ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І
МАТЕМАТИКИ ІМ. Я. С. ПІДСТРИГАЧА НАН УКРАЇНИ
ДВНЗ “ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА”
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Ладзоришин Наталія Богданівна

УДК 512.64+512.55

ДИСЕРТАЦІЯ

Еквівалентність матриць над квадратичними кільцями та матричні рівняння

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. ____________ Н.Б.Ладзоришин

Науковий керівник:
Петричкович Василь Михайлович
доктор фізико-математичних наук,
професор

Львів – 2019

АНОТАЦІЯ

Ладзоришин Н.Б. Еквівалентність матриць над квадратичними кільцями та матричні рівняння. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 — алгебра та теорія чисел. — Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. — ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", Івано-Франківськ, 2019.

Вивчення кілець, над якими кожна матриця еквівалентна до діагональної матриці з інваріантними множниками на головній діагоналі, розпочалося ще у 19 столітті і є актуальним до цього часу. В той же час при дослідженні багатьох важливих задач необхідно використовувати інші типи еквівалентностей матриць над різними областями, тобто еквівалентностей при яких перетворювальні матриці належать до різних підгруп повної лінійної групи кільця. Спеціальні форми, до яких зводяться матриці щодо таких перетворень, використовуються при побудові факторизацій матриць над кільцями, при розв'язуванні матричних лінійних рівнянь. Матриці над квадратичними кільцями виникають і використовуються в теорії чисел та інших розділах математики.

Матричні лінійні рівняння, зокрема типу Сильвестра та матричні діофантові рівняння, відіграють важливу роль в багатьох прикладних напрямках, зокрема в теорії стійкості, динамічних систем, теорії оптимального керування тощо. Ці матричні рівняння достатньо добре дослідженні у випадку, коли матриці-коефецієнти є матрицями над полем та кільцем поліномів. Для матричного двобічного поліноміального рівняння встановлені умови існування розв'язків, степені яких менші за степені відповідних матриць-коефіцієнтів. Досліджуються розв'язки матричних однобічних

та двобічних рівнянь над комутативною областю Безу.

У дисертаційній роботі досліджено еквівалентність матриць і їх пар над квадратичними кільцями. Встановлено простіші форми матриць і їх пар відносно спеціальної еквівалентності і використано їх при розв'язуванні матричних лінійних однобічних та двобічних рівнянь над квадратичними кільцями та опису структури розв'язків цих рівнянь.

Дисертаційна робота складається з анотації, переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел, а також з додатків, що містять список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, наведено огляд відомих результатів, сформульовано мету і задачі дослідження, висвітлено наукову новизну та апробацію одержаних результатів. Наведено інформацію щодо публікацій за темою дисертації та про структуру роботи.

У першому розділі розглянуто деякі типи еквівалентностей матриць над різними кільцями, зокрема поліноміальними, головних ідеалів, адекватними кільцями тощо. Наведено відомі канонічні та стандартні форми матриць і їх пар відносно цих перетворень. Вказано на використанння матриць над квадратичними кільцями в інших розділах математики та в прикладних напрямках. Сформульовано відомий критерій Рота розв'язності матричних рівнянь типу Сильвестра та умови існування розв'язків матричних діофантових рівнянь над полем та деякими кільцями, зокрема над кільцями головних ідеалів, кільцями елементарних дільників.

У другому розділі введено поняття (z,k)-еквівалентності матриць над квадратичними кільцями. Встановлено, що матриці A над квадратичними евклідовими кільцями та квадратичними кільцями головних ідеалів (z,k)-еквівалентними перетвореннями, тобто за допомогою елементарних рядкових операцій над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ і елементарних стовпцевих операцій над квадратичним кільцем $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$, зводяться до спеціальної нижньої трикутної форми T^A з інваріантними множниками матриці A на головній діагоналі і елементи під головною діагоналю вибрані з евклідовими нормами, меншими, ніж евклідові норми відповідних інваріантних множників на головній діагоналі, якщо квадратичне кільце евклідове і належать до повних систем лишків за модулями відповідних інваріантних множників на головній діагоналі, якщо квадратичне кільце є кільцем головних ідеалів. Ця трикутна матриця T^A названа стандартною формою матриці A відносно (z,k)-еквівалентності. Показано, що число стандартних форм T^A матриці A над квадратичними евклідовими уявними кільцями є скінченним. Отже, матриці A і B над квадратичним евклідовим уявним кільцем (z,k)-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їхні скінченні множини стандартних форм T^A і T^B мають спільну стандартну форму. Доведено також, що для матриці A над кільцем цілих гаусових чисел $\mathbb{Z}[i]$ з евклідовою нормою її визначника detA меншою, ніж чотири, стандартною формою T^A є канонічна діагональна форма D^A матриці A. Тому матриці A і B над кільцем цілих гаусових чисел з евклідовими нормами їх визначників меншими, ніж чотири, (z,k)-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли матриці A і B еквівалентні.

Введене у другому розділі поняття (z,k)-еквівалентності матриць над квадратичними кільцями поширено у третьому розділі для пар матриць над цими кільцями. Пари матриць (A_1, B_1) і (A_2, B_2) над квадратичним кільцем названі (z,k)-еквівалентними, якщо для матриць A_1 і A_2 існують такі спільна оборотна над кільцем $\mathbb{Z}$ матриця S і для матриць B_1 і B_2 різні оборотні матриці Q_1, Q_2 над кільцем $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$, що $B_1 = SA_1Q_1$ і $B_2 = SA_2Q_2$. Показано, що не кожна пара матриць над квадратичним кільцем (z,k)-еквівалентна до пари матриць у стандартних формах. Доведено, що пари матриць над квадратичними евклідовими кільцями та квадратичними кільцями головних ідеалів, визначники яких є взаємно простими або є степенями простих чисел у квадратичному кільці, (z,k)-

ек вівалентними перетвореннями пар матриць зводяться до стандартних форм. Встановлено, що стандартних пар (T^A, T^B) пари матриць (A, B) над квадратичними евклідовими уявними кільцями є скінченна кількість. Звідси одержуємо критерій (z,k)-еквівалентності пар матриць. Пари матриць (A_1, B_1) і (A_2, B_2) над квадратичними евклідовими уявними кільцями (z,k)-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли у скінченних множинах стандартних пар (T^{A_1}, T^{B_1}) і (T^{A_2}, T^{B_2}) пар матриць (A_1, B_1) і (A_2, B_2) існує спільна стандартна пара матриць.

Четвертий розділ присвячено дослідженню матричних лінійних рівнянь вигляду $AX+YB=C$ і $AX+BY=C$, тобто матричних рівнянь типу Сильвестра та матричних діофантових рівнянь, над квадратичними кільцями. Відомо, що серед квадратичних кілець є квадратичні евклідові кільця, квадратичні кільця головних ідеалів. Є також квадратичні кільця, які не є кільцями головних ідеалів. Наприклад, у кільці $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\,\right]$ не існує поняття найбільшого спільного дільника його елементів. Тому, наведені у першому розділі, відомі критерії розв'язності цих матричних лінійних рівнянь не можуть бути використані для таких матричних рівнянь над кожним квадратичним кільцем. У цьому розділі запропоновано критерії розв'язності матричних лінійних рівнянь $AX+YB=C$ і $AX+BY=C$ над будь-яким квадратичним кільцем та наведено спосіб знаходження розв'язків цих рівнянь. Описано цілочислові розв'язки, тобто розв'язки з елементами із кільця цілих чисел матричних рівнянь. Наведено критерії існування цілочислових розв'язків матричних рівнянь та їх єдиності. Вказано спосіб побудови цілочислових розв'язків рівнянь. Розв'язування цих матричних рівнянь зведено до розв'язування матричних лінійних рівнянь над кільцем цілих чисел.

Встановлені у розділах 2 і 3 стандартні форми матриць та їх пар над квадратичними кільцями відносно (z,k)-еквівалентності у п'ятому розділі застосовано для побудови методів розв'язування матричних рівнянь $AX + YB = C$ і $AX + BY = C$ та дослідження структури їх розв'язків. Розв'язування матричних рівнянь типу Сильвестра та матричних діофантових рівнянь зведено до розв'язування відповідних матричних рівнянь з трикутними матрицями-коефіцієнтами у стандартних формах. Вказано, що розв'язні матричні рівняння мають розв'язки з обмеженими евклідовими нормами. Встановлено, що таких розв'язків матричних рівнянь над квадратичними евклідовими уявними кільцями є скінченна кількість. Розв'язування матричних рівняннь з матрицями-коефіцієнтами у трикутних стандартних формах зводяться до розв'язування системи лінійних рівнянь, в які входять лінійні діофантові рівняння. Розв'язування цієї системи зводиться до послідовного розв'язування лінійних двочленних діофантових рівнянь, методи розв'язування яких відомі. З розв'язків цієї системи рівнянь складаємо розв'язки матричних рівнянь.

Результати дисертаційної роботи є теоретичними. Вони можуть бути використані при подальших дослідженнях структури матриць над квадратичними та іншими кільцями, при розв'язуванні матричних рівнянь. Ці результати можуть знайти застосування і у прикладних напрямках, у яких виникають такого типу матричні рівняння і які потребують описання структури їх розв'язків.

Ключові слова: квадратичне кільце, матриці над квадратичними кільцями, (z,k)-еквівалентність матриць, стандартна форма матриці, матричне рівняння Сильвестра, матричне діофантове рівняння, розв'язок матричного рівняння.

Ladzoryshyn N.B. Equivalence of matrices over quadratic rings and matrix equations. — Qualifying scientific work on rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.06 — algebra and number theory. — Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2019.

The study of the rings over which each matrix is equivalent to a diagonal matrix with invariant factors on the main diagonal began in the 19th century and is actual to this time. However, for the study of many important problems, it is necessary to use other types of equivalences of matrices over different domains, that is, the equivalences in which the transformation matrices belong to some subgroups of the complete linear group of the ring. The special forms for which matrices are reduced for such transformations are used in constructing factorizations of matrices over rings, solving matrix linear equations. Matrices over quadratic rings arise and are used in number theory and other sections of mathematics.

Matrix linear equations, such as Sylvester-type and matrix Diophantine equations play an important role in many applications directions, in particular in the theory of stability, dynamic systems, theory optimal control and more. These matrix linear equations are sufficiently well investigated in the case where matrix coefficients are matrices over a field, a ring of polynomials, and the principal ideal rings. For a matrix bilateral polynomial equation, conditions for the existence of solutions whose degree are less than the degree of corresponding matrix-coefficients are established. The solutions of matrix unilateral and bilateral equations over the commutative Bezout domain are studied.

In the thesis we investigated the equivalence of matrices and their pairs over quadratic rings. Simpler matrix forms and their pairs with respect to special equivalence are installed and used them with solving matrix linear unilateral and bilateral equations over quadratic rings and description of the structure

of these solutions equations.

The thesis consists of abstract, list of symbols, introduction, five chapters, conclusions, list of sources used, as well as from the annexes containing the list of publisher's publications on the theme of the dissertation and information about testing the results.

In the introduction, the relevance of the topic is substantiated, the review of known results is given, the purpose and tasks of the research are formulated, the scientific novelty and the testing of the obtained results are highlighted. The information on publications on the topic of the dissertation is given and the structure of work is allocated.

In the first section, we consider some known types of equivalences matrices over different rings, in particular polynomial, principal ideal rings, adequate rings, and so on. Are given the well-known canonical and standard matrix forms and their pairs in relation to these transformations. It is indicated on the use of matrices over quadratic rings in other sections of mathematics and applied directions.

The well-known Roth's criterion for solvability of Sylvester matrix equations is given and conditions for the existence of solutions of matrix diophantine equations over field and some rings, in particular over the principal ideal rings, elementary divisor rings.

In the second section it is introduced the concept of (z,k)-equivalence of matrices over quadratic rings. It is established that the matrices A over the Euclidean quadratic rings and the quadratic principal ideal rings (z,k)-equivalent transformations, that is, for using elementary row operations over the ring of integers $\mathbb{Z}$ and elementary column operations over quadratic ring $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ are reduced to a special triangular form T^A with the invariant factors of matrix A on the main diagonal. The elements under the main diagonal are selected with Euclidean norms, less than the Euclidean norms of the corresponding invariant factors for the main diagonal if the quadratic ring is Euclidean and belongs to complete systems of excess by the modules of the corresponding invariants multipliers on the main diagonal if the quadratic ring is a principal ideal ring. This triangular matrix T^A is called the standard form by the matrix A with respect to the (z,k)-equivalence. It is shown that the number of standard forms T^A of the matrix A over Euclidean imaginary quadratic rings are finite. Hence, the matrices A and B over the Euclidean imaginary quadratic ring are (z,k)-equivalent then and only when their finite sets of standard forms T^A and T^B have the same standard form. It is also proved that for the matrix A over the ring of Gaussian integers $\mathbb{Z}[i]$ with the Euclidean norm of its determinant detA being less than four, the standard form T^A is canonically diagonal form D^A of matrix A. Therefore, the matrices A and B over the ring of Gaussian integers with Euclidean norms of their determinants being less than four, (z,k)-equivalent if and only if the matrices A and B are equivalent.

Introduced in the second section of the concept (z,k)-equivalence of matrices over quadratic rings is distributed in the third section for pairs matrices over these rings. Pairs of matrices (A_1, B_1) and (A_2, B_2) over a quadratic ring are called (z,k)-equivalent if for matrices A_1 and A_2 there exist such a invertible matrix S over the ring $\mathbb{Z}$ and for of the matrices B_1 and B_2 different invertible matrices Q_1, Q_2 over the ring $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ that $B_1 = SA_1Q_1$ and $B_2 = SA_2Q_2$. It is shown that not every pair of matrices over a quadratic ring is (z,k)-equivalent to a pair of matrices in standard forms. It is proved that the pair of matrices over the Euclidean quadratic rings and the quadratic principal ideal rings, which are relatively prime determinants or determinants are degree of primes in a quadratic ring is (z,k)-equivalent to pairs transformation matrices are reduced to standard forms. It is established that the number of standard pairs (T^A, T^B) of pairs of matrices (A, B) over Euclidean imaginary quadratic rings are finite. Pairs of matrices (A_1, B_1) and (A_2, B_2) over the Euclidean imaginary quadratic rings are (z,k)-equivalent if and only if in finite sets standard pairs (T^{A_1}, T^{B_1}) and (T^{A_2}, T^{B_2}) of pairs of matrices (A_1, B_1) and (A_2, B_2) is a common standard pair of matrices.

The fourth section is devoted to the study of matrix linear equations the form $AX + YB = C$ and $AX + BY = C$, namely equation Sylvester-type and matrix Diophantine equations over quadratic rings. It is well known that among quadratic rings are the Euclidean quadratic rings, quadratic principal ideal rings. There are also quadratic rings, which are not the principal ideal rings. For example, in the ring $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\ \right]$ is there is not the concept of the greatest common divisor of its elements. So the first section of the well-known criteria of solvability of these matrix linear equations can not be used for such matrix equations over each quadratic ring. In this section the criteria of solvability of matrix linear equations $AX + YB = C$ and $AX + BY = C$ over any quadratic ring are proposed and a method for solving these equations is given. Integer solutions are described, that is, the solutions with elements of the ring of integers of the matrix equations. The criteria for existence of integer solutions of matrix equations are given. The method of constructing integer solutions of these equations is suggested. Solving these matrix equations are reduced to solving matrix linear equations over the ring of integers.

In the fifth section, standard forms are established in sections 2 and 3 matrices and their pairs over quadratic rings with respect to (z,k)-equivalence are applied for construction of effective methods for solving matrix equations $AX + YB = C$ and $AX + BY = C$ and study the structure of their solutions. Solving of matrix Sylvester-type equations and matrix Diophantine equations are reduced to solving the corresponding matrix equations with matrix-coefficients in standard forms. It is shown that these solving matrix equations have solutions with limited of Euclidean norms. It is found that such solutions are matrix equations over Euclidean imaginary quadratic rings are finite number. Matrix equations with triangular coefficient matrices in standard forms are equivalent to the system of linear equations in which are includes of linear diophantine equations. Solving this system boils down to the sequential solution of the linear bilateral diophantine equations, the methods of which are known. With solutions of this system of equations are the solutions of the matrix equations.

The results of this dissertation research are theoretical. They can be used for the further research on the structure of matrices over quadratic and other rings, when solving matrices equations. These results can be applied in applications directions in which arise such a matrix equation and the need to describe the structure of their solutions.

Key words: quadratic ring, matrices over quadratic rings, (z,k)-equivalence of matrices, standard form of matrix, Sylvester matrix equations, matrix Diophantine equation, solving of matrix equation.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНО ОСНОВНІ НАУКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Зеліско В.Р., Ладзоришин Н.Б., Петричкович В.М. *Про еквівалентність матриць над квадратичними евклідовими кільцями* // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2006. — вип 4. — С. 16–21.

2. Ладзоришин Н.Б. *Про еквівалентність пар матриць, визначники яких є степенями простих чисел, над квадратичними евклідовими кільцями* // Карпатські мат. публ. — 2013. — Т. 5, №1. — С. 63–69.

3. Ladzoryshyn N., Petrychkovych V. *Equivalence of pairs of matrices with relatively prime determinants over quadratic rings of principal ideals* // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2014. — No.3(76). — P. 38–48.

4. Ладзоришин Н.Б. *Цілочислові розв'язки матричних лінійних односторонніх і різносторонніх рівнянь над квадратичними кільцями* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2015. — Т. 58, №2. — С. 47–54. (Те саме: Ladzoryshyn N.B. *Integer solutions of matrix linear unilateral and bilateral equations over quadratic rings* // J. Math. Sci. — 2017. — Vol. 223, No. 1. — P. 50–59.)

5. Ладзоришин Н., Петричкович В. *Матричні лінійні одно- та двобічні рівняння над квадратичними кільцями* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2018. — вип. 85. — С. 32–40.

6. Ладзоришин Н.Б., Петричкович В.М. *Стандартна форма матриць над квадратичними кільцями відносно (z,k)-еквівалентності та структура розв'язків матричних двобічних лінійних рівнянь* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2018. — Т. 61, №2. — С. 49–56.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Zelisko V., Ladzoryshyn N. *On equivalence and factorization of matrices over quadratic rings* // 6^{th} International Algebraic Conference in Ukraine (Kamyanets-Podilsky, July 1–7, 2007): book of abstracts. — P. 231–232.

2. Ладзоришин Н.Б. *Про еквівалентність деяких пар матриць над квадратичними евклідовими кільцями* // XIII міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, Україна, 13–15 травня, 2010 р.): матеріали в 2-х томах. — Том 2. — Київ, 2010. — С. 166.

3. Ladzoryshyn N., Petrychkovych V. *Equivalence of pairs of matrices with relatively prime determinants over quadratic principal ideal rings* // 9-th

International Algebraic Conference in Ukraine (L'viv, July 8–13, 2013): book of abstracts. — L'viv, 2013. — P. 109.

4. Ladzoryshyn N. *The integral solutions of bilateral linear matrix equations over quadratic rings* // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L.A. Kaluzhnin (Kyiv, July 7–12, 2014): book of abstracts. — Kyiv, 2014. — P. 52.

5. Ladzoryshyn N., Petrychkovych V. *On solutions of the matrix linear equations over quadratic rings* // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd (Odessa, August 20–27, 2015): abstracts. — Odessa, 2015. — P. 61.

6. Ladzoryshyn N., Petrychkovych V. *(z,k)-equivalence of matrices over Euclidean quadratic rings and solutions of matrix equation AX+YB=C* // XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky (Vinnytsia, July 02–06, 2019): abstracts. — Vinnytsia, 2019. — P. 63–64.

Зміст

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

R	— кільце;
F	— поле;
$\mathbb{K}$	— квадратичне кільце, тобто $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$;
$\mathcal{E}(a)$	— евклідова норма елемента a;
$U(R)$	— група одиниць кільця R;
R_a	— повна множина лишків за модулем $a \in R$;
$M(m,\ n,\ R)$	— множина $m \times n$-матриць над R;
$M(n,\ R)$	— кільце $n \times n$-матриць над R;
$GL(n, R)$	— повна лінійна група, тобто група оборотних матриць із $M(n,\ R)$;
$\mathrm{row}_i\,(A)$	— i-ий рядок матриці A;
$\mathrm{col}_j\,(A)$	— j-ий стовпець матриці A;
rangA	— ранг матриці A;
$\det A$	— визначник матриці A;
$d = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$	— найбільший спільний дільник елементів $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$;
d_k^A	— найбільший спільний дільник мінорів k-го порядку матриці A;
I	— одинична матриця;
$\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$	— діагональна матриця з елементами $a_1, a_2,\ \ldots,\ a_n$ на головній діагоналі;
$D^A = \mathrm{diag}(\mu_1^A,\ \mu_2^A, \ldots,\ \mu_n^A)$	— канонічна діагональна форма матриці A;
μ_i^A	— i-ий інваріантний множник матриці A,
$A \otimes B$	— добуток Кронекера двох матриць A і B.

ВСТУП

Актуальність теми. Інтенсивне вивчення еквівалентності матриць розпочинається із середини 19 століття. Так першим важливим результатом у цьому напрямку вважається стаття Г.Сміта [84], опублікована в 1861 р., в якій встановлено, що цілочислова матриця A, тобто матриця з елементами з кільця цілих чисел $\mathbb{Z}$ за допомогою елементарних операцій над рядками і стовпцями зводиться до діагонального вигляду з подільністю діагональних елементів. Іншими словами, для матриці A існують такі оборотні матриці U і V над $\mathbb{Z}$, що

$$UAV = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r, 0, \ldots, 0), \ \ \mu_r \neq 0$$

і $\mu_i^A | \mu_{i+1}^A$, $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Ця діагональна матриця названа нормальною формою Сміта матриці A. В подальшому багатьма авторами встановлювалися нові кільця, над якими кожна матриця еквівалентна до нормальної форми Сміта. Ці кільця названі кільцями елементарних дільників [65]. Такими є кільця поліномів над полем, кільця головних ідеалів як комутативні так і не комутативні, адекватні кільця. У [19, 11, 12, 90, 91] вказані нові класи кілець елементарних дільників.

На відміну від такого класичного поняття еквівалентності матриць, в багатьох задачах виникає потреба досліджувати інші типи еквівалентностей матриць над різними областями, тобто еквівалентності, при яких перетворювальні матриці належать до різних підгруп повної лінійної групи. Такими є, наприклад, елементарна еквівалентність матриць [13], скалярна [28] або строга [4] еквівалентність поліноміальних матриць.

В 1977 р. П.С. Казімірський та В.М. Петричкович ввели поняття напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць. Вони встановили, що поліноміальні матриці над різними полями такими перетвореннями зводяться до спеціальної трикутної форми з інваріантними множниками на головній діагоналі [18, 17, 32, 36]. Цей результат вони поширили для скінченних наборів поліноміальних матриць. Пізніше, у 1999 р., подібний результат встановлюють Dias da Silva J.A. і Laffey T.J. відносно правої напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць [49]. Встановлені форми матриць широко використовуються в теорії факторизації поліноміальних матриць [16, 17, 34, 36], при описі розв'язків матричних рівнянь [6, 52] та при розв'язуванні відомої задачі про подібність пар матриць над полем [51, 81, 42, 43].

Задача про еквівалентність пар матриць розв'язана лише для пар матриць над полем (Вейерштрас [88], Кронекер [66] та М.П. Кравчук [20, 21]). П.М. Гудивок [5] вказав кільця, над якими задача про еквівалентність пар матриць є дикою і тому її розв'язання є складним.

В.М. Петричкович [77, 76, 78] ввів поняття узагальненої еквівалентності пар матриць і встановив спеціальну форму для пар матриць над кільцями головних ідеалів та адекватними кільцями. Ця форма використана при побудові факторизацій матриць над кільцями [33, 30, 36], при розв'язуванні матричних лінійних різносторонніх рівнянь [53].

Матриці з елементами із квадратичних кілець виникають і використовуються в теорії чисел та інших розділах математики. У [41] досліджується подібність матриць над кільцем цілих гаусових чисел. У працях [2, 87, 80] встановлені в теорії чисел поняття суми Клостермана узагальнено і поширено на кільця цілих чисел та цілих гаусових чисел, наведено оцінки цих сум. Так звані циклотомічні матриці над кільцем цілих гаусових чисел вивчаються у [85, 86, 56, 57], наводиться їх класифікація та пов'язується з графами. Досліджуються також спеціальні лінійні групи матриць над квадратичними кільцями [74, 83].

Матричні лінійні рівняння, зокрема, типу Сильвестра, Ляпунова, матричні лінійні діофантові рівняння виникають і знаходять застосування у різних розділах математики, в задачах теорії керування, динамічних систем тощо [64, 67, 68]. Вони потребують розробки ефективних методів розв'язування таких матричних рівнянь, побудови та опису їх розв'язків.

Достатньо добре досліджені такі рівняння з матрицями-коефіцієнтами над полем [79, 26]. Над кільцями такі рівняння розглянуті лише в окремих випадках, зокрема над кільцями поліномів, кільцями головних ідеалів.

Так S. Barnett [46], J. Feinstein і Y. Bar-Ness [55] для матричного поліноміального рівняння $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ встановили умови існування так званих "мінімальних" розв'язків, тобто таких, що степені розв'язків $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ менші ніж степені матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$, відповідно у випадках, коли матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ обидві регулярні або хоча б одна з них регулярна.

У [6, 7, 52], використовуючи напівскалярну еквівалентність поліноміальних матриць, описано розв'язки обмежених степенів матричних поліноміальних однобічних та двобічних рівнянь, при цьому матриці-коефіцієнти можуть бути обидві нерегулярні. У [53] досліджено розв'язки таких матричних рівнянь над кільцями Безу на основі узагальненої еквівалентності пар матриць.

З наведеного огляду видно, що дослідження у цих напрямках є актуальним як з теоретичного так і з практичного погляду. У цій дисертаційній роботі досліджується еквівалентність матриць і їх пар над квадратичними кільцями з еквівалентними перетвореннями із підгруп повних лінійних груп кільця цілих чисел та квадратичного кільця. Встановлені спеціальні трикутні форми (стандартні форми) матриць щодо таких перетворень застосовано при розв'язуванні матричних лінійних різносторонніх рівнянь над квадратичними кільцями та опису структури розв'язків цих рівнянь.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, представлені у дисертації, пов'язані із науковими дослідженнями відділу алгебри Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України і є складовою частиною завдань держбюджетних тем "Розробка теоретико-кільцевих і групових методів дослідження задач факторизації та класифікації матриць над кільцями скінченнопороджених головних ідеалів і вивчення структурних властивостей скінченновимірних алгебр Лі", 2007 — 2011 рр. (номер держреєстрації: № 0107U000361), "Дослідження матричних алгебричних систем та їх застосування", 2012 — 2016 рр. (номер держреєстрації: № 0111U008859) та "Кільця матриць над різними областями, неспряжені підалгебри алгебри Лі групи Пуанкаре P(1,4), їх структура та застосування в теорії матричних та диференціальних рівнянь", 2017 — 2021 рр. (номер держреєстрації: № 0116U008182).

Авторка брала участь у цих дослідженнях як виконавець вказаних держбюджетних тем.

Мета і задачі дослідження. *Метою* дослідження є встановлення простіших форм матриць над квадратичними кільцями відносно введеної (z,k)-еквівалентності, побудова розв'язків матричних лінійних рівнянь та вивчення їх структури.

Задачами досліджень є:

1. Зведення матриць над квадратичними кільцями за допомогою елементарних операцій над рядками із кільця цілих чисел і елементарних операцій над стовпцями із квадратичного кільця, тобто (z,k)-еквівалентними перетвореннями, до простішої форми.

2. Зведення пар матриць над квадратичними кільцями (z,k)-еквівалентними перетвореннями до трикутних форм з інваріантними множниками на головних діагоналях.

3. Встановлення необхідних і достатніх умов розв'язності однобічних та двобічних матричних лінійних рівнянь над квадратичними кільцями, опис розв'язків, зокрема цілочислових, цих матричних рівнянь.

4. На основі встановлених простіших форм матриць, відносно (z,k)-еквівалентності, розробка ефективних методів побудови розв'язків матричних рівнянь типу Сильвестра і матричних діофантових рівнянь та опис структури їх розв'язків.

Об'єктом досліджень є еквівалентність матриць над квадратичними кільцями та матричні лінійні рівняння.

Предметом досліджень є простіші форми матриць над квадратичними кільцями відносно введеної (z,k)-еквівалентності та структура розв'язків матричних лінійних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі наукові результати, які отримані у дисертаційній роботі є новими. У дисертаційній роботі автором отримано такі нові теоретичні результати:

- Введено поняття (z,k)-еквівалентності матриць над квадратичними кільцями. Встановлено стандартні форми матриць над квадратичними евклідовими кільцями та квадратичними кільцями головних ідеалів відносно такої еквівалентності.

- Доведено, що пари матриць, визначники яких є взаємно прості і визначники яких є степенями простих чисел над квадратичними кільцями, зводяться (z,k)-еквівалентними перетвореннями до стандартних форм.

- Встановлено необхідні і достатні умови існування розв'язків матричних рівнянь типу Сильвестра і матричних діофантових рівнянь та запропоновано метод їх побудови над довільним квадратичним кільцем.

- Описано цілочислові розв'язки цих матричних рівнянь над квадратичними кільцями. Вказано критерій існування та єдиності цілочислових розв'язків матричних рівнянь.

- Досліджено структуру розв'язків матричних рівнянь над квадратичними евклідовими кільцями на основі встановленої стандартної форми матриць відносно (z,k)-еквівалентності. Вказано, що у розв'язних матричних рівняннях існують розв'язки з обмеженою евклідовою нормою. Встановлено, що таких розв'язків матричних рівнянь над квадратичними евклідовими уявними кільцями є скінченна кількість.

Особистий внесок здобувача. Дисертаційне дослідження є результатом самостійної роботи автора. Усі результати, які включено в дисертацію, отримано здобувачем самостійно. У спільних із науковим керівником статтях [15, 23, 24, 69] В.М. Петричковичу належать постановка задач, обговорення результатів та загальне керівництво роботою. У статті [15] В.Р. Зеліску належить формулювання й ідея доведення леми 1.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на таких конференціях:

1. Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. академіка Я.С. Підстригача (м. Львів, 25–27 травня 2009 р.).

2. Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики” (м. Львів, 21–25 травня 2013 р.).

3. Дев'ята міжнародна алгебраїчна конференція в Україні (м. Львів, 8–13 липня 2013 р.).

4. Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2014” (м. Львів, 28–30 травня 2014 р.).

5. Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2015” (м. Львів, 26–28 травня 2015 р.).

6. Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики ” (м. Львів, 22–25 травня 2018 р.).
7. Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2019” (м. Львів, 27–29 травня 2019 р.).
8. Дванадцята міжнародна алгебраїчна конференція в Україні (м. Вінниця, 2–6 липня 2019 р.),

а також були анонсовані на:

– шостій міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (м. Кам’янець-Подільський, 2007 р.);
– тринадцятій міжнародній науковій конференції ім. академіка М. Кравчука (м. Київ, 2010 р.);
– міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження Л.А. Калужніна (м. Київ, 2014 р.);
– десятій міжнародній алгебраїчній конференції присвяченій 70-річчю Ю.А. Дрозда (м. Одеса, 2015 р.).

Результати дисертаційної роботи неодноразово доповідалися на наукових семінарах:

– науковому семінарі відділу алгебри Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (керівник – доктор фіз.-мат. наук, професор В.М. Петричкович, 2006 – 2019 рр.);
– Львівському міському алгебраїчному семінарі (Львівський національний університет імені Івана Франка, керівник – доктор фіз.-мат. наук, професор М.Я. Комарницький, 2010 р.), львівському алгебраїчному семінарі (Львівський національний університет імені Івана

Франка, керівники – доктор фіз.-мат. наук, професор Б.В. Забавський, доктор фіз.-мат. наук, професор В.М. Петричкович, канд. фіз.-мат. наук, доцент А.І. Гаталевич, 2019 р.);

– алгебраїчному семінарі “The Problems of Elementary Divisor Rings” (Львівський національний університет імені Івана Франка, керівник – доктор фіз.-мат. наук, професор Б.В. Забавський 2014 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 6 статтях [1-6]. З них 5 – у наукових фахових виданнях України, 1 – у закордонному виданні [3]. З них – 2 опубліковано у виданнях, проіндексованих у базах даних Scopus [3, 4]. Результати роботи додатково висвітлено в матеріалах і тезах 12-ти наукових математичних конференцій [7-18].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається з переліку умовних позначень і термінів, вступу, 5 розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 91 найменувань, а також з додатків, що містять список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг роботи — 143 сторінки. Обсяг основного тексту дисертації — 115 сторінок.

Розділ 1

ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ ТА ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ

У цьому розділі наведено огляд праць, пов'язаних з темою дисертації та сформульовані відомі результати, які використовуються надалі.

1.1. Еквівалентність матриць над кільцями

Наведемо деякі основні поняття з теорії кілець, викладені у монографії [73].

Нехай R — комутативне кільце з $1 \neq 0$. Елемент $u \in R$ називається *оборотним*, якщо існує такий елемент $v \in R$, що $uv = 1$. Оборотні елементи в кільці R утворюють мультиплікативну групу, яку позначатимемо через $U(R)$. Елементи a і c з кільця R є *асоційованими,* якщо $a = uc$, де $u \in U(R)$. Отже, на R задається відношення еквівалентності, тобто R розпадається на класи еквівалентності. Набір елементів з R по одному з кожного класу еквівалентності називають *повною множиною неасоційовних елементів* кільця R і позначають R'.

Нехай далі R — кільце головних ідеалів, тобто комутативне кільце з $1 \neq 0$ без дільників нуля, в якому кожний ідеал — головний. Нехай μ — ненульовий елемент з R. Довільний ідеал (μ) кільця R є підгрупою його адитивної групи, а тому визначає деяке розбиття кільця на суміжні класи або класи лишків за ідеалом (μ). Два елементи α, β називають *порівняними за ідеалом* (μ) або *порівняними за модулем* μ, якщо вони належать одному класу лишків, тобто якщо $\alpha - \beta \in (\mu)$, або, що те саме, якщо μ ділить $\alpha - \beta$, і позначають $\alpha \equiv \beta \pmod{\mu}$. Множина елементів з R по одному з кожного класу лишків за модулем μ складає *повну множину лишків* R_μ за модулем μ або за ідеалом (μ).

Нехай α, β будь-які елементи з R відмінні від нуля. Найбільшим спільним дільником α і β називаємо такий елемент d з R, що d ділить α і β, і якщо γ з R ділить α і β, то γ ділить d. Потрібно зауважити, що є кільця, в яких поняття найбільшого спільного дільника є некоректне. Прикладами таких кілець є кільця многочленів над полями від нескінченної кількості змінних, квадратичне кільце $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\,\right]$.

Окремим типом кілець головних ідеалів є евклідові кільця. Слід зауважити, що кожне кільце головних ідеалів є евклідовим, але навпаки невірно, існують кільця головних ідеалів, які не є евклідовими [75].

Комутативне кільце R з 1 без дільників нуля називається *евклідовим*, якщо на множині $R \setminus 0$ можна визначити функцію $\mathcal{E}$, значення якої є цілими невід'ємними числами, таким чином, щоб виконувалися наступні умови:

1. $\mathcal{E}(\alpha\beta) = \mathcal{E}(\alpha)\mathcal{E}(\beta)$ для будь-яких ненульових елементів $\alpha, \beta \in R$;
2. для будь-яких α і $\beta \neq 0$ існують такі τ, ρ з R, що
$$\alpha = \beta\tau + \rho,$$
   і $\rho = 0$ або $\mathcal{E}(\rho) < \mathcal{E}(\beta)$.

Функція $\mathcal{E}$ називається евклідовою нормою. Наведемо деякі властивості евклідової норми:

1. Якщо a і $c \neq 0$ з кільця R асоційовані, тоді $\mathcal{E}(a) = \mathcal{E}(c)$;
2. Якщо c ділить a і $\mathcal{E}(a) = \mathcal{E}(c)$, то a і c — асоційовані елементи;
3. $\mathcal{E}(a) = 1$, тоді і тільки тоді, коли $a \in U\left(R\right)$;

4. Якщо c ділить a і c неасоційоване з a, то $\mathcal{E}(c) < \mathcal{E}(a)$.

Нехай d — найбільший спільний дільник α і β, що лінійно виражається через α і β, тобто $d = \alpha u + \beta v$, де $u, v \in R$. Ця рівність має назву *рівності Безу.* Виконання рівності Безу для всіх елементів кільця R означає, що кожний ідеал, породжений двома елементами цього кільця, є головним. Очевидно, що тоді кожний скінченно породжений ідеал R також є головним.

Кільцем Безу називається кільце, у якому кожен скінченно породжений ідеал є головним. Очевидно, що кільця головних ідеалів є кільцями Безу [91].

У 1943 році О. Хелмер [63] ввів поняття адекватного кільця, яке є узагальненням кілець головних ідеалів. Кільце R називається *адекватним*, якщо R – область цілісності, в якій кожний скінченно породжений ідеал є головним і для кожного ненульового елемента $a \in R$ і кожного елемента $b \in R$ існують такі елементи $c, d \in R$, що $a = cd$, причому c є взаємно простим із b, а кожний необоротний дільник d_i елемента d має необоротний спільний дільник із $b \in R$.

Зауважимо, що зараз є узагальнення адекватних кілець у роботах М.Я. Комарницького, Б.В. Забавського [12, 14, 19].

Означення 1.1. Матриці $A, B \in M(m, n, R)$ називають *право еквівалентними (ліво еквівалентними)*, якщо існують такі матриці $V \in GL(n, R)$ $(U \in GL(m, R))$, що $A = BV$ $(A = UB)$.

Відомо (див. [73], ст. 15), що кожна матриця $A \in M(m, R)$ над кільцем головних ідеалів R ліво еквівалентна до нижньої трикутної матриці H, тобто

$$UA = H = \begin{Vmatrix} h_{11} & 0 & \dots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mm} \end{Vmatrix}, \tag{1.1}$$

де $U \in GL(m,R)$, $h_{ii} \in R'$, $i = 1,2,\ldots,m$ і $h_{ij} \in R_{h_{jj}}$ для всіх $i > j$, $i = 2,3,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,m-1$. Матрицю H вигляду (1.1) називають *формою Ерміта матриці* A або *ермітовою нормальною формою.* Форма Ерміта H визначається однозначно [73]. Аналогічно, кожна матриця $B \in M(n,R)$ над кільцем головних ідеалів R право еквівалентна до верхньої трикутної форми Ерміта. У [44] встановлюється деяка інша форма матриці відносно односторонньої еквівалентності.

Означення 1.2. Матриці $A, B \in M(m,n,R)$ називають *еквівалентними*, якщо існують такі матриці $U \in GL(m,R)$ і $V \in GL(n,R)$, що $A = UBV$.

У 1861 році Г. Сміт [84] встановив, що кожна матриця $A \in M(m,n,\mathbb{Z})$ над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ за допомогою елементарних операцій над рядками і стовпцями зводиться до діагональної матриці, тобто матриця A еквівалентна до такої матриці:

$$D^A = UAV = \mathrm{diag}(\mu_1^A, \mu_2^A, \ldots, \mu_r^A, 0, \ldots, 0) =$$

$$= \begin{Vmatrix} \mu_1^A & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_r^A & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix}, \qquad (1.2)$$

для деяких матриць $U \in GL(m,\mathbb{Z})$ і $V \in GL(n,\mathbb{Z})$, де $r = \mathrm{rangA}$, $\mu_r^A \neq 0$ і $\mu_i^A | \mu_{i+1}^A$, $i = 1, 2, \ldots, r-1$, якщо $m < n$. Подібно встановлюється еквівалентність матриці A до діагональної матриці у випадку $m \geq n$.

Матрицю D^A називають *канонічною діагональною формою* або *нормальною формою Сміта*, а її діагональні елементи μ_i^A – *інваріантними множниками* матриці A.

Результат Г. Сміта поширений для матриць над іншими кільцями, зокрема кільцями головних ідеалів, адекватними кільцями [63, 73, 1, 8, 72, 70, 47, 71]. Кільця, над якими кожна матриця еквівалентна до канонічної діагональної форми, починаючи з праці І. Капланського [65], називають *кільцями елементарних дільників*. Встановлення нових класів кілець елементарних дільників продовжується і тепер [10, 19, 90, 91].

В той же час в багатьох задачах виникає необхідність досліджувати спеціальні типи еквівалентностей матриць, тобто еквівалентностей матриць, при яких перетворювальні матриці належать певним підгрупам повної лінійної групи основного кільця. Прикладом такої еквівалентності є елементарна еквівалентність матриць [13].

Нагадамо, що існують такі типи елементарних перетворень стовпців (рядків) матриці:

1. перестановка місцями двох стовпців (рядків);
2. домноження стовпця (рядка) справа (зліва) на оборотний елемент;
3. додавання до стовпця правого (лівого) кратного іншого стовпця (рядка).

Як відомо [73], елементарні перетворення стовпців (рядків) матриці відповідають домноженню цієї матриці справа (зліва) на певну елементарну матрицю. Під елементарними матрицями з елементами кільця R розумітимемо квадратні матриці одного з таких трьох типів:

1. діагональна матриця з оборотним елементом на деякому місці головної діагоналі і одиницями на всіх інших місцях цієї діагоналі;
2. матриця, яка відрізняється від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю;
3. матриця перестановок, тобто матриця, яка отримуються з одиничної за допомогою перестановки деяких її рядків чи стовпців.

Означення 1.3. Матриці A і B з елементами кільця R називають *елементарно еквівалентними*, якщо існують такі елементарні над R матриці $P_1, ..., P_k$; $Q_1, ..., Q_s$ відповідних розмірів, що справджується рівність

$$P_1 \cdots P_k A Q_1 \cdots Q_s = B.$$

Якщо R — евклідове кільце, тоді поняття еквівалентності і елементарної еквівалентності матриць збігаються, оскільки над евклідовими кільцями кожна оборотна матриця дорівнює добутку елементарних матриць. Крім евклідових кілець є узагальнені евклідові кільця та кільця з елементарною еквівалентністю матриць [38, 39].

Нехай F — поле, $F[\lambda]$ — кільце поліномів від змінної λ над полем F. Поліноміальні матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda) \in M(m, n, F[\lambda])$ називають *еквівалентними*, якщо $A(\lambda) = Q(\lambda)B(\lambda)R(\lambda)$ для деяких матриць $Q(\lambda) \in GL(m, F[\lambda])$ і $R(\lambda) \in GL(n, F[\lambda])$ та *скалярно еквівалентними* [28] або *строго еквівалентними* [4], якщо $A(\lambda) = QB(\lambda)R$ для деяких матриць $Q \in GL(m, F)$ і $R \in GL(n, F)$.

Означення 1.4. Матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ із $M(m, n, F[\lambda])$ називають *напівскалярно еквівалентними*, якщо існують такі матриці $Q \in GL(m, F)$ і $R^B(\lambda) \in GL(n, F[\lambda])$, що $A(\lambda) = QB(\lambda)R^B(\lambda)$.

Це поняття введене П.С. Казімірським та В.М. Петричковичем в 1977 році [18]. Вони встановили наступний результат.

Теорема 1.1. *Нехай $A(\lambda)$ – поліноміальна $m \times n$, $m \leq n$ матриця повного рангу над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль. Тоді матриця $A(\lambda)$ напівскалярно еквівалентна до трикутної матриці $T^A(\lambda)$ з інваріантними множниками на головній діагоналі, тобто існують такі неособлива числова матриця Q над F і оборотна матри-*

ця $R^A(\lambda)$ *над* $F[\lambda]$, *що*

$$T^A(\lambda) = QA(\lambda)R^A(\lambda) = \left\|\begin{matrix} \mu_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \mu_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & * & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & \mu_m(\lambda) & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\right\|, \qquad (1.3)$$

де $\mu_i(\lambda)$ *— інваріантні многочлени матриці* $A(\lambda)$, *тобто* $\mu_i(\lambda)$ *ділить* $\mu_{i+1}(\lambda)$ *і ділить всі елементи стовпця, до якого він належить.*

Цей результат ними поширений для скінченного набору поліноміальних матриць. Доведено, що набір поліноміальних матриць $(A_1(\lambda), A_2(\lambda), ..., A_k(\lambda))$ напівскалярно еквівалентний до трикутних форм, тобто

$$QA_1(\lambda)R^{A_1}(\lambda) = T^{A_1}(\lambda),$$
$$QA_2(\lambda)R^{A_2}(\lambda) = T^{A_2}(\lambda),$$
$$\vdots$$
$$QA_k(\lambda)R^{A_k}(\lambda) = T^{A_k}(\lambda),$$

де $Q \in GL(n, F)$, $R^{A_i}(\lambda) \in GL(n_i, F[\lambda])$ і $T^{A_i}(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, k$ вигляду (1.3).

В.М. Петричкович [32, 34] встановив подібні результати для будь-яких поліноміальних матриць над довільним полем F. Зокрема, у випадку, коли F — скінченне поле були встановлені умови, за яких поліноміальна матриця напівскалярно еквівалентна до трикутної форми. В [35] встановлені форми для поліноміальних матриць особливих і неповних рангів над довільним полем відносно напівскалярних еквівалентних перетворень. Дещо пізніше, у [45] був сформульований схожий результат. Пізніше, у 1999 р., подібний результат встановлюють Dias da Silva J.A. і Laffey T.J. відносно правої напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць [49].

Означення 1.5. Нехай R — комутативне кільце з $1 \neq 0$. Набори матриць $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ і $(B_1, B_2, \ldots, B_k)$ називають *еквівалентними,* якщо $A_i = UB_iV$, $i = 1, 2, \ldots, k$, для деяких оборотних матриць U і V над R.

Задача про еквівалентність наборів матриць розв'язана для пар матриць, коли $R = P$ — поле, Вейерштрасом [88] та Кронекером [66]. В. Длаб і М. Рінгель [50], у зв'язку із зображенням скінченновимірних алгебр [9], розглянули таку еквівалентність пар комплексних матриць (A_1, A_2): (QA_1P_1, QA_2P_2), де Q — комплексна, P_1, P_2 — дійсні оборотні матриці, і встановили для них канонічну форму відносно таких перетворень.

Для розв'язку багатьох задач, зокрема в теорії факторизації матриць, мультиплікативність їх канонічних діагональних форм, в теорії зображень груп та скінченновимірних алгебр тощо необхідно вивчати еквівалентність пар матриць лише зі спільною односторонньою перетворювальною матрицею. Ця задача має певне розв'язання при спеціальних еквівалентностях пар матриць над кільцями. Встановлені форми для пар матриць відносно таких еквівалентностей використані при розв'язанні багатьох задач.

Поняття узагальненої еквівалентності наборів матриць ввів В.М. Петричкович [77, 76, 78] і встановив стандартну форму для пари матриць над адекватними кільцями, а також запропонував її застосування у задачах факторизації матриць.

Означення 1.6. Набори матриць $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ та $(B_1, B_2, \ldots, B_k)$ над кільцем R називають *узагальнено еквівалентними,* якщо $A_i = UB_iV_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, для деяких оборотних матриць U і V_i над кільцем R.

Теорема 1.2. *Нехай R — адекватне кільце. Нехай $A \in M(m, n_1, R)$,*

$B \in M(m, n_2, R)$ та $rang A = rang B = m$ і

$$D^A = diag(\mu_1^A,\ \mu_2^A,\ \ldots,\ \mu_m^A),\ D^B = diag(\mu_1^B,\ \mu_2^B,\ \ldots,\ \mu_m^B)$$

— канонічні діагональні форми матриць A і B. Тоді пара матриць (A, B) є узагальнено еквівалентною до пари $(D^A, T^B = TD^B)$, де матриця T — нижня унітрикутна матриця, тобто T^B має вигляд:

$$T^B = \left\| \begin{array}{ccccccc} \mu_1^B & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21}\mu_1^B & \mu_2^B & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{m1}\mu_1^B & t_{m2}\mu_2^B & \cdots & \mu_m^B & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right\| \qquad (1.4)$$

і $t_{ij} \in R'_{\delta_{ij}}$, де $\delta_{ij} = \left(\dfrac{\mu_i^A}{\mu_j^A}, \dfrac{\mu_i^B}{\mu_j^B}\right)$, $i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$, $i > j$.

Пару матриць (D^A, T^B), визначену теоремою 1.2., називають *стандартною формою* пари матриць (A, B).

Зауважимо, що набір більше ніж з двох матриць може не зводитися узагальнено еквівалентними перетвореннями до трикутних форм вигляду (1.4). У [36] наведено приклад трійки матриць над $\mathbb{Z}$, яка може не зводитися до трикутних форм (1.4).

В дисертаційній роботі ми розглядаємо спеціальну еквівалентність матриць і пар матриць над квадратичними кільцями, вказуємо певні форми до яких зводяться матриці і їх пари щодо таких еквівалентностей. Ці форми будуть використані для опису структури розв'язків матричних рівнянь.

1.2. Матриці над квадратичними кільцями

Нехай $\mathbb{Z}$ – кільце цілих чисел. Тоді $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\ \right]$ – квадратичне кільце, де $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0, 1$ і k не ділиться на квадрат простого числа. Елементи

$a \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\ \right]$ і їх алгебраїчні норми $N(a) \in \mathbb{Z}$ визначаються наступним чином [37]:

якщо $k \equiv 2 \pmod 4$ або $k \equiv 3 \pmod 4$, то

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\ \right] = \left\{a_1 + a_2\sqrt{k}\ \middle|\ a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\right\},\ \ N(a_1 + a_2\sqrt{k}) = a_1^2 - ka_2^2, \quad (1.5)$$

якщо $k \equiv 1 \pmod 4$, то

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right] = \left\{\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2}\sqrt{k}\ \middle|\ a_1, a_2 \in \mathbb{Z},\ (a_1 - a_2)\,\vdots\,2\right\},$$

$$N\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2}\sqrt{k}\right) = \frac{1}{4}(a_1^2 - ka_2^2). \quad (1.6)$$

Квадратичне кільце $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\ \right]$ називається уявним, якщо $k < 0$ і дійсним, якщо $k > 0$.

Встановлено, що квадратичних евклідових уявних кілець є п'ять, при значеннях $k = -1, -2, -3, -7, -11$; евклідових дійсних квадратичних кілець — сімнадцять і для них $k = 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37,$ $41, 57,\ 73, 97$. Відомо, що кожне евклідове кільце є кільцем головних ідеалів, проте існують квадратичні кільця головних ідеалів, які не є евклідовими, такими є кільця $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-19}\ \right], \mathbb{Z}\left[\sqrt{-43}\ \right], \mathbb{Z}\left[\sqrt{-67}\ \right], \mathbb{Z}\left[\sqrt{-163}\ \right]$ [27, 75]. Існують також квадратичні кільця, які не є кільцями головних ідеалів, наприклад, квадратичне кільце $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\ \right]$. Дійсно, елемент 9 з кільця $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\ \right]$ розкладається неоднозначно на прості множники, тобто

$$9 = 3 \cdot 3 = \left(2 + \sqrt{-5}\ \right)\left(2 - \sqrt{-5}\ \right),$$

де множники 3, $\left(2 + \sqrt{-5}\ \right)$, $\left(2 - \sqrt{-5}\ \right)$ не є асоційованими. Отже, це квадратичне кільце не є кільцем головних ідеалів.

Матриці з елементами із квадратичних кілець виникають і використовуються в теорії чисел та інших розділах математики. Структура таких матриць вивчалася лише над певними квадратичними кільцями, зокрема, над квадратичними евклідовими кільцями, кільцями цілих гаусових чисел.

У статті [41] розглядається задача про подібність матриць над кільцем цілих гаусових чисел $\mathbb{Z}[i]$. Для матриць другого порядку над $\mathbb{Z}[i]$ зі звідними характеристичними многочленами, тобто $\det(I\lambda - A) = d(\lambda)$ і $d(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)$, де $\alpha_1 \neq \alpha_2$ або $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ і $d(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2$ побудовано канонічні форми відносно перетворення подібності.

У працях [40, 29] для кілець матриць $M(n, R)$ над евклідовим кільцем R введено алгоритм ділення Евкліда таким чином. Нехай $\mathcal{E}(a)$ евклідова норма елемента $a \in R$. Доводиться, що для будь-яких матриць $A, B \in M(n, R)$, $\det B \neq 0$ існують такі матриці Q, S, що $A = QB + S$, де $S = 0$ або $\det S \neq 0$ і $\mathcal{E}(\det S) < \mathcal{E}(\det B)$. Це використано для розкладу матриць із $M(n, R)$ у добуток простих множників.

У [48] вводиться поняття повної системи лишків в кільці 2×2-матриць над евклідовими областями, дається їх повний опис. Як застосування, вказується спосіб побудови найбільших спільних дільників таких матриць.

У теорії чисел, добре відоме поняття суми Клостермана, тобто суми вигляду

$$K(u, v; q) = \sum_{x \pmod q} e^{2\pi i \frac{\left(ux + vx^{-1}\right)}{q}},$$

де q — ціле додатнє число, u, v – фіксовані цілі числа, сумування введеться по усіх x із системи лишків за модулем q, для яких існує обернений елемент x^{-1}, $xx^{-1} \equiv 1 \pmod q$.

Узагальнені суми Клостермана поширені над кільцем матриць цілих чисел $\mathbb{Z}$ та кільцем цілих гаусових чисел $\mathbb{Z}[i]$ і вивчалася у працях [2, 87, 80]. Наведені оцінки цих сум.

У працях [85, 86, 56, 57] вивчаються так звані циклотомічні матриці над квадратичними кільцями, зокрема над цілими гаусовими числами. Ермітова матриця, всі власні значення якої лежать на відрізку $[-2, 2]$, називається циклотомічною. Наводиться класифікація таких матриць та пов'язується із графами.

У [74, 83] досліджуються спеціальні лінійні групи матриць над квадратичними уявними кільцями.

1.3. Матричні лінійні рівняння

Матричні лінійні рівняння різних типів достатньо вивчені над полем F, тобто матриці-коефіцієнти яких є елементами із поля F.

Загальне матричне лінійне рівняння Сильвестра

$$A_1XB_1 + A_2XB_2 + \ldots + A_kXB_k = C, \tag{1.7}$$

де $A_i, B_i, C_i \in M(n, F)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ — відомі матриці, а X — невідома матриця над полем F зводиться до системи лінійних рівнянь, використовуючи Кронекерів добуток матриць. Це рівняння досліджував Дж. Сильвестр у XIX столітті [82].

Нехай F — поле,

$$A = \left\|a_{ij}\right\|_{i,j=1}^{m,n} \quad \text{і} \quad B = \left\|b_{ij}\right\|_{i,j=1}^{r,l}.$$

Добутком Кронекера $A \otimes B$ матриць A і B є блочна $(mr \times nl)$ -матриця такого вигляду [26]:

$$A \otimes B = \begin{Vmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \ldots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \ldots & a_{2n}B \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{Vmatrix}. \tag{1.8}$$

Надалі будемо позначати через $\mathrm{row}_i(A)$ – i-ий рядок, а через $\mathrm{col}_j(A)$ – j-ий стовпець матриці A.

Дж. Сильвестр встановив, що рівняння (1.7) зводиться до розв'язування еквівалентного рівняння

$$G\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c},$$

де

$$G = \left\| A_1 \otimes B_1^\top + A_2 \otimes B_2^\top + \ldots + \ldots + A_k \otimes B_k^\top \right\|,$$

$$\boldsymbol{x} = \left\| \mathrm{row}_1\,(X) \quad \mathrm{row}_2\,(X) \quad \ldots \quad \mathrm{row}_n\,(X) \right\|^\top,$$

$$\boldsymbol{c} = \left\| \mathrm{row}_1\,(C) \quad \mathrm{row}_2\,(C) \quad \ldots \quad \mathrm{row}_n\,(C) \right\|^\top,$$

символ $\top$ означає транспонування, тобто до розв'язування систем алгебраїчних лінійних рівнянь над полем F.

Окремими типами загального матричного рівняння Сильвестра є матричне рівняння

$$AX + XB = C, \tag{1.9}$$

матричне рівняння Ляпунова

$$A^\top X + XA = B \tag{1.10}$$

та матричне рівняння від двох змінних

$$AX + YB = C,$$

які виникають і застосовуються в багатьох розділах математики та прикладних задачах [64, 67, 68, 89].

В. Рот [79] встановив зв'язок між розв'язністю матричних рівнянь типу Сильвестра та еквівалентністю і подібністю матриць блочної структури.

Теорема 1.3. *[79] Матричне рівняння*

$$AX - YB = C, \tag{1.11}$$

де A, B, C — відомі, X, Y — невідомі матриці над полем F, має розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриці

$$M = \left\| \begin{matrix} A & C \\ 0 & B \end{matrix} \right\| \quad i \quad N = \left\| \begin{matrix} A & 0 \\ 0 & B \end{matrix} \right\|$$

еквівалентні.

Матричне рівняння

$$AX - XB = C, \tag{1.12}$$

де A, B, C *— відомі,* X *— невідома матриці над полем* F, *має розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриці* M *і* N *подібні.*

В. Рот довів також справедливість теореми 1.3 у випадку, коли матричні рівняння (1.11) та (1.12) розглядаються над кільцем поліномів $R = F[x]$, де F — поле, тобто всі матриці у цих рівняннях мають елементи з кільця $F[x]$. У 1974 році М. Ньюмен [73] показав, що матричне рівняння (1.11) над кільцем головних ідеалів завжди має розв'язок, якщо $(\det A, \det B) = 1$. Р. Феінберг, в [54], поширив результат Рота для системи матричних рівнянь і блочних матриць з довільним числом блоків.

Теорема 1.4. *[54] Нехай* M *— блочна матриця над кільцем головних ідеалів такого вигляду*

$$\begin{Vmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ 0 & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Матриця M *еквівалентна до діагональної матриці* $diag(M_{11}, M_{22}, ..., M_{nn})$, *тоді і тільки тоді, коли розв'язна така система матричних рівнянь*

$$M_{ij} = M_{ii}Y_{ij} + \sum_{k=i+1}^{j} X_{ik}M_{kj}, \quad 1 \le i < j \le n.$$

Теорема Рота була узагальнена для матричного рівняння (1.11), у випадку, коли їх коефіцієнти є матрицями над кільцем головних ідеалів [61], над довільним комутативним кільцем [60] і іншими кільцями [59, 58, 62].

Один із методів знаходження розв'язку матричного поліноміального рівняння

$$A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda), \tag{1.13}$$

де $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ — матриці над кільцем поліномів $F(\lambda)$ ґрунтується на зведенні цього рівняння до такого еквівалентного рівняння над полем F

$$AZ + ZB = D,$$

де $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ є супроводжуючими матрицями матричних поліномів

$$A(\lambda) = \sum_{i=0}^{r} A_i \lambda^{r-i} \quad \text{і} \quad B(\lambda) = \sum_{j=0}^{s} B_j \lambda^{s-j},$$

D — матриця над полем F і Z — невідома матриця [46]. В [31] доведено, що існує такий єдиний розв'язок $\Big(X(\lambda),\ Y(\lambda)\Big)$ матричного рівняння (1.13), що $\deg X(\lambda) < \deg B(\lambda)$, в якому матриці $A(\lambda)$ та $B(\lambda)$ — унітальні, тоді і тільки тоді, коли визначники матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ — взаємно прості. У випадку, коли $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ — довільні неособливі поліноміальні матриці, вказано розв'язки мінімальних степенів матричного рівняння (1.13) та встановлені умови однозначності таких розв'язків [6].

Для матричного рівняння (1.13), у випадку, коли матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ регулярні або хоча б одна з них регулярна або регуляризується встановлено у [46, 55] умови існування так званих "мінімальних" розв'язків, тобто таких розв'язків $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$, що

$$\deg X(\lambda) < \deg B(\lambda) \quad \text{та} \quad \deg Y(\lambda) < \deg A(\lambda)\,.$$

Якщо визначники регулярних матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ взаємнопрості і

$$\deg C(\lambda) \leq \deg A(\lambda) + \deg B(\lambda) - 1,$$

то таке рівняння має мінімальний розв'язок і він єдиний.

Матричне рівняння

$$AX + BY = C \tag{1.14}$$

має розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконується хоча б одна з умов:

1. найбільший спільний лівий дільник матриць A і B є лівим дільником матриці C;
2. матриці $\begin{Vmatrix} A & B & C \end{Vmatrix}$ і $\begin{Vmatrix} A & B & 0 \end{Vmatrix}$ правоеквівалентні.

Ці умови розв'язності сформульовані у працях [64, 89, 53].

Матричні рівняння (1.11), (1.12), (1.14), де A, B, C — матриці над полем F, за допомогою добутку Кронекера зводяться до еквівалентної системи лінійних рівнянь [26]. У [7], застосовуючи поняття напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць та трикутні форми з інваріантними множниками на головних діагоналях набору поліноміальних матриць щодо такої еквівалентності, запропоново метод побудови розв'язків матричного діофантового поліноміального рівняння (1.14), в яких $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ — довільні прямокутні матриці. Вказано розв'язки мінімальних степенів цього рівняння та встановлено критерій однозначності таких розв'язків. Також, у [53], запропоновано метод розв'язування матричних рівнянь (1.11) і (1.14) над комутативними областями скінченно породжених головних ідеалів, який ґрунтується на трикутних формах пар матриць (A, B) щодо узагальненої еквівалентності.

Розділ 2

(Z,K)-ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ МАТРИЦЬ НАД КВАДРАТИЧНИМИ КІЛЬЦЯМИ

У цьому розділі досліджується спеціальна еквівалентність матриць над квадратичними кільцями. Встановлено простішу форму матриць відносно введеної (z,k)-еквівалентності.

2.1. Евклідові норми елементів квадратичного кільця та їх властивості

Алгебраїчна норма елементів квадратичного кільця $\mathbb{K}$, сформульована у розділі 1, володіє наступними властивостями:

1. Алгебраїчна норма $N(ab)$ добутку елементів $a, b \in \mathbb{K}$ дорівнює добутку їх алгебраїчних норм: $N(ab) = N(a)N(b)$;
2. $N(a) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $a = 0$;
3. Елемент $u \in \mathbb{K}$ — оборотний тоді і тільки тоді, коли $N(u) = \pm 1$.

В квадратичному кільці $\mathbb{K}$ оборотний елемент ε називається *нетривіальним,* якщо $\varepsilon \neq \pm 1$. Зауважимо, що в уявних квадратичних кільцях група оборотних елементів скінченна і нетривіальні оборотні елементи є лише у кільцях $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-1}\,\right]$ і $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\,\right]$. Група оборотних елементів дійсного квадратичного кільця є нескінченною.

Нехай $\mathbb{K}$ – квадратичне евклідове кільце. Евклідову норму $\mathcal{E}(a)$ елемента a визначаємо через його алгебраїчну норму так:

$$\begin{cases} \mathcal{E}(a) = N(a), \quad \text{якщо } \ \mathbb{K} \ \text{ — уявне квадратичне кільце;} \\ \\ \mathcal{E}(a) = |N(a)|, \quad \text{якщо } \ \mathbb{K} \ \text{ — дійсне квадратичне кільце.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Евклідові норми простих чисел в квадратичному евклідовому кільці є простими раціональними числами або квадратами простих раціональних чисел. Асоційовані елементи мають одне і те ж значення евклідової норми. Очевидно, що елемент u є оборотним тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{E}(u) = \pm 1$.

Евклідові норми елементів кільця $\mathbb{K}$ є з властивістю мультиплікативності, тобто евклідова норма добутку елементів $a, b \in \mathbb{K}$ дорівнює добутку їх евклідових норм:

$$\mathcal{E}(ab) = \mathcal{E}(a)\mathcal{E}(b),$$

зокрема

$$\mathcal{E}\left(a^m\right) = \left(\mathcal{E}(a)\right)^m.$$

Звідси одержимо властивість норми частки:

$$\mathcal{E}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\mathcal{E}\left(a\right)}{\mathcal{E}\left(b\right)}.$$

Розглянемо евклідову норму $\mathcal{E}(a+b)$ суми елементів a і b. Евклідова норма суми елементів може дорівнювати сумі норм елементів, або бути меншою чи більшою суми норм елементів.

Приклад. Розглянемо такі елементи із квадратичного кільця $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-2}\ \right]$ і їх евклідові норми:

$$a = 2 + \sqrt{-2}, \quad \mathcal{E}(a) = 6,$$

$$b = -1 + \sqrt{-2}, \quad \mathcal{E}(b) = 3,$$

$$c = 1, \quad \mathcal{E}(c) = 1,$$

$$d = -2 + \sqrt{-2}, \quad \mathcal{E}(d) = 6.$$

Оскільки $a+b=1+2\sqrt{-2}$, тоді евклідова норма $\mathcal{E}(a+b)=9$ і

$$\mathcal{E}(a+b)=\mathcal{E}(a)+\mathcal{E}(b).$$

Для елемента $a+c=3+\sqrt{-2}$, евклідова норма якого $\mathcal{E}(a+c)=11$ правильна нерівність

$$\mathcal{E}(a+c)>\mathcal{E}(a)+\mathcal{E}(c).$$

У випадку елемента $a+d=2\sqrt{-2}$, його евклідова норма менша за суму норм елеменів a і d, тобто

$$\mathcal{E}(a+d)<\mathcal{E}(a)+\mathcal{E}(d).$$

Тому встановимо межі для евклідової норми суми елементів квадратичного кільця.

Лема 2.1. *Для будь-яких $a,b\in\mathbb{K}$ таких, що*

$$a=\begin{cases} a_1+a_2\sqrt{k}, & \text{якщо } k\equiv 2,3 \pmod 4,\\ \dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2}\sqrt{k}, & \text{якщо } k\equiv 1 \pmod 4;\end{cases}$$

$$b=\begin{cases} b_1+b_2\sqrt{k}, & \text{якщо } k\equiv 2,3 \pmod 4,\\ \dfrac{b_1}{2}+\dfrac{b_2}{2}\sqrt{k}, & \text{якщо } k\equiv 1 \pmod 4\end{cases}$$

для евклідової норми суми елементів виконується умова:

$$\mathcal{E}(a+b)\le\mathcal{E}(a)+\mathcal{E}(b)+2\left(|a_1b_1|+|a_2b_2k|\right), \text{ якщо } k\equiv 2,3 \pmod 4$$

і

$$\mathcal{E}(a+b)\le\mathcal{E}(a)+\mathcal{E}(b)+\frac{1}{2}\left(|a_1b_1|+|a_2b_2k|\right), \text{ якщо } k\equiv 1 \pmod 4.$$

Доведення. Нехай $k>0$ і $k\equiv 2,3 \pmod 4$. Тоді

$$a+b=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)\sqrt{k}$$

і

$$\mathcal{E}(a+b)=\left|{a_1}^2+2a_1b_1+{b_1}^2-{a_2}^2k-2a_2b_2k-{b_2}^2k\right|.$$

Погрупувавши відповідні доданки і врахувавши властивості модуля суми елементів отримаємо:

$$\mathcal{E}(a+b) \leq \mathcal{E}(a) + \mathcal{E}(b) + 2\left|a_1b_1 - a_2b_2k\right|.$$

Очевидно, що вираз $|a_1b_1 - a_2b_2k|$ набуде максимального значення, якщо матиме вигляд

$$|a_1b_1| + |a_2b_2k|.$$

Отже, для $k \equiv 2, 3 \pmod 4$ твердження доведене.

У випадку, якщо $k \equiv 1 \pmod 4$, маємо

$$a+b = \frac{1}{2}(a_1+b_1) + \frac{1}{2}(a_2+b_2)\sqrt{k}$$

і тоді

$$\mathcal{E}(a+b) = \left|\frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1b_1 + \frac{1}{4}b_1^2 - \frac{1}{4}a_2^2k - \frac{1}{2}a_2b_2k - \frac{1}{4}b_2^2k\right|.$$

А звідси випливає, що

$$\mathcal{E}(a+b) \leq \mathcal{E}(a) + \mathcal{E}(b) + \frac{1}{2}\left(|a_1b_1| + |a_2b_2k|\right).$$

Доведення для $k < 0$ проводимо аналогічно. Доведення завершено. □

Наслідок 2.1. *Нехай $\mathbb{Z}[i]$ — кільце цілих гаусових чисел. Для будь-яких $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ для евклідової норми суми правильна така нерівність*

$$\mathcal{E}(a)+\mathcal{E}(b)-2\left(|a_1b_1| + |a_2b_2|\right) \leq \mathcal{E}(a+b) \leq \mathcal{E}(a)+\mathcal{E}(b)+2\left(|a_1b_1| + |a_2b_2|\right).$$

З [37] випливає, що в квадратичному евклідовому уявному кільці множина елементів, які мають одне й теж значення евклідової норми є скінченна.

2.2. Найбільші спільні дільники елементів та їх комбінацій у квадратичних евклідових кільцях

Нехай $\mathbb{K}=\mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ — квадратичне евклідове кільце.

Лема 2.2. *Нехай $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{K}$, $a_3\neq 0$ і $(a_1,a_2,a_3)=d$. Тоді існує таке число $x\in\mathbb{Z}$, що $(a_1+xa_2,a_3)=d$.*

Доведення. Без обмеження загальності можемо вважати, що $(a_1,a_2,a_3)=1$.

Нехай

$$a_3=up_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_r^{s_r},$$

де $u\in U(\mathbb{K})$, p_i — прості елементи кільця $\mathbb{K}$, $i=1,2,\ldots,r$.

Із того, що $(a_1,a_2,a_3)=1$ випливає, що a_1 і a_2 одночасно не діляться (без остачі) на p_i, $i=1,2,\ldots,r$. Тому припустимо, що

$$a_3=up_1^{s_1}\cdots p_{r_1}^{s_{r_1}}p_{r_1+1}^{s_{r_1+1}}\cdots p_{r_2}^{s_{r_2}}p_{r_2+1}^{s_{r_2+1}}\cdots p_r^{s_r},\;\; 0\leq r_1,r_2\leq r,$$

де

а) a_1 і a_2 не діляться на p_i при $i=1,2,\ldots,r_1$;

б) a_1 ділиться, а a_2 не ділиться на p_i при $i=r_1+1,r_1+2,\ldots,r_2$;

в) a_1 не ділиться, а a_2 ділиться на p_i при $i=r_2+1,r_2+2,\ldots,r$.

Зрозуміло, що $(a_1+xa_2,a_3)=1$, якщо a_1+xa_2 не ділиться на p_i при всіх $i=1,2,\ldots,r$. Спочатку виділимо ті числа $x\in\mathbb{Z}$, при яких a_1+xa_2 ділиться на p_i, тобто

$$a_1+xa_2=p_it_i,\;\; i=1,2,\ldots,r,\;\; p_i,t_i\in\mathbb{K}. \tag{2.2}$$

а) Нехай $k\equiv 2 \pmod 4$ чи $k\equiv 3 \pmod 4$ і

$$a_j=\alpha_j+\beta_j\sqrt{k},\quad p_i=c_i+d_i\sqrt{k},\quad t_i=x_i+y_i\sqrt{k},$$

$$\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, 2, \quad c_i, d_i, x_i, y_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, \ldots, r_1.$$

Тоді із (2.2) одержимо таку рівність

$$(\alpha_1 + x\alpha_2) + (\beta_1 + x\beta_2)\sqrt{k} = (c_i x_i + k d_i y_i) + (d_i x_i + c_i y_i)\sqrt{k}$$

$i = 1, 2, \ldots, r_1$. З цієї рівності одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1 + x\alpha_2 = c_i x_i + k d_i y_i \\ \beta_1 + x\beta_2 = d_i x_i + c_i y_i \end{cases},$$

$i = 1, 2, \ldots, r_1$ стосовно невідомих x, x_i, y_i з яких отримуємо рівняння

$$(\alpha_2 d_i - \beta_2 c_i)\, x + \left(c_i^2 - k d_i^2\right) y_i = (-\alpha_1 d_i + \beta_1 c_i)\,,\ i = 1, 2, \ldots, r_1.$$

Це означає, що x задовольняє конгруенції

$$(\alpha_2 d_i - \beta_2 c_i)\, x \equiv (\beta_1 c_i - \alpha_1 d_i) \pmod{(c_i^2 - k d_i^2)},\ i = 1, 2, \ldots, r_1. \quad (2.3)$$

Враховуючи те, що модуль конгруенції (2.3) $c_i^2 - k d_i^2$ є евклідовою нормою деякого простого елемента $p_i \in \mathbb{Z}$, а отже є простим елементом в $\mathbb{K}$, то отримуємо, що конгруенція (2.3) має один розв'язок $K_0^{(p_i)}$ — клас лишків за модулем $c_i^2 - k d_i^2$, $i = 1, 2, \ldots, r_1$ [3]. Якщо ж вона не має розв'язку для деяких i, то вважаємо, що клас $K_0^{(p_i)}$— порожній.

Аналогічно це доводиться при $k \equiv 1 \pmod 4$.

У випадку *б)*, тобто при $i = r_1 + 1, r_1 + 2, \ldots, r_2$ рівність (2.2) правильна при $x \in p_i\mathbb{Z}$ для тих i, для яких $p_i \in \mathbb{Z}$, $i = r_1 + 1, \ldots, r_1 + j_1$ і при $x \in N(p_i)\mathbb{Z}$ для тих i, для яких $p_i \notin \mathbb{Z}$, $i = r_1 + j_1 + 1, \ldots, r_2$. У випадку *в)* рівність (2.2) не справджується при жодних $x \in \mathbb{Z}$.

Таким чином, при

$$x \in \mathbb{Z} \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{r_1} K_0^{(p_i)} \bigcup_{i=r_1+1}^{r_1+j_1} p_i\mathbb{Z} \bigcup_{i=r_1+j_1+1}^{r_2} N(p_i)\,\mathbb{Z} \right)$$

правильна рівність $(a_1 + x a_2, a_3) = 1$. Лема доведена. □

2.3. Зведення матриць над квадратичними евклідовими кільцями (z,k)-еквівалентними перетвореннями до стандартної форми

Надалі в цьому підрозділі $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ — квадратичне евклідове кільце. Через d_l^A будемо позначати найбільший спільний дільник мінорів порядку l матриці A.

Лема 2.3. *Нехай*

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{Vmatrix},$$

- $2 \times n$-матриця над $\mathbb{K}$, тобто $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тоді існує така верхня унітрикутна матриця

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

над $\mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$, що

$$SA = \begin{Vmatrix} a_{11}^{'} & a_{12}^{'} & \cdots & a_{1n}^{'} \\ a_{21}^{'} & a_{22}^{'} & \cdots & a_{2n}^{'} \end{Vmatrix},$$

де $\left(a_{11}{}', a_{12}{}', \ldots, a_{1n}{}'\right) = d_1^A$.

Доведення. Правими елементарними операціями над кільцем $\mathbb{K}$ матрицю A зводимо до вигляду

$$AQ = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \cdots & b_3 & b_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \end{Vmatrix} = B,$$

де $Q \in GL(n, \mathbb{K})$ і $d_1^B = d_1^A$.

На основі леми 2.2 існує таке число $x \in \mathbb{Z}$, що

$$(b_2 + xb_1, b_3) = (b_1, b_2, b_3) = d_1^B = d_1^A.$$

Тоді домноживши матрицю AQ зліва на унітрикутну матрицю

$$S = \left\| \begin{matrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

одержимо матрицю

$$SAQ = \left\| \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 & b_3 & b_2 + \alpha b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b_1 \end{matrix} \right\| = B_1,$$

де $d_1^{B_1} = d_1^A$. Звідси одержимо, що $BQ^{-1} = SA$. Очевидно, що найбільші спільні дільники елементів перших рядків матриць BQ^{-1}, B і AQ дорівнюють d_1^A. Лему доведено. □

Лема 2.4. *Нехай*

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\|,$$

де $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $m \leq n$, $rangA = m$. *Тоді існує така верхня унітрикутна матриця* $S \in GL(m, \mathbb{Z})$, *що*

$$SA = \left\| \begin{matrix} a_{11}{'} & a_{12}{'} & \cdots & a_{1n}{'} \\ a_{21}{'} & a_{22}{'} & \cdots & a_{2n}{'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}{'} & a_{m2}{'} & \cdots & a_{mn}{'} \end{matrix} \right\|,$$

де $\left(a_{11}{'}, a_{12}{'}, \ldots, a_{1n}{'}\right) = d_1^A$.

Доведення. Доведення проводимо методом математичної індукції по m.

Для $m = 2$ твердження правильне за лемою 2.3. Припустимо, що твердження леми 2.4 правильне для $((m-1) \times n)$-матриці A_{m-1}, тобто існує така верхня унітрикутна матриця $S_{m-1} \in GL(m-1, \mathbb{Z})$, що

$$S_{m-1}A_{m-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & s_{12} & \cdots & s_{1m} \\ 0 & 1 & \cdots & s_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} a_{21}' & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' \\ & * & & \end{matrix} \right\| = \tilde{A}_{m-1},$$

де $(a_{21}', a_{22}', \ldots, a_{2n}') = d_1^{A_{m-1}}$.

Доведемо твердження леми для $m \times n$-матриці A.

Домноживши матрицю A зліва на унітрикутну матрицю

$$S_1 = \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_{m-1} \end{matrix} \right\|,$$

матимемо

$$S_1 A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}' & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' \\ & & * & \end{matrix} \right\| = \tilde{A}.$$

Розглянемо $2 \times n$-матрицю

$$A_2 = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}' & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' \end{matrix} \right\|.$$

Очевидно, що $d_1^{A_2} = d_1^{\tilde{A}} = d_1^{A}$.

Згідно з лемою 2.3 існує така матриця

$$S_2 = \left\| \begin{matrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \; u \in \mathbb{Z},$$

що

$$S_2 A_2 = \left\| \begin{matrix} a_{11}' & a_{12}' & \cdots & a_{1n}' \\ a_{21}' & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' \end{matrix} \right\| = \tilde{A}_2,$$

де $\left(a_{11}{}', a_{12}{}', \ldots, a_{1n}{}'\right) = d_1^{\tilde{A}_2}$, а отже $d_1^{\tilde{A}_2} = d_1^A$.

Тоді для матриці $\tilde{A}$ існує така унітрикутна матриця

$$S = \left\| \begin{array}{cc|c} 1 & u & \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ \hline & \mathbf{0} & I_{m-2} \end{array} \right\|,$$

де I_{m-2} – одинична матриця порядку $m-2$, що

$$S\tilde{A} = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11}{}' & a_{12}{}' & \cdots & a_{1n}{}' \\ a_{21}{}' & a_{22}{}' & \cdots & a_{2n}{}' \\ & & * & \end{array} \right\| = \tilde{\tilde{A}}.$$

Отже,

$$\tilde{\tilde{A}} = S\tilde{A} = SS_1A,$$

де SS_1 — верхня унітрикутна матриця над $\mathbb{Z}$ і

$$(a_{11}^{'}, a_{12}^{'}, \cdots, a_{1n}^{'}) = d_1^{\tilde{\tilde{A}}} = d_1^{\tilde{A}} = d_1^{A_1}.$$

Лему доведено. $\square$

Означення 2.1. *Матриці A і B розміру $m \times n$ над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$ називатимемо (z,k)–еквівалентними, якщо існують такі оборотні матриці $S \in GL(m, \mathbb{Z})$ над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ і $Q \in GL(n, \mathbb{K})$ над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$, що $A = SBQ$.*

Над квадратичним евклідовим кільцем $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ кожна $m \times n$-матриця A еквівалентна до канонічної діагональної форми, тобто

$$UAV = D^A = \mathrm{diag}(\mu_1^A, \mu_2^A, \ldots, \mu_q^A, 0, \ldots, 0), \ \mu_i^A \mid \mu_{i+1}^A, \tag{2.4}$$

$i = 1, 2, \ldots, q-1$, для деяких оборотних матриць $U \in GL\left(m, \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\,\right]\right)$ і $V \in GL\left(n, \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\,\right]\right)$.

Теорема 2.1. *Нехай A — $m\times n$-матриця над квадратичним евклідовим кільцем $\mathbb{K}$, $m\leq n$, $rangA=m$. Тоді матриця A (z,k)-еквівалентна до трикутної матриці T^A, тобто існують такі верхня унітрикутна матриця $S\in GL(m,\mathbb{Z})$ і оборотна матриця $Q^A\in GL(n,\mathbb{K})$, що*

$$T^A=SAQ^A=\left\|\begin{array}{cccccccc}\mu_1^A & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ t_{21}^A\mu_1^A & \mu_2^A & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \dots & & & \dots & \\ t_{m1}^A\mu_1^A & t_{m2}^A\mu_2^A & \dots & \mu_m^A & 0 & \cdots & 0\end{array}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{array}{cccc}1 & 0 & \dots & 0\\ t_{21}^A & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ t_{m1}^A & t_{m2}^A & \dots & 1\end{array}\right\|\left\|\begin{array}{ccccccc}\mu_1^A & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \mu_2^A & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \mu_m^A & 0 & \dots & 0\end{array}\right\|, \tag{2.5}$$

де

$$t_{ij}^A=0, \quad \text{якщо} \quad \mu_i^A=1, \quad i,j=1,2,\dots,m,\ j<i; \tag{2.6}$$

$$\mathcal{E}(t_{ij}^A)<\frac{\mathcal{E}(\mu_i^A)}{\mathcal{E}(\mu_j^A)}, \quad \text{якщо} \quad t_{ij}^A\neq 0, \quad i,j=1,2,\dots,m,\ j<i. \tag{2.7}$$

Доведення. На основі леми 2.4 існує така верхня унітрикутна матриця $S_1\in GL(m,\mathbb{Z})$, що

$$S_1A=\left\|\begin{array}{ccc}a'_{11} & a'_{12} & \quad a'_{1n}\\ & * & \end{array}\right\|=A_1,$$

де $\left(a_{11}{}',a_{12}^{'},\dots,a_{1n}{}'\right)=d_1^A$. Правими еквівалентними перетвореннями над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$, матрицю A_1 зведемо до вигляду

$$S_1AQ_1=\left\|\begin{array}{r|c}\mu_1^A & \mathbf{0}\\ \hline b_{21}^A\mu_1^A & \\ \vdots & A_{m-1}\\ b_{m1}^A\mu_1^A & \end{array}\right\|,$$

де $Q_1 \in GL(n,\mathbb{K})$, $\mu_1^{A_1}$ — перший інваріантний множник матриці A, A_{m-1} — $((m-1)\times(n-1))$-матриця, всі елементи якої діляться на μ_1^A.

Тепер застосовуємо аналогічні міркування до матриці A_{m-1}. Продовжуючи цей процес, через скінченну кількість кроків зведемо матрицю A за допомогою (z,k)-еквівалентних перетворень до трикутної форми, тобто

$$S_1AQ_1P = \begin{Vmatrix} \mu_1^A & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21}\mu_1^A & \mu_2^A & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}\mu_1^A & b_{m2}\mu_2^A & \cdots & \mu_m^A & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix}. \tag{2.8}$$

На основі алгоритму Евкліда елемент $b_{21}\mu_1^A$ матриці (2.8) зобразимо у такому вигляді:

$$b_{21}\mu_1^A = \mu_2^A q_{21} + r_{21}, \tag{2.9}$$

де $r_{21} = 0$ або $\mathcal{E}(r_{21}) < \mathcal{E}(\mu_2^A)$, якщо $r_{21} \neq 0$.

Домножуючи другий стовпець матриці (2.8) на $-q$ і додаючи до першого, одержимо матрицю з елементом r_{21} у позиції (2,1). Із рівності (2.9) випливає, що $r_{21} \neq 0$ можна зобразити так: $r_{21} = t_{21}^A\mu_1^A$, де очевидно

$$\mathcal{E}\left(t_{21}^A\right) < \frac{\mathcal{E}\left(\mu_2^A\right)}{\mathcal{E}\left(\mu_1^A\right)}, \tag{2.10}$$

зважаючи на мультиплікативність евклідової норми. Так міркуючи над іншими елементами $b_{ij}\mu_j^A,\ i,j = 1,2,...,m,\ i > j$ матриці (2.8), зведемо її до матриці SAQ^A, $S \in GL\left(m,\mathbb{Z}\right)$, $Q^A \in GL\left(n,\mathbb{K}\right)$ вигляду (2.5) з умовами (2.6), (2.7). Теорему доведено. □

Означення 2.2. *Трикутну форму* T^A *вигляду* (2.5) *з умовами* (2.6), (2.7) *називаємо стандартною формою матриці* A *відносно (z,k)–еквівалентності.*

Стандартні форми T^A матриці A визначаються неоднозначно. Кількість стандартних форм T^A над деякими квадратичними кільцями є скінченна.

Теорема 2.2. *Нехай* $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ *– квадратичне евклідове уявне кільце. Тоді стандартних форм* T^A *матриці* A *відносно (z,k)–еквівалентності є скінченна кількість.*

Доведення. Як відомо, елементів із квадратичного уявного кільця із заданою евклідовою нормою є скінченна кількісь, тому стандартна форма T^A вигляду (2.5) з умовами (2.6), (2.7) матриці A над квадратичним евклідовим уявним кільцем містить скінченну кількість елементів t_{ij}^A, $i, j = 1, 2, ..., m$, $j < i$ з умовою (2.10). Тоді, очевидно, матриць T^A з умовами (2.6) і (2.7) над цим кільцем є скінченна кількість. □

З теореми 2.2 одержуємо умову (z,k)-еквівалентності матриць над квадратичними евклідовими уявними кільцями.

Наслідок 2.2. *Нехай* $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ *— квадратичне евклідове уявне кільце. Матриці* A *і* B *із* $M(m, n, \mathbb{K})$ *(z,k)-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їхні скінченні множини стандартних форм* T^A *і* T^B *мають спільну стандартну форму.*

Зауважимо, що якщо множини стандартних форм T^A і T^B мають спільну стандартну форму, то ці множини збігаються.

Серед стандартних форм T^A матриці A у певних випадках можна вибрати одну з певними властивостями і таку стандартну форму вважаємо канонічною відносно (z,k)–еквівалентності.

Теорема 2.3. *Нехай* $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[i]$ *— кільце цілих гаусових чисел. Матриця* $A \in M(n, \mathbb{Z}[i])$ *з евклідовою нормою її визначника* $detA$ *меншою, ніж чотири, тобто* $\mathcal{E}(detA) < 4$, *(z,k)-еквівалентна до стандарної форми* T^A, *яка дорівнює канонічній діагональній формі* D^A *матриці* A, *тобто* $T^A = D^A$. *Така стандартна форма матриці* A *є единою.*

Доведення. Оскільки $\mathcal{E}(detA) < 4$, тоді канонічною діагональною формою матриці A є діагональна матриця $D^A = \mathrm{diag}(1, ..., 1, \varphi)$, де φ — одне із значеннь

$$1, -1, i, -i, 1+i, 1-i, -1-i, -1+i. \tag{2.11}$$

Розглянемо трикутні матриці з елементами $1, ..., 1, \varphi$, на головній діагоналі, де φ пробігає значення (2.11). Елементи під діагоналю дорівнюють нулю, або їх евклідові норми менші, ніж евклідові норми відповідних елементів на головній діагоналі. Ці матриці є вигляду

$$\left\|\begin{matrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ t_1 & \cdots & t_{n-1} & \varphi \end{matrix}\right\|, \tag{2.12}$$

де $\mathcal{E}(t_j) < \mathcal{E}(\varphi)$.

Звідси випливає, що евклідові норми ненульових елементів t_j при всіх значеннях φ з (2.11) дорівнюють одиниці. Отже, t_j дорівнюють нулю, або є оборотними елементами в $\mathbb{Z}[i]$, тобто дорівнюють $1, -1, i, -i$.

Поклавши, наприклад, $detA = \varphi = 1 + i$, ми одержимо такі стандартні форми T^A матриці A :

$$\left\|\begin{matrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ t_1 & \cdots & t_{n-1} & 1+i \end{matrix}\right\|,$$

де $t_j = 0, 1, -1, i, -i, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1$. Їх кількість є максимально можливою. Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що всі стандартні форми T^A (z,k)-еквівалентні до канонічної діагональної форми $D^A = diag(1, ..., 1, \varphi)$ матриці A. Аналогічно доводиться теорема для матриць (2.12) при інших значеннях φ із (2.11). $\square$

Наслідок 2.3. *Нехай $A, B \in M(n, \mathbb{Z}[i])$. Матриці A і B для яких $\mathcal{E}(detA) < 4$, $\mathcal{E}(detB) < 4$ (z,k)-еквівалентні тоді і тільки тоді, якщо вони еквівалентні, тобто $D^A = D^B$.*

Для ілюстрації цього результату розглянемо такий приклад.

Приклад. Нехай

$$A = \begin{Vmatrix} -1+2i & 1 \\ -2+3i & 1 \end{Vmatrix}.$$

Тоді $\det A = 1-i$ і $D^A = \mathrm{diag}(1, 1-i)$. Існують така оборотня матриця

$$S = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix}$$

над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ і оборотна матриця

$$Q = \begin{Vmatrix} -i & -1 \\ 0 & i \end{Vmatrix}$$

над кільцем $\mathbb{Z}[i]$, що стандартною формою матриці A є

$$T^A = SAQ = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ i & 1-i \end{Vmatrix}.$$

Міркуючи аналогічно, як при доведенні теореми 2.3, одержимо, що стандартних форм T_i^A матриці A є п'ять:

$$T_1^A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-i \end{Vmatrix}, \; T_2^A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1-i \end{Vmatrix}, \; T_3^A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1-i \end{Vmatrix},$$

$$T_4^A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ i & 1-i \end{Vmatrix}, \; T_5^A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1-i \end{Vmatrix}.$$

Зрозуміло, що найпростішою серед них є діагональна

$$T_1^A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-i \end{Vmatrix} = D^A,$$

її вважаємо канонічною стандартною формою матриці A.

2.4. Стандартна форма матриць над квадратичними кільцями головних ідеалів

Надалі, у цьому підрозділі $\mathbb{K}$ буде означати квадратичне кільце головних ідеалів, $\mathbb{K}_a$ — повну систему лишків за модулем $a \in \mathbb{K}$.

Лема 2.5. *Нехай* $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{K}$ *і їх найбільший спільний дільник дорівнює* d, *тобто* $(a_1, a_2, a_3) = d$. *Тоді існують такі* $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, $(x_1, x_2) = 1$, *що*

$$(x_1 a_1 + x_2 a_2, a_3) = d. \tag{2.13}$$

Доведення. Очевидно, що доведення леми достатньо провести для випадку $d = 1$. Запишемо a_3 у вигляді добутку простих чисел з $\mathbb{K}$, тобто $a_3 = ubc$, де $u \in U(\mathbb{K})$,

$$b = \prod_{i=1}^{l} p_i^{r_i}, \quad p_i \neq \bar{p}_j, \ i \neq j; \ \ i, j = 1, 2, ..., l,$$

тобто серед p_i немає спряжених,

$$c = \prod_{i=1}^{f} q_i^{s_i} \bar{q}_i^{t_i},$$

тобто всі множники числа c попарно спряжені.

Поклавши $d = 1$, умова (2.13) еквівалентна наступним умовам

$$(x_1 a_1 + x_2 a_2, b) = 1 \quad \text{і} \quad (x_1 a_1 + x_2 a_2, c) = 1.$$

Оскільки $(a_1, a_2, b) = 1$, тоді a_1 і a_2 одночасно не можуть ділитися без остачі на p_i, $\ i = 1, 2, \ldots, l$. Нехай

$$p_{1,l_1} = \prod_{i=1}^{l_1} p_i, \quad p_{l_1+1,l_2} = \prod_{i=l_1+1}^{l_2} p_i, \quad p_{l_2+1,l_3} = \prod_{i=l_2+1}^{l_3} p_i, \tag{2.14}$$

де

$$(p_{1,l_1}, a_1) = p_{1,l_1}, \quad (p_{l_1+1,l_2}, a_2) = p_{l_1+1,l_2}, \quad (p_{l_2+1,l_3}, a_1 a_2) = 1.$$

Тоді $(x_1a_1+x_2a_2,p_{1,l_1})=1$, якщо $(x_1,x_2)=1$,

$$x_2 \not\equiv 0 \pmod{N(p_{1,l_1})}, \tag{2.15}$$

де $N(a)$ — алгебраїчна норма елемента a і $(x_1a_1+x_2a_2,p_{l_1+1,l_2}p_{l_2+1,l_3})=1$, якщо

$$x_2 \equiv 0 \pmod{N(p_{l_1+1,l_2}p_{l_2+1,l_3})}. \tag{2.16}$$

Отже, при зазначених $x_1,x_2\in\mathbb{Z}$ маємо, що $(x_1a_1+x_2a_2,b)=1$.

З того, що $(a_1,a_2,c)=1$ випливає, що a_1 і a_2 одночасно не можуть ділитися на q_i і $\bar{q}_i$, $\ i=1,2,\ldots,f$. Запишемо всі прості дільники числа c у вигляді добутку простих чисел з $\mathbb{K}$, тобто

$$q_{f_{j-1}+1,f_j}=\prod_{i=f_{j-1}+1}^{f_j} q_i \ \text{ і } \ \bar{q}_{f_{j-1}+1,f_j}=\prod_{i=f_{j-1}+1}^{f_j}\bar{q}_i, \quad j=1,2,...,6, \tag{2.17}$$

де покладемо $f_0=0,\ f_6=f$. Тоді маємо, що

$$(q_{1,f_1}\bar{q}_{1,f_1}q_{f_1+1,f_2}\bar{q}_{f_2+1,f_3},a)=q_{1,f_1}\bar{q}_{1,f_1}q_{f_1+1,f_2}\bar{q}_{f_2+1,f_3}$$

і

$$(\bar{q}_{f_1+1,f_2}\bar{q}_{f_3+1,f_4}q_{f_4+1,f_5}\bar{q}_{f_4+1,f_5},b)=\bar{q}_{f_1+1,f_2}\bar{q}_{f_3+1,f_4}q_{f_4+1,f_5}\bar{q}_{f_4+1,f_5},$$
$$(q_{f_5+1,f}\bar{q}_{f_5+1,f},ab)=1.$$

Тоді

$$(x_1a_1+x_2a_2,q_{1,f_1}\bar{q}_{1,f_1}q_{f_1+1,f_2}\bar{q}_{f_1+1,f_2}q_{f_2+1,f_3}\bar{q}_{f_2+1,f_3})=1,$$

якщо

$$x_2 \not\equiv 0 \pmod{N(q_{1,f_1}q_{f_1+1,f_2}q_{f_2+1,f_3})}, \tag{2.18}$$

$$\begin{cases} x_1 \not\equiv 0 \pmod{N(q_{f_1+1,f_2})}; \\ x_1 \equiv 0 \pmod{N(q_{f_2+1,f_3})}. \end{cases} \tag{2.19}$$

і

$$(x_1 a_1 + x_2 a_2, q_{f_3+1,f_4} \bar{q}_{f_1+1,f_2} q_{f_4+1,f_5} \bar{q}_{f_4+1,f_5} q_{f_5+1,f_6} \bar{q}_{f_5+1,f_6}) = 1,$$

якщо $(x_1, x_2) = 1$,

$$x_2 \equiv 0 \pmod{N(q_{f_3+1,f_4} q_{f_4+1,f_5} q_{f_5+1,f_6})}. \qquad (2.20)$$

Отже, при вказаних умовах виконується умова $(x_1 a_1 + x_2 a_2, c) = 1$. Лему доведено. □

Лема 2.6. *Нехай $A \in M(m, n, \mathbb{K})$, $m \le n$, $rangA = m$. Тоді існує такий рядок*

$$\boldsymbol{x} = \left\| x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_m \right\|, \ x_i \in \mathbb{Z}, \ i = 1, 2, \dots, m,$$

що

$$\boldsymbol{x} A = \left\| a'_{11} \quad a'_{12} \quad \dots \quad a'_{1n} \right\|,$$

де $(a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{1n}) = d_1^A$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції по m. Без обмеження загальності будемо вважати, що $d_1^A = 1$.

Нехай $m = 2$, тобто

$$A^{(2,n)} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{matrix} \right\|.$$

Правими еквівалентними перетвореннями матрицю $A^{(2,n)}$ зведемо до нижнього трикутного вигляду, тобто існує така матриця $V \in GL(n, \mathbb{K})$, що

$$A^{(2,n)} V = \left\| \begin{matrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|,$$

де очевидно, що $(a_1, a_2, a_3) = 1$. Оскільки

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \right\| A^{(2,n)} V = \left\| \begin{matrix} x_1 a_1 + x_2 a_2 & x_2 a_3 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|,$$

тоді доведемо, що існують такі $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, що $(x_1a_1 + x_2a_2, x_2a_3) = 1$.

На основі леми 2.5 існують такі $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, що $(x_1a_1 + x_2a_2, a_3) = 1$. Тоді $(x_1a_1 + x_2a_2, x_2a_3) = 1$, якщо $(x_2, a_1) = 1$ і x_1, x_2 задовольняють умови (2.15) — (2.20).

Очевидно, що $d_1^{A^{(2,n)}} = (a_1, a_2, a_3)$, і отже лема доведена для $m = 2$.

Припустимо, що лема справедлива для $m - 1$, тобто для матриці

$$A^{(m-1,n)} = \begin{Vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

існує такий рядок

$$\begin{Vmatrix} x'_2 & x'_3 & \dots & x'_m \end{Vmatrix}, \quad x'_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 2, 3, \dots, m,$$

що

$$\begin{Vmatrix} x'_2 & x'_3 & \dots & x'_m \end{Vmatrix} A^{(m-1,n)} = \begin{Vmatrix} a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \end{Vmatrix},$$

де $(a'_{21}, a'_{21}, \dots, a'_{2n}) = d_1^{A^{(m-1,n)}}$ і

$$a'_{2j} = \sum_{i=2}^{m} x'_i a_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Доведемо лему для довільного m. Розглянемо матрицю

$$A_1^{(2,n)} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \end{Vmatrix}.$$

Згідно з припущенням індукції, лема справджується для $m = 2$, тобто існує такий рядок $\begin{Vmatrix} x & y \end{Vmatrix}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $(x, y) = 1$, що

$$\begin{Vmatrix} x & y \end{Vmatrix} A_1^{(2,n)} = \begin{Vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \end{Vmatrix},$$

де $(a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{1n}) = d_1^{A_1^{(2,n)}}$,

$$a'_{1j} = xa_{11} + y \sum_{i=2}^{m} x'_i a_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Оскільки $d_1^{A_1^{(2,n)}} = d_1^A$, то існує такий рядок $\boldsymbol{x} = \left\| x_1 \ \ x_2 \ \ \ldots \ \ x_m \right\|$, де $x_1 = x, \ \ x_i = yx_i', \ \ \ i = 2, 3, \ldots, m$, що

$$\boldsymbol{x}A = \left\| a_{11}' \ \ a_{12}' \ \ \ldots \ \ a_{1n}' \right\|$$

і $(a_{11}', a_{12}', \ldots, a_{1n}') = d_1^A$. Лему доведено. □

Нехай $A \in M\,(m, n, \mathbb{K})\,,\ m \leq n,\ \mathrm{rang}A = m$ і

$$D^A = \mathrm{diag}(\mu_1^A, \mu_2^A, \ldots, \mu_m^A), \quad \mu_i^A | \mu_{i+1}^A,\ i = 1, 2, \ldots, m-1$$

— канонічна діагональна форма матриці A.

Теорема 2.4. *Нехай $\mathbb{K}$ – квадратичне кільце головних ідеалів, $\mathbb{K}_a$ — повна система лишків за модулем $a \in \mathbb{K}$, $\ A \in M(m, n, \mathbb{K})$, $\ m \leq n$, $rangA = m$. Тоді матриця A (z,k)-еквівалентна до трикутної матриці T^A, тобто існують такі оборотні матриці $S \in GL(n, \mathbb{Z})$ і $Q^A \in GL(n, \mathbb{K})$, що*

$$T^A = SAQ^A = \left\| \begin{matrix} \mu_1^A & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ t_{21}^A\mu_1^A & \mu_2^A & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ldots & & & \ldots & \\ t_{m1}^A\mu_1^A & t_{m2}^A\mu_2^A & \ldots & \mu_m^A & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \right\|, \tag{2.21}$$

де $t_{ij}^A \in \mathbb{K}_{\delta_{ij}^A}$, $\mathbb{K}_{\delta_{ij}^A}$ — клас лишків за модулем $\delta_{ij}^A = \dfrac{\mu_i^A}{\mu_j^A}$, $j = 1, 2, \ldots, i-1$, $i = 2, 3, \ldots, m$.

Доведення. Нехай

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

На основі леми 2.6, існує такий рядок

$$\boldsymbol{x} = \left\| x_1 \ \ x_2 \ \ \ldots \ \ x_n \right\|, \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z},$$

що

$$\boldsymbol{x}A = \left\| a_{11}' \quad a_{12}' \quad \ldots \quad a_{1n}' \right\|,$$

де $(a_{11}', a_{12}', \ldots, a_{1n}') = d_1^A$. Примітивний рядок $\left\| x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n \right\|$, тобто такий, що $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ доповнимо до оборотної матриці

$$S = \left\| \begin{matrix} x_1 & x_1 & \ldots & x_n \\ & * & & \end{matrix} \right\|.$$

Тоді

$$SA = \left\| \begin{matrix} a_{11}' & a_{12}' & \ldots & a_{1n}' \\ & * & & \end{matrix} \right\| = A_1,$$

де $(a_{11}', a_{12}', \ldots, a_{1n}') = d_1^A$, $*$ — деякі елементи. Правими еквівалентними перетвореннями над кільцем $\mathbb{K}$ матрицю A_1 зведемо до такого вигляду, тобто існує оборотна матриця $Q_1 \in GL(n, \mathbb{K})$, що

$$A_1 Q_1 = SAQ_1 = \left\| \begin{array}{c|c} \mu_1^A & \mathbf{0} \\ \hline \tilde{a}_{21}\mu_1^A & \\ \vdots & A_{m-1} \\ \tilde{a}_{n1}\mu_1^A & \end{array} \right\|,$$

де $\mu_1^A = d_1^{A_1} = d_1^A$ і μ_1^A ділить всі елементи $((m-1) \times (n-1))$-матриці A_{m-1}. Отже, μ_1^A є першим інваріантним множником матриці A_{m-1}.

Застосувавши аналогічні міркування до матриці A_{m-1}, через скінченну кількість кроків, за допомогою (z,k)-еквівалентних перетворень, зведемо матрицю A до трикутної форми з інваріантними множниками на головній діагоналі:

$$\tilde{A} = \left\| \begin{matrix} \mu_1^A & 0 & \ldots & 0 \\ \tilde{a}_{21}\mu_1^A & \mu_2^A & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1}\mu_1^A & \tilde{a}_{n2}\mu_2^A & \ldots & \mu_n^A \end{matrix} \right\|.$$

Нехай $\mathbb{K}_{\delta_{21}^A}$ — повна система лишків за модулем $\delta_{21}^A = \dfrac{\mu_2^A}{\mu_1^A}$. Оскільки

$$\mu_2^A = \mu_1^A \delta_{21}^A,$$

то

$$\tilde{a}_{21} \equiv t_{21}^A \pmod{\delta_{21}^A},$$

де $t_{21}^A \in \mathbb{K}_{\delta_{21}^A}$. Тоді

$$\tilde{a}_{21} = t_{21}^A + q\delta_{21}^A, \quad q \in \mathbb{K}.$$

Складемо оборотню матрицю

$$W_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{Vmatrix} \oplus I^{(n-2)},$$

де $I^{(n-2)}$ — одинична матриця порядку $n-2$. Тоді в матриці $\tilde{A}W_1$ у позиції $(2,1)$ є елемент $t_{21}^A \mu_1^A$. Продовжуючи аналогічні міркування над недіагональними елементами третього і решта рядків матриці $\tilde{A}$, зведемо її до матриці T^A вигляду (2.21). Теорему доведено. □

Висновки до розділу 2

Введено поняття (z,k)-еквівалентності матриць над квадратичними кільцями. Встановлено, що матриці A над квадратичними евклідовими кільцями та квадратичними кільцями головних ідеалів (z,k)-еквівалентними перетвореннями, тобто за допомогою елементарних рядкових операцій над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ і елементарних стовпцевих операцій над квадратичним кільцем $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ зводяться до спеціальної трикутної форми T^A, яка названа стандартною формою матриці A. Показано, що кількість стандартних форм T^A матриці A над квадратичними уявними евклідовими кільцями є скінченна.

Результати цього розділу опубліковано у працях [15, 69, 24].

Розділ 3

(Z,K)-ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ПАР МАТРИЦЬ НАД КВАДРАТИЧНИМИ КІЛЬЦЯМИ

У розділі 2 встановлено, що кожна $m \times n$-матриця максимального рангу над квадратичними евклідовими кільцями, квадратичними кільцями головних ідеалів (z,k)-еквівалентними перетвореннями зводиться до спеціальної трикутної форми, названої стандартною формою матриці. Але не кожна пара матриць над такими кільцями за допомогою спільних рядкових операцій над кільцем цілих чисел і різних стовпцевих операцій над квадратичним кільцем зводиться до трикутних форм з інваріантними множниками на головних діагоналях. У цьому розділі виділено класи пар матриць над квадратичними кільцями для яких встановлені стандартні форми.

3.1. (z,k)-еквівалентність пар матриць із взаємнопростими визначниками над квадратичними кільцями

3.1.1. Найбільші спільні дільники елементів матриць і їх рядків.

Нехай $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ — квадратичне кільце головних ідеалів.

Лема 3.1. *Нехай*

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \end{Vmatrix}$$

— $2 \times n$- матриці над $\mathbb{K}$, $n \geq 2$ і $(d_2^A, d_2^B) = 1$. Тоді існує такий цілочисловий рядок

$$\boldsymbol{x} = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \end{Vmatrix},$$

тобто $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, що

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \end{Vmatrix} A = \begin{Vmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \end{Vmatrix} B = \begin{Vmatrix} b'_{11} & \dots & b'_{1n} \end{Vmatrix},$$

де

$$(a'_{11}, \dots, a'_{1n}) = d_1^A, \quad (b'_{11}, \dots, b'_{1n}) = d_1^B,$$

d_l^A означає найбільший спільний дільник мінорів l-го порядку матриці A.

Доведення. Без обмеження загальності, можемо вважати, що $d_1^A = 1$ і $d_1^B = 1$. За теоремою 2.4, матриця B (z,k)-еквівалентними перетвореннями зводиться до стандартного вигляду, тобто існують такі матриці $S \in GL(2, \mathbb{Z})$ і $Q_1 \in GL(n, \mathbb{K})$, що

$$SBQ_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} = B_1.$$

Матрицю SA за допомогою правих еквівалентних перетворень стовпців над кільцем $\mathbb{K}$ зведемо до трикутного вигляду, тобто існує така матриця $Q_2 \in GL(n, \mathbb{K})$, що

$$SAQ_2 = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} = A_1.$$

Доведемо, що для пари матриць A_1, B_1 існує такий рядок $\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \end{Vmatrix}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, що

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \end{Vmatrix} A_1 = \begin{Vmatrix} x_1 a_1 + x_2 a_2 & x_2 a_3 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}, \tag{3.1}$$

$$\left\| x_1 \quad x_2 \right\| B_1 = \left\| x_1 + x_2 b_1 \quad x_2 b_2 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \right\|, \tag{3.2}$$

де

$$(x_1 a_1 + x_2 a_2, x_2 a_3) = 1 \tag{3.3}$$

і

$$(x_1 + x_2 b_1, x_2 b_2) = 1. \tag{3.4}$$

Відповідно до лем 2.5 і 2.6, умова (3.3) виконується, якщо $(x_2, a_1) = 1$ і x_1, x_2 задовольняють умови (2.15) — (2.20). Вибираємо $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, $(x_1, x_2) = 1$, такі, щоб виконувалися умови (3.3) і (3.4).

Достатньо це довести для випадку, коли простими дільниками b_2 є:

$$\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_{l_{11}}, \quad 1 \le l_{11} \le l_1; \ \bar{p}_{l_{21}+1}, \ldots, \bar{p}_{l_{22}}, \quad l_{21} + 1 \le l_{22} \le l_2;$$

$$\bar{p}_{l_{31}+1}, \ldots, \bar{p}_{l_{32}}, \quad l_{31} + 1 \le l_{32} \le l; \ \bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_{s_1}, \quad 1 \le s_1 \le s,$$

де $\bar{p}_i$ і $\bar{g}_j$ спряжені прості елементи до відповідних дільників p_i, g_j елементів a_3 і a_1 матриці A_1.

Тоді $(x_1 + x_2 b_1, \bar{p}_1 \ldots \bar{p}_{l_{11}}) = 1$, якщо

$$\begin{cases} x_1 \equiv 0 \pmod{N(p_i)} \ \text{ якщо } \ \bar{p}_i \nmid b_1, \\[2ex] x_1 \not\equiv 0 \pmod{N(p_i)} \ \text{ якщо } \ \bar{p}_i \mid b_1, \ i = 1, 2, \ldots, l_{11}. \end{cases}$$

Співвідношеня

$$(x_1 + x_2 b_1, \bar{p}_{l_{21}+1} \ldots \bar{p}_{l_{22}}) = 1 \ \text{ і } \ (x_1 + x_2 b_1, \bar{p}_{l_{31}+1} \ldots \bar{p}_{l_{32}}) = 1$$

справджуються, якщо x_1, x_2 задовольняють умови (2.15) – (2.20).

Тепер $(x_1 + x_2 b_1, \bar{g}_1 \ldots \bar{g}_{s_1}) = 1$, якщо

$$\begin{cases} x_1 \equiv 0 \pmod{N(g_i)} \ \text{ якщо } \ \bar{g}_i \nmid b_1, \\[2ex] x_1 \not\equiv 0 \pmod{N(g_i)} \ \text{ якщо } \ \bar{g}_i \mid b_1, \quad i = 1, 2, \ldots, s_1. \end{cases}$$

Отже, існує такий рядок $\left\|x_1 \quad x_2\right\|$, де $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, що для рядків

$$\left\|x_1 \quad x_2\right\| A_1 \text{ і } \left\|x_1 \quad x_2\right\| B_1$$

виглядів (3.1) і (3.2) виконуються умови (3.3), (3.4). Лема доведена. $\square$

Лема 3.2. *Нехай*

$$A = \left\|a_{ij}\right\|_1^{m,n}, \; B = \left\|b_{ij}\right\|_1^{m,n}$$

— $m \times n$-матриці над $\mathbb{K}$, $m \leq n$ і $(d_m^A, d_m^B) = 1$. Тоді існує такий цілочисловий рядок

$$\boldsymbol{x} = \left\|x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_m\right\|, x_i \in \mathbb{Z}, \; i = 1, 2, \dots, m,$$

що

$$\boldsymbol{x}A = \left\|a'_{11} \quad a'_{12} \quad \dots \quad a'_{1n}\right\|, \quad \boldsymbol{x}B = \left\|b'_{11} \quad b'_{12} \quad \dots \quad b'_{1n}\right\|, \tag{3.5}$$

де

$$(a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{1n}) = d_1^A, \quad (b'_{11}, b'_{12}, \dots, b'_{1n}) = d_1^B.$$

Доведення. Без обмеження загальності, можна вважати, що $d_1^A = d_1^B = 1$. Доведення проведемо методом математичної індукції по m.

Для $m = 2$, тобто для $2 \times n$-матриць A і B правильність твердження випливає з леми 3.1.

Припустимо, що лема правильна для $m - 1$. Тобто, для матриць

$$A^{(m-1,n)} = \begin{Vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \quad \text{і} \quad B^{(m-1,n)} = \begin{Vmatrix} b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{Vmatrix}$$

існує такий рядок $\left\|x'_2 \quad x'_3 \quad \dots \quad x'_m\right\|$, де $x'_i \in \mathbb{Z}$, $i = 2, 3, \dots, m$, що

$$\left\|x'_2 \quad x'_3 \quad \dots \quad x'_m\right\| A^{(m-1,n)} = \left\|a'_{21} \quad a'_{22} \quad \dots \quad a'_{2n}\right\|$$

і

$$\left\|x'_2 \quad x'_3 \quad \dots \quad x'_m\right\| B^{(m-1,n)} = \left\|b'_{21} \quad b'_{22} \quad \dots \quad b'_{2n}\right\|,$$

де

$$(a'_{21}, a'_{22}, \ldots, a'_{2n}) = d_1^{A^{(m-1,n)}},\ (b'_{21}, b'_{22}, \ldots, b'_{2n}) = d_1^{B^{(m-1,n)}}$$

і

$$a'_{2j} = \sum_{i=2}^{m} x'_i a_{ij},\ b'_{2j} = \sum_{i=2}^{m} x'_i b_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Доведемо лему для довільного m, тобто для $m \times n$-матриць A і B. Розглянемо матриці:

$$\tilde{A}_1 = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \end{Vmatrix} \text{ і } \tilde{B}_1 = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b'_{21} & b'_{22} & \ldots & b'_{2n} \end{Vmatrix}.$$

На основі леми 3.1, існує такий рядок $\begin{Vmatrix} x & y \end{Vmatrix}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, що

$$\begin{Vmatrix} x & y \end{Vmatrix} \tilde{A}_1 = \begin{Vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \end{Vmatrix} \text{ і } \begin{Vmatrix} x & y \end{Vmatrix} \tilde{B}_1 = \begin{Vmatrix} b'_{11} & b'_{12} & \ldots & b'_{1n} \end{Vmatrix},$$

де

$$(a'_{11}, a'_{12}, \ldots, a'_{1n}) = d_1^{A_1^{(2,n)}} = d_1^A,\ \ (b'_{11}, b'_{12}, \ldots, b'_{1n}) = d_1^{B_1^{(2,n)}} = d_1^B$$

і

$$a'_{1j} = xa_{1j} + ya'_{2j} = xa_{1j} + y\sum_{i=2}^{m} x'_i a_{ij},$$

$$b'_{1j} = xb_{1j} + yb'_{2j} = xb_{1j} + y\sum_{i=2}^{m} x'_i b_{ij};\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Звідси, шуканим рядком буде рядок $\boldsymbol{x} = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \end{Vmatrix}$, де $x_1 = x$, $x_i = yx'_i$, $i = 2, 3, \ldots, m$, який задовольняє умови леми 3.2. Лема доведена. $\square$

3.1.2. Зведення пар матриць над квадратичними кільцями головних ідеалів до стандартних форм. Нехай $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ — квадратичне кільце головних ідеалів.

Означення 3.1. *Пари матриць* (A_1, A_2) *і* (B_1, B_2), *де* $A_i, B_i \in M\left(n, \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]\right)$, $i = 1, 2$ *називаємо (z,k)-еквівалентними,* *якщо існують такі оборотні матриці* S *над кільцем цілих чисел* $\mathbb{Z}$ *і* Q^{A_1}, Q^{A_2} *над квадратичним кільцем* $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$, *що* $B_1 = SA_1Q^{A_1}$ *і* $B_2 = SA_2Q^{A_2}$.

Теорема 3.1. *Нехай* $\mathbb{K}$ *— квадратичне кільце головних ідеалів,* $A, B \in M(n, \mathbb{K})$, $(detA, detB) = 1$ *і*

$$D^A = diag(\mu_1^A, \mu_2^A, \ldots, \mu_n^A), \quad \mu_i^A \mid \mu_{i+1}^A, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$D^B = diag(\mu_1^B, \mu_2^B, \ldots, \mu_n^B), \quad \mu_i^B \mid \mu_{i+1}^B, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

— канонічні діагональні форми матриць A *і* B. *Тоді пара матриць* (A, B) *(z,k)-еквівалентна до пари* (T^A, T^B) *стандартних форм матриць* A *і* B, *тобто існують такі оборотні матриці* $S \in GL(n, \mathbb{Z})$ *і* $Q^A, Q^B \in GL(n, \mathbb{K})$, *що*

$$T^A = SAQ^A = \begin{Vmatrix} \mu_1^A & 0 & \ldots & 0 \\ t_{21}^A\mu_1^A & \mu_2^A & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}^A\mu_1^A & t_{n2}^A\mu_2^A & \ldots & \mu_n^A \end{Vmatrix}, \tag{3.6}$$

$$T^B = SBQ^B = \begin{Vmatrix} \mu_1^B & 0 & \ldots & 0 \\ t_{21}^B\mu_1^B & \mu_2^B & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}^B\mu_1^B & t_{n2}^B\mu_2^B & \ldots & \mu_n^B \end{Vmatrix}, \tag{3.7}$$

де

$$t_{ij}^A \in \mathbb{K}_{\delta_{ij}^A}, \quad t_{ij}^B \in \mathbb{K}_{\delta_{ij}^B},$$

$\mathbb{K}_{\delta_{ij}^A}$ *і* $\mathbb{K}_{\delta_{ij}^B}$ *— класи лишків за модулями* $\delta_{ij}^A = \dfrac{\mu_i^A}{\mu_j^A}$ *і* $\delta_{ij}^B = \dfrac{\mu_i^B}{\mu_j^B}$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i > j$, *відповідно.*

Доведення. Нехай

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}, \qquad B = \left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n},$$

$a_{ij},\ b_{ij} \in \mathbb{K},\ i,j = 1,2,\ldots,n$. На основі леми 3.2 існує такий рядок

$$\boldsymbol{x} = \left\| x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n \right\|, \quad x_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

що

$$\boldsymbol{x}A = \left\| a'_{11} \quad a'_{12} \quad \ldots \quad a'_{1n} \right\|, \qquad \boldsymbol{x}B = \left\| b'_{11} \quad b'_{12} \quad \ldots \quad b'_{1n} \right\|,$$

де

$$(a'_{11}, a'_{12}, \ldots, a'_{1n}) = d_1^A, \qquad (b'_{11}, b'_{12}, \ldots, b'_{1n}) = d_1^B.$$

Рядок $\boldsymbol{x}$ можна доповнити до оборотної матриці

$$S = \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ & & * & \end{matrix} \right\|,$$

де $S \in GL\,(n, \mathbb{Z})$.

Таким чином,

$$SA = \left\| \begin{matrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ & & * & \end{matrix} \right\| = A_1$$

і

$$SB = \left\| \begin{matrix} b'_{11} & b'_{12} & \ldots & b'_{1n} \\ & & * & \end{matrix} \right\| = B_1.$$

Тоді за допомогою еквівалентних перетворень стовпців матриці A_1 і B_1 зведемо до таких виглядів

$$A_1Q_1 = SAQ_1 = \left\| \begin{array}{c|c} \mu_1^A & \mathbf{0} \\ \hline \tilde{a}_{21}\mu_1^A & \\ \vdots & A_{n-1} \\ \tilde{a}_{n1}\mu_1^A & \end{array} \right\|,$$

$$B_1Q_2 = SBQ_2 = \left\| \begin{array}{c|c} \mu_1^B & \mathbf{0} \\ \hline \tilde{b}_{21}\mu_1^B & \\ \vdots & B_{n-1} \\ \tilde{b}_{n1}\mu_1^B & \end{array} \right\|,$$

де $Q_1, Q_2 \in GL(n, \mathbb{K})$, $\mu_1^A = d_1^A$, $\mu_1^B = d_1^B$ і μ_1^A ділить всі елементи $((n-1)\times(n-1))$-матриці A_{n-1}, μ_1^B ділить всі елементи $((n-1)\times(n-1))$-матриці $B_{(n-1)}$.

Застосовуючи аналогічні міркування до матриць A_{n-1} і B_{n-1}, через скінченну кількість кроків, за допомогою вказаних перетворень, зведемо матриці A і B до трикутних форм

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} \mu_1^A & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{a}_{21}\mu_1^A & \mu_2^A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1}\mu_1^A & \tilde{a}_{n2}\mu_2^A & \dots & \mu_n^A \end{Vmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{Vmatrix} \mu_1^B & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{b}_{21}\mu_1^B & \mu_2^B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{n1}\mu_1^B & \tilde{b}_{n2}\mu_2^B & \dots & \mu_n^B \end{Vmatrix}.$$

Дальше зведення пари матриць $\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right)$, вказаними перетвореннями, до пари $\left(T^A, T^B\right)$ вигляду (3.6), (3.7) проводимо аналогічно, як і зведення матриці $\tilde{A}$ до матриці T^A при завершенні теореми 2.4. Теорему доведено. $\square$

На основі теореми 2.4 і леми 3.2 та використовуючи їх доведення, можемо записати стандартну форму для пари прямокутних $m \times n$-матриць.

Наслідок 3.1. *Нехай $A, B \in M(m, n, \mathbb{K})$, $m \leq n$ і $(d_m^A, d_m^B) = 1$. Тоді пара матриць (A, B) (z,k)-еквівалентна до пари (T^A, T^B) стандартних форм матриць A і B, тобто існують такі оборотні матриці*

$S \in GL(m, \mathbb{Z})$ *і* $Q^A, Q^B \in GL(n, \mathbb{K})$, *що*

$$T^A = SAQ^A = \begin{Vmatrix} \mu_1^A & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_{21}^A \mu_1^A & \mu_2^A & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ t_{m1}^A \mu_1^A & t_{m2}^A \mu_2^A & \dots & \mu_m^A & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} = T_1^A D^A,$$

$$T^B = UBV^B = \begin{Vmatrix} \mu_1^B & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_{21}^B \mu_1^B & \mu_2^B & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ t_{m1}^B \mu_1^B & t_{m2}^B \mu_2^B & \dots & \mu_m^B & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} = T_1^B D^B,$$

де

$$t_{ij}^A \in \mathbb{K}_{\delta_{ij}^A}, \quad t_{ij}^B \in \mathbb{K}_{\delta_{ij}^B},$$

$\mathbb{K}_{\delta_{ij}^A}$ *і* $\mathbb{K}_{\delta_{ij}^B}$ *— класи лишків за модулями* $\delta_{ij}^A = \dfrac{\mu_i^A}{\mu_j^A}$ *і* $\delta_{ij}^B = \dfrac{\mu_i^B}{\mu_j^B}$; $i, j = 1, 2, \dots, m$, $i > j$, *відповідно.*

3.1.3. Стандартна форма пари матриць над квадратичними евклідовими кільцями. Надалі, $\mathbb{K}$ — квадратичне евклідове кільце. Нагадаємо, що евклідову норму $\mathcal{E}(a)$ елемента a визначаємо наступним чином:

$$\begin{cases} \mathcal{E}(a) = N(a), \text{ якщо } \mathbb{K} \text{ — уявне квадратичне кільце;} \\ \\ \mathcal{E}(a) = |N(a)|, \text{ якщо } \mathbb{K} \text{ — дійсне квадратичне кільце,} \end{cases} \tag{3.8}$$

де $N(a)$ — алгебраїчна норма числа a.

Теорема 3.2. *Нехай* $\mathbb{K}$ *— квадратичне евклідове кільце,* $A, B \in M(n, \mathbb{K})$, $(detA, detB) = 1$. *Тоді пара матриць* (A, B) *(z,k)-еквівалентна до пари матриць* $\left(T^A, T^B\right)$ *стандартних форм* T^A, T^B *матриць* A, B, *тобто існують такі оборотні матриці*

$S \in GL(n,\mathbb{Z})$ і $Q^A, Q^B \in GL(n,\mathbb{K})$, що

$$T^A = SAQ^A = \begin{Vmatrix} \mu_1^A & 0 & \dots & 0 \\ t_{21}^A\mu_1^A & \mu_2^A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}^A\mu_1^A & t_{n2}^A\mu_2^A & \dots & \mu_n^A \end{Vmatrix}, \tag{3.9}$$

$$T^B = SBQ^B = \begin{Vmatrix} \mu_1^B & 0 & \dots & 0 \\ t_{21}^B\mu_1^B & \mu_2^B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}^B\mu_1^B & t_{n2}^B\mu_2^B & \dots & \mu_n^B \end{Vmatrix}, \tag{3.10}$$

де

$$t_{ij}^A = 0, \text{ якщо } \mu_i^A = \mu_j^A;$$

$$\mathcal{E}(t_{ij}^A) < \mathcal{E}\left(\frac{\mu_i^A}{\mu_j^A}\right), \text{ якщо } \mu_i^A \neq \mu_j^A \text{ і } t_{ij}^A \neq 0; \tag{3.11}$$

$$t_{ij}^B = 0, \text{ якщо } \mu_i^B = \mu_j^B;$$

$$\mathcal{E}(t_{ij}^B) < \mathcal{E}\left(\frac{\mu_i^B}{\mu_j^B}\right), \text{ якщо } \mu_i^B \neq \mu_j^B \text{ і } t_{ij}^B \neq 0. \tag{3.12}$$

Якщо $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ – квадратичне евклідове уявне кільце, тоді пар $\left(T^A, T^B\right)$ стандартних форм вигляду (3.9) і (3.10) матриць A і B відносно (z,k)-еквівалентності є скінченна кількість.

Доведення. Нехай

$$A = \left\|a_{ij}\right\|_{i,j=1}^n, \qquad B = \left\|b_{ij}\right\|_{i,j=1}^n,$$

$a_{ij},\ b_{ij} \in \mathbb{K},\ i,j = 1,2,\dots,n$. Аналогічно як при доведенні леми 3.2, доводимо, що для матриць A і B над квадратичним евклідовим кільцем $\mathbb{K}$ існує цілочисловий рядок

$$\boldsymbol{x} = \left\|x_1 \;\; x_2 \;\; \dots \;\; x_n\right\|, \quad x_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1,2,\dots,n,$$

що

$$\boldsymbol{x}A = \left\| a'_{11} \quad a'_{12} \quad \dots \quad a'_{1n} \right\|, \qquad \boldsymbol{x}B = \left\| b'_{11} \quad b'_{12} \quad \dots \quad b'_{1n} \right\|,$$

де

$$(a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{1n}) = d_1^A, \qquad (b'_{11}, b'_{12}, \dots, b'_{1n}) = d_1^B.$$

Рядок $\boldsymbol{x}$ доповнюємо до оборотної матриці $S \in GL(n, \mathbb{Z})$ і за допомогою еквівалентних перетворень стовпців матриці SA і SB зведемо до виглядів

$$SAQ_1 = \left\| \begin{array}{c|c} \mu_1^A & \mathbf{0} \\ \hline \tilde{a}_{21}\mu_1^A & \\ \vdots & A_{n-1} \\ \tilde{a}_{n1}\mu_1^A & \end{array} \right\|, \tag{3.13}$$

$$SBQ_2 = \left\| \begin{array}{c|c} \mu_1^B & \mathbf{0} \\ \hline \tilde{b}_{21}\mu_1^B & \\ \vdots & B_{n-1} \\ \tilde{b}_{n1}\mu_1^B & \end{array} \right\|, \tag{3.14}$$

де $Q_1, Q_2 \in GL(n, K)$, $\mu_1^A = d_1^A$, $\mu_1^B = d_1^B$ і μ_1^A ділить всі елементи $((n-1)\times(n-1))$-матриці A_{n-1}, μ_1^B ділить всі елементи $((n-1)\times(n-1))$-матриці $B_{(n-1)}$.

Застосовуючи алгоритм Евкліда, елементи $\tilde{a}_{ij}$ і $\tilde{b}_{ij}$ матриць SAQ_1 і SBQ_2 зобразимо у такому вигляді:

$$\tilde{a}_{ij}\mu_j^A = \mu_i^A q_{ij}^A + r_{ij}^A, \quad \tilde{b}_{ij}\mu_j^B = \mu_i^B q_{ij}^B + r_{ij}^B, \tag{3.15}$$

де r_{ij}^A, $r_{ij}^B \in \mathbb{K}$ і $r_{ij}^A = 0$, $r_{ij}^B = 0$ або

$$\mathcal{E}(r_{ij}^A) < \mathcal{E}(\mu_i^A), \ \mathcal{E}(r_{ij}^B) < \mathcal{E}(\mu_i^B), \ i, j = 1, 2, \dots, n, \ i < j.$$

Із рівностей (3.15) випливає, що $r_{ij}^A = t_{ij}^A \mu_j^A$, $\quad r_{ij}^B = t_{ij}^B \mu_j^B$, і

$$\mathcal{E}(r_{ij}^A) < \frac{\mathcal{E}(\mu_i^A)}{\mathcal{E}(\mu_j^A)}, \quad \mathcal{E}(r_{ij}^B) < \frac{\mathcal{E}(\mu_i^B)}{\mathcal{E}(\mu_j^B)}.$$

Отже, існують такі матриці $S \in GL(n,\mathbb{Z})$, $Q^A, Q^B \in GL(n,\mathbb{K})$, що матриці SAQ^A, SBQ^B мають вигляд (3.9), (3.10), відповідно.

Як відомо [37], що елементів з квадратичного евклідового уявного кільця з тими самими значеннями евклідової норми є скінченна кількість, тоді, очевидно, що матриць T^A і T^B з умовами (3.11), (3.12) є скінченна кількість. Теорему доведено. $\square$

Зауважимо, що не кожна пара матриць $A, B \in M(n,\mathbb{K})$ зводитися вказаними перетвореннями до пари T^A, T^B вигляду (3.9), (3.10). Це ілюструє такий приклад.

Приклад. Розглянемо пару матриць

$$A = \begin{Vmatrix} 1+\sqrt{-2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{-2} \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 3+\sqrt{-2} & (1+\sqrt{-2})(1-\sqrt{-2}) \end{Vmatrix}$$

над квадратичним евклідовим кільцем $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-2}\right]$, для яких $(\det A, \det B) = 1-\sqrt{-2} \neq 1$.

Очевидно, що $d_1^A = 1$ і $d_2^B = 1$.

Покажемо, що для пари матриць A і B не існує такого рядка

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \end{Vmatrix}, \; x_1, x_2 \in \mathbb{Z},$$

що

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \end{Vmatrix} A = \begin{Vmatrix} x_1(1+\sqrt{-2}) + x_2(1-\sqrt{-2}) & x_2(1-\sqrt{-2}) \end{Vmatrix}, \tag{3.16}$$

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \end{Vmatrix} B = \begin{Vmatrix} x_1 + x_2(3+\sqrt{-2}) & x_2(1+\sqrt{-2})(1-\sqrt{-2}) \end{Vmatrix}, \tag{3.17}$$

де

$$(x_1(1+\sqrt{-2}) + x_2(1-\sqrt{-2}), x_2(1-\sqrt{-2})) = 1, \tag{3.18}$$

$$(x_1 + x_2(3+\sqrt{-2}), x_2(1+\sqrt{-2})(1-\sqrt{-2})) = 1. \tag{3.19}$$

Співвідношення (3.18) виконується тільки при таких x_1, x_2, $(x_1, x_2) = 1$, що задовольняють умовам

$$x_2 \not\equiv 0 \pmod{N(1+\sqrt{-2})}, \qquad x_1 \not\equiv 0 \pmod{N(1-\sqrt{-2})}$$

тобто, якщо

$$x_2 \not\equiv 0 \pmod 3, \qquad x_1 \not\equiv 0 \pmod 3.$$

Для того, щоб виконувалося співвідношення (3.19), маємо вибрати такі x_1, x_2, що $x_1 + x_2(3+\sqrt{-2})$ не ділиться на $(1+\sqrt{-2})(1-\sqrt{-2}) = 3$.

Спочатку знайдемо, такі x_1, x_2, що $x_1 + x_2(3+\sqrt{-2})$ ділиться на $1+\sqrt{-2}$. Нехай існує таке $t = t_1 + t_2\sqrt{-2}$, що

$$x_1 + x_2(3+\sqrt{-2}) = (1+\sqrt{-2})(t_1 + t_2\sqrt{-2}).$$

З цього рівняння маємо наступну систему рівнянь над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = t_1 - 2t_2, \\ \\ x_2 = t_1 + t_2. \end{cases}$$

Легко переконатися, що розв'язком цієї системи є $x_1 \equiv x_2 \pmod 3$, де x_2 — довільне ціле число.

Отже, $(x_1 + x_2(3+\sqrt{-2}), 1+\sqrt{-2}) = 1$ при

$$x \in \mathbb{Z} \backslash \left(x_1 | x_1 \in \mathbb{Z}, \ \ x_1 \equiv x_2 \pmod 3\right), \ \ x_2 \in \mathbb{Z}.$$

Тепер знайдемо такі x_1, x_2, при яких $x_1 + x_2(3+\sqrt{-2})$ ділиться на $1-\sqrt{-2}$. Нехай існує таке $l = l_1 + l_2\sqrt{-2}$, що

$$x_1 + x_2(3+\sqrt{-2}) = (1-\sqrt{-2})(l_1 + l_2\sqrt{-2}).$$

Перемноживши і прирівнявши відповідні коефіцієнти в обох частинах цієї рівності, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = l_1 + 2l_2, \\ \\ x_2 = -l_1 + l_2. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $x_1 \equiv 2x_2 \pmod 3$, x_2 — довільне ціле число.

Отже, $(x_1 + x_2(3+\sqrt{-2}), 1-\sqrt{-2}) = 1$ при

$$x \in \mathbb{Z} \backslash \left(x_1 | x_1 \in \mathbb{Z}, \quad x_1 \equiv 2x_2 \pmod 3\right), \quad x_2 \in \mathbb{Z}.$$

Співвідношення (3.18) виконується тоді, якщо

$$x_1 \not\equiv 0 \pmod 3 \tag{3.20}$$

$$x_2 \not\equiv 0 \pmod 3. \tag{3.21}$$

Співвідношення (3.19) виконується, якщо

$$x_1 \not\equiv x_2 \pmod 3 \tag{3.22}$$

$$x_1 \not\equiv 2x_2 \pmod 3. \tag{3.23}$$

Конгруецію (3.21) задовольняють такі x_2, що $x_2 \equiv 1, 2 \pmod 3$.

Нехай $x_2 \equiv 1 \pmod 3$, тоді з (3.22) випливає, що $x_1 \not\equiv 1 \pmod 3$, а з (3.23) — $x_1 \not\equiv 2 \pmod 3$. Отже, $x_1 \equiv 0 \pmod 3$, але це суперечить умові (3.20).

Аналогічно, для випадку $x_2 \equiv 2 \pmod 3$, отримаємо суперечність.

Отже, не існує такого рядка $\left\| x_1 \quad x_2 \right\|$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, що рядки (3.16) і (3.17) є з умовами (3.18) і (3.19).

3.2. (z,k)-еквівалентність пар матриць, визначники яких є степенями простих чисел над квадратичними евклідовими кільцями

У підрозділі 3.1 встановлено, що пара матриць, визначники яких взаємно прості, (z,k)-еквівалентними перетвореннями зводиться до стандартних форм. Показано також, що пара матриць визначники яких не є взаємно простими може не зводитися такими перетвореннями до стандартних форм.

У цьому підрозділі доведено, що пара матриць, визначники яких є степенями простих чисел, (z,k)-еквівалентна до пари матриць в стандартних формах. Зауважимо, що у цьому випадку визначники матриць із такої пари можуть не бути взаємно простими.

3.2.1. Допоміжні леми. Надалі $\mathbb{K}$ — квадратичне евклідове кільце.

Лема 3.3. *Нехай*

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{Vmatrix},$$

$n \geq 2$ *і* $d_2^A = p^r$, *де* p *— просте число з* $\mathbb{K}$. *Тоді існує такий цілочисловий рядок* $\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \end{Vmatrix}$, *тобто* $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, *що*

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \end{Vmatrix} A = \begin{Vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \end{Vmatrix}, \tag{3.24}$$

де

$$(a'_{11}, a'_{12}, ..., a'_{1n}) = d_1^A.$$

Доведення. Без обмеження загальності будемо вважати, що $d_1^A = 1$. Тоді правими елементарними перетвореннями над $\mathbb{K}$ матрицю A зведемо до трикутного вигляду

$$AV = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} = A_1,$$

де $V \in GL(n, \mathbb{K})$. Оскільки

$$\left\| \; x_1 \;\; x_2 \; \right\| A_1 = \left\| \; x_1a_1 + x_2a_3 \;\; x_2a_2 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \; \right\|,$$

то потрібно довести, що існують такі елементи $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, що

$$(x_1a_1 + x_2a_3, x_2a_2) = 1. \tag{3.25}$$

В матриці A найбільший спільний дільник мінорів другого порядку $d_2^A = p^r$. Отже, $a_1a_2 = p^r$, де $a_1 = p^{r_1}$, $a_2 = p^{r_2}$, $r_1 + r_2 = r$, $r_1, r_2 \geq 0$. Тоді умова (3.25) виконується при таких $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, що $(x_1, x_2) = 1$ і

1) $p \nmid x_2$ (p не ділить x_2), якщо $r_1 > 0$, $r_2 \geq 0$.

2) $p \mid x_2$ (p ділить x_2) і $p \nmid x_1$, якщо $r_1 = 0$, $r_2 > 0$.

Зауважимо, що якщо $p = p_1 + p_2\sqrt{k}$, то $(p_1 + p_2\sqrt{k})(p_1 - p_2\sqrt{k}) = \alpha$, де $\alpha \in \mathbb{Z}$ і α ділиться на p. Лему доведено. $\square$

Лема 3.4. *Нехай*

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{i,j=1}^{m,n}, \; a_{ij} \in \mathbb{K}, \; i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

$m \leq n$ *і* $d_m^A = p^r$, *де* p *— просте число з* $\mathbb{K}$. *Тоді існує такий рядок*

$$\boldsymbol{x} = \left\| x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_m \right\|,$$

де $x_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ *, що*

$$\boldsymbol{x}A = \left\| a'_{11} \;\; a'_{12} \;\; \ldots \;\; a'_{1n} \right\|, \tag{3.26}$$

де $(a'_{11}, a'_{12}, \ldots, a'_{1n}) = d_1^A$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції по m.

Для $m = 2$, тобто для $2 \times n$-матриці A твердження справедливе за лемою 3.3.

Припустимо, що лема справедлива для $(m-1) \times n$-матриці A. Тобто для підматриці

$$A^{(m-1,n)} = \left\| \begin{matrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

матриці A існує такий рядок $\left\|t_2 \ \ t_3 \ \ \dots \ \ t_m\right\|$, де $t_i \in \mathbb{Z}$, $i = 2, 3, \dots, m$, що

$$\left\|t_2 \ \ t_3 \ \ \dots \ \ t_m\right\| A^{(m-1,n)} = \left\|a'_{21} \ \ a'_{22} \ \ \dots \ \ a'_{2n}\right\|,$$

де $(a'_{21}, a'_{22}, \dots, a'_{2n}) = d_1^{A_{m-1}}$ і

$$a'_{2j} = \sum_{i=2}^{m} t_i a_{ij},\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Доведемо лему для $m \times n$-матриці. Розглянемо таку матрицю

$$\tilde{A}_1 = \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \end{matrix}\right\|,$$

де $\left\|a_{11} \ \ a_{12} \ \ \dots \ \ a_{1n}\right\|$ — перший рядок матриці A. На основі леми 3.3 існує такий рядок $\left\|x \ \ y\right\|$, $x, y \in \mathbb{Z}$, що

$$\left\|x \ \ y\right\| \tilde{A}_1 = \left\|a'_{11} \ \ a'_{12} \ \ \dots \ \ a'_{1n}\right\|,$$

де

$$a'_{1j} = x a_{1j} + y a'_{2j} = x a_{1j} + y \sum_{i=2}^{m} t_i a_{ij},$$

$j = 1, 2, \dots, n$, і $(a'_{11}, a'_{11}, \dots, a'_{1n}) = d_1^A$, тобто виконується умова (3.5). Звідси одержимо, що шуканим рядком є рядок $\boldsymbol{x} = \left\|x_1 \ \ x_2 \ \ \dots \ \ x_m\right\|$, де $x_1 = x$, $x_i = y t_i$, $i = 2, 3, \dots, m$. Лему доведено. □

Наслідок 3.2. *Нехай $A \in M(n, \mathbb{K})$ і $detA = p^r$, де p — просте число з $\mathbb{K}$. Тоді існують оборотні матриці $S \in GL(n, \mathbb{Z})$ і $Q \in GL(n, \mathbb{K})$ такі, що*

$$SAQ = \left\|\begin{matrix} p^{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ t_{21}^A p^{r_1} & p^{r_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}^A p^{r_1} & t_{n2}^A p^{r_2} & \dots & p^{r_n} \end{matrix}\right\| = T^A, \tag{3.27}$$

де

$$r_1 \le r_2 \le \dots \le r_n \ і \ \mathcal{E}(t_{ij}^A) < \mathcal{E}(p^{r_i - r_j}),$$

$\mathcal{E}(t_{ij}^A)$ — евклідова норма числа t_{ij}^A.

Якщо $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ – квадратичне евклідове уявне кільце, тоді стандартних форм T^A вигляду (3.27) матриці A відносно (z,k)-еквівалентності є скінченна кількість.

Лема 3.5. *Нехай*

$$A = \left\|\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{matrix}\right\|, \qquad B = \left\|\begin{matrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \end{matrix}\right\|,$$

$n \geq 2$ і $d_2^A = p^r$, $d_2^B = q^s$, де p, q — прості елементи з $\mathbb{K}$. Тоді існує такий цілочисловий рядок

$$\left\|\begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix}\right\|, \; x_1, x_2 \in \mathbb{Z},$$

що

$$\left\|\begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix}\right\| A = \left\|\begin{matrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \end{matrix}\right\|, \tag{3.28}$$

$$\left\|\begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix}\right\| B = \left\|\begin{matrix} b'_{11} & b'_{11} & \dots & b'_{1n} \end{matrix}\right\|, \tag{3.29}$$

де

$$(a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{1n}) = d_1^A, \quad (b'_{11}, b'_{12}, \dots, b'_{1n}) = d_1^B.$$

Доведення. Без обмеження загальності, будемо вважати, що $d_1^A = 1$ і $d_1^B = 1$. За теоремою 2.1 існують такі матриці $\tilde{S} \in GL(2, \mathbb{Z})$ і $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2 \in GL(n, \mathbb{K})$, що

$$\tilde{S}A\tilde{Q}_1 = \left\|\begin{matrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\right\| = A', \qquad \tilde{S}B\tilde{Q}_2 = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & q^s & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\right\| = B',$$

де $a_1 a_2 = p^r$.

Тепер необхідно довести, що існує такий рядок $\left\|\begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix}\right\|$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, що

$$\left\|\begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix}\right\| A' = \left\|\begin{matrix} x_1 a_1 + x_2 a_3 & x_2 a_2 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\right\|,$$

$$\left\|x_1 \quad x_2\right\| B' = \left\|x_1 + x_2 b \quad x_2 q^s \quad 0 \quad \dots \quad 0\right\|,$$

де

$$(x_1 a_1 + x_2 a_3, x_2 a_2) = 1 \tag{3.30}$$

і

$$(x_1 + x_2 b, x_2 q^s) = 1. \tag{3.31}$$

Оскільки $a_1 a_2 = p^r$, тоді $a_1 = p^{r_1}$, $a_2 = p^{r_2}$, $r_1 + r_2 = r$. За лемою 3.3 існують такі $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, при яких виконується умова (3.30). Безпосередньо перевіряється, що умови (3.30), (3.31) виконуються при таких $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, $(x_1, x_2) = 1$:

1. p, $q \nmid x_2$, і $q \mid x_1$, якщо $q \nmid b$ або $q \nmid x_1$, якщо $q \mid b$; якщо $r_1 > 0$, $r_2 \geq 0$.

2. p, $q \mid x_2$, і p, $q \nmid x_1$, якщо $r_1 = 0$, $r_2 > 0$;

3. якщо $r_1 = r_2 = r = 0$, то доведення випливає з леми 3.3.

Отже, для матриць A і B існує такий рядок $\left\|x_1 \quad x_2\right\|$, що виконуються умови (3.28), (3.29). Лему доведено. □

Лема 3.6. *Нехай*

$$A = \left\|a_{ij}\right\|_{i,j=1}^{m,n}, \quad B = \left\|b_{ij}\right\|_{i,j=1}^{m,n}, \quad a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{K},$$

$i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, $m \leq n$ *і* $d_m^A = p^r$, $d_m^B = q^s$, *де* p, q *— прості елементи з* $\mathbb{K}$. *Тоді існує такий рядок*

$$\boldsymbol{x} = \left\|x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_m\right\|, \; x_i \in \mathbb{Z}, \; i = 1, 2, \dots, m,$$

що

$$\boldsymbol{x}A = \left\|a'_{11} \quad a'_{12} \quad \dots \quad a'_{1n}\right\|, \qquad \boldsymbol{x}B = \left\|b'_{11} \quad b'_{12} \quad \dots \quad b'_{1n}\right\|, \tag{3.32}$$

де

$$(a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{1n}) = d_1^A, \quad (b'_{11}, b'_{12}, \dots, b'_{1n}) = d_1^B.$$

Доведення. Доведемо лему методом математичної індукції за m.

Для $m = 2$, тобто для $2 \times n$-матриці A справедливість твердження випливає з леми 3.5.

Припустимо, що лема справедлива для $(m-1) \times n$-матриці A. Тобто для матриць

$$A_1 = \begin{Vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \quad \text{і} \quad B_1 = \begin{Vmatrix} b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{Vmatrix}$$

існує такий рядок $\begin{Vmatrix} t_2 & t_3 & \dots & t_m \end{Vmatrix}$, де $t_i \in \mathbb{Z}$, $i = 2, 3, \dots, m$, що

$$\begin{Vmatrix} t_2 & t_3 & \dots & t_m \end{Vmatrix} A_1 = \begin{Vmatrix} a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \end{Vmatrix}$$

і

$$\begin{Vmatrix} t_2 & t_3 & \dots & t_m \end{Vmatrix} B_1 = \begin{Vmatrix} b'_{21} & b'_{22} & \dots & b'_{2n} \end{Vmatrix},$$

де

$$(a'_{21}, a'_{22}, \dots, a'_{2n}) = d_1^{A_{m-1}}, \qquad (b'_{21}, b'_{22}, \dots, b'_{2n}) = d_1^{B_{m-1}}$$

і

$$a'_{2j} = \sum_{i=2}^{m} t_i a_{ij}, \qquad b'_{2j} = \sum_{i=2}^{m} t_i b_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Доведемо лему для $m \times n$-матриці. Розглянемо матриці:

$$\tilde{A}_1 = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \end{Vmatrix} \quad \text{і} \quad \tilde{B}_1 = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b'_{21} & b'_{22} & \dots & b'_{2n} \end{Vmatrix}.$$

На основі леми 3.5 існує такий рядок $\begin{Vmatrix} x & y \end{Vmatrix}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, що

$$\begin{Vmatrix} x & y \end{Vmatrix} \tilde{A}_1 = \begin{Vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \end{Vmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{Vmatrix} x & y \end{Vmatrix} \tilde{B}_1 = \begin{Vmatrix} b'_{11} & b'_{12} & \dots & b'_{1n} \end{Vmatrix},$$

де

$$(a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{1n}) = d_1^{A}, \qquad (b'_{11}, b'_{12}, \dots, b'_{1n}) = d_1^{B}$$

і

$$a'_{1j} = xa_{1j} + ya'_{2j} = xa_{1j} + y\sum_{i=2}^{m} t_i a_{ij},$$

$$b'_{1j} = xb_{1j} + yb'_{2j} = xb_{1j} + y\sum_{i=2}^{m} t_i b_{ij},\ j = 1, \ldots, n.$$

Звідси одержимо, що шуканим рядком є рядок

$$\boldsymbol{x} = \left\| x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_m \right\|,$$

де $x_1 = x,\ x_i = yt_i,\ i = 2, 3, \ldots, m$, який задовольняє умову (3.32). Лему доведено. □

3.2.2. (z,k)-еквівалентність пар матриць, визначники яких є степенями простих чисел.

Теорема 3.3. *Нехай* $\mathbb{K}$ *— квадратичне евклідове кільце і*

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}, \qquad B = \left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n},$$

де $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{K}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $detA = p^r$, $detB = q^s$, p, q *— прості елементи з* $\mathbb{K}$. *Тоді пара матриць* (A, B) *(z,k)-еквівалентними перетвореннями зводиться до пари* $\left(T^A, T^B\right)$ *стандартних форм матриць* A *і* B, *тобто існують такі матриці* $S \in GL(n, \mathbb{Z})$ *і* $Q^A, Q^B \in GL(n, \mathbb{K})$, *що*

$$T^A = SAQ^A = \left\| \begin{matrix} p^{r_1} & 0 & \ldots & 0 \\ t_{21}^A p^{r_1} & p^{r_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}^A p^{r_1} & t_{n2}^A p^{r_2} & \ldots & p^{r_n} \end{matrix} \right\|, \tag{3.33}$$

$$r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_n \quad \text{і} \quad \mathcal{E}(t_{ij}^A) < \mathcal{E}(p^{r_i - r_j}),\ \text{якщо}\ t_{ij}^A \ne 0,$$

$$T^B = SBQ^B = \left\| \begin{matrix} q^{s_1} & 0 & \ldots & 0 \\ t_{21}^B q^{s_1} & q^{s_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}^B q^{s_1} & t_{n2}^B q^{s_2} & \ldots & q^{s_n} \end{matrix} \right\|, \tag{3.34}$$

де

$$s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_n \quad і \quad \mathcal{E}(t^B_{ij}) < \mathcal{E}(q^{s_i - s_j}); \;\; якщо\; t^B_{ij} \neq 0,\, i,j = 1,2,\ldots,n.$$

Якщо $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ *– квадратичне евклідове уявне кільце, то пар* (T^A, T^B) *стандартних форм* T^A *і* T^B *вигляду (3.33) і (3.34) матриць* A *і* B *відносно (z,k)-еквівалентності є скінченна кількість.*

Доведення. На основі леми 3.6 існує такий рядок

$$\boldsymbol{x} = \left\| x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n \right\|,\; x_i \in \mathbb{Z},\;\; i = 1,2,\ldots,n,$$

що

$$\boldsymbol{x}A = \left\| a'_{11} \;\; a'_{12} \;\; \ldots \;\; a'_{1n} \right\|, \qquad \boldsymbol{x}B = \left\| b'_{11} \;\; b'_{12} \;\; \ldots \;\; b'_{1n} \right\|,$$

де

$$(a'_{11}, a'_{12}, \ldots, a'_{1n}) = d^A_1,\;\; (b'_{11}, b'_{12}, \ldots, b'_{1n}) = d^B_1.$$

Рядок $\boldsymbol{x}$ доповнимо до оборотної матриці

$$S = \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ & & * & \end{matrix} \right\|.$$

Таким чином,

$$SA = \left\| \begin{matrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ & * & & \end{matrix} \right\| = A_1 \quad \text{і} \quad SB = \left\| \begin{matrix} b'_{11} & b'_{12} & \ldots & b'_{1n} \\ & * & & \end{matrix} \right\| = B_1.$$

Правими елементарними перетвореннями над стовпцями, яким відповідають домноженню справа матриць A_1 і B_1 на матриці $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2 \in GL(n, \mathbb{K})$, зводимо ці матриці до виглядів

$$A_1\tilde{Q}_1 = SA\tilde{Q}_1 = \left\| \begin{array}{c|c} p^{r_1} & \mathbf{0} \\ \hline \tilde{a}_{21} & \\ \vdots & \tilde{A}_{n-1} \\ \tilde{a}_{n1} & \end{array} \right\|, \qquad B_1\tilde{Q}_2 = SB\tilde{Q}_2 = \left\| \begin{array}{c|c} q^{s_1} & \mathbf{0} \\ \hline \tilde{b}_{21} & \\ \vdots & \tilde{B}_{n-1} \\ \tilde{b}_{n1} & \end{array} \right\|,$$

де

$$d_1^{A_1} = d_1^A = p^{r_1},\ d_1^{B_1} = d_1^B = q^{s_1}$$

і $\tilde{A}_{n-1}$, $\tilde{B}_{n-1}$ — матриці порядків $n-1$. Зауважимо, що p^{r_1} ділить $\tilde{a}_{i1}$, $i = 2, 3, \ldots, n$ і ділить всі елементи матриці $\tilde{A}_{n-1}$; q^{s_1} ділить $\tilde{b}_{i1}$, $i = 2, 3, \ldots, n$ і всі елементи матриці $\tilde{B}_{n-1}$. Таким чином p^{r_1} і q^{s_1} є першими інваріантними множниками матриць A_1 і B_1, і отже, матриць A і B.

Застосовуємо аналогічні міркування до матриць $\tilde{A}_{n-1}$ і $\tilde{B}_{n-1}$. Продовжуючи цей процес, через скінченну кількість кроків за допомогою вказаних (z,k)-еквівалентних перетворень, зведемо матриці A і B до матриць трикутного вигляду з інваріантними множниками на головних діагоналях.

Аналогічно, як у теоремі 2.1 доводимо скінченність стандартних форм T^A і T^B матриць A і B відносно (z,k)-еквівалентності. Теорему доведено. $\square$

Наслідок 3.3. *Нехай* $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ *— квадратичне евклідове уявне кільце,* $A_i, B_i \in M(m, n, \mathbb{K})$, $i = 1, 2$. *Пари матриць* (A_1, A_2) *і* (B_1, B_2) *(z,k)-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їхні скінченні множини пар стандартних форм* (T^{A_1}, T^{A_2}) *і* (T^{B_1}, T^{B_2}) *мають спільну пару стандартних форм.*

Висновки до розділу 3

У цьому розділі доведено, що пари матриць, визначники яких є взаємно простими або є степенями простих чисел у квадратичному кільці (z,k)-еквівалентними перетвореннями пар матриць, тобто за допомогою спільних для обох матриць пари елементарних рядкових операцій над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ і різних для кожної матриці елементарних стовпцевих операцій над квадратичним кільцем $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$, зводяться до стандартних форм. Показано, що стандартних пар (T^A, T^B) пар матриць (A, B) над квадратичними уявними евклідовими кільцями є скінченна кількість.

Результати цього розділу опубліковано у статтях [69] і [22].

Розділ 4

МАТРИЧНІ ЛІНІЙНІ ОДНОБІЧНІ ТА ДВОБІЧНІ РІВНЯННЯ ВІД ДВОХ ЗМІННИХ НАД КВАДРАТИЧНИМИ КІЛЬЦЯМИ

У цьому розділі розглядаються матричні рівняння типу Сильвестра та матричні діофантові рівняння над квадратичними кільцями. Встановлюються умови розв'язності цих рівнянь та описуються їх цілочислові розв'язки.

4.1. Матричне рівняння типу Сильвестра $AX + YB = C$

4.1.1. Цілочислові розв'язки матричного рівняння. Розглянемо двобічне матричне рівняння

$$AX + YB = C, \tag{4.1}$$

де $A, B, C \in M(m, n, \mathbb{K})$ – відомі, а $X \in M(n, \mathbb{K}), Y \in M(m, \mathbb{K})$ – невідомі матриці над квадратичним кільцем $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$. Матриці можемо записати у такому вигляді:

$$A = A_1 + A_2\sqrt{k}, \ \ B = B_1 + B_2\sqrt{k}, \ \ \ C = C_1 + C_2\sqrt{k}, \tag{4.2}$$

$$X = X_1 + X_2\sqrt{k}, \ \ Y = Y_1 + Y_2\sqrt{k}, \tag{4.3}$$

якщо $k \equiv 2, 3 \pmod 4$;

$$A = \frac{1}{2}\left(A_1 + A_2\sqrt{k}\right), \ B = \frac{1}{2}\left(B_1 + B_2\sqrt{k}\right), \ C = \frac{1}{2}\left(C_1 + C_2\sqrt{k}\right), \tag{4.4}$$

$$X = \frac{1}{2}\left(X_1 + X_2\sqrt{k}\right), \; Y = \frac{1}{2}\left(Y_1 + Y_2\sqrt{k}\right), \qquad (4.5)$$

де елементи матриць $A_1 - A_2$, $B_1 - B_2$, $C_1 - C_2$ і елементи матриць $X_1 - X_2$, $Y_1 - Y_2$ діляться на 2, якщо $k \equiv 1 \pmod 4$, $A_i, B_i, C_i \in M(m,n,\mathbb{Z})$, $X_i \in M(n,\mathbb{Z})$, $Y_i \in M(m,\mathbb{Z})$, $i = 1,2$.

Нагадаємо, що добутком Кронекера $A \otimes B$ двох матриць $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{m,n}$ і $B = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^{r,l}$ є блочна $(mr \times nl)$-матриця такого вигляду:

$$A \otimes B = \begin{Vmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{Vmatrix}.$$

Надалі будемо позначати через $\mathrm{row}_i(A)$ – i-ий рядок, а через $\mathrm{col}_j(A)$ – j-ий стовпець матриці A.

Сформулюємо критерій існування цілочислових розв'язків матричного рівняння (4.1) та їх єдиності.

Теорема 4.1. *Матричне рівняння* (4.1) *над квадратичним кільцем* $\mathbb{K}$, *де матриці* $A, B, C \in M(m,n,\mathbb{K})$ *вигляду* (4.2) *або* (4.4), *має цілочисловий розв'язок* X_0, Y_0, *тобто* $X_0 \in M(n,\mathbb{Z}), Y_0 \in M(m,\mathbb{Z})$ *тоді і тільки тоді, коли матриці*

$$\begin{Vmatrix} A_1 \otimes I_n & I_m \otimes B_1^\top & \boldsymbol{c}_1 \\ A_2 \otimes I_n & I_m \otimes B_2^\top & \boldsymbol{c}_2 \end{Vmatrix} \quad i \quad \begin{Vmatrix} A_1 \otimes I_n & I_m \otimes B_1^\top & \mathbf{0} \\ A_2 \otimes I_n & I_m \otimes B_2^\top & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$$

еквівалентні над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$, *де стовпці* $\boldsymbol{c}_1$ *і* $\boldsymbol{c}_2$ *є вигляду*

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{Vmatrix} \mathrm{row}_1(C_1) & \mathrm{row}_2(C_1) & \dots & \mathrm{row}_m(C_1) \end{Vmatrix}^\top,$$

$$\boldsymbol{c}_2 = \begin{Vmatrix} \mathrm{row}_1(C_2) & \mathrm{row}_2(C_2) & \dots & \mathrm{row}_m(C_2) \end{Vmatrix}^\top,$$

I_n *—* $n \times n$*-одинична матриця,* $B_i^\top$ *— транспонована матриця до матриці* B_i, $i = 1,2$.

Доведення. Нехай $k \equiv 2,3 \pmod 4$. Поклавши в (4.3) $X_2 = 0$ і $Y_2 = 0$ з рівняння (4.1) отримаємо таке матричне рівняння

$$(A_1X_1 + Y_1B_1) + (A_2X_1 + Y_1B_2)\sqrt{k} = C_1 + C_2\sqrt{k}.$$

З цього рівняння, отримаємо систему матричних рівнянь над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} A_1X_1 + Y_1B_1 = C_1 \\ A_2X_1 + Y_1B_2 = C_2, \end{cases}$$

де $A_i, B_i, C_i \in M(m, n, \mathbb{Z})$, $X_i \in M(n, \mathbb{Z})$, $Y_i \in M(m, \mathbb{Z})$, $i = 1, 2$. Розписавши поелементно добутки A_iX_1 і Y_1B_i, $i = 1, 2$ і врахувавши означення добутку Кронекера, рівняння

$$A_1X_1 + Y_1B_1 = C_1, \quad A_2X_1 + Y_1B_2 = C_2$$

цієї системи запишемо у вигляді

$$\left\| \begin{matrix} A_1 \otimes I_n & I_m \otimes B_1^\top \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{matrix} \right\| = \|\boldsymbol{c}_1\|,$$

$$\left\| \begin{matrix} A_2 \otimes I_n & I_m \otimes B_2^\top \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{matrix} \right\| = \|\boldsymbol{c}_2\|,$$

де

$$\boldsymbol{x} = \left\| \mathrm{row}_1(X_1) \;\; \mathrm{row}_2(X_1) \;\; \ldots \;\; \mathrm{row}_n(X_1) \right\|^\top,$$

$$\boldsymbol{y} = \left\| \mathrm{row}_1(Y_1) \;\; \mathrm{row}_2(Y_1) \;\; \ldots \;\; \mathrm{row}_m(Y_1) \right\|^\top,$$

$$\boldsymbol{c}_1 = \left\| \mathrm{row}_1(C_1) \;\; \mathrm{row}_2(C_1) \;\; \ldots \;\; \mathrm{row}_m(C_1) \right\|^\top,$$

$$\boldsymbol{c}_2 = \left\| \mathrm{row}_1(C_2) \;\; \mathrm{row}_2(C_2) \;\; \ldots \;\; \mathrm{row}_m(C_2) \right\|^\top.$$

Отже, отримаємо таке матричне рівняння над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$:

$$\left\| \begin{matrix} A_1 \otimes I_n & I_m \otimes B_1^\top \\ A_2 \otimes I_n & I_m \otimes B_2^\top \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \end{matrix} \right\|. \tag{4.6}$$

Матричне рівняння (4.6) має розв'язки, тоді і тільки тоді, коли матриці

$$\left\| \begin{matrix} A_1 \otimes I_n & I_m \otimes B_1^\top & \boldsymbol{c}_1 \\ A_2 \otimes I_n & I_m \otimes B_2^\top & \boldsymbol{c}_2 \end{matrix} \right\| \text{ і } \left\| \begin{matrix} A_1 \otimes I_n & I_m \otimes B_1^\top & \mathbf{0} \\ A_2 \otimes I_n & I_m \otimes B_2^\top & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|$$

еквівалентні. Отже, доведення теореми для випадку $k \equiv 2, 3 \pmod 4$ завершене.

Нехай $k \equiv 1 \pmod 4$. Покладемо $X_2 = 0, \ \ Y_2 = 0$. Оскільки всі елементи матриць $X_1 - X_2$ і $Y_1 - Y_2$ діляться на 2, то

$$X_1 = 2\tilde{X} \text{ і } Y_1 = 2\tilde{Y}.$$

Використовуючи це з рівняння (4.1) отримаємо таке рівняння

$$\frac{1}{2}\left(A_1 + A_2\sqrt{k}\right)\tilde{X}_1 + \tilde{Y}_1\frac{1}{2}\left(B_1 + B_2\sqrt{k}\right) = \frac{1}{2}\left(C_1 + C_2\sqrt{k}\right),$$

Звідси запишемо систему матричних рівнянь над $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} A_1\tilde{X} + \tilde{Y}B_1 = C_1 \\ A_2\tilde{X} + \tilde{Y}B_2 = C_2. \end{cases}$$

Використовуючи добуток Кронекера, з цієї системи легко отримати таке матричне рівняння:

$$\left\| \begin{matrix} A_1 \otimes I_n & I_m \otimes B_1^\top \\ A_2 \otimes I_n & I_m \otimes B_2^\top \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \tilde{\boldsymbol{x}} \\ \tilde{\boldsymbol{y}} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \end{matrix} \right\|, \tag{4.7}$$

де

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \left\| \operatorname{row}_1\left(\tilde{X}\right) \ \ \operatorname{row}_2\left(\tilde{X}\right) \ \ \ldots \ \ \operatorname{row}_n\left(\tilde{X}\right) \right\|^\top,$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \left\| \operatorname{row}_1\left(\tilde{Y}\right) \ \ \operatorname{row}_2\left(\tilde{Y}\right) \ \ \ldots \ \ \operatorname{row}_m\left(\tilde{Y}\right) \right\|^\top,$$

$$\boldsymbol{c}_1 = \left\| \operatorname{row}_1\left(C_1\right) \ \ \operatorname{row}_2\left(C_1\right) \ \ \ldots \ \ \operatorname{row}_m\left(C_1\right) \right\|^\top,$$

$$\boldsymbol{c}_2 = \left\| \mathrm{row}_1\left(C_2\right) \quad \mathrm{row}_2\left(C_2\right) \quad \ldots \quad \mathrm{row}_m\left(C_2\right) \right\|^\top.$$

Відомо [79], що рівняння (4.7) розв'язне тоді і тільки тоді, коли матриці

$$\left\| \begin{matrix} A_1 \otimes I_n & I_m \otimes B_1^\top & \boldsymbol{c}_1 \\ A_2 \otimes I_n & I_m \otimes B_2^\top & \boldsymbol{c}_2 \end{matrix} \right\| \text{ і } \left\| \begin{matrix} A_1 \otimes I_n & I_m \otimes B_1^\top & \mathbf{0} \\ A_2 \otimes I_n & I_m \otimes B_2^\top & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|$$

еквівалентні над $\mathbb{Z}$. Доведення теореми завершено. □

Теорема 4.2. *Нехай у матричному рівнянні* (4.1) *матриці* $A, B, C \in M\left(n, \mathbb{Z}\right)$ *вигляду* (4.2) *або* (4.4). *Цілочисловий розв'язок* $X_0, Y_0 \in M\left(n, \mathbb{Z}\right)$ *матричного рівняння* (4.1) *єдиний тоді і тільки тоді, коли матриця*

$$A_1 \otimes B_2^\top - A_2 \otimes B_1^\top$$

— неособлива.

Доведення. З доведення теореми 4.1 маємо, що з матричного рівняння (4.1) над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$ можна отримати матричне рівняння (4.6), якщо $k \equiv 2, 3 \pmod 4$ або (4.7), якщо $k \equiv 1 \pmod 4$ над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$. Відомо, що якщо ці матричні рівняння мають розв'язок, то цей розв'язок єдиний тоді і тільки тоді, коли матриця

$$\left\| \begin{matrix} A_1 \otimes I_n & I_n \otimes B_1^\top \\ A_2 \otimes I_n & I_n \otimes B_2^\top \end{matrix} \right\|$$

— неособлива. Покажемо, що правильна рівність

$$\left(A_2 \otimes I_n\right)\left(I_n \otimes B_2^\top\right) = \left(I_n \otimes B_2^\top\right)\left(A_2 \otimes I_n\right).$$

Оскільки A_2, B_2, I_n — матриці розміру $n \times n$ і, отже, існують добутки $A_2 I_n$ та $I_n B_2^\top$, тоді з властивості добутку Кронекера матриць з цієї рівності отримаємо таку рівність

$$\left(A_2 \otimes I_n\right)\left(I_n \otimes B_2^\top\right) = A_2 I_n \otimes I_n B_2^\top = A_2 \otimes B_2^\top.$$

За означенням

$$I_n \otimes B_2^\top = \begin{Vmatrix} B_2^\top & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & B_2^\top & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_2^\top \end{Vmatrix}$$

$$A_2 \otimes I_n = \begin{Vmatrix} a_{11}I_n & a_{12}I_n & \dots & a_{1n}I_n \\ a_{21}I_n & a_{22}I_n & \dots & a_{2n}I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}I_n & a_{n2}I_n & \dots & a_{nn}I_n \end{Vmatrix},$$

де a_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots, n$ – відповідні елементи матриці A_2. Звідси

$$\left(I_n \otimes B_2^\top\right)(A_2 \otimes I_n) =$$

$$\begin{Vmatrix} a_{11}B_2^\top & a_{12}B_2^\top & \dots & a_{1n}B_2^\top \\ a_{21}B_2^\top & a_{22}B_2^\top & \dots & a_{2n}B_2^\top \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B_2^\top & a_{n2}B_2^\top & \dots & a_{nn}B_2^\top \end{Vmatrix} = A_2 \otimes B_2^\top.$$

Відомо [82], що

$$\det \begin{Vmatrix} A_1 \otimes I_n & I_n \otimes B_1^\top \\ A_2 \otimes I_n & I_n \otimes B_2^\top \end{Vmatrix} =$$

$$= \det \left\| \, (A_1 \otimes I_n)\left(I_n \otimes B_2^\top\right) - (A_2 \otimes I_n)\left(I_n \otimes B_1^\top\right) \, \right\|.$$

Звідси

$$\det \begin{Vmatrix} A_1 \otimes I_n & I_n \otimes B_1^\top \\ A_2 \otimes I_n & I_n \otimes B_2^\top \end{Vmatrix} = \det \left\| \, A_1 \otimes B_2^\top - A_2 \otimes B_1^\top \, \right\|,$$

тобто матриця

$$\left\| \, A_1 \otimes B_2^\top - A_2 \otimes B_1^\top \, \right\|$$

— неособлива. Доведення завершене. □

Приклад. Розглянемо матричне рівняння

$$\begin{Vmatrix} 1+i & 2i \\ 3+2i & 1 \end{Vmatrix} X + Y \begin{Vmatrix} 0 & 3i \\ 2 & 2-i \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4i & -1+5i \\ 7+4i & 3+8i \end{Vmatrix} \tag{4.8}$$

над квадратичним кільцем цілих гаусових чисел $\mathbb{Z}[i]$, де

$$X = \begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{Vmatrix} \quad Y = \begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{Vmatrix}.$$

Зобразивши матриці

$$A = \begin{Vmatrix} 1+i & 2i \\ 3+2i & 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 3i \\ 2 & 2-i \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 4i & -1+5i \\ 7+4i & 3+8i \end{Vmatrix}$$

у вигляді (4.2), використовуючи доведення теореми 4.1, з рівняння (4.8) отримаємо таке рівняння над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \\ 8 \end{Vmatrix} \tag{4.9}$$

Оскільки

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 8 \end{Vmatrix} V = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

де матриця V оборотня над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ вигляду

$$V = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

тоді звідси випливає, що рівняння (4.8) має розв'язок.

Врахувавши, що

$$\left\| A_1 \otimes B_2^\top - A_2 \otimes B_1^\top \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & -2 & 0 & -4 \\ 3 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 9 & -7 & 3 & -1 \end{Vmatrix}$$

і визначник

$$\det \left\| A_1 \otimes B_2^\top - A_2 \otimes B_1^\top \right\| = -144$$

тобто матриця неособлива, робимо висновок згідно теореми 4.2, що рівняння (4.8) має єдиний розв'язок.

Знаходження розв'язків матричного рівняння (4.8) зводиться до знаходження розв'язків рівняння (4.9) над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$.

Існують такі, оборотні матриці

$$U = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & 1 & -1 & 3 & -3 \\ -5 & 6 & 2 & -4 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 36 & -40 & -4 & 16 & 2 & -8 & -13 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$V_1 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -18 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -18 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -12 & -108 & -66 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -12 & -108 & -66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 9 & 81 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 9 & 81 & 51 \end{matrix} \right\|$$

над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$, що

$$U \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{matrix} \right\| V_1 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{matrix} \right\|.$$

З рівняння (4.9) маємо

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{matrix}\right\| V_1^{-1} \left\|\begin{matrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 7 \\ 6 \\ -6 \\ -22 \\ 18 \\ -24 \end{matrix}\right\|.$$

Звідси

$$\left\|\begin{matrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{matrix}\right\| = V_1 \left\|\begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 7 \\ 6 \\ -6 \\ -22 \\ 3 \\ -1 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right\|.$$

І отже, розв'язком рівняння (4.8) будуть наступні матриці

$$X = \left\|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\|, \quad Y = \left\|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{matrix}\right\|.$$

4.1.2. Розв'язність матричних рівнянь $AX + YB = C$ над квадратичними кільцями. Розглянемо матричне лінійне рівняння

$$AX + YB = C, \tag{4.10}$$

де A, B, $C \in M\left(m, n, \mathbb{K}\right)$.

Як відомо [79], В. Рот встановив, що розв'язність матричного рівняння (4.10) над полем та над кільцем поліномів рівносильна еквівалентності блочних матриць. Дальше буде доведено, що ця умова правильна і для матричного рівняння (4.10) над іншими кільцями. Зрозуміло, що ця умова є критерієм розв'язності цього матричного рівняння над кільцями, в яких розв'язана задача еквівалентності матриць. Такими є кільця елементарних дільників [65]. Серед квадратичних кілець є евклідові кільця, кільця головних ідеалів і квадратичні кільця, які не є такими. Так квадратичне кільце $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\,\right]$ не є кільцем елементарних дільників. Тому невідомі критерії розв'язності матричного рівняння (4.10) над довільним квадратичним кільцем.

У цьому підрозділі встановлено необхідні і достатні умови розв'язності матричного рівняння (4.10) над будь-яким квадратичним кільцем.

Теорема 4.3. *Матричне рівняння* (4.10) *над квадратичним кільцем* $\mathbb{K}$ *з матрицями вигляду* (4.2) *або* (4.4) *має розв'язок* $X \in M(n, \mathbb{K})$, $Y \in M(m, \mathbb{K})$ *тоді і тільки тоді, коли є еквівалентними над* $\mathbb{Z}$ *такі матриці:*

а)
$$\left\| \begin{matrix} (A_1 + A_2 k) \otimes I_n & A_1 \otimes I_n & I_m \otimes (B_1^\top + B_2^\top k) & I_m \otimes B_1^\top & \boldsymbol{c}_1 \\ (A_1 + A_2) \otimes I_n & A_2 \otimes I_n & I_m \otimes (B_1^\top + B_2^\top) & I_m \otimes B_2^\top & \boldsymbol{c}_2 \end{matrix} \right\|$$

і

$$\left\| \begin{matrix} (A_1 + A_2 k) \otimes I_n & A_1 \otimes I_n & I_m \otimes (B_1^\top + B_2^\top k) & I_m \otimes B_1^\top & \mathbf{0} \\ (A_1 + A_2) \otimes I_n & A_2 \otimes I_n & I_m \otimes (B_1^\top + B_2^\top) & I_m \otimes B_2^\top & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

якщо $k \equiv 2, 3 \pmod 4$;

б)
$$\left\| \begin{matrix} (A_1 + A_2 k) \otimes I_n & 2A_1 \otimes I_n & I_m \otimes (B_1^\top + B_2^\top k) & I_m \otimes 2B_1^\top & 2\boldsymbol{c}_1 \\ (A_1 + A_2) \otimes I_n & 2A_2 \otimes I_n & I_m \otimes (B_1^\top + B_2^\top) & I_m \otimes 2B_2^\top & 2\boldsymbol{c}_2 \end{matrix} \right\|$$

і

$$\left\| \begin{matrix} (A_1 + A_2 k) \otimes I_n & 2A_1 \otimes I_n & I_m \otimes (B_1^\top + B_2^\top k) & I_m \otimes 2B_1^\top & \mathbf{0} \\ (A_1 + A_2) \otimes I_n & 2A_2 \otimes I_n & I_m \otimes (B_1^\top + B_2^\top) & I_m \otimes 2B_2^\top & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

якщо $k \equiv 1 \pmod 4$,

де I_n *– одинична матриця* n*-го порядку і стовпці* $\boldsymbol{c}_i$ *є вигляду*

$$\boldsymbol{c}_i = \left\| \begin{matrix} \mathrm{row}_1(C_i) & \ldots & \mathrm{row}_m(C_i) \end{matrix} \right\|^\top, \quad i = 1, 2.$$

Доведення. **а)** Нехай $k \equiv 2,3 \pmod 4$. Тоді матриці X, Y можна записати у вигляді (4.3), де $X_i \in M(n,\mathbb{Z})$, $Y_i \in M(m,\mathbb{Z})$, $i = 1,2$. У рівняння (4.10) підставимо вирази (4.2) і (4.3) замість відповідних матриць, отримуємо таке рівняння

$$(A_1 + A_2\sqrt{k})(X_1 + X_2\sqrt{k}) + (Y_1 + Y_2\sqrt{k})(B_1 + B_2\sqrt{k}) = C_1 + C_2\sqrt{k}.$$

З цього матричного рівняння запишемо систему матричних рівнянь над $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} A_1X_1 + A_2X_2k + Y_1B_1 + Y_2B_2k = C_1 \\ A_2X_1 + A_1X_2 + Y_1B_2 + Y_2B_1 = C_2. \end{cases}$$

Розписавши поелементно добутки A_iX_j і Y_iB_j, $i,j = 1,2$ і врахувавши означення добутку Кронекера матриць, цю систему подаємо у вигляді:

$$\left\|\begin{matrix} A_1 \otimes I_n & A_2k \otimes I_n \\ A_2 \otimes I_n & A_1 \otimes I_n \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} I_m \otimes B_1^\top & I_m \otimes B_2^\top k \\ I_m \otimes B_2^\top & I_m \otimes B_1^\top \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \end{matrix}\right\|,$$

де

$$\boldsymbol{x}_i = \left\|\mathrm{row}_1(X_i) \ldots \mathrm{row}_n(X_i)\right\|^\top,$$

$$\boldsymbol{y}_i = \left\|\mathrm{row}_1(Y_i) \ldots \mathrm{row}_m(Y_i)\right\|^\top,$$

$$\boldsymbol{c}_i = \left\|\mathrm{row}_1(C_i) \ldots \mathrm{row}_m(C_i)\right\|^\top,$$

$i = 1,2$. Отже, маємо таке матричне рівняння над $\mathbb{Z}$:

$$\left\|\begin{matrix} A_1 \otimes I_n & A_2k \otimes I_n & I_m \otimes B_1^\top & I_m \otimes B_2^\top k \\ A_2 \otimes I_n & A_1 \otimes I_n & I_m \otimes B_2^\top & I_m \otimes B_1^\top \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \end{matrix}\right\|. \tag{4.11}$$

Рівняння (4.10) над $\mathbb{K}$ має розв'язок тоді і тільки тоді, коли має розв'язок рівняння (4.11) над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$.

Матричне рівняння (4.11) має розв'язок над $\mathbb{Z}$ тоді і тільки тоді, коли матриці

$$\left\| \begin{matrix} A_1 \otimes I_n & A_2 k \otimes I_n & I_m \otimes B_1^\top & I_m \otimes B_2^\top k & \boldsymbol{c}_1 \\ A_2 \otimes I_n & A_1 \otimes I_n & I_m \otimes B_2^\top & I_m \otimes B_1^\top & \boldsymbol{c}_2 \end{matrix} \right\|$$

і

$$\left\| \begin{matrix} A_1 \otimes I_n & A_2 k \otimes I_n & I_m \otimes B_1^\top & I_m \otimes B_2^\top k & \mathbf{0} \\ A_2 \otimes I_n & A_1 \otimes I_n & I_m \otimes B_2^\top & I_m \otimes B_1^\top & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|$$

еквівалентні над $\mathbb{Z}$ [17].

З цих матриць маємо еквівалентні до них такі матриці:

$$\left\| \begin{matrix} (A_1 + A_2 k) \otimes I_n & A_1 \otimes I_n & I_m \otimes (B_1^\top + B_2^\top k) & I_m \otimes B_1^\top & \boldsymbol{c}_1 \\ (A_1 + A_2) \otimes I_n & A_2 \otimes I_n & I_m \otimes (B_1^\top + B_2^\top) & I_m \otimes B_2^\top & \boldsymbol{c}_2 \end{matrix} \right\|$$

і

$$\left\| \begin{matrix} (A_1 + A_2 k) \otimes I_n & A_1 \otimes I_n & I_m \otimes (B_1^\top + B_2^\top k) & I_m \otimes B_1^\top & \mathbf{0} \\ (A_1 + A_2) \otimes I_n & A_2 \otimes I_n & I_m \otimes (B_1^\top + B_2^\top) & I_m \otimes B_2^\top & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

Отже, у випадку, коли $k \equiv 2, 3 \pmod 4$ теорему доведено.

б) Нехай $k \equiv 1 \pmod 4$. Тоді матриці X, Y можна записати у вигляді (4.5) де $X_i \in M(n, \mathbb{Z})$, $Y_i \in M(m, \mathbb{Z})$, $i = 1, 2$. Зауважимо, що за визначенням елементів квадратичного кільця $\mathbb{K}$, всі елементи матриць $X_1 - X_2$ і $Y_1 - Y_2$ діляться на 2. Отже, нехай матриці X_1 і Y_1 мають вигляд

$$X_1 = X_2 + 2\tilde{X}, \; Y_1 = Y_2 + 2\tilde{Y},$$

де $\tilde{X} \in M(n, \mathbb{Z})$, $\tilde{Y} \in M(m, \mathbb{Z})$.

Підставивши в (4.10) вирази з (4.5) і записавши матриці X, Y у вигляді

$$X = \frac{1}{2}(X_2 + 2\tilde{X} + X_2\sqrt{k}), \quad Y = \frac{1}{2}(Y_2 + 2\tilde{Y} + Y_2\sqrt{k}), \tag{4.12}$$

маємо

$$\frac{1}{2}(A_1 + A_2\sqrt{k})\frac{1}{2}(X_2 + 2\tilde{X} + X_2\sqrt{k}) +$$

$$+\frac{1}{2}(Y_2+2\tilde{Y}+Y_2\sqrt{k})\frac{1}{2}(B_1+B_2\sqrt{k})=\frac{1}{2}(C_1+C_2\sqrt{k}).$$

Домноживши ліву і праву частину цього рівняння на 4 отримуємо таке рівняння

$$(A_1+A_2\sqrt{k})(X_2+2\tilde{X}+X_2\sqrt{k})+(Y_2+2\tilde{Y}+Y_2\sqrt{k})(B_1+B_2\sqrt{k})=$$

$$=2(C_1+C_2\sqrt{k}).$$

Звідси одержуємо систему матричних рівнянь над $\mathbb{Z}$ такого вигляду:

$$\begin{cases} (A_1+A_2k)X_2+Y_2(B_1+B_2k)+2A_1\tilde{X}+2\tilde{Y}B_1=2C_1 \\ (A_1+A_2)X_2+Y_2(B_1+B_2)+2A_2\tilde{X}+2\tilde{Y}B_2=2C_2. \end{cases}$$

Аналогічно, як у випадку $k\equiv 2,3 \pmod 4$, застосувавши означення добутку Кронекера матриць до цієї системи, отримаємо матричне рівняння над $\mathbb{Z}$:

$$\left\|\begin{matrix} (A_1+A_2k)\otimes I_n & 2A_1\otimes I_n & I_m\otimes(B_1^\top+B_2^\top k) & I_m\otimes 2B_1^\top \\ (A_1+A_2)\otimes I_n & 2A_2\otimes I_n & I_m\otimes(B_1^\top+B_2^\top) & I_m\otimes 2B_2^\top \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{y}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{y}} \end{matrix}\right\| =$$

$$=\left\|\begin{matrix} 2\boldsymbol{c}_1 \\ 2\boldsymbol{c}_2 \end{matrix}\right\|, \tag{4.13}$$

де

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\left\|\operatorname{row}_1(\tilde{X})\dots\operatorname{row}_n(\tilde{X})\right\|^\top,\ \tilde{\boldsymbol{y}}=\left\|\operatorname{row}_1(\tilde{Y})\dots\operatorname{row}_m(\tilde{Y})\right\|^\top,$$

$$\boldsymbol{c}_1=\left\|\begin{matrix}\operatorname{row}_1(C_1) & \dots & \operatorname{row}_m(C_1)\end{matrix}\right\|^\top,\ \boldsymbol{c}_2=\left\|\begin{matrix}\operatorname{row}_1(C_2) & \dots & \operatorname{row}_m(C_2)\end{matrix}\right\|^\top.$$

Матричне рівняння (4.10) над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$ розв'язне тоді і тільки тоді, коли розв'язним є матричне рівняння (4.13) над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$.

Відомо, що рівняння (4.13) має розв'язок

$$X=\frac{1}{2}(X_2+2\tilde{X}+X_2\sqrt{k}),\ \ Y=\frac{1}{2}(Y_2+2\tilde{Y}+Y_2\sqrt{k})$$

тоді і тільки тоді, коли матриці

$$\left\|\begin{matrix} (A_1 + A_2k)\otimes I_n & 2A_1\otimes I_n & I_m\otimes(B_1^\top + B_2^\top k) & I_m\otimes 2B_1^\top & 2\boldsymbol{c}_1 \\ (A_1 + A_2)\otimes I_n & 2A_2\otimes I_n & I_m\otimes(B_1^\top + B_2^\top) & I_m\otimes 2B_2^\top & 2\boldsymbol{c}_2 \end{matrix}\right\|$$

і

$$\left\|\begin{matrix} (A_1 + A_2k)\otimes I_n & 2A_1\otimes I_n & I_m\otimes(B_1^\top + B_2^\top k) & I_m\otimes 2B_1^\top & \mathbf{0} \\ (A_1 + A_2)\otimes I_n & 2A_2\otimes I_n & I_m\otimes(B_1^\top + B_2^\top) & I_m\otimes 2B_2^\top & \mathbf{0} \end{matrix}\right\|$$

еквівалентні над $\mathbb{Z}$. Теорему доведено. $\square$

4.2. Матричне діофантове рівняння $AX + BY = C$

4.2.1. Цілочислові розв'язки матричного рівняння. Розглянемо одностороннє лінійне матричне рівняння

$$AX + BY = C, \tag{4.14}$$

де $A, B, C \in M(m, n, \mathbb{K})$ – відомі, а $X, Y \in M(n, \mathbb{K})$ – невідомі матриці над квадратичним кільцем $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$.

Теорема 4.4. *Матричне рівняння* (4.14) *над квадратичним кільцем* $\mathbb{K}$, *де матриці* $A, B, C \in M(m, n, \mathbb{K})$ *вигляду* (4.2) *або* (4.4), *має цілочисловий розв'язок* $X_0, Y_0 \in M(n, \mathbb{Z})$ *тоді і тільки тоді, коли матриці*

$$\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{Vmatrix} \quad i \quad \begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & \mathbf{0} \\ A_2 & B_2 & \mathbf{0} \end{Vmatrix} \tag{4.15}$$

еквівалентні над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$.

Доведення. **а)** Нехай $k \equiv 2, 3 \pmod 4$. Покладемо в (4.3) $X_2 = 0$ і $Y_2 = 0$. Тоді з матричного рівняння (4.14) отримаємо таке матричне рівняння

$$(A_1X_1 + B_1Y_1) + (A_2X_1 + B_2Y_1)\sqrt{k} = C_1 + C_2\sqrt{k}.$$

З цього рівняння легко одержати наступну систему матричних рівнянь:

$$\begin{cases} A_1X_1 + B_1Y_1 = C_1 \\ A_2X_1 + B_2Y_1 = C_2 \end{cases},$$

яку можна записати у вигляді матричного рівняння над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$:

$$\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Vmatrix}. \tag{4.16}$$

Очевидно, що матричне рівняння (4.16) розв'язне тоді і тільки тоді, коли матриці (4.15) еквівалентні. Отже, для випадку $k \equiv 2, 3 \pmod 4$ теорему доведено.

б) Нехай $k \equiv 1 \pmod 4$. Покладемо в (4.3) $X_2 = 0$ і $Y_2 = 0$, зауважимо, що

$$X_1 = 2\tilde{X}_1 \text{ і } Y_1 = 2\tilde{Y}_1,$$

оскільки всі елементи матриць $X_1 - X_2$ і $Y_1 - Y_2$ діляться на 2. Тоді з рівняння (4.14) маємо рівняння

$$\frac{1}{2}\left(A_1 + A_2\sqrt{k}\right)\tilde{X}_1 + \frac{1}{2}\left(B_1 + B_2\sqrt{k}\right)\tilde{Y}_1 = \frac{1}{2}\left(C_1 + C_2\sqrt{k}\right).$$

Тоді, як і у випадку **а)** це рівняння зведемо до вигляду

$$\left\|\begin{matrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{Y}_1 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} C_1 \\ C_2 \end{matrix}\right\|. \tag{4.17}$$

Отже, матричне рівняння (4.14) має цілочисловий розв'язок

$$X_0 = \begin{cases} 2\tilde{X}_1, \text{ якщо } & k \equiv 2,3 \pmod 4 \\ \tilde{X}_1, \text{ якщо } & k \equiv 1 \pmod 4 \end{cases},$$

$$Y_0 = \begin{cases} 2\tilde{Y}_1, \text{ якщо } & k \equiv 2,3 \pmod 4 \\ \tilde{Y}_1, \text{ якщо } & k \equiv 1 \pmod 4 \end{cases},$$

тоді і тільки тоді, коли матриці

$$\left\|\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix}\right\| \text{ і } \left\|\begin{matrix} A_1 & B_1 & \mathbf{0} \\ A_2 & B_2 & \mathbf{0} \end{matrix}\right\|$$

еквівалентні над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$. Доведення теореми завершено. $\square$

Теорема 4.5. *Цілочисловий розв'язок* $X_0, Y_0 \in M(n, \mathbb{Z})$ *матричного рівняння* (4.14), *де матриці* $A, B, C \in M(n, \mathbb{K})$ *вигляду* (4.2) *або* (4.4), *єдиний тоді і тільки тоді, коли матриця*

$$\left\|\begin{matrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{matrix}\right\|$$

– неособлива.

Доведення. Нехай матричне рівняння (4.14) має цілочисловий розв'язок. Тоді з теореми 4.4 випливає, що мають розв'язки рівняння (4.16) і (4.17). Ці рівняння мають єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриця

$$\left\|\begin{matrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{matrix}\right\|$$

— неособлива. Теорему доведено. □

4.2.2. Умови існування розв'язків матричного рівняння $AX + BY = C$ над квадратичними кільцями. Розглянемо матричне лінійне однобічне рівняння (4.14), де $A, B, C \in M(m, n, \mathbb{K})$ — відомі матриці, а $X, Y \in M(n, \mathbb{K})$ — невідомі матриці над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$.

Теорема 4.6. *Матричне рівняння* (4.14) *над квадратичним кільцем* $\mathbb{K}$ *з матрицями вигляду* (4.2) *або* (4.4) *має розв'язок* $X, Y \in M(n, \mathbb{K})$ *тоді і тільки тоді, коли є еквівалентними над* $\mathbb{Z}$ *такі матриці:*

а)

$$\left\|\begin{matrix} A_1 + A_2k & B_1 + B_2k & A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix}\right\|$$

і

$$\left\|\begin{matrix} A_1 + A_2k & B_1 + B_2k & A_1 & B_1 & \mathbf{0} \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & A_2 & B_2 & \mathbf{0} \end{matrix}\right\|,$$

якщо $k \equiv 2, 3 \pmod 4$;

б)

$$\left\|\begin{matrix} A_1 + A_2k & B_1 + B_2k & 2A_1 & 2B_1 & 2C_1 \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & 2A_2 & 2B_2 & 2C_2 \end{matrix}\right\|$$

і

$$\left\|\begin{matrix} A_1 + A_2k & B_1 + B_2k & 2A_1 & 2B_1 & \mathbf{0} \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & 2A_2 & 2B_2 & \mathbf{0} \end{matrix}\right\|,$$

якщо $k \equiv 1 \pmod 4$.

Доведення. **а)** Нехай $k \equiv 2, 3 \pmod 4$, тоді матриці X, Y можна записати у вигляді (4.3). Підставивши вирази (4.2) і (4.4) у рівняння (4.14) маємо наступне рівняння

$$(A_1 + A_2\sqrt{k})(X_1 + X_2\sqrt{k}) + (B_1 + B_2\sqrt{k})(Y_1 + Y_2\sqrt{k}) = C_1 + C_2\sqrt{k}.$$

З цього рівняння легко отримати наступну систему матричних рівнянь над $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} A_1X_1 + A_2X_2k + B_1Y_1 + B_2Y_2k = C_1 \\ A_2X_1 + A_1X_2 + B_2Y_1 + B_1Y_2 = C_2 \end{cases}.$$

З цієї системи одержуємо матричне рівняння над $\mathbb{Z}$:

$$\begin{Vmatrix} A_1 & A_2k & B_1 & B_2k \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Vmatrix}. \qquad (4.18)$$

Матричне рівняння (4.18) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли еквівалентні над $\mathbb{Z}$ наступні матриці:

$$\begin{Vmatrix} A_1 & A_2k & B_1 & B_2k & C_1 \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 & C_2 \end{Vmatrix} \quad i \quad \begin{Vmatrix} A_1 & A_2k & B_1 & B_2k & \mathbf{0} \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 & \mathbf{0} \end{Vmatrix}.$$

Із цих матриць одержуємо еквівалентні до них такі матриці:

$$\begin{Vmatrix} A_1 + A_2k & B_1 + B_2k & A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & A_2 & B_2 & C_2 \end{Vmatrix} \quad i \quad \begin{Vmatrix} A_1 + A_2k & B_1 + B_2k & A_1 & B_1 & \mathbf{0} \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & A_2 & B_2 & \mathbf{0} \end{Vmatrix}.$$

Теорема для випадку $k \equiv 2, 3 \pmod 4$ доведена.

б) Нехай $k \equiv 1 \pmod 4$. Як і в теоремі 4.4 невідомі матриці можна записати у вигляді (4.12), де $\tilde{X}, X_2,\ \tilde{Y}, Y_2 \in M(n, l, \mathbb{Z})$. Підставивши в (4.14) вирази з (4.4) і (4.12), маємо

$$\frac{1}{2}(A_1 + A_2\sqrt{k})\frac{1}{2}(X_2 + 2\tilde{X} + X_2\sqrt{k}) +$$

$$+\frac{1}{2}(B_1 + B_2\sqrt{k})\frac{1}{2}(Y_2 + 2\tilde{Y} + Y_2\sqrt{k}) = \frac{1}{2}(C_1 + C_2\sqrt{k}).$$

Домноживши ліву і праву частини цього рівняння на 4 отримуємо

$$(A_1 + A_2\sqrt{k})(X_2 + 2\tilde{X} + X_2\sqrt{k}) + (B_1 + B_2\sqrt{k})(Y_2 + 2\tilde{Y} + Y_2\sqrt{k}) =$$

$$= 2(C_1 + C_2\sqrt{k}).$$

Звідси маємо наступну систему матричних рівнянь над $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} (A_1 + A_2k)X_2 + (B_1 + B_2k)Y_2 + 2A_1\tilde{X} + 2B_1\tilde{Y} = 2C_1 \\ (A_1 + A_2)X_2 + (B_1 + B_2)Y_2 + 2A_2\tilde{X} + 2B_2\tilde{Y} = 2C_2. \end{cases}$$

З цієї системи одержимо матричне рівняння над $\mathbb{Z}$ такого вигляду:

$$\begin{Vmatrix} A_1 + A_2k & B_1 + B_2k & 2A_1 & 2B_1 \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & 2A_2 & 2B_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2C_1 \\ 2C_2 \end{Vmatrix}.$$

Це матричне рівняння розв'язне тоді і тільки тоді, коли матриці

$$\begin{Vmatrix} A_1 + A_2k & B_1 + B_2k & 2A_1 & 2B_1 & 2C_1 \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & 2A_2 & 2B_2 & 2C_2 \end{Vmatrix}$$

і

$$\begin{Vmatrix} A_1 + A_2k & B_1 + B_2k & 2A_1 & 2B_1 & \mathbf{0} \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & 2A_2 & 2B_2 & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$$

еквівалентні над $\mathbb{Z}$. Доведення завершено. □

Наслідок 4.1. *Нехай $\mathbb{Z}[i]$ – кільце цілих гаусових чисел. Матричне рівняння*

$$AX + BY = C,$$

де

$$A = A_1 + A_2i, \quad B = B_1 + B_2i, \quad C = C_1 + C_2i,$$

$A_i, B_i, C_i \in M(m, n, \mathbb{Z}), \quad i = 1, 2$ *має розв'язок* $X, Y \in M(n, \mathbb{Z}[i])$ *в тому і тільки в тому випадку, коли матриці*

$$\left\|\begin{matrix} A_1 & -A_2 & B_1 & -B_2 & C_1 \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 & C_2 \end{matrix}\right\| \quad i \quad \left\|\begin{matrix} A_1 & -A_2 & B_1 & -B_2 & \mathbf{0} \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 & \mathbf{0} \end{matrix}\right\|$$

еквівалентні над $\mathbb{Z}$.

Висновки до розділу 4

У цьому розділі запропоновано критерії розв'язності матричних лінійних рівнянь $AX + YB = C$ і $AX + BY = C$ над квадратичними кільцями. Встановлено необхідні і достатні умови розв'язності та наведено спосіб знаходження розв'язків цих рівнянь. Описано цілочислові розв'язки матричних рівнянь, наведено критерій єдиності цілочислових розв'язків цих рівнянь і спосіб їх побудови. Розв'язування цих матричних рівнянь зведено до розв'язування матричних лінійних рівнянь над кільцем цілих чисел.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [25, 23].

Розділ 5

СТАНДАРТНА ФОРМА МАТРИЦЬ НАД КВАДРАТИЧНИМИ КІЛЬЦЯМИ ТА СТРУКТУРА РОЗВ'ЯЗКІВ МАТРИЧНИХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

5.1. Розв'язки матричного рівняння $AX + YB = C$.

У цьому розділі встановлені у розділах 2 та 3 стандартні форми матриць та пар матриць над квадратичними кільцями, застосовані для розробки методів розв'язування матричних однобічних та двобічних лінійних рівнянь.

5.1.1. Діофантове рівняння $ax + by = c$ над квадратичними евклідовими кільцями. Розглянемо лінійне діофантове рівняння

$$ax + by = c, \tag{5.1}$$

де a, b, c – відомі, а x, y – невідомі з квадратичного евклідового кільця $\mathbb{K}$. Нехай $(a, b) = d$ – найбільший спільний дільник a і b. Нагадаємо, що рівняння (5.1) розв'язне тоді і тільки тоді, коли найбільший спільний дільник a і b є дільником c: $d|c$.

Лема 5.1. *Якщо рівняння* (5.1) *є розв'язним, то існує такий розв'язок* $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{K}$ *цього рівняння, що*

$$\mathcal{E}\left(\tilde{x}\right) < \frac{\mathcal{E}(b)}{\mathcal{E}(d)}, \tag{5.2}$$

де $\mathcal{E}\left(b\right)$ *— евклідова норма елемента* $b \in \mathbb{K}$.

Якщо $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ *– квадратичне евклідове уявне кільце, тобто* $k < 0$*, тоді таких розв'язків рівняння* (5.1) *має скінченну кількість.*

Доведення. Оскільки рівняння (5.1) розв'язне, то d ділить c. Тоді з цього рівняння легко отримати таке рівняння:

$$a_1x + b_1y = c_1, \tag{5.3}$$

де $a = a_1d$, $b = b_1d$, $c = c_1d$ і $(a_1, b_1) = 1$. Нехай x_0, y_0 — розв'язок рівняння (5.3), такий, що x_0 є розв'язком конгруенції $a_1x \equiv c_1 \pmod{b_1}$ і $x_0 \in \mathbb{K}_{b_1},\ y_0 = \dfrac{c_1 - a_1x_0}{b_1},\ \mathbb{K}_{b_1}$ — клас лишків за модулем b_1. Очевидно, що $x_0 \in \mathbb{K}_b$. Розв'язки x_0, y_0 є частковими розв'язками рівняння (5.1) і загальний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t,\ \ y = y_0 - \frac{a}{d}t,\ \ \text{де}\ \ t \in \mathbb{K}.$$

Поділивши x_0 на $\dfrac{b}{d}$, отримаємо

$$x_0 = q_0\frac{b}{d} + \tilde{x},$$

де

$$\mathcal{E}\left(\tilde{x}\right) < \mathcal{E}\left(\frac{b}{d}\right), \quad \tilde{x} \neq 0.$$

Легко перевірити, що

$$\tilde{x} = x_0 - q_0\frac{b}{d};\ \ \tilde{y} = y_0 + q_0\frac{a}{d}$$

є розв'язком рівняння (5.1). Застосувавши властивість норми частки елементів, отримаємо умову (5.2).

Оскільки елементів a з квадратичного уявного кільця $\mathbb{K}$, які мають одне й те ж значення евклідової норми є скінченна кількість, то множина елементів цього кільця, що задовольняють умову (5.2) є скінченною. Лему доведено. $\square$

5.1.2. Структура розв'язків матричного рівняння $AX + YB = C$. Розглянемо матричне рівняння

$$AX + YB = C, \tag{5.4}$$

де $A, B, C \in M(n, \mathbb{K})$ – відомі і $X, Y \in M(n, \mathbb{K})$ – невідомі матриці над квадратичним евклідовим кільцем $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$.

Нехай пара матриць (A, B) із матричного рівняння (5.4) (z,k)–еквівалентна до пари (T^A, T^B) в стандартних формах T^A і T^B матриць A і B, тобто для деяких оборотних матриць $S \in GL(n, \mathbb{Z})$ і $Q^A, Q^B \in GL\left(n, \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]\right)$ маємо

$$T^A = SAQ^A = \begin{Vmatrix} \mu_1^A & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21}^A\mu_1^A & \mu_2^A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}^A\mu_1^A & t_{n2}^A\mu_2^A & \cdots & \mu_n^A \end{Vmatrix}, \tag{5.5}$$

де

1. $t_{ij}^A = 0, \quad$ якщо $\quad \mu_i^A = 1, \quad i, j = 1, 2, ..., n, \ \ j < i,$
2. $\mathcal{E}\left(t_{ij}^A\right) < \dfrac{\mathcal{E}\left(\mu_i^A\right)}{\mathcal{E}\left(\mu_j^A\right)}, \quad$ якщо $\quad t_{ij}^A \neq 0, \quad i, j = 1, 2, ..., n, \ \ j < i,$

$$T^B = SBQ^B = \begin{Vmatrix} \mu_1^B & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21}^B\mu_1^B & \mu_2^B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}^B\mu_1^B & t_{n2}^B\mu_2^B & \cdots & \mu_n^B \end{Vmatrix}, \tag{5.6}$$

де

1. $t_{ij}^B = 0, \quad$ якщо $\quad \mu_i^B = 1, \quad i, j = 1, 2, ..., n, \ \ j < i,$
2. $\mathcal{E}\left(t_{ij}^B\right) < \dfrac{\mathcal{E}\left(\mu_i^B\right)}{\mathcal{E}\left(\mu_j^B\right)}, \quad$ якщо $\quad t_{ij}^B \neq 0, \quad i, j = 1, 2, ..., n, \ \ j < i.$

Тоді із матричного рівняння (5.4) одержимо таке рівняння

$$T^A H + W T^B = \tilde{C}, \tag{5.7}$$

де

$$H = \left(Q^A\right)^{-1} X Q^B, \;\; W = S Y S^{-1}, \;\; \tilde{C} = S C Q^B. \tag{5.8}$$

Рівняння (5.4) і (5.7) еквівалентні, тобто рівняння (5.4) є розв'язним тоді й тільки тоді, коли розв'язним є рівняння (5.7) і кожному розв'язку X, Y рівняння (5.4) відповідає розв'язок H, W рівняння (5.7) і навпаки, згідно з співвідношеннями (5.8).

Таким чином опис розв'язків рівняння (5.4) зводимо до опису розв'язків еквівалентного рівняння (5.7).

Зауважимо, що згідно з критерієм Рота [60, 79], матричне рівняння (5.4) над квадратичним евклідовим кільцем є розв'язним тоді й тільки тоді, коли матриці

$$\left\| \begin{matrix} A & C \\ 0 & B \end{matrix} \right\| \text{ і } \left\| \begin{matrix} A & 0 \\ 0 & B \end{matrix} \right\|$$

еквівалентні.

Теорема 5.1. *Якщо матричне рівняння* (5.7) *є розв'язним, то це рівняння має такі розв'язки*

$$H = \|h_{ij}\|_{i,j=1}^{n}, \quad W = \|w_{ij}\|_{i,j=1}^{n},$$

що

$$h_{ij} = 0, \quad \text{якщо } \mu_j^B = 1, \; i = 1, 2, \ldots, n, \; j = 1, 2, \ldots, l, \tag{5.9}$$

$$\mathcal{E}\left(h_{ij}\right) < \frac{\mathcal{E}\left(\mu_j^B\right)}{\mathcal{E}\left(d\left(\mu_i^A, \mu_j^B\right)\right)}, \; \text{якщо } h_{ij} \neq 0, \; i = 1, 2, \ldots, n, \; j = l{+}1, l{+}2, \ldots, n, \tag{5.10}$$

де $d\left(\mu_i^A, \mu_j^B\right)$ *— найбільший спільний дільник інваріантних множників* μ_i^A *і* μ_j^B *матриць* A *і* B.

Доведення. Із матричного рівняння (5.7) запишемо систему рівнянь у послідовності відповідно до діагоналей матриці

$$H = \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{matrix} \right\|$$

починаючи з елемента в правому верхньому куті: h_{1n}; $h_{1,n-1}$, h_{2n}; $h_{1,n-2}$, $h_{2,n-1}$, h_{3n} і т.д. Одержимо систему $2n-1$ рівнянь такого вигляду:

$$\begin{cases} \mu_1^A h_{1n} + \mu_n^B w_{1n} = \tilde{c}_{1n}, \\ \mu_1^A h_{1,n-1} + \mu_{n-1}^B w_{1,n-1} + t_{n,n-1}^B \mu_{n-1}^B w_{1n} = \tilde{c}_{1,n-1}, \\ \mu_1^A t_{21}^A h_{1,n} + \mu_2^A h_{2n} + \mu_n^B w_{2n} = \tilde{c}_{2n}, \\ \vdots \\ t_{n1}^A \mu_1^A h_{11} + t_{n2}^A \mu_2^A h_{21} + \cdots + \mu_n^A h_{n1} + \mu_1^B w_{n1} + t_{21}^B \mu_1^B w_{n2} + \cdots + \\ + t_{n1}^B \mu_1^B w_{nn} = \tilde{c}_{n1}. \end{cases} \tag{5.11}$$

Оскільки, відповідно до умови теореми рівняння (5.7) є розв'язним, то і система (5.11) також розв'язна. Нехай

$$h_{ij} = \alpha_{ij}, \;\; w_{ij} = \beta_{ij}, \;\; i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{5.12}$$

— її розв'язки.

Розглянемо перше рівняння системи (5.11):

$$\mu_1^A h_{1n} + \mu_n^B w_{1n} = \tilde{c}_{1n}. \tag{5.13}$$

Згідно з лемою 5.1 існує такий розв'язок

$$h_{1n}^0 = \alpha_{1n} - \frac{\mu_n^B}{d\left(\mu_1^A, \mu_n^B\right)} q_{1n}, \;\; w_{1n}^0 = \beta_{1n} + \frac{\mu_1^A}{d\left(\mu_1^A, \mu_n^B\right)} q_{1n} \tag{5.14}$$

рівняння (5.13), що

$$\mathcal{E}\left(h_{1n}^0\right) < \frac{\mathcal{E}\left(\mu_n^B\right)}{\mathcal{E}\left(d\left(\mu_1^A, \mu_n^B\right)\right)},$$

де $d\left(\mu_i^A, \mu_j^A\right)$ — найбільший спільний дільник μ_i^A і μ_j^A. Далі розглянемо наступні два рівняння системи (5.11):

$$\mu_1^A h_{1,n-1} + \mu_{n-1}^B w_{1,n-1} + t_{n,n-1}^B \mu_{n-1}^B w_{1n} = \tilde{c}_{1,n-1}, \tag{5.15}$$

$$\mu_1^A t_{21}^A h_{1,n} + \mu_2^A h_{2n} + \mu_n^B w_{2n} = \tilde{c}_{2n}. \tag{5.16}$$

Оскільки рівняння (5.15) розв'язне, то $d\left(\mu_1^A, \mu_{n-1}^B\right)$ ділить $\tilde{c}_{1,n-1}$. Тоді у рівняння (5.15) підставимо

$$w_{1n}^0 = \beta_{1n} + \frac{\mu_1^A}{d\left(\mu_1^A, \mu_n^B\right)} q_{1n}$$

із розв'язку (5.14) рівняння (5.13). Одержимо наступне рівняння:

$$\mu_1^A h_{1,n-1} + \mu_{n-1}^B w_{1,n-1} = \tilde{c}_{1,n-1} - t_{n,n-1}^B \mu_{n-1}^B \left(\beta_{1n} + \frac{\mu_1^A}{d\left(\mu_1^A, \mu_n^B\right)} q_{1n}\right). \tag{5.17}$$

Оскільки $\tilde{c}_{1,n-1}$ ділиться на $d\left(\mu_1^A, \mu_{n-1}^B\right)$, то і права частина рівняння (5.17) ділиться на $d\left(\mu_1^A, \mu_{n-1}^B\right)$. Отже, рівняння (5.17) розв'язне. Згідно леми 5.1 це рівняння має такі розв'язки $h_{1,n-1}^0, w_{1,n-1}^0$, що

$$\mathcal{E}\left(h_{1,n-1}^0\right) < \frac{\mathcal{E}\left(\mu_{n-1}^B\right)}{\mathcal{E}\left(d\left(\mu_1^A, \mu_{n-1}^B\right)\right)}.$$

Рівняння (5.16) є розв'язним і $h_{1n} = \alpha_{1n}$, $h_{2n} = \alpha_{2n}, w_{2n} = \beta_{2n}$ — його розв'язки із розв'язків (5.12) системи рівнянь (5.11), тобто правильна рівність

$$\mu_1^A t_{21}^A \alpha_{1n} + \mu_2^A \alpha_{2n} + \mu_n^B \beta_{2n} = \tilde{c}_{2n}$$

або

$$\mu_2^A \alpha_{2n} + \mu_n^B \beta_{2n} = \tilde{c}_{2n} - \mu_1^A t_{21}^A \alpha_{1n}.$$

З цієї рівності випливає, що $\tilde{c}_{2n} - \mu_1^A t_{21}^A \alpha_{1n}$ ділиться на $d\left(\mu_2^A, \mu_n^B\right)$. Підставивши в рівняння (5.16) розв'язок (5.14) рівняння (5.13), отримаємо таке рівняння:

$$\mu_2^A h_{2n} + \mu_n^B w_{2n} = \tilde{c}_{2n} - t_{21}^A \mu_1^A \alpha_{1n} + t_{21}^A \frac{\mu_1^A}{d\left(\mu_1^A, \mu_n^B\right)} \mu_n^B q_{1n}.$$

Оскільки
$$t_{21}^{A}\frac{\mu_1^A}{d\left(\mu_1^A,\mu_n^B\right)}\mu_n^B$$
ділиться на $d\left(\mu_2^A,\mu_n^B\right)$, то для h_{1n} вигляду (5.14) рівняння (5.16) є розв'язним і за лемою 5.1 існує такий розв'язок h_{2n}^0, w_{2n}^0, що
$$\mathcal{E}\left(h_{2n}^0\right) < \frac{\mathcal{E}\left(\mu_n^B\right)}{\mathcal{E}\left(d\left(\mu_2^A,\mu_n^B\right)\right)}.$$

Надалі, розглянувши наступні рівняння системи (5.11), що залишилися і міркуючи аналогічно, ми отримаємо розв'язки h_{ij}^0, w_{ij}^0 цієї системи, для яких виконується умова (5.10).

Зауважимо, що ми розглядали систему (5.11) у випадку, коли $\mu_j^B \neq 1$, якщо ж для деяких $j = 1, 2, \ldots, k$, $\mu_j^B = 1$, тоді очевидно, що відповідні $h_{ij} = 0, i = 1, 2, \ldots, k,\ \ i > j$ і виконується умова (5.9). Теорему доведено. $\square$

5.1.3. Розв'язки з мінімальною евклідовою нормою матричного рівняння.

Теорема 5.2. *Нехай* $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ *— квадратичне евклідове уявне кільце і матричне рівняння* (5.7) *розв'язне. Тоді це матричне рівняння має скінченну кількість розв'язків* H, W *з умовами* (5.9) *і* (5.10).

Доведення. Розв'язки
$$H = \left\|h_{ij}^0\right\|_{i,j=1}^{n},\ W = \left\|w_{ij}^0\right\|_{i,j=1}^{n}$$
матричного рівняння (5.7) складені з розв'язків системи рівнянь (5.11) з умовами (5.9), (5.10). Це означає, що елементи $h_{ij},\ i,j = 1, 2, \ldots, n$ матриці H є з обмеженими евклідовими нормами. Відомо [37], що елементів із квадратичного евклідового уявного кільця $\mathbb{K}$, які мають одне й те ж значення евклідової норми є скінченна кількість. Тому цих розв'язків H, W над квадратичним евклідовим уявним кільцем є скінченна кількість. Доведення завершене. $\square$

Наслідок 5.1. *Нехай канонічною діагональною формою матриці* T^A *з матричного рівняння* (5.7) *є*

$$D^A = diag\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{k}, \mu^A_{k+1}, \mu^A_{k+2}, \ldots, \mu^A_n\right),\ \mu^A_{k+1} \neq 1.$$

Якщо матричне рівняння (5.7) *розв'язне, то воно має такі розв'язки* H, W, *де матриця* H *є такого вигляду:*

$$\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{1,k+1} & h_{1,k+2} & \cdots & h_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{2,k+1} & h_{2,k+2} & \cdots & h_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n,k+1} & h_{n,k+2} & \cdots & h_{n,n} \end{matrix}\right\|,$$

тобто в матриці H *1-ий, ...,* k*-ий стовпці нульові і елементи* $k+1$*-го,* $k+2$*-го, ...,* n*-го стовпців мають евклідові норми менші, ніж евклідові норми відповідних інваріантних множників* $\mu^A_{k+1}, \mu^A_{k+2}, \ldots, \mu^A_n$ *матриці* T^A.

Означення 5.5. *Евклідовою нормою* $\mathcal{E}(A) = s$ *матриці* $A = \left\|a_{ij}\right\|^n_{i,j=1}$, *де* a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ *— елементи із квадратичного кільця* $\mathbb{K}$, *називаємо найбільшу евклідову норму* $\mathcal{E}(a_{pq}) = s$ *елемента* a_{pq} *серед усіх елементів матриці* A.

Наслідок 5.2. *Якщо матричне рівняння* (5.7) *розв'язне, то це рівняння має такі розв'язки* H, W, *що евклідова норма* $\mathcal{E}(H)$ *матриці* H *менша, ніж евклідова норма* $\mathcal{E}(\mu^B_n)$ *канонічної діагональної форми* D^B *матриці* B: $\quad \mathcal{E}(H) < \mathcal{E}(D^B)$.

Із розв'язків H, W матричного рівняння (5.7) будуємо розв'язки X, Y матричного рівняння (5.4) згідно з співвідношень (5.8).

Приклад. Розглянемо матричне рівняння

$$\begin{Vmatrix} 4 & 2i & 6+2i \\ 0 & 2 & -2i \\ 3 & 2i & 6+2i \end{Vmatrix} X + Y \begin{Vmatrix} 1-3i & 1+i & -2+i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-2i & 1+i & -2+i \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -9-14i & 2-6i & -8+3i \\ 1-i & -1+i & -1 \\ -9-11i & 1-5i & -6+3i \end{Vmatrix} \tag{5.18}$$

над кільцем цілих гаусових чисел $\mathbb{Z}[i]$. Коефіцієнтами цього матричного рівняння є

$$A = \begin{Vmatrix} 4 & 2i & 6+2i \\ 0 & 2 & -2i \\ 3 & 2i & 6+2i \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1-3i & 1+i & -2+i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-2i & 1+i & -2+i \end{Vmatrix},$$

$$C = \begin{Vmatrix} -9-14i & 2-6i & -8+3i \\ 1-i & -1+i & -1 \\ -9-11i & 1-5i & -6+3i \end{Vmatrix}.$$

Тоді існують такі обородні матриці

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ і оборотні матриці

$$Q^A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad Q^B = \begin{Vmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -i \end{Vmatrix}$$

над кільцем $\mathbb{Z}[i]$, що пара матриць (A, B) (z,k)-еквівалентна до пари (T^A, T^B) в стандартних формах T^A і T^B матриць A і B, тобто

$$SAQ^A = T^A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2i & 4+2i \end{Vmatrix}, \quad SBQ^B = T^B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2i & 1+i & 1+2i \end{Vmatrix}.$$

З матричного рівняння (5.18) отримаємо таке рівняння

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2i & 4+2i \end{matrix}\right\| H + W \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2i & 1+i & 1+2i \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1 & 1-i & 2i \\ i & -1+i & i \\ 5-6i & 1-5i & 3+6i \end{matrix}\right\|.$$

Оскільки за умовою теореми h_{i1}, h_{i2}, $i = 1, 2, 3$ рівні нулю, тоді рівняння (5.19) має вигляд:

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2i & 4+2i \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & h_{13} \\ 0 & 0 & h_{23} \\ 0 & 0 & h_{33} \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2i & 1+i & 1+2i \end{matrix}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{matrix} 1 & 1-i & 2i \\ i & -1+i & i \\ 5-6i & 1-5i & 3+6i \end{matrix}\right\|, \tag{5.19}$$

де $\mathcal{E}(h_{i3}) < \mathcal{E}(1+2i)$, $i = 1, 2, 3$. Розписавши матричне рівняння (5.19) одержимо таку систему рівнянь над $\mathbb{Z}[i]$:

$$\begin{cases} h_{13} + (1+2i)w_{13} = 2i, \\ w_{12} + (1+i)w_{13} = 1-i, \\ 2h_{23} + (1+2i)w_{23} = i, \\ w_{11} + 2iw_{13} = 1, \\ w_{22} + (1+i)w_{23} = -1+i, \\ 3h_{13} + 2h_{23} + (4+2i)h_{33} + (1+2i)w_{33} = 3+6i, \\ w_{21} + 2iw_{23} = i, \\ w_{23} + (1+i)w_{33} = 1-5i, \\ w_{13} + 2iw_{33} = 5-6i. \end{cases}$$

Оскільки матричне рівняння (5.19) розв'язне, тоді ця система також має розв'язок. Зокрема, загальний розв'язок першого рівняння системи має вигляд $h_{13} = -1+(1+2i)t_1$, $w_{13} = 1-t_1$, $t_1 \in \mathbb{Z}[i]$. Серед цих розв'язків шукаємо такі, що задовольняють умови теореми 5.2., тобто для яких виконується $\mathcal{E}(h_{13}) < 5$. Таких розв'язків буде три, при $t_1 = 0, -i, 1$. Аналогічно розглянувши кожне рівняння системи, відшукаємо всі розв'язки цієї системи, які задовольняють умови (5.9) і (5.9). Отже, матриці H, W будуть містити елементи такого вигляду:

$$h_{13} = -1 + (1+2i)t_1, \quad h_{23} = 1 + (1+2i)t_2, \quad h_{23} = -4 + 6i + (1+2i)t_3$$

$$w_{11} = 1 - 2i + 2it_1, \quad w_{12} = -2i + (1+i)t_1, \quad w_{13} = 1 - t_1$$

$$w_{21} = i + 2 + 4it_2, \quad w_{22} = 2t_2(1+i), \quad w_{23} = i - 2t_2,$$

$$w_{31} = -27 - 10i + 6it_1 - 4t_2 + (-4+8i)t_3,$$

$$w_{32} = -17 + 9i + (3+3i)t_1 + (-2+2i)t_2 + (2+6i)t_3,$$

$$w_{33} = 2 - 16i - 3t_1 - 2it_2 - (4+2i)t_3,$$

де $t_1 = 0, -i, 1$; $t_2 = 0, i, -1$; $t_3 = -2-3i, -2-2i, -1-3i$. Очевидно, що таких розв'язків є скінченна кількість, а саме 27.

5.2. Структура розв'язків матричного рівняння $AX + BY = C$.

Нехай $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ — квадратичне евклідове кільце і

$$AX + BY = C \tag{5.20}$$

— матричне лінійне рівняння над кільцем $\mathbb{K}$, тобто $A, B, C \in M(m, n, \mathbb{K})$ — відомі і $X, Y \in M(n, \mathbb{K})$ – невідомі матриці над кільцем $\mathbb{K}$.

Матричне рівняння (5.20) розв'язне тоді і тільки тоді, коли найбільший спільний лівий дільник матриць A і B є лівим дільником матриці C, або матриця $\left\|\begin{matrix} A & B & C \end{matrix}\right\|$ правоеквівалентна до матриці $\left\|\begin{matrix} A & B & \mathbf{0} \end{matrix}\right\|$ [64].

Нехай матричне рівняння (5.20) є розв'язним. Дослідимо структуру його розв'язків. Опис розв'язків матричного рівняння (5.20) зводимо до опису розв'язків еквівалентного матричного рівняння з матрицями-коефіцієнтами трикутних виглядів.

Нехай пара матриць $A, B \in M(m, n, \mathbb{Z})$, $m < n$ із матричного рівняння (5.20) (z,k)-еквівалентна до стандартних форм T^A, T^B, вигляду (5.5) і (5.6), тобто існують такі оборотні матриці $S \in GL(m, \mathbb{Z})$ і $Q^A, Q^B \in GL\left(n, \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]\right)$, що

$$SAQ^A = T^A, \quad SBQ^B = T^B.$$

Тоді з матричного рівняння (5.20) одержимо таке рівняння

$$SAQ^A \left(Q^A\right)^{-1} X + SBQ^B \left(Q^B\right)^{-1} Y = SC. \tag{5.21}$$

За допомогою правих елементарних операцій матрицю SC зведемо до трикутного вигляду, тобто для деякої оборотної матриці $V \in GL(n, \mathbb{K})$ маємо, що

$$SCV = \left\| \begin{matrix} \tilde{c}_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{c}_{m1} & \tilde{c}_{m2} & \cdots & \tilde{c}_{mm} & \cdots & 0 \end{matrix} \right\| = \tilde{C}.$$

Тоді із матричного рівняння (5.21) одержимо таке рівняння

$$SAQ^A \left(\left(Q^A\right)^{-1} XV\right) + SBQ^B \left(\left(Q^B\right)^{-1} YV\right) = SCV$$

або

$$T^A H + T^B W = \tilde{C}, \tag{5.22}$$

де

$$H = \left(Q^A\right)^{-1} XV, \quad W = \left(Q^B\right)^{-1} YV, \quad \tilde{C} = SCV. \tag{5.23}$$

Нехай

$$D^B = \operatorname{diag}\left(1, \ldots, 1, \mu^B_{l+1}, \mu^B_{l+2}, \ldots, \mu^B_m\right), \quad \mu^B_{l+1} \neq 1, \quad l \geq 0$$

— канонічна діагональна форма матриці B із матричного рівняння (5.22).

Теорема 5.3. *Нехай* $\mathbb{K}$ *— квадратичне евклідове кільце і матриці* $A, B, C \in M(m, n, \mathbb{K})$ *із матричного рівняння* (5.20) *такі, що* $rangA = rangB = m$. *Якшо* $\left(d_m^A, d_m^B\right) = 1$, *тоді матричне рівняння* (5.22) *розв'язне і має такі розв'язки*

$$H = \begin{Vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_{l+1,1} & \cdots & h_{l+1,l+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_{l+2,1} & \cdots & h_{l+2,l+1} & h_{l+2,l+2} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{m,l+1} & h_{m,l+2} & \cdots & h_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix},$$

$$W = \begin{Vmatrix} w_{11} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{l+1,1} & \cdots & w_{l+1,l+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ w_{l+2,1} & \cdots & w_{l+2,l+1} & w_{l+2,l+2} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1} & \cdots & w_{m,l+1} & w_{m,l+2} & \cdots & w_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix}, \qquad (5.24)$$

де $\mathcal{E}\left(h_{ij}\right) < \mathcal{E}\left(\mu_i^B\right)$, *якщо* $h_{ij} \neq 0, \quad i = l+1, l+2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, i,$ d_m^A *— найбільший спільний дільник* m*-го порядку матриці* A.

Доведення. Оскільки, $\left(d_m^A, d_m^B\right) = 1$, то очевидно, що матричне рівняння (5.22) розв'язне [73]. Тоді з матричного рівняння (5.22) запишемо таку систему рівнянь:

$$\sum_{s=1}^{i}\left(t_{is}^{A}\mu_s^{A}h_{sj}+t_{is}^{B}\mu_s^{B}w_{sj}\right)=\tilde{c}_{ij},\ i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n, \tag{5.25}$$

де $t_{ss}^{A}=t_{ss}^{B}=1$ і $\tilde{c}_{ij}=0, j>i$. Розглянемо підсистему системи (5.25) для $i=1,\ j=1,2,\ldots,n$

$$\begin{cases} \mu_1^A h_{11}+\mu_1^B w_{11}=\tilde{c}_{11},\\ \mu_1^A h_{12}+\mu_1^B w_{12}=0,\\ \vdots\\ \mu_1^A h_{1m}+\mu_1^B w_{1m}=0,\\ \mu_1^A h_{1,m+1}+\mu_1^B w_{1,m+1}=0,\\ \vdots\\ \mu_1^A h_{1n}+\mu_1^B w_{1n}=0. \end{cases} \tag{5.26}$$

Оскільки,

$$d_m^A=d_m^{T^A}=\mu_1^A\mu_2^A\cdots\mu_m^A,\quad d_m^B=d_m^{T^B}=\mu_1^B\mu_2^B\cdots\mu_m^B,$$

то $\left(\mu_i^A,\mu_j^B\right)=1$, для всіх $i,j=1,2,\ldots,m$. А, отже, $\left(\mu_1^A,\mu_1^B\right)=1$ і підсистема (5.26) є розв'язною. За лемою 5.1 існує такий розв'язок h_{11}^0, w_{11}^0 рівняння

$$\mu_1^A h_{11}+\mu_1^B w_{11}=\tilde{c}_{11}, \tag{5.27}$$

що

$$\mathcal{E}\left(h_{11}^0\right)<\mathcal{E}\left(\mu_1^B\right).$$

Очевидно, що наступні $n-1$ рівняння підсистеми (5.26) мають нульові розв'язки:

$$h_{1j}^0=0,\quad w_{1j}^0=0,\quad j=2,3,\ldots,n.$$

Для $i = 2,\ j = 1, 2, \ldots, n$ маємо таку підсистему

$$\begin{cases} t^A_{21}\mu^A_1 h_{11} + \mu^A_2 h_{21} + t^B_{21}\mu^B_1 w_{11} + \mu^B_2 w_{21} = \tilde{c}_{21}, \\ t^A_{21}\mu^A_1 h_{12} + \mu^A_2 h_{22} + t^B_{21}\mu^B_1 w_{12} + \mu^B_2 w_{22} = \tilde{c}_{22}, \\ t^A_{21}\mu^A_1 h_{13} + \mu^A_2 h_{23} + t^B_{21}\mu^B_1 w_{13} + \mu^B_2 w_{23} = 0, \\ \vdots \\ t^A_{21}\mu^A_1 h_{1m} + \mu^A_2 h_{2m} + t^B_{21}\mu^B_1 w_{1m} + \mu^B_2 w_{2m} = 0, \\ t^A_{21}\mu^A_1 h_{1,m+1} + \mu^A_2 h_{2,m+1} + t^B_{21}\mu^B_1 w_{1,m+1} + \mu^B_2 w_{2,m+1} = 0, \\ \vdots \\ t^A_{21}\mu^A_1 h_{1n} + \mu^A_2 h_{2n} + t^B_{21}\mu^B_1 w_{1n} + \mu^B_2 w_{2n} = 0. \end{cases} \tag{5.28}$$

Розглянемо перше рівняння підсистеми (5.28)

$$t^A_{21}\mu^A_1 h_{11} + \mu^A_2 h_{21} + t^B_{21}\mu^B_1 w_{11} + \mu^B_2 w_{21} = \tilde{c}_{21}. \tag{5.29}$$

Підставимо розв'язок h^0_{11}, w^0_{11} рівняння (5.27) з підсистеми (5.26) у рівняння (5.29), одержимо таке рівняння:

$$\mu^A_2 h_{21} + \mu^B_2 w_{21} = \tilde{c}_{21} - t^A_{21}\mu^A_1 h^0_{11} - t^B_{21}\mu^B_1 w^0_{11}.$$

Оскільки, $(\mu^A_2, \mu^B_2) = 1$, це рівняння розв'язне і згідно леми 5.1 має такий розв'язок h^0_{21}, w^0_{21}, що

$$\mathcal{E}\left(h^0_{21}\right) < \mathcal{E}\left(\mu^B_2\right).$$

У рівняння

$$t^A_{21}\mu^A_1 h_{12} + \mu^A_2 h_{22} + t^B_{21}\mu^B_1 w_{12} + \mu^B_2 w_{22} = \tilde{c}_{22},$$

поклавши розв'язок $h^0_{12} = 0$, $w^0_{12} = 0$ із підсистеми (5.26), матимемо

$$\mu^A_2 h_{22} + \mu^B_2 w_{22} = \tilde{c}_{22}.$$

Це рівняння є розв'язним і існує такий розв'язок h^0_{22}, w^0_{22}, що

$$\mathcal{E}\left(h^0_{22}\right) < \mathcal{E}\left(\mu^B_2\right).$$

Розглянемо наступне рівняння підсистеми (5.28)

$$t_{21}^A\mu_1^A h_{13} + \mu_2^A h_{23} + t_{21}^B \mu_1^B w_{13} + \mu_2^B w_{23} = 0.$$

Оскільки, $h_{13}^0 = 0$, $w_{13}^0 = 0$, тоді розв'язками цього рівняння будуть $h_{23}^0 = 0$, $w_{23}^0 = 0$.

Міркуючи, аналогічно встановимо, що система (5.25) має такі розв'язки h_{ij}^0, w_{ij}^0, що

$$\mathcal{E}\left(h_{ij}^0\right) < \mathcal{E}\left(\mu_i^B\right), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \;\; j = 1, 2, \ldots, i$$

і

$$h_{ij}^0,\, w_{ij}^0 = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \;\; j = i+1, i+2, \ldots, n.$$

Теорему доведено. □

Теорема 5.4. *Нехай* $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ *— квадратичне евклідове уявне кільце. Тоді матричне рівняння* (5.22) *над кільцем* $\mathbb{K}$ *має скінченну кількість розв'язків вигляду* (5.24).

Доведення. З розв'язків системи (5.25) ми отримаємо такі розв'язки $H = \left\|h_{ij}\right\|_{i,j=1}^{n}$, $W = \left\|w_{ij}\right\|_{i,j=1}^{n}$, що елементи h_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ матриці H є з обмеженими евклідовими нормами. Тому аналогічно, як при доведенні теореми 5.2, випливає, що цих розв'язків H, W над квадратичним евклідовим уявним кільцем є скінченна кількість. Теорему доведено. □

Нагадаємо, що *евклідовою нормою* $\mathcal{E}(A)$ матриці $A = \left\|a_{ij}\right\|_{i,j=1}^{m,n}$ називаємо найбільшу евклідову норму $\mathcal{E}(a_{pq})$ елементів матриці A.

Із теореми маємо, що найбільша евклідова норма елементів матриці H із розв'язку рівняння (5.22) є меншою евклідової норми останнього інваріантного множника μ_n^B матриці B із рівняння (5.20). Евклідова норма канонічної діагональної форми D^B матриці B дорівнює евклідовій нормі інваріантного множника μ_n^B. Тому одержуємо такий наслідок:

Наслідок 5.3. *Матричне рівняння* (5.22), *в якому* $(d_m^A, d_m^B) = 1$, *має такі розв'язки* H, W, *що евклідова норма* $\mathcal{E}(H)$ *матриці* H *менша, ніж евклідова норма* $\mathcal{E}(D^B)$ *канонічної діагональної форми* D^B *матриці* B. *Якщо* $\mathbb{K}$ *— квадратичне евклідове уявне кільце, то таких розв'язків матричне рівняння* (5.22) *має скінченну кількість.*

Зауважимо, що якщо для матриць A і B з рівняння (5.20) $\left(d_m^A, d_m^B\right) \neq 1$, то рівняння (5.22) може і не мати розв'язків H, W вигляду (5.24) для яких $\mathcal{E}\left(h_{ij}\right) < \mathcal{E}\left(\mu_i^B\right)$, якщо $h_{ij} \neq 0$, $i = l+1, l+2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, i$.

Приклад. Розглянемо таке матричне рівняння

$$\left\|\begin{matrix} 1+i & 0 \\ 1+i & 9-3i \end{matrix}\right\| H + \left\|\begin{matrix} 1-2i & 0 \\ 0 & 9-3i \end{matrix}\right\| W = \left\|\begin{matrix} 1+i & 0 \\ 8+2i & -15+5i \end{matrix}\right\| \tag{5.30}$$

над кільцем цілих гаусових чисел $\mathbb{Z}[i]$. Це рівняння є розв'язним і має такий розв'язок

$$H^0 = \left\|\begin{matrix} 2+3i & 1-2i \\ 1 & -1 \end{matrix}\right\|, \quad W^0 = \left\|\begin{matrix} 2 & -1-i \\ 0 & -1 \end{matrix}\right\|.$$

Ми шукаємо розв'язки H, W, для яких $\mathcal{E}\left(h_{ij}\right) < \mathcal{E}\left(\mu_i^B\right)$, якщо $h_{ij} \neq 0$, $i, j = 1, 2$.

З матричного рівняння (5.30) маємо таку систему рівнянь

$$\begin{cases} (1+i)h_{11} + (1-2i)w_{11} = 1+i, \\ (1+i)h_{12} + (1-2i)w_{12} = 0, \\ (1+i)h_{11} + (9-3i)h_{21} + (9-3i)w_{21} = 8+2i, \\ (1+i)h_{12} + (9-3i)h_{22} + (9-3i)w_{22} = -15+5i. \end{cases} \tag{5.31}$$

Оскільки, $d(1+i, 1-2i) = 1$, то перше рівняння

$$(1+i)h_{11} + (1-2i)w_{11} = 1+i$$

системи (5.31) розв'язне і має загальний розв'язок

$$h_{11} = (2+3i) + (1-2i)t, \quad w_{11} = 2-(1+i)t, \quad t \in \mathbb{Z}[i].$$

Тоді це рівняння має лише такі три розв'язки $(1,0)$; $(-1-i,-1+i)$; $(2i,1+i)$, що $\mathcal{E}(h_{11})<\mathcal{E}(1-2i)$. Підставивши $h_{11}=1$ в рівняння

$$(1+i)h_{11}+(9-3i)h_{21}+(9-3i)w_{21}=8+2i \tag{5.32}$$

системи (5.31) маємо рівняння

$$(9-3i)h_{21}+(9-3i)w_{21}=7+i.$$

Це рівняння не має розв'язків, адже $9-3i$ не є дільником $7+i$. Аналогічно, доводимо, що рівняння (5.32) не є розв'язним при $h_{11}=-1-i$ або $h_{11}=2i$.

Висновки до розділу 5

У цьому розділі, на основі встановлених у розділах 2 і 3 стандартних форм матриць та їх пар над квадратичними кільцями відносно (z,k)-еквівалентності, розв'язування рівнянь типу Сильвестра та матричних діофантових рівнянь зведено до розв'язування відповідних матричних рівнянь з матрицями-коефіцієнтами у стандартних формах. Вказано, що у розв'язних цих матричних рівняннях існують розв'язки з обмеженими евклідовими нормами. Встановлено, що таких розв'язків матричних рівнянь над квадратичними евклідовими уявними кільцями є скінченна кількість.

Результати цього розділу опубліковано в [24].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено еквівалентність матриць і їх пар над квадратичними кільцями. Встановлено простіші форми матриць і їх пар відносно спеціальної еквівалентності і використано ці форми при розв'язуванні матричних лінійних однобічних та двобічних рівнянь над квадратичними кільцями та опису структури розв'язків цих рівнянь.

Введено поняття (z,k)-еквівалентності матриць над квадратичними кільцями. Встановлено, що матриці A над квадратичними евклідовими кільцями та квадратичними кільцями головних ідеалів (z,k)-еквівалентними перетвореннями зводяться до спеціальної трикутної форми T^A, яка названа стандартною формою матриці A. Показано, що кількість стандартних форм T^A матриць A над квадратичними евклідовими уявними кільцями є скінченна.

Доведено, що пари матриць, визначники яких є взаємно простими або є степенями простих чисел у квадратичному кільці, (z,k)-еквівалентними перетвореннями одночасно зводяться до стандартних форм. Показано, що кількість стандартних пар $\left(T^A, T^B\right)$ пари матриць (A, B) над квадратичними уявними евклідовими кільцями є скінченна.

Встановлено необхідні і достатні умови розв'язності та наведено спосіб знаходження розв'язків матричних рівнянь $AX + YB = C$ і $AX + BY = C$ над квадратичними кільцями. Описано цілочислові розв'язки цих матричних рівнянь, наведено критерій єдиності цілочислових розв'язків і спосіб їх побудови. Розв'язування матричних рівнянь зведено до розв'язування матричних лінійних рівнянь над кільцем цілих чисел.

На основі встановлених у розділах 2 і 3 стандартних форм матриць та їх пар над квадратичними кільцями відносно (z,k)-еквівалентності розв'язування рівнянь типу Сильвестра та матричних діофантових рівнянь зведено до розв'язування відповідних матричних рівнянь з матрицями-коефіцієнтами у стандартних формах. Вказано, що у розв'язних матричних рівнянь існують розв'язки з обмеженими евклідовими нормами. Встановлено, що таких розв'язків матричних рівнянь над квадратичними евклідовими уявними кільцями є скінченна кількість.

Результати дисертаційної роботи є теоретичними. Вони можуть бути використані при подальших дослідженнях структури матриць над квадратичними та іншими кільцями, при розв'язуванні матричних рівнянь. Ці результати можуть знайти застосування і в прикладних напрямках, у яких виникають матричні рівняння і які потребують описання структури їх розв'язків.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ван дер Варден Б.Л. *Алгебра* // М.: Наука, 1976. — 648 с.
2. Величко И.Н. *Обобщенные суммы Клостермана над кольцом матриц* $M_n(\mathbb{Z}[i])$ // Вісн. Одеськ. нац. ун-ту. — 2010. — Т. 1, № 19. — С. 9–20.
3. Виноградов И.М. *Основы теории чисел* // М.: Наука, 1981. — 182 с.
4. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц* // М.: Наука, 1967. — 576 с.
5. Гудивок П.М. *Об эквивалентности матриц над коммутативными кольцами* // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. — К.: Ин-т математики НАН Украины. — 1993. — С. 431–437.
6. Джалюк Н., Петричкович В. *Напівскалярна еквівалентність поліноміальних матриць та розв'язування матричних поліноміальних рівнянь Сильвестра* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Шевченка. — 2012. — Т. 9. — С. 81–88.
7. Джалюк Н.С., Петричкович В.М. *Розв'язки матричного діофантового поліноміального рівняння*// Прикл. проблеми мех. і мат. — 2012.— Т. 10. — С. 55–61.
8. Джекобсон Н. *Теория колец* // М.: Гос. Изд-во "Иностранная литература", 1947. — 287 с.

9. Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. *Конечномерные алгебры* // К.: Вищ. шк., 1980. — 192 с.

10. Дубровин Н.И. *О кольцах с элементарными делителями* // Известия вузов. Математика. — 1986. — № 11. — С. 14–20.

11. Забавский Б.В. *Простые кольца элементарных делителей* // Мат. студії. — 2004. — Т. 22, № 2. — С. 129—133.

12. Забавський Б.В., Комарницький М.Я. *Дистрибутивные области с элементарными делителями* // Укр. мат. журн. — 1990. — Т. 42, № 7. — С. 1000–1004.

13. Забавський Б.В., Романів О.М. *Кільця з елементарною редукцією матриць* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. — 1999. — Т. 42, №4. — С. 133–137.

14. Забавський Б.В. *Узагальнені адекватні кільця* // Укр. мат. журн. — 1996. — Т. 48, № 4. — С. 554—557.

15. Зеліско В.Р., Ладзоришин Н.Б., Петричкович В.М. *Про еквівалентність матриць над евклідовими квадратичними кільцями* // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2006. — вип 4. — С. 16–21.

16. Казімірський П.С. *Необхідність умов розкладу матричного многочлена на лінійні множники* // Укр. мат. журн. — 1977. — Т. 29, №5. — С. 653–658.

17. Казімірський П.С. *Розклад матричних многочленів на множники (видання друге, виправлене)* // Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2015. — 282 с.

18. Казімірський П.С., Петричкович В.М. *Про еквівалентність поліноміальних матриць* // Теорет. та прикл. питання алгебри і диф. рівнянь. — К.: Наук.думка, 1977. — С. 61–66.

19. Комарницкий Н.Я. *Коммутативные адекватные области Безу и кольца элементарных делителей* // Алгебраические исследования, К.: Ин-т математикики НАН Украины, 1996. — С. 97—113.

20. Кравчук М.П., Гольдбаум Я.С. *Об еквивалентности особенных пучков матриц* // Тр. Киевс. авиац. ин-та. — 1928. — №6.— С. 5–27.

21. Кравчук М. *Вибрані математичні праці* // Київ–Нью-Йорк: Ін-т математики НАН України, 2002. — 792 с.

22. Ладзоришин Н.Б. *Про еквівалентність пар матриць, визначники яких є степенями простих чисел, над квадратичними евклідовими кільцями* // Карпатські мат. публ. — 2013. — Т. 5, №1. — С. 63–69.

23. Ладзоришин Н.Б., Петричкович В.М. *Матричні лінійні одно та двобічні рівняння над квадратичними кільцями* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2018. — вип. 85 — С. 32–40.

24. Ладзоришин Н.Б., Петричкович В.М. *Стандартна форма матриць над квадратичними кільцями відносно (z,k)-еквівалентності та структура розвязків матричних двобічних лінійних рівнянь* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2018. — Т. 61, №2. — С. 49–56.

25. Ладзоришин Н.Б. *Цілочислові розв'язки матричних лінійних односторонніх і різносторонніх рівнянь над квадратичними кільцями* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2015. — Т. 58, № 2. — С. 47–54. (Те саме: Ladzoryshyn N. B. *The integral solutions of matrix linear unilateral and bilateral equations over quadratic rings* // J. Math. Sci. — 2017. — Vol. 223, No. 1. — P. 50–59.)

26. Ланкастер П. *Теория матриц* // М.: Наука, 1978. — 280 с.

27. Лемлейн В. Г. *О евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов* // ДАН СССР — 1954.— Т. 97, №4 — С. 685–687.

28. Мальцев А.И. *Основы линейной алгебры* // М.: Наука, 1970. — 400 с.

29. Пачев У.М. *О евклидовости колец матриц над евклидовыми кольцами* // В кн.: Структурные свойства алгебраических систем. Нальчик: КГГУ.— 1985. — С. 77–80.

30. Петричкович В. М. *Звідність пар матриць узагальнено еквівалентними перетвореннями до трикутних та діагональних форм і їх застосування* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2000. — Т. 43, № 2. — С. 15–22.

31. Петричкович В.М. *Клеточно-треугольная и клеточно-диагональная факторизации клеточно-треугольных и клеточно-диагональных многочленных матриц* // Матем. заметки. — 1985. —Т. 37, №6. — С. 786–796.

32. Петричкович В.М. *О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц* // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1987. — Т. 26. — С. 13–14.

33. Петричкович В.М. *Про паралельні факторизації матриць над кільцями головних ідеалів* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1997. — Т. 40, № 4. — С. 96–100.

34. Петричкович В.М. *Полускалярная эквивалентность и факторизация многочленных матриц* // Укр. мат. журн. — 1990. — Т. 42, № 5. — С. 644—649.

35. Петричкович В.М. *Про напівскалярну еквівалентність многочленних матриць* // Вісн. Нац. унів. "Львівська політехніка". Прикладна мат. — 2000. — № 407. — С. 115—118.

36. Петричкович В.М. *Узагальнена еквівалентність матриць і їх наборів та факторизація матриць над кільцями* // Львів: Ін-т при-

кладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2015. — 312 с.

37. Родосский К.А. *Алгоритм Евклида* // М.: Наука, 1988. – 240 с.

38. Романів О.М., Саган А.В. *Некомутативні ω-евклідові кільця* // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2015. — вип. 13. — С. 36–39.

39. Саган А.В. *Напівспадкові квазі-евклідові кільця* // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2014. — вип. 12. — С. 52–55.

40. Санов И.Н. *Алгоритм Эвклида и односторонние разложения на простые множители для матричных колец* // Сиб. матем. журн. — 1967. — Т. 8, № 4. — С. 846–852.

41. Сидоров С.В. *О подобии матриц второго порядка над кольцом целых гауссовых чмсел, имеющих приводимый характеристический многочлен* // Математическое моделирование. Оптимальное управление Весник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2008. — Т. 4. — С. 122–126.

42. Шаваровский Б.З. *О некоторых "ручных"и "диких"аспектах проблемы полускалярной эквивалентности многочленных матриц* // Матем. заметки. — 2004. — Т. 76, вып. 1. — С. 119–132.

43. Шаваровский Б.З. *Разрешимость матричных уравнений в кольцах квазидиагональных матриц и подобие матричных многочленов* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2006. — Т. 46, № 8. — С. 1353–1362.

44. Щедрик В.П. *Факторизація матриць над кільцями елементарних дільників.*// Львів: Ін-т прикладних прогблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017. — 304 с.

45. Baratchart L. *Un theoreme de factorization et son application ala representation des systemes cycliques causaux* // C. R. Acad.Sci. Paris. Serie I. — 1982. — Vol. 295, No 3. — P. 223 – 226.

46. Barnett S. *Regular polynomial matrices having relatively prime determinants* // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1969. — Vol. 65, No 3. — P. 585—590.

47. Couchot F. *Indecomposable modules and Gelfand rings* // Comm. Algebra. — 2007. — Vol. 35. — P. 231–241.

48. Damkaew S., Prugsapitak S. *Complete residue systems in the ring of matrices over Euclidean domains and a greatest common divisor of matrices* // Int. J. Pure Appl. Math. — 2013. — Vol. 3. — P. 421–430.

49. Dias da Silva J.A., Laffey T.J. *On simultaneous similarity of matrices and related questions* // Linear Algebra Appl. — 1999. — Vol. 291. — P. 167–184.

50. Dlab V., Ringel C.M. *Canonical forms of pairs of complex matrices* // Linear Algebra Appl. — 1991. — Vol. 147. — P. 387–410.

51. Drozd Yu.A. *Tame and wild matrix problems* // Lect. Notes Math. — 1980. — Vol. 832. — P. 242–258.

52. Dzhaliuk N.S., Petrychkovych V.M. *Solutions of the matrix linear bilateral polynomial equation and their structure* // Algebra Discrete Math. — 2019. — Vol. 27, No 2. — P. 243–251.

53. Dzhaliuk N.S., Petrychkovych V. M. *The matrix linear unilateral and bilateral equations with two variables over commutative rings* // ISRN Algebra (2012), Article ID 205478, 14 pages. DOI:10.5402/2012/205478.

54. Feinberg R.B. *Equivalence of partitioned matrices* // J. Res. Natl. Bur. Stand. — Vol. 80, №1. — 1976. — P. 89–97.

55. Feinstein J, Bar-Ness Y. *On the uniqueness of the minimal solution the matrix polynomial equation* $A(\lambda)X(\lambda)+Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ // J. Franklin Inst. — 1980. — Vol. 310, No 2. — P. 131—134.

56. Greaves G. *Cyclotomic matrices over the Eisenstein and Gaussian integers* // J. Algebra. — Vol. 372. — P. 560–583.

57. Greaves G., Taylor G. *Lehmer's conjecture for Hermitian matrices over the Eisenstein and Gaussian integers* // Electron. J. Combin. — 2013. — 20(1) — P.42,22.

58. Guralnick R.M. *Roth's theorems and decomposition of modules* // Linear Algebra Appl. — 1980. — Vol. 39. — P. 155–165.

59. Gustafson W.H. *On matrix equivalence and matrix equations* // Linear Algebra Appl. — 1979. — Vol. 27. — P. 219–224.

60. Gustafson W.H. *Roth's theorems over commutative rings* // Linear Algebra Appl. — 1979. — Vol. 23. — P. 245–251.

61. Johnson C.R., Newman M. *Condition for the diagonalizability of a partitioned matrix* // J. Res. Bur. Stand. Sect. — 1975. — 79B. — P. 45–48.

62. Hartwig R.E., Patricio P. *On Roth's pseudo equivalence over rings* // Electron. J. Linear Algebra. — 2007. — Vol. 16. — P. 111–124.

63. Helmer O. *The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions* // Bull. Amer. Math. Soc. — 1943. — Vol. 49. — P. 225–236.

64. Kaczorek T. *Polynomial and rational matrices. Applications in dynamical systems theory* // Communications and Control Engineering. Dordrecht: Springer, 2007. — 503 p.

65. Kaplansky I. *Elementary divisor ring and modules* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1949.— Vol. 66. — P. 464–491.

66. Kronecker L. *Algebraische reduktion der scharen bilinearer formen* // Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Phyz.-math. KLasse, Berlin. — 1890. — P. 763–776.

67. Kučera V. *Algebraic theory of discrete optimal control for single-variable systems. I. Preliminaries* // Kybernetika. — 1973. — Vol. 9. — P. 94–107.

68. Kučera V. *Algebraic theory of discrete optimal control for multivariable systems* // Kybernetika. — 1974. — Vol. 10/12, supplement — P. 3–56.

69. Ladzoryshyn N., Petrychkovych V. *Equivalence of pairs of matrices with relatively prime determinants over quadratic rings of principal ideals* // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2014. — No. 3(76). — P. 38–48.

70. Larsen M.D., Lewis W.J., Shores T.S. *Elementary divisor rings and finitely presented modules* // Trans. American Math. Society. — 1974. — Vol. 187. — P. 231–243.

71. McGovern W. Wm. *Bezout rings with almost stable range 1* // J. Pure Appl. Algebra. — 2008. — Vol. 212. — P. 340–348.

72. Narang A., Nanda V.C. *Smith normal form for matrices over Dedekind domains* // J. Indian Math. Soc. — 1978. — Vol. 42. — P. 173–178.

73. Newman M. *Integral matrices* // New York: Academic Press, 1972. — 244 p.

74. Nica B. *The unreasonable slightness of E_2 over imaginary quadratic rings* // Amer. Math. Monthly. — 2011. — Vol. 118 — P. 455–462.

75. Perič V., Vukovič M. *Some examples of principal ideal domain which are not Euclidean and some other counterexamples* // Novi Sad. J. Math. — 2008. — Vol. 38, No. 1 — P.137–154.

76. Petrychkovych V. *Generalized equivalence of pairs of matrices* // Linear Multilinear Algebra. — 2000. — Vol. 48, No 2. — P. 179–188.

77. Petrychkovych V. *Generalized equivalence of pairs of matrices* // Matematychni Studii. — 1997. — Vol. 8, No. 2. — P. 147–152.

78. Petrychkovych V. *Standard form of pairs of matrices with respect to generalized eguivalence* // Visnyk Lviv. Univ. — 2003. — Vol. 61. — P. 153–160.

79. Roth W.E. *The equations* $AX - YB = C$ *and* $AX - XB = C$ *in matrices* // Proc. Amer. Math. Soc. — 1952. — No 3. — P. 392–396.

80. Savastru O., Varbanets S. *Norm Kloosterman sums over* $\mathbb{Z}[i]$ // Algebra and Discrete Math. — 1995 — Vol. 80. — P. 105–137.

81. Shavarovskii B.Z. *Toeplitz Matrices in the Problem of Semiscalar Equivalence of Second-Order Polynomial Matrices* // Int. J. Anal. — 2017. — Vol. 2017. — Article ID 6701078, 14 pages. DOI:10.1155/2017/6701078.

82. Silvester J.R. *Determinants of block matrices* // Math. Gazette. — 2000. — Vol. 84, No. 501. — P. 460–467.

83. Smillie J., Vogtmann K. *Automorphisms of* SL_2 *of imaginary quadratic integers* // Proc. Amer. Math. Soc. — 1991. — Vol. 112, No. 3. — P. 691–699.

84. Smith H.J.S. *On systems of linear indeterminate equation and congruences* // Phil. Trans. Roy. Soc. London. — 1861. — Vol. 151, No 2. — P. 293–326.

85. Taylor G. *Cyclotomic matrices and graphs over the ring of integers of some imaginary quadratic fields* // J. Algebra. — 2011. — Vol. 331. — P. 523–545.

86. Taylor G. *Lehmer's conjecture for matrices over the ring of integers of some imaginary quadratic fields* // J. Number Theory. — 2012. — Vol. 132, No. 4. — P. 590–607.

87. Velichko I.N. *Generalized Kloosterman sum over the ring* $M_n(\mathbb{Z})$ // Siauliai Math. Semin. — 2010. — Vol. 5, No. 13. — P. 121–136.

88. Weierstrass K. *Zur theorie der bilinearen und quadratischen formen* // Monatsh. Akad. Wiss., Berlin. — 1897. — P. 310–338.

89. Wolovich W.A., Antsaklis P.J. *The canonical Diophantine equations with applications* // SIAM J. Control Optim. — 1984. — Vol. 22, No. 5. — P. 39–44.

90. Zabavsky B.V. *Diagonalizability theorem for matrices over rings with finite stable range* // Algebra Discrete Math. — 2005. — No. 1. — P. 152–165.

91. Zabavsky B.V. *Diagonal reduction of matrices over rings* // Mathematical Studies, Monograph Series, V.XVI, VNTL Publishers, 2012, Lviv. — 251 p.

ДОДАТКИ

Список публікацій за темою дисертації

1. Зеліско В.Р., Ладзоришин Н. Б., Петричкович В.М. *Про еквівалентність матриць над квадратичними евклідовими кільцями* // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2006. — вип 4. — С. 16–21.

2. Ладзоришин Н.Б. *Про еквівалентність пар матриць, визначники яких є степенями простих чисел, над квадратичними евклідовими кільцями* // Карпатські мат. публ. — 2013. — Т. 5, №1 — С. 63–69.

3. Ladzoryshyn N., Petrychkovych V. *Equivalence of pairs of matrices with relatively prime determinants over quadratic rings of principal ideals* // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2014. — Vol. 76, No. 3 — P. 38–48.

4. Ладзоришин Н.Б. *Цілочислові розв'язки матричних лінійних односторонніх і різносторонніх рівнянь над квадратичними кільцями* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2015. — Т. 58, №2. — С. 47–54. (Те саме: Ladzoryshyn N.B. *Integer solutions of matrix linear unilateral and bilateral equations over quadratic rings* // J. Math. Sci. — 2017. — Vol. 223, No. 1 — P. 50–59.)

5. Ладзоришин Н., Петричкович В. *Матричні лінійні одно- та двобічні рівняння над квадратичними кільцями* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2018. — вип. 85. — С. 32–40.

6. Ладзоришин Н. Б., Петричкович В. М. *Стандартна форма матриць над квадратичними кільцями відносно (z,k)-еквівалентності*

та структура розв'язків матричних двобічних лінійних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2018. — Т. 61, №2. — С. 49–56.

7. Zelisko V., Ladzoryshyn N. *On equivalence and factorization of matrices over quadratic rings* // 6^{th} International Algebraic Conference in Ukraine — Kamyanets-Podilsky, July 1 — 7, 2007. — P. 231–232.

8. Ладзоришин Н.Б. *Про еквівалентність пар матриць над квадратичними евклідовими кільцями* // Конф. молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я.С. Підстригача 2009 (Львів, 25—27 травня 2009 р.): тези доп. – Львів, 2009. — С. 176–177.

9. Ладзоришин Н.Б. *Про еквівалентність деяких пар матриць над квадратичними евклідовими кільцями* // XIII міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, Україна, 13–15 травня, 2010 р.): матеріали в 2-х томах. — Том 2. — Київ, 2010. — С. 166.

10. Ладзоришин. Н. *Матричні лінійні різносторонні рівняння над квадратичними кільцями* // Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки і математики" (Львів, Україна, 21–25 травня, 2013 р.): тези доповідей. — Т.3. — Львів, 2013. — С. 187–189.

11. Ladzoryshyn N., Petrychkovych V. *Equivalence of pairs of matrices with relatively prime determinants over quadratic principal ideal rings* // 9-th International Algebraic Conference in Ukraine (L'viv, July 8—13, 2013): book of abstracts. — L'viv, 2013. — P. 109.

12. Ладзоришин Н.Б. *Цілочисельні розв'язки матричного діофантового рівняння над квадратичними кільцями* // Конф. молодих учених "Підстригачівські читання — 2014" (Львів, 28—30 травня 2014 р.). — Електрон. текст. дані. — Львів, 2014.

— URL:http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2014/theses/Ladzoryshyn.pdf (дата звернення 12.07.2019).

13. Ladzoryshyn N. *The integral solutions of bilateral linear matrix equations over quadratic rings* // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L.A. Kaluzhnin (Kyiv, July 7—12, 2014): book of abstracts. — Kyiv, 2014. — P. 52.

14. Ладзоришин Н.Б. *Матричні лінійні односторонні рівняння над квадратичними кільцями* // Конф. молодих учених "Підстригачівські читання — 2015" (Львів, 26—28 травня 2015 р.). — Електрон. текст. дані. — Львів, 2015. — URL: http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2015/theses/Ladzoryshyn.pdf (дата звернення 12.07.2019).

15. Ladzoryshyn N., Petrychkovych V. *On solutions of the matrix linear equations over quadratic rings* // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd (Odessa, August 20—27, 2015): abstracts. — Odessa, 2015. — P. 61.

16. Ладзоришин. Н. *Про розв'язність матричних діофантових рівнянь над квадратичними кільцями* // Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки і математики" (Львів, 22—25 травня 2018 р.): збірник наукових праць в 3-х томах. — Електрон. ресурс. — Том 3. — Львів, 2018. — С. 217–218 (дата звернення 12.07.2019).

17. Ладзоришин Н. *Про розв'язки матричного рівняння* $AX+BY=C$ *над квадратичним евклідовим кільцем* // Конф. молодих учених "Підстригачівські читання — 2019" (Львів, 27—29 травня 2019 р.). — Електрон. текст. дані. — Львів, 2019. — URL:http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2019/abstracts/Ladzoryshyn.pdf (дата звернення 12.07.2019).

18. Ladzoryshyn N., Petrychkovych V. *(z,k)-equivalence of matrices over Euclidean quadratic rings and solutions of matrix equation AX+YB=C* // XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky (Vinnytsia, July 02—06, 2019): abstracts. — Vinnytsia, 2019. — P. 63–64.

Результати дисертаційної роботи доповідалися на таких конференціях і семінарах:

1. Конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. академіка Я.С. Підстригача (м. Львів, Україна, 25–27 травня 2009 р.).
2. Міжнародній наукові конференції "Сучасні проблеми механіки та математики" (м. Львів, Україна, 21–25 травня 2013 р.).
3. Дев'ятій міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (м. Львів, Україна, 8–13 липня 2013 р.).
4. Конференції молодих учених "Підстригачівські читання — 2014" (м. Львів, Україна, 28–30 травня 2014 р.).
5. Конференції молодих учених "Підстригачівські читання — 2015" (м. Львів, Україна, 26–28 травня 2015 р.).
6. Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки та математики" (м. Львів, Україна, 22–25 травня 2018 р.).
7. Конференції молодих учених "Підстригачівські читання – 2019" (м. Львів, Україна, 27–29 травня 2019 р.).
8. Дванадцятій міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (м. Вінниця, Україна, 2–6 липня 2019 р.).

9. Науковому семінарі відділу алгебри ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України (керівник – доктор фіз.-мат. наук, професор В.М. Петричкович, 2006 – 2019 рр.).
10. Львівському міському алгебраїчному семінарі (Львівський національний університет імені Івана Франка, керівник – доктор фіз.-мат. наук, професор М.Я. Комарницький, 2010 р.), львівському алгебраїчному семінарі (керівники – доктор фіз.-мат. наук, професор Б.В. Забавський, доктор фіз.-мат. наук, професор В.М. Петричкович, канд. фіз.-мат. наук, доцент А.І. Гаталевич, 2019 р.).
11. Алгебраїчному семінарі “The Problems of Elementary Divisor Rings” (Львівський національний університет імені Івана Франка, керівник – доктор фіз.-мат. наук, професор Б.В. Забавський, 2014 р., 2019 р.).