\overline{a} = \sum\limits_k (a_{1,k} a_{2,k}) \otimes x_k \in A \bigotimes_\pi X$. Визначимо функцію*

$$g(\overline{a}) = \left(\sum_k (a_{1,k}^2 P_2(x_k), \sum_k (a_{2,k}^3 P_3(x_k) \right),$$

де P_2 і P_3 деякі однорідні поліноми на X 2-го та 3-го степеня відповідно. Тоді не існує функції $f \in H_b(X)$ такої, що $g = \overline{f}$. Справді, якщо така функція існує, то $g((1,1) \otimes x) = (1,1) f(x) = (f(x), f(x))$. З іншого боку, за означенням g, $g((1,1) \otimes x = (P_2(x), P_3(x))$. Отримали суперечність.

З іншого боку, нехай ψ — деякий гомоморфізм алгебри $H_b(A \bigotimes_\pi X)$ в A, тоді відображення $f \mapsto \psi(\overline{f})$ буде гомоморфізмом з $H_b(X)$ в A.

4.5. Радіус-функція лінійного оператора на $H_b(X)$

Позначимо через $\mathcal{L}(H_b(X), Y)$ множину всіх лінійних і неперервних операторів з алгебри $H_b(X)$ в банахів простір Y. Для $\varphi \in X'$ в [18] було введено поняття радіус-функції $R(\varphi)$, як інфімум всіх r таких, що φ є неперервним відносно топології рівномірної збіжності на кулі радіуса r. Радіус-функцію можна обчислити за формулою

$$R(\varphi) = \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n\|^{\frac{1}{n}}, \tag{4.5.1}$$

де φ_n є звуженням φ на простір n-однорідних поліномів $\mathcal{P}(^n X)$ і $\|\varphi_n\|$ — норма в $\mathcal{P}(^n X)'$.

Продовжуючи ідею з праці [18], означимо радіус-функцію лінійного оператора $R(\Phi)$, $\Phi \in \mathcal{L}(H_b(X), Y)$ як нижню грань всіх r, таких, що Φ є неперервним відносно норми рівномірної збіжності на кулі rB.

Таким чином,

$$0 \le R(\Phi) < \infty.$$

Нагадаємо, що на просторі m-однорідних аналітичних функцій на X норма рівномірної збіжності на одиничній кулі B з X визначена таким чином:

$$\|P\| = \|P\|_1 = \sup\{|P(x)| \ : x \in B\}, P \in \mathcal{P}(^m X).$$

З однорідності $P \in \mathcal{P}(^m X)$ маємо:

$$\|P\|_r = r^m \|P\|, r > 0. \tag{4.5.2}$$

Позначимо через Φ_m звуження $\Phi \in \mathcal{L}(H_b(X), Y)$ на $\mathcal{P}(^m X)$. Тоді Φ_m є неперервним оператором. Його норма на $\mathcal{P}(^m X)$:

$$\|\Phi_m\| = \sup\{\|\Phi(P)\| \ : P \in \mathcal{P}(^m X), \|P\| \le 1\}.$$

Теорема 4.5.1. *Радіус-функцію R на $\mathcal{L}(H_b(X), Y)$ визначає формула*

$$R(\Phi) = \limsup_{m\to\infty} \|\Phi_m\|^{\frac{1}{m}}.$$

Доведення. Припустимо, що

$$0 < t < \limsup_{m\to\infty} \|\Phi_m\|^{\frac{1}{m}}.$$

Тоді існує послідовність однорідних поліномів P_j степеня $n_j \to \infty$ таких, що $\|P_j\| = 1$ і $|\Phi(P_j)| > t^{n_j}$. Якщо $0 < r < t$, тоді (з рівності (4.5.2)),

$$\|P_j\|_r = \sup_{x\in rB_{l_1}} |P_j(x)| = r^{n_j},$$

так що

$$|\Phi(P_j)| > \left(\frac{t}{r}\right)^{n_j} \|P_j\|_r$$

і Φ не є неперервним відносно норми $\|\cdot\|_r$. Звідси випливає, що $R(\Phi) \geq r$. Оскільки ми вибираємо r довільно, то

$$R(\Phi) \geq \limsup_{m\to\infty} \|\Phi_m\|^{\frac{1}{m}}.$$

Нехай тепер $s > \limsup\limits_{m\to\infty} \|\Phi_m\|^{\frac{1}{m}}$. З цього випливає, що $\|\Phi_m\| \leq s^m$ для великих m. Тоді існує $c \geq 1$ таке, що $\|\Phi_m\| \leq cs^m$ для кожного m. Якщо $r > s$ є довільним і функція $f \in H_b(X)$ має розклад в ряд Тейлора $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, то

$$r^n\|f_n\| = \|f_n\|_r \leq \|f\|_r, \qquad n \geq 0.$$

Звідси

$$|\Phi(f_m)| \leq \|\Phi_m\|\|f_m\| \leq \frac{cs^m}{r^m}\|f\|_r.$$

Таким чином, Φ є неперервним відносно норми рівномірної збіжності на rB і $R(\Phi) \leq r$. Оскільки r і s є довільними, то

$$R(\Phi) \leq \limsup_{m\to\infty} \|\Phi_m\|^{\frac{1}{m}}.$$

Теорему доведено. □

Застосовуючи цю теорему, знайдемо оцінку радіус-функції гомоморфізму $\theta_{\overline{z}}$ і перевіримо, чи збігатиметься отриманий результат із значенням, отриманим безпосереднім обчисленням норми у відповідному просторі.

Приклад 4.5.1. *Розглянемо простір* l_1. *Нехай* $\overline{z} = z_1e_1 + \ldots + z_ne_n + \ldots \in M_n^+ \bigotimes l_1$, *де* $M_n^+ \bigotimes$ *— деяка комутативна підалгебра алгебри матриць* $n \times n$ *і* z_n *— конкретні матриці, які комутують між собою. Тоді*

$$\|\overline{z}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\| = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots = c < \infty.$$

Тут числа $c_n, n = 1, 2, \ldots$ *— відповідні значення норми матриць* z_n, *визначені як операторна норма в просторі операторів на* $\mathbb{C}^n$.

Знайдемо $R(\theta_{\overline{z}})$. *За формулою (4.5.1) і вище доведеною теоремою маємо:*

$$R(\theta_{\overline{z}}) = \limsup_{m\to\infty} \|(\theta_{\overline{z}})_m\|^{\frac{1}{m}}$$

З іншого боку:

$$(\theta_{\overline{z}})_m(f) = \theta_{\overline{z}}(f_m) = \overline{\widetilde{f}}(\overline{z}).$$

Тому

$$\|(\theta_{\overline{z}})_m\| = \sup_{\|f_m\|\le 1} \|\overline{\widetilde{f}}(z)\| \le \|f_m\|\|\overline{z}\| = c^m.$$

Отже, остаточно маємо

$$R(\theta_{\overline{z}}) = \limsup_{m\to\infty} \|(\theta_{\overline{z}})_m\|^{\frac{1}{m}} \le \limsup_{m\to\infty} \|c^m\|^{\frac{1}{m}} = c.$$

Таким чином, показали, що для довільного елемента простору $M_n^+ \bigotimes l_1$ *виконується нерівність*

$$R(\theta_{\overline{z}}) = \|\overline{z}\| \le c.$$

Теорема 4.5.2. *Нехай* Φ_n *— лінійний неперервний оператор з простору* $\mathcal{P}(^nX)$ *у деякий банахів прострі* Y *для кожного* $n \in \mathbb{Z}_+$ *і для норми* Φ_n *на* $\mathcal{P}(^nX)$ *виконується співвідношення*

$$\|\Phi_n\| \leq cs^n$$

для деяких $c, s > 0$.

Тоді існує єдиний лінійний оператор $\Phi \in \mathcal{L}(H_b(X), Y)$, *звуження якого на* $\mathcal{P}(^nX)$ *співпадає з* Φ_n *для всіх* $n \in \mathbb{Z}_+$ *і*

$$R(\Phi) \leq s.$$

Доведення. Для довільного лінійного функціонала $\theta \in Y', \|\theta\| = 1$ розглянемо композицію $\|\theta \circ \Phi_n\| \leq \|\Phi_n\|$. Оскільки $\|\Phi_n\| \leq cs^n$, то для довільного θ виконується нерівність $\|\theta \circ \Phi_n\| \leq cs^n$. З твердження 2.4 [18] випливає, що існує лінійний функціонал

$$\varphi : H_b(X) \to \mathbb{C}, \varphi \in H_b(X)'$$

такий, що його звуження $\varphi_n = \theta \circ \Phi_n$. Отже, ми маємо оператор $T : Y' \to H_b(X)', \theta \mapsto \varphi$ і $T^\star$ є спряженим оператором до T:

$$T^\star : H_b(X)'' \to Y''.$$

Розглянемо звуження цього оператора $T^\star$ на $H_b(X) \subset H_b(X)''$ і позначимо його Φ. Очевидно, що $\Phi : H_b(X) \to A$ і є шуканим оператором. Справді, для цього достатньо показати, що $\Phi_n(P) = \Phi(P)$ для довільного $P \in \mathcal{P}(^nX)$. Нехай $\Phi_n(P) = a_1$, $\theta(a_1) = c_1 \in \mathbb{C}$, тобто

$$(\theta \circ \Phi_n)(P) = \varphi_n(P) = c_1.$$

З іншого боку, $\Phi(P) = a_2$, тобто

$$(\theta \circ \Phi)(P) = \varphi(P) = c_2.$$

Оскільки φ_n— звуження φ, то

$$\varphi(P) = c_2 = \varphi_n(P) = c_1, \Rightarrow c_1 = c_2 = c.$$

Таким чином, з виконання рівності

$$(\theta \circ \Phi)(P) = (\theta \circ \Phi_n)(P) = c$$

для довільного θ випливає, що $\Phi_n(P) = \Phi(P)$. З теореми 4.5.1 маємо, що

$$R(\Phi) = \limsup_{n\to\infty} \|\Phi_n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} (cs^n)^{1/n} = s.$$

$\square$

Висновки до розділу 4. Продовження Арона-Бернера аналітичних функцій з $H_b(X)$ у другий спряжений простір X'' є важливим інструментом для дослідження комплексних гомоморфізмів алгебри $H_b(X)$. Тому, застосування цього підходу до гомоморфізмів функціонального числення зі значеннями в деякій комутативній банаховій алгебрі A, також, дозволяє отримати нові результати щодо опису цих гомоморфізмів. Проте, як ми бачимо, на цьому шляху є певні технічні труднощі. Простір $(A \bigotimes_\pi X)''$, в загальному випадку, не має тензорної структури і тому ми не можемо говорити про функціональне числення. Крім того, якщо A не є регулярною за Аренсом алгеброю, то A'' може бути не комутативною. Таким чином, для загального випадку продовження Арона-Бернера вдалося показати, що $\widetilde{\widetilde{f}}(u + av)$ є A''-значною аналітичною функцією обмеженого типу, $a \in X''$ при фіксованих $u, v \in (A \bigotimes_\pi X)''$. З іншого боку, показано, що $A \bigotimes_\pi X''$ є замкненим підпростором в $(A \bigotimes_\pi X)''$ і звуження $\widetilde{\widetilde{f}}$ на $A \bigotimes_\pi X''$ збігається з $\widetilde{\widetilde{f}}$, що є функціональним численням від продовження Арона-Бернера функції $f \in H_b(X)$. Таким чином, відображення $f \mapsto \widetilde{\widetilde{f}}$ є гомоморфізмом з алгебри $H_b(X)$ в $H_b(A \bigotimes_\pi X'', A)$. Також показано, що відображення $f \mapsto \widetilde{\widetilde{f}}$ є гомоморфізмом з $H_b(X)$ в $H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$, якщо A'' напівпроста комутативна алгебра.

У розділі 4 також показано, що для операторів, визначених на $H_b(X)$ можна ввести аналог радіус-функції, яку було запропоновано у [18] для функціоналів та знайти формулу для її обчислення.

Результати розділу надруковано у працях [1, 86, 84, 3].

РОЗДІЛ 5
СТРУКТУРА ГОМОМОРФІЗМІВ АЛГЕБР АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

5.1. Продовження лінійного оператора до гомоморфізму

Скрізь у цьому розділі вважаємо, що A — комутативна банахова алгебра така, що A'' є комутативною і напівпростою.

У роботі [104] сформульовано і доведено лему 1 про продовження лінійного функціонала $\varphi \in H_b(X)'$ до характера $\psi \in M_b$.

Лема 5.1.1. *Нехай $\phi \in H_b(X)'$, $\phi(P) = 0$ для кожного $P \in \mathcal{P}(^m X) \cap \mathcal{A}_{m-1}(X)$, $m > 0$ і $\phi_m \neq 0$. Тоді існує функціонал $\psi \in M_b$ такий, що $\psi_k = 0$ для $k < m$ і $\psi_m = \phi_m$. Крім цього для радіус-функції виконуєтьcя рівність*

$$R(\psi) = \|\phi_m\|^{1/m},$$

де $\mathcal{A}_{m-1}(X)$ — найменша замкнена підалгебра в $H_b(X)$, породжена поліномами степеня $\leq m$.

Наступна теорема є узагальненням вже відомої леми і грунтується вона на продовженні лінійного оператора до гомоморфізму. Нагадаємо, що $\mathcal{A}_m(Y, A)$ — найменша замкнена підалгебра в $H_b(Y, A)$, породжена A-значними поліномами степеня $\leq m$. Для скорочення введемо наступне позначення: $\mathcal{L}(H_b(A \bigotimes_\pi X, A), A) = \mathcal{L}(H_b(A \bigotimes_\pi X); A)$ — простір лінійних неперервних операторів, які діють з алгебри $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ в алгебру A. Також, будемо позначати $M_A(H_b(X))$ — множину неперервних гомоморфізмів з $H_b(X)$ в A.

Теорема 5.1.1. *Нехай* $\Phi \in \mathcal{L}(H_b(A \bigotimes_\pi X); A)$ *— лінійний оператор такий, що* $\Phi(P) = 0$ *для кожного*

$$P \in \mathcal{P}(^m(A \bigotimes_\pi X), A) \cap \mathcal{A}_{m-1}((A \bigotimes_\pi X), A),$$

де m *є фіксоване натуральне число і* Φ_m *є ненульовим звуженням* Φ *на* $\mathcal{P}(^m(A \bigotimes_\pi X), A)$.

Тоді існує гомоморфізм $\Psi \in M_A(H_b(X))$ *такий, що його звуження* Ψ_k *на* $\mathcal{P}(^kX)$ *задовольняє умови:* $\Psi_k = 0$ *для всіх* $k < m$ *і* $\Psi_m = \Phi_m$. *Крім цього, радіус-функцію можна оцінити за формулою*

$$\|\Phi_m\|^{1/m} \leq R(\Psi) \leq e\|\Phi_m\|^{1/m}.$$

Доведення. Для кожного полінома $P \in \mathcal{P}(^{mk}(A \bigotimes_\pi X), A)$ позначимо через $P_{(m)}$ поліном з $\mathcal{P}(^k\bigotimes_{s,\pi}^m(A \bigotimes_\pi X), A)$ такий, що $P_{(m)}(\overline{a}^{\otimes m}) = P(\overline{a})$ (див. детальніше розділ 2.2).

Оскільки $\Phi_m \neq 0$, то існує такий елемент $\omega \in (A \bigotimes_{s,\pi} X)'', \omega \neq 0$, що для кожного m-однорідного полінома P,

$$\Phi(P) = \Phi_m(P) = \widetilde{P}_{(m)}(w), \qquad \|w\| = \|\Phi_m\|,$$

де $\widetilde{P}_{(m)}$ є продовженням Арона-Бернера лінійного функціонала $P_{(m)}$ з $\bigotimes_{s,\pi}^m(A \bigotimes_\pi X)$ на $\bigotimes_{s,\pi}^m(A \bigotimes_\pi X)''$. Для довільного n-однорідного полінома $Q \in \mathcal{P}(^n(A \bigotimes_\pi X), A)$ покладемо

$$\Psi(Q) = \begin{cases} \widetilde{Q}_{(m)}(w) & \text{якщо } n = mk \text{ для деяких } k \geq 0 \\ 0 & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

де $\widetilde{Q}_{(m)}$ є продовженням Арона-Бернера k-однорідного полінома $Q_{(m)}$ з $\bigotimes_{s,\pi}^m(A \bigotimes_\pi X)$ на $\bigotimes_{s,\pi}^m(A \bigotimes_\pi X)''$.

Нехай (u_α) — напрямленість з $\bigotimes_{s,\pi}^m(A \bigotimes_\pi X)$, яка збігається до w в $*$-слабкій топології простору $\bigotimes_{s,\pi}^m(A \bigotimes_\pi X)''$, де α належить деякій множині індексів $\mathfrak{A}$. Ми можемо припустити, що кожен елемент u_α можна зобразити у вигляді

$$u_\alpha = \sum_{j\in\mathbb{N}} (a_{j,\alpha} \otimes_\pi x_{j,\alpha})^{\otimes m} = \sum_{j\in\mathbb{N}} p_{j,\alpha}^{\otimes m} \quad \text{для деяких} \quad a_{j,\alpha} \in A, x_{j,\alpha} \in X.$$

Ми хочемо показати, що

$$\Psi(PQ) = \Psi(P)\Psi(Q)$$

для довільних однорідних поліномів P і Q. Розглянемо всі можливі випадки.

1. Нехай

$$\deg(PQ) = mr + l$$

для деякого цілого $r \geq 0$ і $m > l > 0$. Тоді P або Q має степінь рівний $mk + s$, $k \geq 0$, $m > s > 0$. Отже, за означенням, $\Psi(PQ) = 0$ і

$$\Psi(P)\Psi(Q) = 0.$$

2. Припустимо тепер, що для деякого цілого $r \geq 0$

$$\deg(PQ) = mr$$

Якщо $\deg P = mk$ і $\deg Q = mn$ для $k, n \geq 0$, тоді $\deg(PQ) = m(k+n)$ і

$$\Psi(PQ) = (\widetilde{PQ})_{(m)}(w) = \widetilde{P}_{(m)}(w)\widetilde{Q}_{(m)}(w) = \Psi(P)\Psi(Q).$$

3. Останній можливий випадок буде тоді, коли

$$\deg P = mk + l \quad \text{і} \quad \deg Q = mn + r,$$

при $l, r > 0$, $l + r = m$. Нехай

$$\nu = \frac{1}{(\deg P + \deg Q)!} = \frac{1}{(m(k+n+1))!}.$$

Позначимо F_{PQ} симетричне мультилінійне відображення, асоційоване з PQ. Тоді

$$F_{PQ}\left(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_{m(k+n+1)}\right)=\nu\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{m(k+n+1)}}F_P\left(\overline{a}_{\sigma(1)},\ldots,\overline{a}_{\sigma(mk+l)}\right)$$
$$\times F_Q\left(\overline{a}_{\sigma(mk+l+1)},\ldots,\overline{a}_{\sigma(m(k+n+1))}\right),$$

де $\mathfrak{S}_{m(k+n+1)}$ є групою перестановок $\{1,\ldots,m(k+n+1)\}$. Таким чином, для $\alpha_1,\ldots,\alpha_{k+n+1}\in\mathfrak{A}$ ми маємо

$$\psi(PQ)=(\widetilde{PQ})_{(m)}(w)=\lim_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k+n+1}}\widetilde{F}_{PQ_{(m)}}\left(u_{\alpha_1},\ldots,u_{\alpha_{k+n+1}}\right)$$
$$=\lim_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k+n+1}}\widetilde{F}_{PQ_{(m)}}\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}p_{j,\alpha_1}^{\otimes m},\ldots,\sum_{j\in\mathbb{N}}p_{j,\alpha_{k+n+1}}^{\otimes m}\right)$$
$$=\nu\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{m(k+n+1)}}\lim_{\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(k+n+1)}}$$
$$\sum_{j_1,\ldots,j_{k+n+1}\in\mathbb{N}}F_P\left(\overline{a}^m_{j_{\sigma(1)},\alpha_{\sigma(1)}},\ldots,\overline{a}^m_{j_{\sigma(k)},\alpha_{\sigma(k)}},\overline{a}^l_{j_{\sigma(k+1)},\alpha_{\sigma(k+1)}}\right)$$
$$\times F_Q\left(\overline{a}^r_{j_{\sigma(k+1)},\alpha_{\sigma(k+1)}},\overline{a}^m_{j_{\sigma(k+2)},\alpha_{\sigma(k+2)}},\ldots,\overline{a}^m_{j_{\sigma(k+n+1)},\alpha_{\sigma(k+n+1)}}\right).$$

Зафіксуємо деяке $\sigma\in\mathfrak{S}_{m(k+n+1)}$ і зафіксуємо всі $\overline{a}_{j_{\sigma(i)},\alpha_{\sigma(i)}}$ для $i\le k$ і для $i>k+1$. Тоді

$$\sum_{j_1,\ldots,j_{k+n+1}\in\mathbb{N}}\lim_{\alpha_{\sigma(k+1)}}F_P\left(\overline{a}^m_{j_{\sigma(1)},\alpha_{\sigma(1)}},\ldots,\overline{a}^m_{j_{\sigma(k)},\alpha_{\sigma(k)}},\overline{a}^l_{j_{\sigma(k+1)},\alpha_{\sigma(k+1)}}\right)$$
$$\times F_Q\left(\overline{a}^r_{j_{\sigma(k+1)},\alpha_{\sigma(k+1)}},\overline{a}^m_{j_{\sigma(k+2)},\alpha_{\sigma(n+2)}},\ldots,\overline{a}^m_{j_{\sigma(k+n+1)},\alpha_{\sigma(k+n+1)}}\right)=0,$$

тому що для фіксованих $\overline{a}_{k_{\sigma(i)},\alpha_{\sigma(i)}}$, $i\le k$,

$$P_\sigma(y):=\sum_{j_1,\ldots,j_k,j_{k+2},\ldots,j_{k+n+1}\in\mathbb{N}}F_P\left(\overline{a}^m_{j_{\sigma(1)},\alpha_{\sigma(1)}},\ldots,\overline{a}^m_{j_{\sigma(k)},\alpha_{\sigma(k)}},y^l\right)$$

є l-однорідним поліномом і для фіксованих $\overline{a}_{k_{\sigma(i)},\alpha_{\sigma(i)}}$, $i>k+1$,

$$Q_\sigma(y):=\sum_{j_1,\ldots,j_k,j_{k+2},\ldots,j_{k+n+1}\in\mathbb{N}}F_Q\left(y^r,\overline{a}^m_{j_{\sigma(k+2)},\alpha_{\sigma(n+2)}},\ldots,\overline{a}^m_{j_{\sigma(k+n+1)},\alpha_{\sigma(k+n+1)}}\right)$$

є r-однорідним поліномом. Отже, $P_\sigma Q_\sigma \in \mathcal{A}_{m-1}((A \bigotimes_\pi X), A)$. Таким чином,

$$\lim_\alpha (P_\sigma Q_\sigma)_{(m)}(u_\alpha) = \Psi(P_\sigma Q_\sigma) = 0$$

для довільного фіксованого σ. Тому $\Psi(PQ) = 0$.

З іншого боку, за означенням Ψ, $\Psi(P)\Psi(Q) = 0$. Отже,

$$\Psi(PQ) = \Psi(P)\Psi(Q).$$

Таким чином, ми визначили мультиплікативний оператор Ψ на однорідних поліномах. Ми можемо продовжити його за лінійністю і дистрибутивністю до гомоморфізму на алгебру всіх неперервних поліномів $\mathcal{P}((A \bigotimes_\pi X), A)$.

Якщо Ψ_n є звуженням Ψ на $\mathcal{P}(^n(A \bigotimes_\pi X), A)$, тоді $\|\Psi_n\| = \|w\|^{n/m}$ якщо n/m є додатнім цілим числом і $\|\Psi_n\| = 0$ в іншому випадку. Таким чином, ряд

$$\Psi = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Psi_n$$

є неперервним гомоморфізмом на $H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$ за твердженням 4.5.2 і радіус-функція Ψ може бути обчислена за формулою

$$R(\Psi) = \limsup_{n\to\infty} \|\Psi_n\|^{1/n} \geq \limsup_{n\to\infty} \|w\|^{n/mn} = \|w\|^{1/m} = \|\Phi_m\|^{1/m}.$$

З іншого боку,

$$\|\Psi_n\| = \sup_{\|P\|=1} |\Psi_n(P)| = \sup_{\|P\|=1} |P_{(m)}(w)|.$$

Оскільки

$$|P_{(m)}(w)| \leq \|w\|^{n/m} \|P_{(m)}\| \leq c(n, A \bigotimes_\pi X) \|w\|^{n/m} \|P\|,$$

ми маємо

$$\|\Psi_n\| \leq c(n, A \bigotimes_\pi X) \|w\|^{n/m} \leq \frac{n^n}{n!} \|w\|^{n/m} = \frac{n^n}{n!} \|\Phi_m\|^{n/m}.$$

Отже,

$$R(\Psi) \leq e\|\Phi_m\|^{1/m}.$$

Теорема повністю доведена. $\square$

5.2. Оператор зсуву на $H_b((A\bigotimes_\pi X), A)$

Наступне означення є узагальненням оператора зсуву для A-значних аналітичних функцій обмеженого типу.

Означення 5.2.1. *Для довільного фіксованого елемента $\overline{a} \in A\bigotimes_\pi X$ визначимо оператор зсуву $\tau_{\overline{a}}$ на $H_b((A\bigotimes_\pi X), A)$ рівністю*

$$(\tau_{\overline{a}}\overline{f})(\overline{z}) = \overline{f}(\overline{a}+\overline{z}), \quad \overline{z} \in A\bigotimes_\pi X, \overline{f} \in H_b((A\bigotimes_\pi X), A).$$

Не важко показати, що $\tau_{\overline{a}}\overline{f}$ є A-значною аналітичною функцією на $A\bigotimes_\pi X$ і обмеженою на обмежених підмножинах в $A\bigotimes_\pi X$. Таким чином, $\tau_{\overline{a}}\overline{f} \in H_b((A\bigotimes_\pi X), A)$.

Вияснимо, чи для довільного фіксованого оператора $\Phi \in \mathcal{L}(H_b(A\bigotimes_\pi X); A)$ функція

$$\overline{a} \mapsto \Phi(\tau_{\overline{a}}\overline{f}), \quad \overline{a} \in A\bigotimes_\pi X$$

належить $H_b((A\bigotimes_\pi X), A)$.

Нагадаємо, що радіус-функція $R(\Phi)$ лінійного оператора Φ на $H_b(X)$ була визначена як нижня грань усіх таких r, що Φ є неперервним відносно порми рівномірної збіжності на кулі rB. Це означення, також, залишається коректним і для оператора $\Phi \in \mathcal{L}(H_b(A\bigotimes_\pi X); A)$.

Використовуючи ідею для оцінки радіус-функції функціонала із статті [18] (ст.65), радіус-функцію оператора $\Phi(\tau_{\overline{a}}\overline{f})$ можна оцінити за формулою

$$R(\Phi(\tau_{\overline{a}}\overline{f})) \leq R(\Phi) + \|\overline{a}\|. \tag{5.2.1}$$

Дійсно, нехай $\varepsilon > 0$ і виберемо $c > 0$ таке, що

$$\|\Phi(\overline{g})\| \leq c\|\overline{g}\|_{R(\Phi)+\varepsilon}, \quad \overline{g} \in H_b(A\bigotimes_\pi X).$$

Оскільки оператор Φ — обмежений у нормованому просторі відносно норми $\|\cdot\|_{R(\Phi)+\varepsilon}$, $\forall\varepsilon > 0$, згідно з означенням радіус-функції, то така константа $c > 0$ завжди існує. Тоді для $\overline{f} \in H_b((A\bigotimes_\pi X), A)$ ми маємо

$$\|\Phi(\tau_{\overline{a}}\overline{f})\| \le c\|\tau_{\overline{a}}\overline{f}\|_{R(\Phi)+\varepsilon} \le c\|\overline{f}\|_{R(\Phi)+\varepsilon+\|\overline{a}\|}.$$

Оскільки ця нерівність має місце для довільного $\varepsilon > 0$, то виконується нерівність (5.2.1).

Таким чином, ми можемо довести наступну теорему.

Теорема 5.2.1. *Для фіксованого оператора* $\Phi \in \mathcal{L}(H_b(A\bigotimes_\pi X); A)$ *і функції* $\overline{f} \in H_b((A\bigotimes_\pi X), A)$ *функція*

$$\overline{a} \mapsto \Phi(\tau_{\overline{a}}\overline{f}) = \Phi(\overline{f}(\overline{a} + \cdot)), \quad \overline{a} \in A\bigotimes_\pi X$$

належить $H_b((A\bigotimes_\pi X), A)$.

Доведення. Оцінка (5.2.1) дає оцінку вигляду

$$\|\Phi(\tau_{\overline{a}}\overline{f})\| \le c\|\overline{f}\|_{R(\Phi)+r+\varepsilon}, \quad \|\overline{a}\| \le r.$$

Із цієї нерівності робимо висновок, що $\Phi(\tau_{\overline{a}}\overline{f})$ є обмеженим на обмежених підмножинах $A\bigotimes_\pi X$. Крім того, $\Phi(\tau_{\overline{a}}\overline{f})(\overline{z}) = \Phi(\overline{f}(\overline{a} + \overline{z}))$ є композицією аналітичного та лінійного оператора, отже, є аналітичним відображенням. Таким чином, $\Phi(\tau_{\overline{a}}\overline{f})$ є аналітичним відображенням обмеженого типу, тобто $\Phi(\tau_{\overline{a}}\overline{f}) \in H_b((A\bigotimes_\pi X), A)$. $\square$

5.3. Мультиплікативні оператори на поліномах та їхня згортка

Наступне означення є узагальненням операції згортки для A-значних гомоморфізмів.

Означення 5.3.1. *Для довільних* $\Phi, \Theta \in \mathcal{L}(H_b(A \bigotimes_\pi X); A)$ *операцію згортки* $\Phi * \Theta$ *в* $H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$ *визначимо рівністю*

$$(\Phi * \Theta)(\overline{f}) = \Phi(\Theta(\tau_{\overline{a}}\overline{f})).$$

Нехай Φ, Θ є мультиплікативними операторами, тобто $\Phi, \Theta \in M_A(H_b(A \bigotimes_\pi X), A)$. Із усіх гомоморфізмів, які належать $M_A(H_b(A \bigotimes_\pi X), A)$, виберемо ті, для яких виконується умова

$$\Phi(P) = \lim_\alpha P(\overline{x}_\alpha) \quad \text{для всіх} \quad P \quad \text{на} \quad A \bigotimes_\pi X,$$

де $(\overline{x}_\alpha)$ — напрямленість в $A \bigotimes_\pi X$. Таким чином, ми отримаємо підмножину

$$\Omega = \{\Phi \in M_A(H_b(A \bigotimes_\pi X), A) : \forall P \in \mathcal{P}((A \bigotimes_\pi X), A) \exists (\overline{x}_\alpha) \subset A \bigotimes_\pi X$$
$$\text{така, що} \quad \lim_\alpha P(\overline{x}_\alpha) = \Phi(P)\}.$$

У розділі 3 було показано, що клас Ω є достатньо широким. Це означає, що $(\overline{x}_\alpha) \to \Phi$ в слабко поліноміальній топології для всіх $\Phi \in \Omega$. Нехай $(\overline{y}_\beta) \to \Theta$ в слабко поліноміальній топології, $\Theta \in \Omega$.

У цьому випадку для всіх гомоморфізмів, які належать Ω, можемо записати

$$(\Phi * \Theta)(P) = \lim_\alpha \lim_\beta P(\overline{x}_\alpha + \overline{y}_\beta).$$

Для скорочення введемо позначення $\Phi_1 * \ldots * \Phi_n = \mathop{\ast}\limits_{k=1}^{n} \Phi_k$.

Нехай I_k — мінімальний замкнений ідеал в $H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$, породжений всіма m-однорідними поліномами $\mathcal{P}(^{\leq k}(A \bigotimes_\pi X), A)$, де $0 < m \leq k$. Очевидно, що I_k є власним ідеалом і тому міститься в деякому максимальному замкненому ідеалі.

Позначимо $\mathcal{F}_k = \{\Phi \in \Omega : \ker \Phi \supset I_k\}$. Покладемо $\mathcal{F}_0 = \Omega$.

Наслідок 5.3.1. *Якщо для деякого $m \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{A}_m((A \bigotimes_\pi X), A) \neq \mathcal{A}_{m-1}((A \bigotimes_\pi X), A),$$

тоді існує гомоморфізм $\Psi \in \mathcal{F}_{m-1}$ такий, що $\Psi \notin \mathcal{F}_m$.

Доведення. Нехай P — m-однорідний поліном з $H_b(A \bigotimes_\pi X, A)$ такий, що $P \in \mathcal{A}_{m-1}((A \bigotimes_\pi X), A)$. Виберемо лінійний оператор $\Phi : H_b(A \bigotimes_\pi X, A) \to A$ так, що $\Phi(P) \neq 0$. За теоремою 5.1.1 існує $\Psi \in M_A(H_b(A \bigotimes_\pi X), A)$ такий, що $\Psi_k = 0$ для $k = 1, \ldots, m-1$. Отже, $\Psi_m = \Phi$, $\Psi \in \mathcal{F}_{m-1}$ і $\Psi \notin \mathcal{F}_m$. □

Лема 5.3.1. *Нехай $\Phi, \Psi \in \Omega$ і $\Psi \in \mathcal{F}_{k-1}$. Тоді для кожного $P \in \mathcal{P}(^k(A \bigotimes_\pi X), A)$ виконується рівність*

$$\Phi * \Psi(P) = \Phi(P) + \Psi(P).$$

Доведення. Нехай $(\overline{x}_\alpha)$ і $(\overline{y}_\beta)$ — напрямленості в $A \bigotimes_\pi X$ такі, що $\overline{x}_\alpha \to \Phi$ і $\overline{y}_\beta \to \Psi$. Для довільних фіксованих $\overline{y}_\beta$ і $0 < n < k$ неперервна симетрична мультилінійна форма $A_P(\overline{x}^{k-n}, \overline{y}_\beta^n)$, асоційована з поліномом $P \in \mathcal{P}(^k(A \bigotimes_\pi X), A)$, є $k-n$-однорідним поліномом від $\overline{x}$. Отже, внаслідок того, що Φ дорівнює нулю на всіх однорідних поліномах степеня, меншого за k,

$$\Phi(A_P(\overline{x}^{k-n}, \overline{y}_\beta^n)) = \lim_\alpha A_P(\overline{x}_\alpha^{k-n}, \overline{y}_\beta^n) = 0.$$

Більше того, для всіх $P \in \mathcal{P}(^k(A \bigotimes_\pi X), A)$

$$\Phi * \Psi(P) = \lim_{\beta,\alpha} P(\overline{x}_\alpha + \overline{y}_\beta) =$$

$$\sum_{n+m=k} \lim_{\beta,\alpha} A_P(\overline{x}^n_\alpha, \overline{y}^m_\beta) = \sum_{n+m=k} \lim_{\beta} \Big(\lim_{\alpha} A_P(\overline{x}^n_\alpha, \overline{y}^m_\beta) \Big) =$$

$$\lim_{\beta} \Big(\lim_{\alpha} A_P(\overline{x}_\alpha, \dots, \overline{x}_\alpha) + A_P(\overline{y}_\beta, \dots, \overline{y}_\beta) \Big) = \Phi(P) + \Psi(P).$$

$\square$

Лема 5.3.2. *Якщо $P \in \mathcal{P}(^k(A \bigotimes_\pi X), A)$ і $\Phi_j \in \mathcal{F}_{j-1}$, тоді для кожного $m > k$ виконуєтьcя рівність*

$$\mathop{\ast}_{j=1}^{m} \Phi_j(P) = \mathop{\ast}_{j=1}^{k} \Phi_j(P).$$

Доведення. Оскільки $\Phi_m \in \mathcal{F}_{m-1}$, то $\Phi_m(P) = 0$ для всіх $m > k$. $\square$

5.4. Основна структурна теорема для гомоморфізмів

Для послідовності гомоморфізмів $(\Phi_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$ таких, що $\Phi_n \in \mathcal{F}_{n-1}$, нескінченна згортка $\mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ є лінійним мультиплікативним оператором на алгебрі поліномів $\mathcal{P}((A \bigotimes_\pi X), A)$ таким, що $\mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n(P) = \mathop{\ast}\limits_{n=1}^{k} \Phi_n(P)$ для кожного $P \in \mathcal{P}(^k(A \bigotimes_\pi X), A)$ для довільного натурального k. Якщо цей мультиплікативний оператор неперервний, то він єдиним чином визначає деякий гомоморфізм з Ω, який ми будемо позначати тим самим символом $\mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$.

Нагадаємо, що оператор $\delta_x(f) = f(x)$ відображає X в M_b, а оператор $\widetilde{\delta}_{x''}(f) = \widetilde{f}(x'')$ є продовженням δ_x на X''. Аналогічно, $\theta_{\overline{a}}(f) = \overline{f}(\overline{a})$, і $\widetilde{\theta}_{\overline{a}''}(\overline{f}) = \widetilde{\overline{f}}(\overline{a}'')$ — продовження оператора $\theta_{\overline{a}}$ на $(A \bigotimes_\pi X)''$. У статті [104] доведено наступну теорему про структурний опис комплексних гомоморфізмів алгебри $H_b(X)$.

Теорема 5.4.1. *Існують послідовності спряжених просторів $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ і відображень $\delta^{(n)} : X_n \to M_b$ такі, що $X_1 = X''$,*

$X_n = \mathcal{P}(^n X)' \cap I_{n-1}^{\perp}$,

$\delta^{(1)} = \widetilde{\delta}$ і довільний комплексний гомоморфізм $\phi \in M_b$ має зображення

$$\phi = \mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \delta^{(n)}(u_n)$$

для деякої послідовності $u_n \in X_n$.

Ми узагальнили цей факт на випадок A-значних гомоморфізмів. Для елементів послідовності спряжених просторів $((A \bigotimes_\pi X)_n)_{n=1}^{\infty}$ будемо використовувати позначення $(A \bigotimes_\pi X)_n = Z_n$.

Теорема 5.4.2. *Існують послідовності спряжених просторів $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ і відображень*

$$\theta_{\overline{a}}^{(n)} : Z_n \to A$$

такі, що

$$Z_1 = (A \bigotimes_{\pi} X)'', Z_n = \mathcal{L}(H_b(A \bigotimes_{\pi} X); A), \theta_{\overline{a}}^{(1)} = \widetilde{\theta}_{\overline{a}''}$$

і довільний гомоморфізм $\Phi \in \Omega$ має зображення

$$\Phi = \mathop{\ast}_{n=1}^{\infty} \theta_{\overline{a}}^{(n)}(u_n)$$

для деякої послідовності $u_n \in Z_n.$, $n = 1, 2, \ldots$.

Доведення. Покладемо $Z_1 = (A \bigotimes_\pi X)''$. Тоді

$$\theta_{\overline{a}}^{(1)} = \widetilde{\theta}_{\overline{a}''} \in \Omega \quad \text{для всіх} \quad \overline{a}'' \in (A \bigotimes_{\pi} X)''.$$

Припустимо, що простір Z_{n-1} і відображення $\theta_{\overline{a}}^{(n-1)}$ є визначеними. Позначимо

$$Z_n := \{\pi_n(\Phi) : \Phi \in \mathcal{F}_{n-1}\},$$

де $\pi_n(\Phi) = \Phi_n$ є звуженням гомоморфізма Φ на підпростір $\mathcal{P}({}^n(A \bigotimes_\pi X), A)$. Іншими словами, простір Z_n складається з гомоморфізмів на $\mathcal{P}({}^n(A \bigotimes_\pi X), A)$, які дорівнюють нулю на всіх поліномах з $\mathcal{P}({}^n(A \bigotimes_\pi X), A) \cap \mathcal{A}_{n-1}$. Якщо $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n-1}$, то $Z_n \equiv 0$. В іншому випадку, за наслідком 5.3.1, існують інші елементи в Z_n.

Для кожного $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}_{n-1} \subset \Omega$ покладемо

$$\pi_n(\Phi) + \pi_n(\Psi) := \pi_n(\Phi * \Psi).$$

Для довільного полінома $P \in \mathcal{P}({}^n(A \bigotimes_\pi X), A)$ виконується рівність $\pi_n(\Phi)(P) = \Phi(P)$. За лемою 5.3.1,

$$\pi_n(\Phi * \Psi)(P) = \Phi * \Psi(P) = \Phi(P) + \Psi(P) = \pi_n\Phi(P) + \pi_n\Psi(P).$$

Для довільного комплексного числа α маємо, що $\alpha\Phi \in M_A(H_b(A\bigotimes_\pi X), A)$ і $\pi_k(\alpha\overline{\Phi}) = \alpha\pi_k(\overline{\Phi})$. Таким чином, $\alpha\overline{\Phi}$ дорівнює нулю на всіх поліномах степеня k, де $k < n$. За теоремою 5.1.1 існує гомоморфізм $\Psi \in \Omega$ такий, що $\Psi_k = \alpha\Phi_k$ для $1 \leq k \leq n$. Тому, $\Psi \in \mathcal{F}_{n-1}$ і $\alpha\Phi_n = \Psi_n \in Z_n$.

Отже, Z_n є лінійним підпростором і поліноми з $\mathcal{P}(^n(A\bigotimes_\pi X), A)$ діють на Z_n як лінійні оператори.

Покладемо

$$W_n = \mathcal{P}(^n(A\bigotimes_\pi X), A)/(I_{n-1} \cap \mathcal{P}(^n(A\bigotimes_\pi X), A)).$$

Тоді W_n є банаховим простором лінійних операторів на Z_n і оператори з W_n розділяють точки простору Z_n.

Визначимо норму на Z_n як супремум значень векторів з Z_n на одиничній кулі простору W_n. Таким чином, $W_n' = (\mathcal{P}(^n(A\bigotimes_\pi X), A)/(I_{n-1} \cap \mathcal{P}(^n(A\bigotimes_\pi X), A)))' = \mathcal{P}(^n(A\bigotimes_\pi X), A)' \cap I_{n-1}^\perp = \mathcal{L}(H_b(A\bigotimes_\pi X); A) \supset Z_n$, де $I_{n-1}^\perp$ — підпростір в $\mathcal{P}(^n(A\bigotimes_\pi X), A)'$, який є біортогональний до I_{n-1}.

З іншого боку, якщо $u \in \mathcal{P}(^n(A\bigotimes_\pi X), A)' \cap I_{n-1}^\perp$, то за теоремою 5.1.1 $u = \pi_n(\Theta)$ для деякого $\Theta \in \Omega$. Тому $u \in Z_n$. Отже $Z_n = \mathcal{L}(H_b(A\bigotimes_\pi X); A)$.

Для довільного $\overline{w} \in Z_n$ визначимо гомоморфізм $\Psi(Q) =: \theta_{\overline{a}}^{(n)}(\overline{w})(Q)$ на однорідних поліномах за формулою:

$$\Psi(Q) = \begin{cases} \widetilde{Q}_{(m)}(\overline{w}), & \text{якщо } n = mk \text{ для деякого } k \geq 0 \\ 0, & \text{в іншому випадку,} \end{cases} \tag{5.4.1}$$

(де $\widetilde{Q}_{(m)}$ є продовженням Арона-Бернера полінома $Q_{(m)}$ з $\bigotimes_{s,\pi}^m(A\bigotimes_\pi X)$ на $\bigotimes_{s,\pi}^m(A\bigotimes_\pi X)''$ і продовжимо його до єдиного гомоморфізма на $H_b((A\bigotimes_\pi X), A)$ як у теоремі 5.1.1. Тоді $\theta_{\overline{a}}^{(n)}$ відображає Z_n в Ω. Для довільного $\Phi \in \Omega$ покладемо

$$u_1 := \Phi_1 \in (A \bigotimes_{\pi} X)'' = Z_1, u_2 := \Phi_2 - \theta_{\overline{a}}^{(1)}(u_1).$$

Очевидно, що $u_2 \in Z_2$. Припустимо, що ми визначили $u_k \in Z_k$, $k < n$. Тоді

$$u_n := \Phi_n - \mathop{\circledast}_{k=1}^{n-1} \theta_{\overline{a}}^{(k)}(u_k). \tag{5.4.2}$$

Покажемо, що $u_n \in Z_n$. Достатньо перевірити, що для кожного полінома $P \in \mathcal{P}({}^n(A \bigotimes_\pi X), A)$ такого, що $P = P_k P_m$, $\deg P_k = k \neq 0$, $\deg P_n = n \neq 0$ виконується $u_n(P) = 0$. З мультиплікативності Φ і леми 5.3.2 випливає

$$u_n(P) = \Phi_n(P_k P_m) - \mathop{\circledast}_{j=1}^{n-1} \theta_{\overline{a}}^{(j)}(u_j)(P_k P_m) =$$

$$\Phi_k(P_k)\Phi_m(P_m) - \left(\mathop{\circledast}_{j=1}^{n-1} \theta_{\overline{a}}^{(j)}(u_j)(P_k)\right) \times \left(\mathop{\circledast}_{j=1}^{n-1} \theta_{\overline{a}}^{(j)}(u_j)(P_m)\right) =$$

$$\left(u_k(P_k) + \mathop{\circledast}_{j=1}^{k-1} \theta_{\overline{a}}^{(j)}(u_j)(P_k)\right)\left(u_m(P_m) + \mathop{\circledast}_{j=1}^{m-1} \theta_{\overline{a}}^{(j)}(u_j)(P_m)\right) -$$

$$\left(\mathop{\circledast}_{j=1}^{k} \theta_{\overline{a}}^{(j)}(u_j)(P_k)\right)\left(\mathop{\circledast}_{j=1}^{m} \theta_{\overline{a}}^{(j)}(u_j)(P_m)\right) = 0.$$

Остання рівність виконується тому, що за індуктивним припущенням $u_k \in Z_k$, $u_m \in Z_m$ і, отже, за лемою 5.3.1

$$u_k(P_k) + \mathop{\circledast}_{j=1}^{k-1} \theta_{\overline{a}}^{(j)}(u_j)(P_k) = \mathop{\circledast}_{j=1}^{k} \theta_{\overline{a}}^{(j)}(u_j)(P_k) \tag{5.4.3}$$

і

$$u_m(P_m) + \mathop{\circledast}_{j=1}^{m-1} \theta_{\overline{a}}^{(j)}(u_j)(P_m) = \mathop{\circledast}_{j=1}^{m} \theta_{\overline{a}}^{(j)}(u_j)(P_m).$$

Розглянемо оператор $\mathop{\circledast}_{j=1}^{\infty} \theta_{\overline{a}}^{(j)}(u_j)$. Оскільки $u_k \in Z_k$, то за лемою 5.3.1

$$\mathop{\circledast}_{j=1}^{\infty} \theta_{\overline{a}}^{(j)}(u_j)(f) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathop{\circledast}_{j=1}^{n} \theta_{\overline{a}}^{(j)}(u_j)(f_n),$$

де $f = \sum f_n$ — ряд Тейлора функції f. Отже, оператор $\mathop{\circledast}\limits_{j=1}^{\infty} \theta_{\overline{a}}^{(j)}(u_j)$ є коректно визначеним на $\mathcal{P}((A \bigotimes_{\pi} X), A)$. З іншого боку, використовуючи (5.4.2) і (5.4.3) для довільного $P \in \mathcal{P}({}^n(A \bigotimes_{\pi} X), A)$ маємо:

$$\left(\Phi - \mathop{\circledast}\limits_{j=1}^{\infty} \theta_{\overline{a}}^{(j)}(u_j)\right)(P) = \Phi_n(P) - \mathop{\circledast}\limits_{j=1}^{n} \theta_{\overline{a}}^{(j)}(u_j)(P) = u_{n+1}(P) = 0.$$

Тому $\Phi = \mathop{\circledast}\limits_{j=1}^{\infty} \theta_{\overline{a}}^{(j)}(u_j)$ на $\mathcal{P}((A \bigotimes_{\pi} X), A)$. Отже, $\Phi = \mathop{\circledast}\limits_{j=1}^{\infty} \theta_{\overline{a}}^{(j)}(u_j)$ на $H_b((A \bigotimes_{\pi} X), A)$. $\square$

5.5. Некласичні диференціювання на $H_b(X)$

Під класичними диференціюваннями алгебри $H_b(X)$ ми розуміємо оператори диференціювання за напрямками $h \in X$:

$$\partial(h)(f)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}.$$

Легко бачити, що для n-однорідного полінома $P \in \mathcal{P}(^n X)$

$$\partial(h)(f)(x) = nA_P(\underbrace{x, \dots, x}_{n-1}, h),$$

і класичні диференціювання задовольняють формулу Лейбніца

$$\partial(h)(fg) = \partial(h)(f)g + f\partial(h)(f)g.$$

Таким чином, ми можемо визначити класичні A-значні диференціювання алгебри $H_b(X)$ за формулою

$$\overline{\partial}(\overline{h})(f)(\overline{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{\overline{f}(\overline{a} + t\overline{h}) - f(\overline{a})}{t},$$

де $\overline{h}, \overline{a} \in A \bigotimes_\pi X$ і h — фіксований ненульовий вектор. Символом $\overline{A}_P(\underbrace{\overline{a}, \dots, \overline{a}}_{n-1}, \overline{h})$ позначимо значення мультилінійної форми $A_P(\underbrace{\overline{a}, \dots, \overline{a}}_{n-1}, \overline{h})$ в сенсі функціонального числення від $n-1$ змінної. Аналогічно, як у скалярному випадку, $\overline{\partial}(\overline{h})(P)(\overline{a}) = n\overline{A}_P(\underbrace{\overline{a}, \dots, \overline{a}}_{n-1}, \overline{h})$ і для A-значних диференціювань виконується формула Лейбніца.

Нехай $u_k \in X_k$. Згідно з теоремою 2.21 ([72], ст 39), ми можемо визначити комплексний гомоморфізм $\phi \in M_b = \delta^{(k)}(u_k)$ так, що $\phi(f) = \widehat{f}(u_k)$ для кожної функції $f \in H_b(X)$. З іншого боку, u_k належить $(\bigotimes_{s,\pi}^k X)''$ і, отже, існує інший природній спосіб визначити лінійний функціонал на $H_b(X)$, за допомогою u_k. Нехай $\theta = \theta(u_k) = \sum \theta_m \in H_b(X)'$ такий функціонал, що $\theta_k(P) = \widehat{P}(u_k)$ якщо $P \in \mathcal{P}(^k X)$ і $\theta_m = 0$, якщо

$m \neq k$. Нагадаємо, що θ_m — звуження θ на підпростір $\mathcal{P}({}^k X)$. Легко бачити, що θ не є гомоморфізмом якщо $u_k \neq 0$. Визначимо лінійний оператор на $H_b(X)$, $\partial_{(k)}(u_k)$ формулою

$$\partial_{(k)}(u_k)(f)(x) := (\theta(u_k) \circ \tau_x)(f).$$

Для полілінійної форми A_P, асоційованої з n-однорідним поліномом P будемо позначати $\widehat{A_P}(x^{n-k}, u_k)$ значення перетворення Гельфанда в точці $u_k \in X_k$, застосованого до k-однорідного полінома $A^P(x^{n-k}, \cdot)$ для фіксованого x.

Теорема 5.5.1 ([105]). *Нехай $u_k \in X_k$. Тоді оператор $\partial_{(k)}(u_k)$ є неперервним диференціюванням на $H_b(X)$,*

$$\partial_{(k)}(u_k)(P)(x) = \binom{n}{k} \widehat{A_P}(x^{n-k}, u_k)$$

для кожного полінома $P \in \mathcal{P}({}^n X)$ і

$$\delta^{(k)}(u_k)(f)(x) = \exp\{(k!\,\partial_{(k)}(u_k))^{1/k}\}(f)(x)$$

для кожної функції $f \in H_b(X)$.

Нехай $u_k \in Z_k$. Застосовуючи теорему 5.4.2 можемо визначити гомоморфізм $\Phi = \mathop{\circledast}\limits_{n=1}^{\infty} \theta^{(n)}(u_n) \in \Omega$, $\Phi(\overline{f}) = \widetilde{\overline{f}}(u_k)$, для всіх $\overline{f} \in H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$. Крім того, елемент u_k належить до симетричного тензорного добутку спряжених просторів $(\bigotimes_{s,\pi}^k (A \bigotimes_\pi X))''$. Тоді існує інший природний спосіб задання лінійного функціонала на $H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$, асоційованого з u_k.

Нехай

$$\eta = \eta(u_k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+} \eta_m \in H_b(A \bigotimes_\pi X)',$$

де $\eta_k = \widetilde{\widetilde{P}}(u_k)$, якщо $P \in \mathcal{P}(^k(A \bigotimes_\pi X), A)$, і $\eta_m = 0$ при $m \neq k$. Через $\widetilde{\widetilde{P}}$ позначено продовження полінома $P \in \mathcal{P}(^n(A \bigotimes_\pi X), A)$ на простір $\mathcal{P}(^n(A \bigotimes_\pi X)'', A'')$. Зауважимо, що відображення η не є гомоморфізмом, якщо $u_k \neq 0$.

Визначимо лінійний оператор $\overline{\partial}_{(k)}(u_k)$ на $H_b(X)$:

$$\overline{\partial}_{(k)}(u_k)(f)(\overline{x}) := \eta(u_k) \circ \tau_{\overline{a}}(\overline{f}), \qquad \overline{f} \in H_b((A \bigotimes_\pi X), A).$$

Для мультилінійної форми A_P, асоційованої з n-однорідним поліномом $P \in \mathcal{P}(^n(A \bigotimes_\pi X), A)$, позначимо через $\overline{A}_P\left(\overline{x}^{n-k}, u_k\right)$ значення в сенсі функціонального числення у точці $u_k \in Z_k$ для k-однорідного полінома при фіксованому $\overline{x} \in (A \bigotimes_\pi X) : u_k \longmapsto \overline{A}_P\left(\overline{x}^{n-k}, \cdot\right)$.

Теорема 5.5.2. *Нехай $u_k \in Z_k$. Оператор $\overline{\partial}_{(k)}(u_k)$ є неперервним A-значним диференціюванням на $H_b(X)$,*

$$\overline{\partial}_{(k)}(u_k)(P)(\overline{x}) = \binom{n}{k} \widetilde{\widetilde{A}}_P\left(\overline{x}^{n-k}, u_k\right), \qquad \overline{x} \in A \bigotimes_\pi X \tag{5.5.1}$$

для всіх $P \in \mathcal{P}(^n(A \bigotimes_\pi X), A)$ і

$$\theta^{(k)}(u_k)(\overline{f})(\overline{x}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+} \frac{(k!)^m}{(mk)!} \overline{\partial}^m_{(k)}(u_k)(\overline{f})(\overline{x}), \qquad \overline{x} \in A \bigotimes_\pi X \tag{5.5.2}$$

для всіх $\overline{f} \in H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$.

Доведення. Для доведення формули (5.5.1) зауважимо, що

$$P(z + x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} A_P\left(x^{n-m}, z^m\right).$$

Ця рівність буде виконуватись у випадку, коли доданки z і x є елементами тензорного добутку:

$$P(\overline{z} + \overline{x}) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \widetilde{\widetilde{A}}_P\left(\overline{x}^{n-m}, \overline{z}^m\right), \qquad \overline{x}, \overline{z} \in A \bigotimes_\pi X.$$

Таким чином, для фіксованого $\overline{x} \in A \bigotimes_\pi X$ маємо

$$\overline{\partial}_{(k)}(u_k)(P)(\overline{x}) = \eta(u_k)\big(P(\overline{z} + \overline{x})\big) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \widetilde{\overline{A}}_P \left(\overline{x}^{n-k}, u_k\right).$$

Зауважимо, що при $\deg P \leq k$ з означення $\overline{\partial}_{(k)}(u_k)$ отримаємо $\overline{\partial}_{(k)}(u_k)(P)(\overline{x}) = 0$ для всіх $\overline{x} \in A \bigotimes_\pi X$.

Нехай $P \in \mathcal{P}({}^n(A \bigotimes_\pi X), A)$ і $Q \in \mathcal{P}({}^m(A \bigotimes_\pi X), A)$. Мультилінійну форму $\widetilde{\overline{A}}_{PQ}\left(\overline{x}^{nm-k}, \overline{z}^k\right)$, асоційовану з поліномом PQ можна подати у вигляді суми:

$$\widetilde{\overline{A}}_{PQ}\left(\overline{x}^{nm-k}, \overline{z}^k\right) = \widetilde{\overline{A}}^1_{PQ}\left(\overline{x}^{nm-k}, \overline{z}^k\right) + \widetilde{\overline{A}}^2_{PQ}\left(\overline{x}^{nm-k}, \overline{z}^k\right) + \widetilde{\overline{A}}^3_{PQ}\left(\overline{x}^{nm-k}, \overline{z}^k\right),$$

де

$$\widetilde{\overline{A}}^1_{PQ}\left(\overline{x}^{nm-k}, \overline{z}^k\right) := \widetilde{\overline{A}}_P\left(\overline{x}^{n-k}, \overline{z}^k\right) \widetilde{\overline{A}}_Q\left(\overline{x}^m\right),$$

$$\widetilde{\overline{A}}^2_{PQ}\left(\overline{x}^{nm-k}, \overline{z}^k\right) := \widetilde{\overline{A}}_P\left(\overline{x}^n\right) \widetilde{\overline{A}}_Q\left(\overline{x}^k, \overline{z}^{m-k}\right)$$

і

$$\widetilde{\overline{A}}^3_{PQ}\left(\overline{x}^{mn-k}, \overline{z}^k\right) := \frac{1}{k-1} \sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{\overline{A}}_P\left(\overline{x}^{n-s}, \overline{z}^s\right) \widetilde{\overline{A}}_Q\left(\overline{z}^{k-s}, \overline{x}^{m-k+s}\right).$$

Якщо $n \leq k$, тоді $\widetilde{\overline{A}}^1_{PQ} = 0$. Аналогічно, якщо $m \leq k$, тоді $\widetilde{\overline{A}}^2_{PQ} = 0$. Згідно з означенням $\eta(u_k)$ і u_k маємо

$$\eta(u_k)\widetilde{\overline{A}}^3_{PQ}\left(\overline{x}^{mn-k}, \overline{z}^k\right) = 0$$

для довільного фіксованого $\overline{x} \in A \bigotimes_\pi X$. Таким чином, ми показали, що виконується рівність

$$\overline{\partial}_{(k)}(u_k)(PQ)(\overline{x}) = \overline{\partial}_{(k)}(u_k)(P)(\overline{x})Q(x) + P(\overline{x})\overline{\partial}_{(k)}(u_k)(Q)(\overline{x}).$$

З лінійності оператора $\overline{\partial}_{(k)}(u_k)$ та тотожності Лейбніца випливає, що $\overline{\partial}_{(k)}(u_k)$ є оператором диференціювання на алгебрі $H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$. Неперервність $\overline{\partial}_{(k)}(u_k)$ випливає з неперервності $\eta(u_k)$ і неперервності оператора $\tau_{\overline{a}}$.

Нехай $P \in \mathcal{P}(^n(A \bigotimes_\pi X), A)$ і $n = km$. З рівності (5.5.1) маємо, що

$$\partial^m_{(k)}(u_k)(P) = \left(\begin{array}{c} km \\ k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} k(m-1) \\ k \end{array} \right) \cdots \left(\begin{array}{c} k \\ k \end{array} \right) \overline{\widetilde{P}}(u_k) = \frac{(mk)!}{(k!)^m}\, \theta^{(k)}(u_k)(P).$$

Отже,

$$\theta^{(k)}(u_k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+} \frac{(k!)^m}{(mk)!}\, \overline{\partial}^m_{(k)}(u_k),$$

тобто формула (5.5.2) доведена. $\square$

Висновки до розділу 5. Основним результатом цього розділу є теорема про загальний вигляд гомоморфізму Φ алгебри $H_b(X)$ в деяку комутативну банахову алгебру A таку, що A'' є комутативною і напівпростою, за умови, що Φ належить класу Ω, тобто може бути наближеним гомоморфізмами функціонального числення у слабко поліноміальній топології. Для отримання цього результату було узагальнено для A-значних аналітичних функцій обмеженого типу властивості оператора зсуву та операції згортки A-значних гомоморфізмів. Також доведено теорему про продовження A-значного лінійного оператора, який анулює однорідні поліноми степеня $m-1$ до $m \geq 2$ до A-значного гомоморфізму.

Наслідком отриманих результатів є побудова некласичних A-значних диференціювань алгебри $H_b(X)$.

Результати розділу опубліковані у працях [6, 87, 4, 2, 5, 88, 89].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено структуру та властивості A-значних гомоморфізмів алгебри цілих функцій обмеженого типу на $H_b(X)$ на банаховому просторі X, де A — комутативна банахова алгебра та описано деякі диференціювання, пов'язані з цими гомоморфізмами. Це дослідження є узагальненням відомих результатів про комплексно-значні гомоморфізми та диференціювання алгебри $H_b(X)$. Проте заміна поля комплексних чисел на довільну комутативну банахову алгебру A призвело до суттєвого ускладнення задачі і вимагало вирішення низки додаткових технічних проблем.

Аналогом функціоналу значення в точці δ_x і $f \mapsto f(x)$ для A-значних гомоморфізмів є гомоморфізм функціонального числення $\theta_{\overline{a}} : f \mapsto \overline{f}(\overline{a}), \overline{a} \in A \bigotimes_\pi X$. Кожен комплексний гомоморфізм $H_b(X)$ наближається гомоморфізмами вигляду δ_x у слабкополіноміальній топології. Тому, природнім є запитання про можливість аналогічної апроксимації A-значних гомоморфізмів гомоморфізмами вигляду $\theta_{\overline{a}}$. Виявилось, що в загальному випадку це не так, але у розділі 3 описано широкий клас гомоморфізмів (який позначено у розділі 5 як клас Ω), що допускають таку апроксимацію.

Іншим важливим інструментом в дослідженні комплексних гомоморфізмів алгебри $H_b(X)$ є продовження Арона-Бернера у другий спряжений простір X''. У тих випадках, коли гомоморфізм $\Phi : H_b(X) \to A$ належить класу Ω, відповідні гомоморфізми функціонального числення $\theta_{\overline{a}}$ є A-значними функціями на $H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$. Тому ми розглядаємо дію продовження Арона-Бернера на алгебру $H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$.

У четвертому розділі показано, що продовження Арона-Бернера не завжди є гомоморфізмом алгебр $H_b((A \bigotimes_\pi X), A)$ та $H_b((A \bigotimes_\pi X)'', A'')$, проте, оператор продовження буде гомоморфізмом, якщо A така комутативна алгебра, що A'' напівпроста і комутативна.

У п'ятому розділі розглянуто гомоморфізми з $H_b(X)$ в A які належать класу Ω і для випадку, коли A'' комутативна і напівпроста банахова алгебра. Для цього випадку доведено теорему, яка описує структуру таких гомоморфізмів в термінах операторів функціонального числення на симетричних тензорних добутках $A \bigotimes_\pi X$. Ці результати застосовано для побудови некласичних A-значних диференціювань алгебри $H_b(X)$.

Результати дисертаційного дослідження можуть бути застосовані до теорії аналітичних відображень на банахових просторах. Крім того, функціональне числення в алгебрі аналітичних функцій від багатьох змінних має широке застосування у теоретичній фізиці та квантовій механіці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Загороднюк А. В., Петрів Г. М. *Гомоморфізми алгебри цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі* // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2013. – Вип. 11. – С. 7–11.

2. Петрів Г. М. *Гомоморфізми алгебри цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі* // V Всеукраїнська наукова конференція “Нелінійні проблеми аналізу”, 19-21 вересня, 2013, Івано-Франківськ: тези доповідей. — Івано-Франківськ, 2013. — С. 56.

3. Петрів Г. М. *Продовження Арона-Бернера для функціонального числення в алгебрі аналітичних функцій обмеженого типу* // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, 24 лютого-2 березня, 2014, Ворохта: тези доповідей. — Івано-Франківськ, 2014. — С. 84.

4. Петрів Г. М. *Про гомоморфізми спеціального вигляду алгебри цілих функцій обмеженого типу* // IX-а Літня школа Всеукраїнська наукова конференція “Алгебра, топологія і аналіз”, 7-18 липня, 2014, Поляниця: тези лекцій і доповідей. — Поляниця, 2014. — С. 66.

5. Приймак (Петрів) Г. М. *Особливості побудови гомоморфізмів алгебри цілих функцій обмеженого типу* // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, 25 лютого-1 березня, 2015, Ворохта: тези доповідей. — Івано-Франківськ, 2015. — С. 60.

6. Приймак Г. *Некласичні диференціювання в алгебрах аналітичних функцій обмеженого типу спеціального вигляду* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2017. – Т. 60, № 3. – С. 133–137.

7. Приймак Г. М. *Некласичні диференціювання в алгебрах аналітичних функцій обмеженого типу* // VI Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу", 26-28 вересня, 2018, Івано-Франківськ – Микуличин: тези доповідей. — Івано-Франківськ, 2018. — С. 44.

8. Гофман К. *Банаховы пространства аналитических функций* // Москва: Издательство иностранной литературы. — 1963. – 312 с.

9. Енгелькинг Р. *Общая топология* // Пер. с англ.— Москва: Мир. — 1986. – 752 с.

10. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа* // Москва: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука". — 1976. – 543 с.

11. Немировский А. С., Семенов С. М. *О полиномиальной апроксимации функций на гильбертовом пространстве* // Математичиский зборник. — 1973. – Т.92, № 2. – С. 257–281.

12. Хелемский А. Я. *Лекции по функциональному анализу* // М: МЦНМО. — 2004. – 552 с.

13. Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A. *Algebras of symmetric holomorphic functions on* ℓ_p // Bull. London Math. Soc. — 2003. – Vol. 35. – P. 55–64.

14. Arens R. *The adjoint of a bilinear operation* // Proc. Amer. Math. Soc. — 1951. – Vol. 2. – P. 839–848.

15. Arikan N. *Arens Regularity and Reflexivity* // Quart J. Math. Oxford Ser. — 1981. – Vol. 32. – P. 383–388.

16. Aron R., Berner P. *A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings* // Bull. Soc. Math. France. — 1978. – Vol. 106. – P. 3–24.

17. Aron R. M., Boyd C., Choi Y. S., *Unique Hahn-Banach Theorem for spaces of homogeneous polynomials* // Journal of Australian Math. Soc. — 2001. – Vol. 70. – P. 387–400.

18. Aron R. M., Cole B. J., Gamelin T. W. *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space* // J. Reine Angew. Math. — 1991. – Vol. 415. – P. 51–93.

19. Aron R. M., Cole B. J., Gamelin T. W. *Weak-star continuous analytic functions* // Canad. J. Math. — 1995. – Vol. 47. – P. 673–683.

20. Aron R., Globevnic J. *Analytic functions on* c_0 // Madrid: Revista Matematica — 1989. — Vol. 2. – P. 27–34.

21. Aron R. M., Galindo P., Garcia D., Maestre M. *Regularity and algebras of analytic functions in infinite dimensions* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1996. – Vol. 348. – P. 543–559.

22. Aron R. M., Hervés C., Valdivia M. *Weakly Continuous Mappings on Banach Spaces* // Journal of Functional Analysis. — 1983. – Vol. 52, № 2. – P. 189–204.

23. Banach S. *Theorie def operations lineaires* // Monografie Mathematyczne, Warszawa. — 1932.

24. Bochnak J., Siciak J. *Analytic functions in topological vector spaces* // Studia Math. — 1971. – 39. – P. 77–112.

25. Boland P. *Holomorphic functions on nuclear spaces* // Trans. Amer. Math. Soc., — 1975. – 209. – P. 275–281.

26. Boutgain F. F. *New Banach Space Properties of Certain Spaces of Analytic Functions* // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. – 1983. – P. 945–951.

27. Burkill J. G. *Lectures On Approximation By Polynomials* // Tata Institute of Fundamental Research, Bombay. — 1959.

28. Cabello Sánchez F., García R., Villanueva I. *Extension of multilinear operators on Banach spaces* // Extracta Math. — 2000. – Vol. 15. – P. 291–334.

29. Carando D. *Extendible polynomials on Banach spaces* // J. Math. Anal. Appl. — 1999. – Vol. 233. – P. 359–372.

30. Carando D., Garcia D., Maestre M. *Homomorphisms and composition operators on algebras of analytic functions of bounded type* // Adv. Math. — 2005. – Vol. 197, № 2. – P. 607–629.

31. Carne T. K., Cole B., Gamelin T. W. *A uniform algebra of analytic functions on a Banach space* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1989. – Vol. 314. – P. 639–659

32. Cartan. H. *Theorie des filtres* // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1937. – Vol. 205. – P. 595–598.

33. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. *A multiplicative convolution on the spectra of algebras of symmetric analytic functions*

// Revista Matematica Complutense. — 2013. – Vol. 27, № 2. – P. 575–585.

34. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. *Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra* // Proc. Edinb. Math. Soc. — 2012. – Vol. 55, № 2. – P. 125–142.

35. D'Alessandro S. *Polynomial Algebras and Smooth Functions in Banach Spaces* // Università degli studi di Milano. Dissertation by: Stefania D'Alessandro, Matriculation no. R08964 — 2013–2014. – 62 p.

36. Dales H. G., Aeina P., Eschmeier J., Laursen K., Willis G. A. *Introduction to Banach Algebras, Operators and Harmonic Analysis* // Cambridge University Press. 2003. – 324 p.

37. Dales H.G. *Automatic continuity: a survey* // Bull. London Math. Soc. — 1978. – Vol. 10, № 2. – P. 129–183.

38. Davie A. M., Gamelin T. W. *A theorem on polynomial-star approximation* // Proc. Amer. Math. Soc. — 1989. – Vol. 106, – P. 351–356.

39. Daws M. *Arens regularity of the algebra of operators on a Banach space* // Bull. London Math. Soc. — 2004. – Vol. 36. –P. 493–503.

40. Dineen S. *Complex Analysis in Locally Convex Spaces* // N.H.: Mathematics Studies. — 1981. – 506 p.

41. Dineen S. *Holomorphy complete locally convex topologycal vector spaces* // "Séminaire Pierre Lelong: analyse". — 1971/72. – Vol. 332. – P. 77–111.

42. Dineen S. *Holomorphy types on a Banach spaces* // Studia Math. — 1977. – Vol. 34. – P. 241–288.

43. Dineen S. *Spectral theory, tensor products and infinite dimensional holomorphy* // J. Korean Math. Soc. — 2004. – Vol. 41, № 1. – P. 193–207.

44. Dineen S. *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces* // Springer, New York: Monographs in Mathematics. — 1999. – 543 p.

45. Dineen S., Hart R. E., Taylor C. *Spectra of tensor product elements III : holomorphic properties* // Math. Proc. R. Ir. Acad. — 2003. – Vol. 103, № 1. – P. 61–92.

46. Dineen S., Mujica J. *Banach spaces of homogeneous polynomials without the approximation property* // Czechoslovak Mathematical Journal. — 2015. – Vol. 65, № 2. – P. 367–374.

47. Dineen S., Mujica J. *The approximation property for spaces of holomorphic functions on infinite-dimensional spaces I* // Journal of Approximation Theory — 2004. – Vol 126.– P. 141–156.

48. Dineen S., Mujica J. *The approximation property for spaces of holomorphic functions on infinite dimensional spaces II* // Journal of Functional Analysis — 2010. – Vol 259.– P. 545–560.

49. Dineen S., Mujica J. *The approximation property for spaces of holomorphic functions on infinite dimensional spaces III* // RACSAM. — 2012. – Vol 106, № 2. – P. 457–469.

50. Duncan J., Hosseinium S. A. B. *The second dual of a Banach Algebra* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 1979. – Vol. 84. – P. 309–325.

51. Dunford N., Schwartz J. *Linear operators, Part I* // New York: Wiley. 1964.

52. Fréchet M., *Une definition fontionelle des polinômes* // Nouv. Ann. Math. — 1909. – Vol. 9. – P. 145–162.

53. Fréchet M. *Sur les fonctionnelles bilineaires* // T.A.M.S. — 1915. – Vol. 16. – P. 215–234.

54. Galindo P., Garcia D., Maestre M. *Holomorphic mappings of bounded type* // J. Math. Anal. Appl. — 1992. – Vol 166. – P. 236–246.

55. Galindo P., García D., Maestre M. *Entire functions of bounded type on Fréchet spaces* // Math. Nachr. — 1993. – Vol. 161. – P. 185–198.

56. Galindo P., García D., Maestre M., Mujica J. *Extension of multilinear mappings on Banach spaces* // Studia Math. — 1994. – Vol. 108. – P. 55–76.

57. Gamelin T. W. *Uniform algebras* // Chelsea, New York, second ed., 1984. – 257 p.

58. Gamelin T. W. *Analytic functions on Banach spaces* // Kluwer Acad. Publ., NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. — 1994. – Vol. 439. – P. 187–233.

59. García D., Lourenço M. L., Maestre M., Moraes L. A. *The spectrum of analytic mappings of bounded type* // J. Math. Anal. Appl. — 2000. – Vol. 245. – P. 447–470.

60. García D., Lourenço M. L., Moraes L. A., Paques O. W. *The spectra of some algebras of analytic mappings* // Indag. Math. — 1999. – Vol. 10. – P. 393–406.

61. Goldschmidt D. M. *Group Characters, Symmetric Functions, and the Hecke Algebras* // American Mathematical Society. University Lectures Series (Book 4). — 1993. – 73 p.

62. Gonzalo R., Jaramillo J. A. *Separating polynomials on Banach spaces* //Extracta Math. — 1997. – Vol. 12, № 2. – P. 145–164.

63. Gupta C.P. *On the Malgarange theorem for nuclearly entire functions of bounded type on a Banach space* // Rio de Janeiro: Notas de Matematica. — 1968. – 37 p.

64. Gonzales M., Gonzalo R., Jaramillo J. A. *Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces* // J. Lond. Math. Soc. — 1999. – Vol. 59, № 2. – P. 681–697.

65. Gutiérrez J. M., Villanueva I. *Extensions of multilinear operators and Banach space properties* // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics — 2003. – Vol. 133, № 3. – P. 549–566.

66. Hajek P., Johanis M. *Smooth analysis in Banach spaces* // Czech Republic: De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 2014. – 497 p.

67. Hennefeld I.O. *A note on the Arens products* // Pacific J. Math. — 1968. – Vol. 26. – P. 115-119.

68. Hervé M., *Analyticity in Infinite Dimensional Spaces* // Berlin, New York: de Gruyter Stud. in Math., Walter de Gruyter. — 1989. – Vol. 10. – 206 p.

69. Hille E., Philips R. S. *Functional analysis and semigroups* // Colloq. Publ., Amer. Math. Soc., — 1957. – Vol. 31. – p. 808.

70. Kirwan P., Ryan R. A. *Extendibility of homogeneous polynomials on Banach spaces* // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. – Vol. 126. – P. 1023–1029.

71. Lopushansky O., Zagorodnyuk A, *Representing measures and infinite-dimensional holomorphy.* // J. Math. Anal. Appl. — 2007. – Vol. 333. – P. 614–625.

72. Lopushansky O., Zagorodnyuk A. *Infinite Dimensional Holomorphy Spectra and Hilvertian Sttuctures* // Krakow: AGH University Press — 2013. – 142 p.

73. McArthur C. W. *Developments in Schauder basis theory* // Buletin of the American Mathematical Society — 1972. – Vol. 78, № 6. – P. 877–908.

74. Mallios A. *Topological Algebras. Selected Topics* // North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford: Mathematics Studies. — 1986. – Vol. 124 – 535 p.

75. Martin R. S. *Contributions to the theory of functionals. Ph. D. thesis* // University of California, 1932.

76. Mazet P. *Analytic Sets in Locally Convex Spaces* // N.H.: Mathematics Studies. — 1984. – 274 p.

77. Michael E. *Locally multiplicatively convex topological algebras* // Mem. Amer. Math. Soc. — 1952. – 82 p.

78. Moraes L. A. *Extension of holomorphic mappings from E to E''* // Proc. Amer. Math. Soc. — 1993. – V. 118. – P. 455–461.

79. Mujica J. *Holomorphic functions on Banach spaces* // Note di Matematica. — 2005/2006. – Vol 25, № 2. – P. 113–138.

80. Mujica J. *Complex Analysis in Banach Spaces* // North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford — 1986. – 447 p.

81. Nachbin L. *Topology on spaces of holomorphic mappings* // Springer — 1969. – 66 p.

82. Odell E., Tylli H-O. *Weakly compact approximation in Banach spaces* // American Mathematical Society — 2004. – Vol 357, № 3.– P. 1125–1159.

83. Pelczynski A. *A property of multilinear operations* // Studia Math. — 1957. – Vol. 16. – P. 173–182.

84. Petriv H. *The Aron-Berner extension for functional calculus in algebras of holomorphic functions on Banach spaces* // XV International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, Kyiv: conference materials II Algebra. Geometry. Analysis. 15-17 May, 2014. – P. 28.

85. Plichko A., Zagorodnyuk A. *On automatic continuity and three problems of "The Scottish Book" concerning the boundedness of polynomial functionals'* // J. Math. Anal. Appl. — 1998. – Vol. 220. – P. 477–494.

86. Pryimak H. M. *Homomorphisms and functional calculus in algebras of entire functions on Banach spaces* // Carpathian Mathematical Publications. — 2015. – Vol. 7, № 1. – P. 108–113.

87. Pryimak H. *Description of homomorphisms of algebras of analytic functions on Banach spaces* // International Journal of Mathematical Analysis. — 2016. – Vol. 10, № 14. – P. 669–676.

88. Pryimak H. M. *Homomorphisms and functional calculus on algebras of analytic functions on Banach spaces* // II International Seminar on Analytic Functions. - Ivano-Frankivsk, June 1-3, 2015. – C.13–14.

89. Pryimak H. *Description of homomorphisms of algebras of analytic functions on Banach spaces* // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. - Ворохта. 22-25 лютого, 2017. – С.115–116.

90. Pryimak H. M. *On approximation of homomorphisms of algebras of entire functions on Banach spaces* // Carpathian Mathematical Publications. — 2019. – Vol. 11, № 1. – P. 158 – 162.

91. Ryan R. A. *Application of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy* // Ph.D. thesis, Trinity College Dublin — 1980.

92. Ryan R. A. *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces* // Springer: London, Berlin, Heidelberg, New York, Barselona, Hong Kong, Milan, Paris, Singapore, Tokyo. — 2002. – 225 p.

93. Rudin W. *Functional Analysis* McGraw-Hill: New York — 1991. – 424 p.

94. Sanchez C. F., Garcia R., Villanueva I. *Extension of multilinear operators on Banach spaces* // Extracta Math. — 2000. – Vol. 15. – P. 291–334.

95. Sharyn S. V. *Joint functional calculus in algebra of polynomial tempered distributions* //Methods of Functional Analysis and Topology — 2016. – Vol. 22. – P. 62–73.

96. Stone M. H. *The theory of representations for Boolean algebras* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1936. – Vol. 40. – P. 37–111.

97. Taylor A. E. *Analytic functions in general analysis* // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — 1937. – Vol. 6, № 2. – P. 277–292.

98. Taylor A. E. *Additions to the theory of polynomials in normed line spaces* // Tohoku Math. Journal. — 1938. – Vol. 44. – P. 302–318.

99. Ulger A. *Arens regularity of the algebra* $A\widehat{\otimes}B$ // Trans. Amer. Math. Soc. — 1988. – Vol. 305, № 2. – P. 623–639.

100. Ulger A. *Arens regularity of weakly sequentially complete banach algebras* // Proc. Math. Soc. — 1999. – Vol. 127, № 11. – P. 3221–3227.

101. Ulger A. *Some stability properties of Arens regular bilinear operators* // Proc. of the Edinburgh Math. Soc. — 1991. – Vol. 34. – P. 443–454.

102. Ulger A. *Weakly compact bilinear forms and Arens regularity* // Proc. Amer. Math. Soc. — 1987. – Vol. 101. – P. 697–704.

103. Waelbroeck L. *Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives* // J. Math. Pures Appl. — 1954. – Vol. 33. – P. 147–186.

104. Zagorodnyuk A. V. *Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces* // Proc. Amer. Math. Soc. — 2006. – Vol. 134. – P. 2559–2569.

105. Zagorodnyuk A. V. *Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces* // Contemp. Math. — 2007. – Vol. 435. – P. 381–394.

106. Zalduendo I. *A canonical Extension for Analytic Functions on Banach Spaces* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1990. – Vol. 320. – P. 747–763.

107. Zalduendo I. *Extending polynomials on Banach spaces—a survey* // Revista de la Union Matematica Argentina. — 2005. – Vol. 46 № 2. – P. 45–72.

108. Zorn M. A. *Characterization of analytic functions in Banach spaces* // Ann. of Math. J. — 1945. – Vol. 46. – P. 585–593.

109. Zorn M. A. *Gateux differentiability and essential boundedness* // DukeMath. J. — 1945. – Vol. 12. – P. 579–583.

ДОДАТКИ

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Загороднюк А. В., Петрів Г. М. *Гомоморфізми алгебри цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі* // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2013. – Вип. 11. – С. 7–11.

2. Pryimak H. M. *Homomorphisms and functional calculus in algebras of entire functions on Banach spaces* // Carpathian Mathematical Publications. — 2015. – Vol. 7, № 1. – P. 108–113. doi:10.15330/cmp.7.1.108-113

3. Pryimak H. *Description of homomorphisms of algebras of analytic functions on Banach spaces* // Int. Journal of Math. Analysis. — 2016. – Vol. 10, № 14. – P. 669–676. doi:10.12988/ijma.2016.6459

4. Приймак Г. *Некласичні диференціювання в алгебрах аналітичних функцій обмеженого типу спеціального вигляду* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2017. – Т. 60, № 3. – С. 133–137.

5. Pryimak H. M. *On approximation of homomorphisms of algebras of entire functions on Banach spaces* // Carpathian Mathematical Publications. — 2019. – Vol. 11, № 1. – P. 158 – 162.

6. Петрів Г. М. *Гомоморфізми алгебри цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі* // V Всеукраїнська наукова конференція “Нелінійні проблеми аналізу”, 19-21 вересня, 2013, Івано-Франківськ: тези доповідей. — Івано-Франківськ, 2013. — С. 56.

7. Петрів Г. М. *Продовження Арона-Бернера для функціонального числення в алгебрі аналітичних функцій обмеженого типу* // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, 24 лютого-2 березня, 2014, Ворохта: тези доповідей. — Івано-Франківськ, 2014. — С. 84.

8. Petriv H. *The Aron-Berner extension for functional calculus in algebras of holomorphic functions on Banach spaces* // XV International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, Kyiv: conference materials II Algebra. Geometry. Analysis. 15-17 May, 2014. – P. 28.

9. Петрів Г. М. *Про гомоморфізми спеціального вигляду алгебри цілих функцій обмеженого типу* // IX-а Літня школа Всеукраїнська наукова конференція “Алгебра, топологія і аналіз”, 7-18 липня, 2014, Поляниця: тези лекцій і доповідей. — Поляниця, 2014. — С. 66.

10. Приймак (Петрів) Г. М. *Особливості побудови гомоморфізмів алгебри цілих функцій обмеженого типу* // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, 25 лютого-1 березня, 2015, Ворохта: тези доповідей. — Івано-Франківськ, 2015. — С. 60.

11. Pryimak H. M. *Homomorphisms and functional calculus on algebras of analytic functions on Banach spaces* // II International Seminar on Analytic Functions. - Ivano-Frankivsk, June 1-3, 2015. – C.13–14.

12. Pryimak H. *Description of homomorphisms of algebras of analytic functions on Banach spaces* // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”. Тези доповідей. - Ворохта. 22-25 лютого, 2017. – С.115–116.

13. Приймак Г. М. *Некласичні диференціювання в алгебрах аналітичних функцій обмеженого типу* // VI Всеукраїнська наукова конференція “Нелінійні проблеми аналізу”, 26-28 вересня, 2018, Івано-Франківськ – Микуличин: тези доповідей. — Івано-Франківськ, 2018. — С. 44.

ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Результати дисертації доповідалися і обговорювалися на таких конференціях та семінарах:

1. V Всеукраїнській науковій конференції “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ, 19–21 вересня 2013 р.);

2. Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 24 лютого – 2 березня 2014 р.);

3. П’ятнадцятанадцятій Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 15–17 травня 2014 р.);

4. IX-а Літній школі “Алгебра, топологія і аналіз” (Поляниця, 7–18 липня 2014 р.);

5. Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 25 лютого –1 березня 2015 р.);

6. Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 22–25 лютого 2017. р.);

7. VI Всеукраїнській науковій конференції “Нелінійні проблеми аналізу”(Микуличин, 26–28 вересня 2018. р.);

8. Наукових семінарах кафедри математичного і функціонального аналізу "Прикладний нелінійний аналіз” ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника” (керівник – д. фіз.-мат. н., проф. А. В. Загороднюк)(2014, 2016, 2018, 2019).