ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДВНЗ „ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА“
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ІЛАШ НАДІЯ БОРИСІВНА

УДК 512.815

ДИСЕРТАЦІЯ

Асимптотична поведінка рядів Пуанкаре алгебр SL_2-інваріантів

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ________________________ Н. Б. Ілаш

Науковий керівник
Бедратюк Леонід Петрович,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Хмельницький – 2019

АНОТАЦІЯ

Ілаш Н.Б. Асимптотична поведінка рядів Пуанкаре алгебр SL_2-інваріантів. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел. – Хмельницький національний університет. – ДВНЗ „Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", Івано-Франківськ, 2019.

Дисертаційна робота присвячена одній із задач класичної теорії інваріантів – дослідженню рядів Пуанкаре алгебр SL_2-інваріантів. У даній роботі вивчаються ряди Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{\mathbf{d}}, z)$ цих алгебр з точністю до перших двох коефіцієнтів розкладу $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{\mathbf{d}}, z)$ в ряд Лорана в околі точки $z = 1$. Коефіцієнт першого доданку цього розкладу називається степенем алгебри. Гільберт обчислив степінь алгебри $\mathcal{I}_d$ інваріантів бінарної $d-$форми в 1890 році. Спрінгер підтвердив цей результат, використавши отриману ним же формулу для ряду Пуанкаре алгебри $\mathcal{I}_d$. Нещодавно Л. Бедратюком було отримано явні формули для рядів Пуанкаре окремих алгебр SL_n-інваріантів. Досліджуючи їх, у дисертаційній роботі одержано:

- перші два коефіцієнти розкладу в ряд Лорана ряду Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{\mathbf{d}}, z)$ алгебри коваріантів бінарної $d-$форми в точці $z = 1$, їх інтегральне зображення та асимптотичну поведінку;

- степінь алгебри спільних інваріантів двох бінарних форм;

- степінь алгебри спільних коваріантів двох бінарних форм;

- перші два коефіцієнти розкладу в ряд Лорана в точці $z = 1$ рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних форм, досліджено їх асимптотичну поведінку;

- перші два коефіцієнти розкладу в ряд Лорана в точці $z = 1$ рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів n квадратичних форм,

досліджено їх асимптотичну поведінку;

- рекурентні співвідношення для рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів n лінійних форм;

- рекурентні співвідношення для рядів Пуанкаре алгебр спільних коваріантів n лінійних форм;

- рекурентні співвідношення для рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів n квадратичних форм;

- рекурентні співвідношення для рядів Пуанкаре алгебр спільних коваріантів n квадратичних форм;

- явні формули для многочленів Гільберта алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних форм;

- явні формули для многочленів Гільберта алгебр спільних інваріантів та коваріантів n квадратичних форм.

Основна частина дисертаційної роботи складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, наведено огляд відомих результатів, виділено об'єкт, предмет та методи дослідження, сформульовано мету та задачі дослідження, висвітлено наукову новизну, а також вказано зв'язок з науковими програмами. Крім того, наведено інформацію щодо апробації результатів та публікацій за темою дисертації, виділено структуру роботи.

У першому розділі наведено основні поняття та результати інших авторів, які використані в ході досліджень, здійснено огляд літератури з даної тематики. Зокрема, у підрозділі 1.1 для зручності наведено позначення алгебр SL_2-інваріантів, які використовуються в усьому тексті.

У підрозділі 1.2 наведено відомі результати інших авторів про ряди Пуанкаре градуйованих алгебр. Зокрема, цей підрозділ містить відомі явні формули рядів Пуанкаре алгебр SL_n-інваріантів, що будуть використані у розділах 2–4 для отримання основних результатів.

Підрозділ 1.3 містить відомі результати про многочлени Нараяна, що будуть використовуватись в розділі 4. Крім того, у цьому підрозділі наведено відомі властивості функції φ_n, що зустрічається у формулах для рядів Пуанкаре алгебр інваріантів та коваріантів бінарної $d-$форми та в формулах для рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів двох бінарних форм. Ці властивості використовуються у підрозділах 2.1, 3.1, 3.2 та 3.3 для обчислення степенів відповідних алгебр.

У підрозділі 1.4 розглядаються многочлени Гільберта алгебр SL_2-інваріантів. Вигляд многочленів Гільберта дає важливу інформацію про структуру алгебри. Крім того, важливу роль в алгебраїчній геометрії відіграють коефіцієнти і степінь многочлена Гільберта. Відомо, що для алгебр SL_n-інваріантів вони є квазімногочленами. Однак формула Келлі-Сільвестра для алгебр спільних інваріантів n бінарних форм не виражає їх через квазімногочлени. У підрозділі 1.4 наведено відомі формули для обчислення многочленів Гільберта алгебр SL_2-інваріантів.

Другий розділ, перший з основних розділів дисертаційної роботи, присвячено дослідженню ряду Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{C}_d, z)$ алгебри $\mathcal{C}_d$ коваріантів бінарної d-форми. Зокрема, використовуючи підхід Спрінгера, обчислено перші два коефіцієнти розкладу ряду Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{C}_d, z)$ цієї алгебри в ряд Лорана в точці $z = 1$, знайдено інтегральне зображення та досліджено асимптотичну поведінку цих коефіцієнтів. Крім цього, у розділі 2 доведено, що ці коефіцієнти є додатними числами. У підрозділі 2.1 обчислено степінь алгебри $\mathcal{C}_d$ коваріантів бінарної $d-$форми. У підрозділі 2.2 обчислено інтегральне зображення степеня алгебри $\mathcal{C}_d$ і знайдена його асимптотична поведінка.

У третьому розділі обчислено степені алгебр спільних інваріантів $\mathcal{I}_{d_1,d_2}$ та коваріантів $\mathcal{C}_{d_1,d_2}$ двох бінарних форм. Як і в попередньому розділі тут застосований метод, запропонований Спрінгером. У підрозділі 3.1 розглядається випадок, коли числа d_1 і d_2 різної парності ($d_1 < d_2$). У підрозділі

3.2 знайдено степінь алгебр спільних інваріантів та коваріантів двох бінарних форм при $d_1 = d_2 \mod 2$, і $d_1 < d_2$. Випадок $d_1 = d_2$ розглядається в підрозділі 3.3. Крім того, у даному розділі в ході обчислень отримано декілька комбінаторних тотожностей.

Четвертий розділ присвячено вивченню рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів n лінійних форм $\mathcal{I}_1^{(n)}$, спільних коваріантів n лінійних форм $\mathcal{C}_1^{(n)}$, спільних інваріантів n квадратичних форм $\mathcal{I}_2^{(n)}$ та спільних коваріантів n квадратичних форм $\mathcal{C}_2^{(n)}$. Зокрема, тут виражено вказані ряди Пуанкаре в термінах многочленів Нараяна, отримано рекурентні співвідношення для них, обчислено перші два коефіцієнти розкладу в ряд Лорана в точці $z = 1$ цих рядів Пуанкаре, зокрема, отримано формули для степенів алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних та квадратичних форм, знайдено інтегральне зображення, досліджено асимптотичну поведінку цих степенів. Також у четвертому розділі многочлени Гільберта $\mathcal{H}(\mathcal{I}_1^{(n)}, m) = \dim(\mathcal{C}_1^{(n)})_m, \mathcal{H}(\mathcal{C}_1^{(n)}, m) = \dim(\mathcal{C}_1^{(n)})_m$, $\mathcal{H}(\mathcal{I}_2^{(n)}, m) = \dim(\mathcal{I}_2^{(n)})_m, \mathcal{H}(\mathcal{C}_2^{(n)}, m) = \dim(\mathcal{C}_2^{(n)})_m$ цих алгебр виражено у вигляді квазімногочленів. Крім того, у цьому розділі в ході обчислень отримано декілька біноміальних тотожностей.

У підрозділі 4.1 наводяться комбінаторні тотожності, необхідні для роботи з рядами Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних та квадратичних форм. Крім того, у цьому підрозділі знайдено декілька виразів для многочленів Нараяна.

Підрозділ 4.2 присвячено дослідженню рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних форм. Зокрема, виражено ряди Пуанкаре цих алгебр через многочлени Нараяна. У цьому підрозділі знайдено перші два коефіцієнти розкладу в ряд Лорана в точці $z = 1$ рядів Пуанкаре цих алгебр. Крім того, у підрозділі 4.2 знайдено інтегральне зображення та досліджено асимптотичну поведінку цих коефіцієнтів. У підрозділі 4.3 отримано аналогічні результати для рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів n квадратичних форм та алгебр спільних коваріантів n квадратичних форм.

Використовуючи явні формули для рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних та n квадратичних форм, у підрозділі 4.4 знайдено рекурентні співвідношення для цих рядів Пуанкаре.

У підрозділі 4.5 вивчаються многочлени Гільберта алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних форм. Тут знайдено явні формули для цих многочленів. Явні формули для многочленів Гільберта алгебр спільних інваріантів та коваріантів n квадратичних форм знайдено в підрозділі 4.6. У підрозділі 4.7 розглядаються ряди Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних та квадратичних форм низьких порядків для малих значень n.

Ключові слова: інваріант, коваріант, ряд Пуанкаре, бінарна форма, алгебра інваріантів, степінь алгебри, многочлени Гільберта.

Ilash N.B. Asymptotic behavior of the Poincaré series of algebras of SL_2-invariants. – Qualification scientific work on rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.06 – algebra and number theory. – Khmelnytskyi National University. – Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2019.

This thesis explores one of the problems of classical invariant theory the Poincaré series of the algebras of SL_2-invariants. In this thesis we study the Poincaré series $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{\mathbf{d}}, z)$ of these algebras as well as the first two coefficients of the Laurent expansion of $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{\mathbf{d}}, z)$ at $z = 1$. The first coefficient of this expansion is called the degree of the algebra. Hilbert had calculated the degree of the algebra $\mathcal{I}_d$ of invariants of binary $d-$form in 1890. Springer proved this result, using his formulas for the Poincaré series of the algebra $\mathcal{I}_d$. The other researcher L.Bedratyuk got explicit formulas for Poincaré series of some algebras

of SL_2-invariants. Based on all these conclusions, in this thesis we have got the following:

- the first two coefficients of the Laurent expansion of the Poincaré series of the algebra of covariants of binary $d-$form $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{\mathbf{d}}, z)$ at $z = 1$, integral representation and asymptotic behavior of the coefficients;

- the degree of the algebra of joint invariants of two binary forms;

- the degree of the algebra of joint covariants of two binary forms;

- the first two coefficients of the Laurent expansion of the Poincaré series of the algebra of joint invariants of n linear forms $\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(n)}, z)$ at $z = 1$, the integral representation and asymptotic behavior of the coefficients;

- the first two coefficients of the Laurent expansion of the Poincaré series of the algebra of joint covariants of n linear forms $\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n)}, z)$ at $z = 1$, the integral representation and asymptotic behavior of the coefficients;

- the first two coefficients of the Laurent expansion of the Poincaré series of the algebra of joint invariants of n quadratic forms $\mathcal{P}(\mathcal{I}_2^{(n)}, z)$ at $z = 1$, the integral representation and asymptotic behavior of the coefficients;

- the first two coefficients of the Laurent expansion of the Poincaré series of the algebra of joint covariants of n quadratic forms $\mathcal{P}(\mathcal{C}_2^{(n)}, z)$ at $z = 1$, the integral representation and asymptotic behavior of the coefficients;

- the recurrence relation for the Poincaré series of the algebra of joint invariants of n linear forms;

- the recurrence relation for the Poincaré series of the algebra of joint covariants of n linear forms;

- the recurrence relation for the Poincaré series of the algebra of joint invariants of n quadratic forms;

- the recurrence relation for the Poincaré series of the algebra of joint covariants of n quadratic forms;

- explicit formulas for the Hilbert polynomials of the algebras of joint invariants and joint covariants of n linear forms.

-explicit formulas for the Hilbert polynomials of the algebras of joint invariants and joint covariants of n quadratic forms.

The main part of the thesis consists of introduction, four chapters, conclusion and references.

The introduction grounds the relevance of the research topic, provides the well-known results, highlights the object, subject and research methods, gives both the aim and tasks of the research, defines the scientific novelty and relations with scientific programs. In addition, it contains the information about the results obtained in the dissertation, author's relevant publications, and the structure of the thesis.

In chapter one we give basic definitions and the results previously obtained by the other scientists, bibliography review on the thesis topic. In particular, in paragraph 1.1 notation about the algebras of SL_2- invariants that are used throughout the text are collected for convenience in this section.

The current results about Poincaré series of graded algebras are collected in paragraph 1.2. In particular, this paragraph contains known explicit formulas for Poincaré series of SL_n- invariants. It will be used in chapters 2–4 to obtain the main results.

Paragraph 1.3 provides the current results on the Narayana polynomials that are used in chapter four. In addition, this paragraph considers properties of function φ_n. It appears in the formulas for the Poincaré series of several algebras of SL_2- invariants, such as the algebra of invariants for binary $d-$form, the algebra of covariants for binary $d-$form, the algebra of joint invariants of two binary forms, and the algebra of joint covariants of two binary forms. We use the properties of the function φ_n in paragraphs 2.1, 3.1, 3.2, 3.3.

Paragraph 1.4 considers the Hilbert polynomials of algebras of SL_2-invariants. The form of the Hilbert polynomials gives us the important information about the structure of the algebra. Besides, the coefficients and the degree of the Hilbert polynomial play an important role in Algebraic Geometry.

It is well known that it is quasi-polynomial for the algebra SL_n-invariants. The Cayley-Sylvester formula for the algebra of joint invariants of n binary forms is not expressed in terms of quasi-polynomials. Paragraph 1.4 provides the current formulas for the Hilbert polynomials of the algebras of SL_2- invariants.

The second chapter, the first of the main chapters of the thesis, is devoted to investigation of the Poincaré series $\mathcal{P}(\mathcal{C}_d, z)$ of the algebra $\mathcal{C}_d$ of covariants for binary $d-$form. In particular, applying Springer's method, it was calculated the first two terms of the Laurent series expansion at the point $z = 1$ of the Poincaré series $\mathcal{P}(\mathcal{C}_d, z)$ of this algebra. Also, it was calculated both an integral representation and the asymptotic behavior of the terms. Besides, in this chapter we prove that these terms are positive.

In paragraph 2.1 we have got the degree of the algebra of covariants of binary $d-$form. In paragraph 2.2 it has been computed the integral representation of the degree and found its asymptotic behavior.

In chapter three we have computed the degree of the algebras of joint invariants $\mathcal{I}_{d_1,d_2}$ and joint covariants $\mathcal{C}_{d_1,d_2}$ of two binary forms, also using Springer's approach to calculation of the degree of the algebra of invariants of binary $d-$forms. Paragraph 3.1 considers the case as d_1 and d_2 have a different parity $(d_1 < d_2)$. In paragraph 3.2 we find the degree of the algebras of joint invariants $\mathcal{I}_{d_1,d_2}$ and joint covariants $\mathcal{C}_{d_1,d_2}$ of two binary forms as $d_1 = d_2 \mod 2, d_1 < d_2$. Further, in paragraph 3.3 we look at it as $d_1 = d_2$. Moreover, several new combinatorial identities were found.

Chapter 4 deals with the study of the Poincaré series of the algebra of joint invariants of n linear forms $\mathcal{I}_1^{(n)}$, the algebra of joint covariants of n linear forms $\mathcal{C}_1^{(n)}$, the algebra of joint invariants of n quadratic forms $\mathcal{I}_2^{(n)}$, the algebra of joint covariants of n quadratic forms $\mathcal{C}_2^{(n)}$. In particular, we expressed the Poincaré series of these algebras in terms of Narayana polynomials, and got recurrence relations for these series. This chapter gives the first two terms of the Laurent series expansion at the point $z = 1$ of the Poincaré series of these algebras, in particular, obtains formulas for the degrees of the algebras of joint invariants and covariants of n linear and quadratic forms. In addition, it has been calculated both an integral representation and the asymptotic behavior of the coefficients of the terms and expressed the Hilbert polynomials $\mathcal{H}(\mathcal{I}_1^{(n)}, m) = \dim(\mathcal{C}_1^{(n)})_m, \mathcal{H}(\mathcal{C}_1^{(n)}, m) = \dim(\mathcal{C}_1^{(n)})_m$, $\mathcal{H}(\mathcal{I}_2^{(n)}, m) = \dim(\mathcal{I}_2^{(n)})_m, \mathcal{H}(\mathcal{C}_2^{(n)}, m) = \dim(\mathcal{C}_2^{(n)})_m$ of those algebras in terms of quasi-polynomial. Moreover, we have got several new binomial identities.

In paragraph 4.1 we give combinatorial identities necessary for dealing with the Poincaré series of the algebras of joint invariants and covariants of n linear and n quadratic forms. In addition, here we find several new expressions for Narayana polynomials.

Paragraph 4.2 studies the Poincaré series of the algebras of joint invariants and covariants of n linear forms. In particular, we express the Poincaré series of these algebras in terms of Narayana polynomials. This section gives the first two terms of the Laurent series expansion at the point $z = 1$ of the Poincaré series of these algebras. In addition, it computes the integral representation of the coefficients of the terms and finds asymptotic behavior of the coefficients. In paragraph 4.3 we obtain the similar results for Poincaré series of both the algebra of joint invariants n of quadratic forms and the algebra of joint covariants of n quadratic forms.

Using explicit formulas for Poincaré series of the algebras of joint invariants and covariants of n linear and n quadratic forms, we have got the recurrence relation for these Poincaré series in paragraph 4.4.

In paragraph 4.5 we touch upon the problem of computing the Hilbert polynomials for the algebras of joint invariants and joint covariants of n linear forms. Explicit formulas for Hilbert polynomials of the algebras of joint invariants and covariants of n quadratic forms are given in paragraph 4.6. In its turn, in paragraph 4.7, we consider the Poincaré series of the algebras of joint invariants and covariants of n linear and quadratic forms for small values of n.

Keywords: invariant, covariant, Poincaré series, binary form, algebra of invariants, degree of algebra.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНО ОСНОВНІ НАУКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Bedratyuk L., Ilash N. The degree of the algebra of covariants of a binary form // J. Commut. Algebra. – 2015. – Vol. 7, № 4. – P. 459–472.

2. Ilash N. The Poincaré series for the algebras of joint invariants and covariants of n linear forms // C. R. Acad. Bulgare Sci. – 2015. – Vol. 68, № 6. – P. 715–724.

3. Ілаш Н. Б. Степінь алгебри коваріантів двох бінарних форм // Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки. – 2015. – № 1/2. – С. 37–45.

4. Ilash N. B. The degree of the algebra of joint invariants of two binary forms // Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки. – 2016. – № 1/2. – С. 28–34.

5. Ilash N. B. Poincaré series for the algebras of joint invariants and covariants of n quadratic forms // Carpathian Math. Publ. – 2017. – Vol. 9, № 1. – P. 57–62.

6. Ilash N. B. Hilbert polynomials of the algebras of SL_2-invariants // Carpathian Math. Publ. – 2018. – Vol. 10, № 2. – P. 303–312.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Ilash N. Asymptotic behavior of the degree of an algebra of SL_2-invariants // 9th International Algebraic Conference in Ukraine (Lviv, July 8-13, 2013) : Abstracts. – Lviv, 2013. – P. 77.

2. Ilash N. B. The degree of an algebra of SL_2-invariants // International Algebraic Conference dedicated to the 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin (Kyiv, July 7-12, 2014) : Abstracts of reports. — Kyiv, 2014. – P. 35–36.

3. Ілаш Н. Б. Використання процедурного програмування системи комп'ютерної алгебри Maple для перевірки степеня алгебр інваріантів бінарних форм // Восьма науково-технічна конференція „Актуальні проблеми комп'ютерних технологій 2014" (Хмельницький, 21–22 травня, 2014) : Збірник наукових праць. – Хмельницький : ХНУ, 2014. – С. 147–152.

4. Ilash N. The degrees for the algebras of joint invariants and covariants of n linear and n quadratic forms // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd (Odessa, August 20 –27, 2015) : Abstracts. – Odessa : TES, 2015. – P. 49.

5. Ilash N. B. The Poincar'e series for the algebras of joint invariants and covariants of linear forms // International Conference of Young Mathematicians (Kyiv, June 3–6, 2015) : Abstracts. – Kyiv : Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015. – P. 12.

6. Ilash N. B. Recurrence relation for the Poincaré series of the algebras of SL_2-invariants // International Mathematical Conference „Group and Actions: Geometry and Dynamics" dedicated to the memory of professor

Vitaly Sushchanskyy (Kyiv, December 19–22, 2016) : Abstracts of reports. – Kyiv, 2016. – P. 25-26.

7. Ілаш Н. Б. Асимптотична поведінка рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів n лінійних форм // II Всеукраїнська науково-практична конференція молодих вчених „Сучасні тенденції у розвитку науки та освіти“ (Кам'янець-Подільський, 24 березня 2016 р.) : Збірник матеріалів. – Кам'янець-Подільський: ТОВ „Друкарня Рута“, 2016. – С. 112–117.

8. Ilash N. B. Hilbert polynomials of the algebras of SL_2-invariants // XI International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko (Kyiv, July 3–7, 2017) : Abstracts. – Kyiv, 2017. – P. 52.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ

V_d – векторний простір бінарних форм порядку d;

$\mathbb{K}$ – поле;

$\mathbb{C}$ – поле комплексних чисел;

$\mathcal{I}_d = \mathbb{C}[V_d]^{SL_2}$ – алгебра інваріантів бінарної $d-$форми;

$\mathcal{C}_d = \mathbb{C}[V_d \oplus \mathbb{C}^2]^{SL_2}$– алгебра коваріантів бінарної $d-$форми;

$\mathcal{I}_{d_1,d_2} = \mathbb{C}[V_{d_1} \oplus V_{d_2}]^{SL_2}$– алгебра спільних інваріантів двох бінарних форм;

$\mathcal{C}_{d_1,d_2} = \mathbb{C}[V_{d_1} \oplus V_{d_2} \oplus \mathbb{C}^2]^{SL_2}$– алгебра спільних коваріантів двох бінарних форм;

$\mathcal{I}_1^{(n)} = \mathbb{C}[\underbrace{V_1 \oplus V_1 \oplus \ldots \oplus V_1}_{n \text{ разів}}]^{SL_2}$ – алгебра спільних інваріантів n лінійних форм;

$\mathcal{C}_1^{(n)} = \mathbb{C}[\underbrace{V_1 \oplus V_1 \oplus \ldots \oplus V_1}_{n \text{ разів}} \oplus \mathbb{C}^2]^{SL_2}$ – алгебра спільних коваріантів n лінійних форм;

$\mathcal{I}_2^{(n)} = \mathbb{C}[\underbrace{V_2 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_2}_{n \text{ разів}}]^{SL_2}$ – алгебра спільних інваріантів n квадратичних форм;

$\mathcal{C}_2^{(n)} = \mathbb{C}[\underbrace{V_2 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_2}_{n \text{ разів}} \oplus \mathbb{C}^2]^{SL_2}$ – алгебра спільних коваріантів n квадратичних форм;

$\mathbb{K}[V]$ – алгебра регулярних функцій на V;

$\mathbb{K}[V]_m$ – простір однорідних функцій степеня m;

$(a,q)_n = (1-a)(1-a\,q)\cdots(1-a\,q^{n-1}) - q$-зсунутий факторіал;

$(x)_n = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$ – символ Похгаммера;

$\left[{n \atop m}\right]$ – числа Стірлінга першого роду без знаку;

$r = \operatorname{tr}\deg_{\mathbb{C}} R$ – степінь трансцендентності поля часток алгебри R над полем комплексних чисел;

$\mathcal{P}(R,z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dim R_k\, z^k$ – ряд Пуанкаре скінченно породженої градуйованої $\mathbb{K}-$алгебри $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \ldots$;

$\deg(R)=\lim\limits_{z\to 1}(1-z)^{\operatorname{tr}\deg_{\mathbb{C}} R}\mathcal{P}(R,z)$ – степінь градуйованої алгебри R;

$\mathcal{H}(R,m)=\dim(R)_m$ – многочлени Гільберта скінченно породженої градуйованої $\mathbb{K}-$алгебри $R=R_0\oplus R_1\oplus R_2\ldots$;

$H_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ – n-не гармонічне число;

i – уявна одиниця;

e – основа натурального логарифму;

C_n – число Каталана;

$\varphi_n(f(z))=\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}f(e^{\frac{2\pi ij}{n}}z)$;

$\zeta_n^j=e^{\frac{2\pi ij}{n}}$ – корінь з 1;

$N_{n,k}=\frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}$ – числа Нараяна;

$N_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}N_{n,k}x^{k-1}$ – многочлен Нараяна;

$W_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2x^k$ – многочлен Нараяна типу B;

$L_n(x)$ – многочлен Лежандра;

$\sim$ – асимптотична еквівалентність;

$L_n^m(x)$ – приєднаний многочлен Лежандра.

ВСТУП

Актуальність теми. Класична теорія інваріантів виокремилась у нову галузь математики у середині XIX століття. Її зародження пов'язане із інтенсивними спробами математиків, зокрема Дж. Буля, А. Келі та Дж. Сильвестра, описати у явному вигляді інваріанти спеціальної лінійної групи (див. [31, 40, 41, 42, 52, 110, 111, 112, 119, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 124]). Впродовж останніх десятиліть класична теорія інваріантів переживає відродження, спричинене постійним зростанням обчислювальних можливостей комп'ютерної техніки, що дало можливість розв'язати деякі відомі задачі, які були відкритими довгий час.

Відомо (П. Ґордан [52], Д. Гільберт [59], Г. Вейль [123]), що алгебра SL_2-інваріантів є скінченно породженою і градуйованою. Рядом Пуанкаре скінченно породженої комплексної градуйованої алгебри

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \dots$$

називається формальний степеневий ряд

$$\mathcal{P}(R, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \dim R_k z^k,$$

де $R_0 = \mathbb{C}, R_s R_t \subseteq R_{s+t}$, для будь-яких $s, t \geq 0$.

Вигляд ряду Пуанкаре дає інформацію про однорідну систему породжуючих і про кількість породжуючих співвідношень між породжуючими інваріантами. Також цей ряд використовується в алгоритмах знаходження мінімальної породжуючої системи алгебри інваріантів.

Ряд Пуанкаре алгебри інваріантів однієї бінарної форми вперше був отриманий Спрінгером у 1980 році в роботі [103]. У 1982 році М. Бріон в [33] знайшов досить складний вираз для рядів Пуанкаре алгебри спільних інваріантів n бінарних форм і використав отриманий вираз для обчислення ряду Пуанкаре алгебри спільних інваріантів двох бінарних форм $\mathcal{I}_{d_1,d_2}$

для деяких значень d_1, d_2 та алгебри спільних інваріантів n лінійних форм. У 1994 році Броер в [34], запропонував метод обчислення рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів редуктивної групи G. Л. Бедратюком, незалежно від Бріона, були отримані аналоги формули Спрінгера для рядів Пуанкаре алгебр коваріантів бінарної форми в [25], алгебр спільних інваріантів та коваріантів двох бінарних форм в [19]. Ним же обчислені ряди Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів скінченної кількості бінарних форм та алгебр інваріантів тернарної та кватернарної форм (див. [20, 21, 22]).

Перші два доданки розкладу $\mathcal{P}(R,z)$ в ряд Лорана в $z=1$ мають вигляд

$$\mathcal{P}(R,z) = \frac{\deg(R)}{(1-z)^r} + \frac{\psi(R)}{(1-z)^{r-1}} + \cdots ,$$

де

$$r = \operatorname{tr}\deg_{\mathbb{C}} R$$

– степінь трансцендентності поля часток алгебри R над полем комплексних чисел (див. [45, твердження 1.4.5 і лема 1.4.6])

Асимптотична поведінка ряду Пуанкаре $\mathcal{P}(R,z)$ алгебри SL_2-інваріантів R характеризується, у тому числі, значеннями коефіцієнтів перших доданків розкладу ряду Пуанкаре в ряд Лорана в точці $z=1$.

Число

$$\deg(R) = \lim_{z\to 1}(1-z)^r \mathcal{P}(R,z)$$

називається степенем алгебри R. Числа $\deg(R), \psi(R)$ є важливими структурними характеристиками алгебри R. Зокрема, якщо R є алгеброю інваріантів скінченної групи G, то $\deg(R)^{-1}$ дорівнює порядку групи G, а $2\dfrac{\psi(R)}{\deg(R)}$ дорівнює кількості псевдовідображень групи G (див. [29, розділи 2.4 і 2.6]). У випадку, коли у якості поля коефіцієнтів береться $\mathbb{F}_p$, формула для $\psi(\mathbb{F}_p[V]^G)$ у термінах стабілізаторів гіперплощин у V була знайдена Карлайлом і Крофоллером та була доведена Бенсоном і Кроулі-Боєви (див. [29], [30, розділи 2.6 і 3.13]). Значно менше дослідженні числа $\deg(R), \psi(R)$

кільця інваріантів $R = \mathbb{C}[V]^G$ редуктивної групи G. Однак, Попов в [97, с. 58] довів, що для зв'язної напівпростої групи G для всіх, крім скінченної кількості зображень V, виконується рівність

$$2\frac{\psi(R)}{\deg(R)} = \dim G.$$

Кові та ін. у роботі [44] обчислили коефіцієнти перших чотирьох доданків розкладу у ряд Лорана в околі точки $z = 1$ ряду Пуанкаре $\mathcal{P}(R, z)$ алгебри інваріантів $R = \mathbb{C}[V]^{U(1)_\alpha}$, де $V-$ скінченно вимірне зображення унітарної групи $U(1)$ порядку 1, визначене ваговими векторами $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Степінь алгебри $\mathcal{I}_d$ інваріантів бінарної d-форми обчислений ще Гільбертом (див. [61]). У 1980 році Спрінгер в [103] навів інше доведення результату Гільберта, використовуючи формулу ряду Пуанкаре алгебри $\mathcal{I}_d$. В іншій роботі [104] Спрінгер знайшов інтегральне зображення і асимптотичну поведінку степеня $\deg(\mathcal{I}_d)$. Число $\psi(\mathcal{I}_d)$ обчислено В. Поповим в [97].

Отже, проблема дослідження алгебр інваріантів класичних груп є актуальною і активно розвивається. Вона належить до проблем класичної теорії інваріантів. Незважаючи на досягнуті в дослідженні алгебр SL_n-інваріантів успіхи, залишаються відкриті задачі, що потребують вирішення. Серед таких задач знаходиться задача обчислення рядів Пуанкаре та степенів алгебр SL_2-інваріантів.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, виконані в дисертації, проводились в рамках науково-дослідних держбюджетних тем Хмельницького національного університету „Теоретико-групові аспекти деформованих нелінійних моделей квантових систем“ (номер держреєстрації – 0115U000618c) та „Агентно-орієнтована система підвищення безпеки та якості програмного забезпечення комп'ютерних систем“ (номер держреєстрації – 0119U100662).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дисертації є вивчення асимптотичних властивостей рядів Пуанкаре алгебр SL_2-інваріантів.

Задачами дослідження є:

- знаходження степеня алгебри коваріантів бінарної форми та обчислення його асимптотичної поведінки;

- знаходження степенів алгебр спільних інваріантів декількох бінарних форм та обчислення їх асимптотичної поведінки;

- знаходження степенів алгебр спільних коваріантів декількох бінарних форм, та обчислення їх асимптотичної поведінки.

Об'єктом досліджень є градуйовані алгебри інваріантів групи SL_2.

Предметом досліджень є ряди Пуанкаре алгебр SL_2-інваріантів.

Методи дослідження. Основними методами дослідження є методи класичної теорії інваріантів, математичного аналізу та методи комбінаторики.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі отримано такі результати:

- обчислено степінь алгебри коваріантів бінарної $d-$форми, знайдено його інтегральне зображення та досліджено асимптотичну поведінку;

- обчислено степінь алгебри спільних інваріантів двох бінарних форм;

- обчислено степінь алгебри спільних коваріантів двох бінарних форм;

- обчислено степені алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних форм, досліджено їх асимптотичну поведінку;

- обчислено степені алгебр спільних інваріантів та коваріантів n квадратичних форм, досліджено їх асимптотичну поведінку;

- обчислено явні формули для многочленів Гільберта алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних форм;

- обчислено явні формули для многочленів Гільберта алгебр спільних інваріантів та коваріантів n квадратичних форм;

- отримано рекурентні співвідношення для рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та алгебр спільних коваріантів n лінійних та n квадратичних форм.

Особистий внесок здобувача. Всі наукові результати, включені в дисертацію, одержані здобувачем особисто. У спільній статті [26] Л. Бедратюку належить постановка задачі, рекомендації щодо методів її розв'язування, участь в обговоренні та систематизації отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації апробовувались на:

- IX Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (Львів, 8–13 липня 2013 р.);
- Міжнародній алгебраїчній конференції присвяченій 100-річчю від дня народження Л. А. Калужніна (Київ, 7–12 липня 2014 р.);
- VIII Міжнародній науково-технічній конференції „Актуальні проблеми комп'ютерних технологій 2014" (Хмельницький, 21–22 травня 2014 р.);
- X Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю від дня народження Ю. А. Дрозда (Одеса, 20–27 серпня 2015 р.);
- Міжнародній конференції молодих математиків (Київ, 3–6 червня 2015 р.);
- Всеукраїнській науково-практичній конференції молодих вчених „Сучасні тенденції у розвитку науки та освіти" (Кам'янець-Подільський, 24 березня 2016 р.);
- Міжнародній математичній конференції „Групи і дії: геометрія і динаміки" присвяченій пам'яті професора Віталія Івановича Сущанського (Київ, 19–22 грудня 2016 р.);
- XI Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 75-річчю В. В. Кириченка (Київ, 3–7 липня 2017 р.);
- науковому семінарі кафедри алгебри та математичної логіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник:

доктор фіз.-мат. наук, професор А. П. Петравчук, Київ, 24 грудня 2014 р.);

- міжнародній конференції „Молоді жінки в теорії зображень“ (Бонн, Німеччина, 23–25 червня 2016 р.);
- алгебраїчному семінарі інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор Ю. А. Дрозд, Київ, 23 травня 2017 р.).

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається з переліку умовних позначень і термінів, вступу, 4 розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 126 найменувань і займає 13 сторінок, а також з додатків, що містять список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг роботи – 136 сторінок.

РОЗДІЛ 1
ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ І НАПРЯМКИ ДОСЛІДЖЕНЬ У КЛАСИЧНІЙ ТЕОРІЇ ІНВАРІАНТІВ

Цей розділ носить оглядовий характер. Наведено необхідний теоретичний матеріал про алгебри SL_n-інваріантів та про многочлени Нараяна. Зроблено огляд результатів досліджень рядів Пуанкаре та многочленів Гільберта алгебр SL_n-інваріантів.

1.1. Алгебри SL_2-інваріантів

Наведемо ряд понять з [1, с. 8–9], які будуть використовуватись в дослідженнях .

Алгеброю над полем $\mathbb{K}$ називається $\mathbb{K}$-векторний простір R із заданою на ньому бінарною операцією

$$R \times R \to R, \ (a, b) \to ab,$$

що задовольняє таким правилам:

1) $a(b + c) = ab + ac, \ \ (b + c)a = ba + ca$, для будь-яких $a, b, c \in R$;

2) $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$, для будь-яких $\lambda \in \mathbb{K}, a, b \in R$.

Також далі вважатимемо, що:

1) алгебра R містить одиницю, тобто елемент 1, такий що

$$1a = a1 = a;$$

2) алгебра R асоціативна, тобто

$$(ab)c = a(bc)$$

для будь-яких $a, b, c \in R$.

Під добутком двох підпросторів $U, W \subseteq R$, будемо розуміти лінійну оболонку елементів виду uw, де $u \in U$ та $w \in W$.

Градуюванням на алгебрі R називається такий розклад R в пряму суму підпросторів

$$R = \bigoplus_{k \geq 0} R_k,$$

що $R_{k_1} R_{k_2} \subseteq R_{k_1+k_2}$ для будь-яких $k_1, k_2 \geq 0$.

Алгебра з фіксованим градуюванням називається *градуйованою алгеброю,* а підпростори R_k— *компонентами градуйованої алгебри* R.

Підалгеброю алгебри R називається підпростір, що сам є алгеброю.

Множина $S \subseteq R$ називається *системою породжуючих* алгебри R, якщо кожен елемент алгебри R є многочленом від скінченної кількості елементів множини S, тобто, коли R співпадає з найменшою своєю підалгеброю, що містить S. Крім того, алгебру R називають *скінченно породженою,* якщо систему породжуючих можна вибрати скінченною [104, с. 21].

Розглянемо скінченно вимірний векторний простір V над алгебраїчно замкненим полем $\mathbb{K}$.

Нехай $v_1, v_2, \ldots, v_n$— базис простору V. Лінійна на V функція $f_j : V \to \mathbb{K}$, що визначається рівністю

$$f_j(x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) = x_j, \quad \text{де} \quad 1 \leq j \leq n$$

[104, с. 1] називається *регулярною,* або *поліноміальною.*

Алгебра $\mathbb{K}[V]$ регулярних на V функцій (її ще називають *кільцем регулярних функцій* на V або *координатним кільцем простору* V) є градуйованою, див. [104, с. 1].

Далі розглянемо підгрупу $G \subset GL(V)$ загальної лінійної групи разом з її лінійним зображенням у просторі V. Таким чином, на V задано [104, с. 1] структуру G-модуля.

Означення 1.1.1.([104, с. 1]) *Поліноміальна функція $f \in \mathbb{K}[V]$ називається G-інваріантною чи інваріантом, якщо $f(gv) = f(v)$ для всіх $g \in G$*

i $v \in V$.

Функція є $G-$інваріантною тоді і лише тоді, якщо вона буде константою на всіх орбітах групи G у V (див., наприклад, [7, с. 143])

Всі $G-$інваріантні функції утворюють [7, с. 144] підалгебру $\mathbb{K}[V]^G$ алгебри $\mathbb{K}[V]$, що називається *алгеброю інваріантів.* Відомо [104, с. 1], що вона є градуйованою:

$$\mathbb{K}[V] = \bigoplus_{m \geq 0} \left(\mathbb{K}[V]^G \cap \mathbb{K}[V]_m \right).$$

Теорія інваріантів вивчає алгебри інваріантів груп. Класична теорія інваріантів вивчає структуру алгебр інваріантів класичних груп $(GL_n, SL_n, O_n, SO_n, U_n, SU_n)$ та їх підгруп.

Приклад 1.1.1.([108, с. 2–3]) *Розглянемо природну дію симетричної групи $\mathcal{S}_n$ на поліноміальному кільці $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Інваріантними функціями при такій дії є симетричні многочлени, множина яких утворює підкільце $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathcal{S}_n}$ кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Як відомо, кожен симетричний многочлен може бути в единий спосіб поданий, як многочлен від елементарних симетричних многочленів*

$$\sum_{j_1 < j_2 < \ldots < j_k} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_k}, \;\; \textit{де} \;\; 1 \leq k \leq n.$$

Тобто вони можуть слугувати системою породжуючих для алгебр інваріантів $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathcal{S}_n}$. Взагалі кажучи, така система породжуючих далеко не едина. Наприклад, системою породжуючих для алгебри симетричних многочленів можуть слугувати многочлени, що є сумою $k-$тих степенів, при $1 \leq k \leq n$, чи многочлени Шура. Зв'язки між системами породжуючих алгебри симетричних многочленів мають важливе значення в алгебраїчній комбінаториці і теорії зображень груп [81, с. 23–37].

Однорідний многочлен степеня d від n змінних [7, с. 156] називається *n-арною формою* степеня d. Зокрема, *бінарною формою* порядку d називається однорідний многочлен

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{d} \binom{d}{j} a_j x^j y^{d-j}, a_j \in \mathbb{C}$$

степеня d від двох змінних.

Приклад 1.1.2. *Розглянемо групу $G = SL_n$, яка природнім чином діє на скінченно вимірному комплексному просторі n-арних форм V_d порядку d. Відповідна алгебра інваріантів $\mathbb{C}[V_d]^{SL_n}$ в термінах класичної теорії інваріантів називається алгеброю інваріантів n-арної форми порядку d, зокрема при $n = 2$ – алгеброю інваріантів бінарної d-форми.(див., наприклад, [7, с. 156])*

Приклад 1.1.3. *Розглянемо бінарну форму порядку* 4

$$f(x,y) = a_0 y^4 + 4\,a_1 x y^3 + 6\,a_2 x^2 y^2 + 4\,a_3 x^3 y + a_4.$$

Келі знайшов [40] такий інваріант цієї форми

$$F_1 = a_0 a_4 - 4\,a_1 a_3 + 3\,a_2^2.$$

Незалежно Булем [31] було знайдено інший інваріант

$$F_2 = a_0 a_2 a_4 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 + 2\,a_1 a_2 a_3.$$

Як зазначено в [124], ще в XIX столітті було відомо, що система $S = \{F_1, F_2\}$ є системою породжуючих алгебри інваріантів $\mathbb{C}[V_4]^{SL_n}$ бінарної форми порядку 4.

Проте із збільшенням порядку бінарної форми, відшукання системи породжуючих алгебри інваріантів значно ускладнюється. Задача доведення скінченної породженості алгебри інваріантів групи SL_2 і задача знаходження мінімальної породжуючої системи алгебри інваріантів були найважливішими задачами теорії інваріантів XIX століття (див. [110, 111, 112, 119, 8, 51, 50]. Актуальною вона залишається і сьогодні (див. [17, 18, 2, 35, 36].

У 1868 році П.Ґордан [52] конструктивно довів, що для алгебри інваріантів бінарної форми така система існує, тобто ця алгебра є скінченно породженою.

Аналогічна задача (задача скінченної породженості) для випадку інваріантів n-арної форми була розв'язана Гільбертом [59] у 1890 році. Зазначимо, що його доведення не було конструктивним – не наводилось жодних інструментів визначення такої скінченої системи, а лише доводилось її існування.

Розглянемо тепер комплексний векторний простір

$$V_d = (x^d, x^{d-1}y, \ldots, xy^{d-1}, y^d)$$

бінарних форм порядку d, на якому природнім чином діє група $G = SL_2$. Продовжимо дію групи G на алгебри поліноміальних функцій $\mathbb{C}[V_d]$ та $\mathbb{C}[V_d \oplus \mathbb{C}^2]$. Нехай $\mathcal{I}_d = \mathbb{C}[V_d]^G$ та $\mathcal{C}_d = \mathbb{C}[V_d \oplus \mathbb{C}^2]^G$ – алгебри G-інваріантних функцій. Алгебра $\mathcal{I}_d$ – це алгебра інваріантів бінарної форми порядку d, означена в прикладі 1.1.2. Алгебра $\mathcal{C}_d$ в термінах класичної теорії інваріантів називається [25] *алгеброю коваріантів бінарної форми* порядку d.

Розглянемо векторний простір

$$V_{\mathbf{d}} = V_{d_1} \oplus V_{d_2} \oplus \ldots \oplus V_{d_n}, \ \mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots d_n),$$

що визначається, як пряма сума n просторів V_{d_i} бінарних форм порядку d_i $(i = 1 \ldots n)$, на яких природнім чином діє група SL_2. Як і раніше, продовжимо дію цієї групи на алгебри поліноміальних функцій

$$\mathbb{C}[V_{\mathbf{d}}] = \mathbb{C}[V_{d_1} \oplus V_{d_2} \oplus \ldots \oplus V_{d_n}]$$

та

$$\mathbb{C}[V_{\mathbf{d}} \oplus \mathbb{C}^2] = \mathbb{C}[V_{d_1} \oplus V_{d_2} \oplus \ldots \oplus V_{d_n} \oplus \mathbb{C}^2].$$

Відповідні алгебри

$$\mathcal{I}_{\mathbf{d}} = \mathbb{C}[V_{d_1} \oplus V_{d_2} \oplus \ldots \oplus V_{d_n}]^{SL_2}$$

та

$$\mathcal{C}_{\mathbf{d}} = \mathbb{C}[V_{d_1} \oplus V_{d_2} \oplus \ldots \oplus V_{d_n} \oplus \mathbb{C}^2]^{SL_2}$$

SL_2-інваріантних функцій називаються (див., наприклад, [24]) *алгеброю спільних інваріантів* та *алгеброю спільних коваріантів n* бінарних форм.

При $n = 2$ в термінах класичної теорії інваріантів ці алгебри називаються [19] *алгеброю спільних інваріантів двох бінарних форм* $\mathcal{I}_{d_1,d_2}$ та *алгеброю спільних коваріантів двох бінарних форм* $\mathcal{C}_{d_1,d_2}$.

Якщо
$$d_1 = d_2 = \ldots = d_n = 1,$$
то простір
$$V_{\mathbf{n}} = nV_1 = \underbrace{V_1 \oplus V_1 \oplus \ldots \oplus V_1}_{n \text{ разів}}$$
є прямою сумою n лінійних форм. Алгебри $\mathcal{I}_1^{(n)} = \mathbb{C}[nV_1]^{SL_2}$ та $\mathcal{C}_1^{(n)} = \mathbb{C}[nV_1 \oplus \mathbb{C}^2]^{SL_2}$ на мові класичної теорії інваріантів (див., наприклад, [24]) називаються *алгеброю спільних інваріантів* та *алгеброю спільних коваріантів n лінійних форм.*

Алгебри SL_2-інваріантнів
$$\mathcal{I}_2^{(n)} = \mathbb{C}[\underbrace{V_2 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_2}_{n \text{ разів}}]^{SL_2}$$
та
$$\mathcal{C}_2^{(n)} = \mathbb{C}[\underbrace{V_2 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_2}_{n \text{ разів}} \oplus \mathbb{C}^2]^{SL_2}$$
називаються (див., наприклад, [24]) *алгеброю спільних інваріантів n квадратичних форм* та *алгеброю спільних коваріантів n квадратичних форм,* відповідно.

1.2. Ряди Пуанкаре алгебр SL_2- інваріантів

Нехай
$$R = R_0 + R_1 + \cdots$$
— скінченно породжена градуйована комплексна алгебра, $R_0 = \mathbb{C}$. *Рядом Пуанкаре* алгебри R (див. наприклад [1, с. 16]) називається формальний

степеневий ряд

$$\mathcal{P}(R,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\mathrm{dim}R_m z^m.$$

Зауважимо, що іноді зустрічається [44] (див. також [108]) термін „ряд Гільберта“. Відомо [104, с. 29], що ряд Пуанкаре скінченно породженої алгебри R над полем $\mathbb{K}=R_0$ є розкладом в степеневий ряд деякої раціональної функції з радіусом збіжності не меншим за 1. Цю раціональну функцію іноді теж називають рядом Пуанкаре. Більше інформації дає теорема Гільберта-Сера сформульвана в [1, с. 17].

Теорема 1.2.1. (Д. Гільберт, Ж.-П. Серр) *Нехай R є градуйованою алгеброю, породженою елементами $a_1,\ldots,a_n$ додатних степенів відповідно $d_1,\ldots,d_n$ і $M-$ скінченно породжений R-модуль. Тоді знайдеться такий многочлен $f(t)\in\mathbb{Z}[t]$, що*

$$\mathcal{P}(M,z)=\frac{f(t)}{(1-t^{d_1})(1-t^{d_2})\cdots(1-t^{d_n})}.$$

Більше того, Кемпфом у [74] було доведено, що у випадку, коли R є алгеброю інваріантів редуктивної лінійної групи над полем комплексних чисел, цей раціональний дріб є правильним. Різницю степенів знаменника і чисельника такого дробу надалі позначимо через q, як позначено в [97] (див. також [7]). Зауважимо, що для цього числа зустрічається [38] (див. також [44, 53]) термін *a-інваріант* алгебри R, що позначається $a(R)$.

Степенем алгебри R [60, с. 335] називається число

$$\deg(R)=\lim_{z\to 1}(1-z)^r\mathcal{P}(R,z),$$

де r – степінь трансцендентності над $\mathbb{C}$ поля часток алгебри R. Перші два доданки розкладу $\mathcal{P}(R,z)$ в ряд Лорана в $z=1$ мають вигляд [45, с. 19]

$$\mathcal{P}(R,z)=\frac{\deg(R)}{(1-z)^r}+\frac{\psi(R)}{(1-z)^{r-1}}+\cdots.$$

Числа $\deg(R), \psi(R)$ є важливими структурними характеристиками алгебри R. Зокрема, відомо [29, с. 47], що якщо R є алгеброю інваріантів скінченної групи G, то $\deg(R)^{-1}$ дорівнює порядку групи G, а $2\dfrac{\psi(R)}{\deg(R)}$ дорівнює кількості псевдовідображень групи G. На жаль, роль чисел $\deg(R), \psi(R)$ для алгебр SL_n-інваріантів не досліджена. Однак відомо [7, с. 199], що для зв'язної напівпростої групи G, якою є група SL_n, виконується таке співвідношення

$$\frac{2\psi(R)}{\deg(R)} = q - r.$$

У 1980 році Спрінгер в [103, с. 342] досить складними обчисленнями отримав з формули Моліна формулу для ряду Пуанкаре алгебри інваріантів бінарної d-форми $\mathcal{I}_d$. Простіше доведення цього результату пізніше наводить Л. Бедратюк в [4]. Сформулюємо відповідну теорему, розглянувши функцію φ_n, таку що переводить раціональну функцію $f(z)$ у раціональну функцію

$$\varphi_n(f(z)) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(e^{\frac{2\pi i j}{n}} z),$$

де $i^2 = -1$, а e – основа натурального логарифму.

Теорема 1.2.2. *Ряд Пуанкаре алгебри інваріантів бінарної $d-$форми обчислюється за формулою*

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_d, z) = \sum_{0 \le j < d/2} (-1)^j \varphi_{d-2j}\left(\frac{(1-z^2)z^{j(j+1)}}{(z^2, z^2)_j (z^2, z^2)_{d-j}}\right),$$

де $(a, q)_n = (1-a)(1-a\,q)\cdots(1-a\,q^{n-1})$ – q-зсунутий факторіал.

Цю теорему Спрінгер [103, с. 344] використовує для обчислення степеня алгебри інваріантів бінарної форми порядку d.

Теорема 1.2.3. *Степінь алгебри інваріантів бінарної $d-$форми обчислюється за формулою*

$$\deg(\mathcal{I}_d) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4d!} \displaystyle\sum_{0 \leq j < d/2} (-1)^j \binom{d}{j} \left(\frac{d}{2} - j\right)^{d-3}, & \textit{якщо } d \textit{ – непарне}, \\ -\dfrac{1}{2d!} \displaystyle\sum_{0 \leq j < d/2} (-1)^j \binom{d}{j} \left(\frac{d}{2} - j\right)^{d-3}, & \textit{якщо } d \textit{ – парне}. \end{cases}$$

Зауважимо, що вперше даний результат отримав Гільберт [60, §9] ще в кінці XIX століття, використовуючи інший підхід.

У [104, п.3.4] Спрінгер також знайшов інтегральне зображення константи Гільберта та її асимптотичну поведінку. Він показав, що

$$\sum_{0 \leq j < d/2} (-1)^j \binom{d}{j} \left(\frac{d}{2} - e\right)^{d-3} = \frac{8(d-3)!}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\sin^d x}{x^{d-2}} dx,$$

$$\lim_{d \to \infty} d^{\frac{3}{2}} \int\limits_0^\infty \frac{\sin^d x}{x^{d-2}} dx = \frac{3(6\pi)^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Число $\psi(\mathcal{I}_d)$ обчислено В. Поповим в [97, с. 50].

Опишемо метод, який використав Спрінгер, щоб отримати формулу степеня алгебри інваріантів бінарної $d-$форми з формули ряду Пуанкаре цієї алгебри. Зауважимо, що більшість тверджень він доводить схематично, не вдаючись до деталей, або ж, взагалі, наводить без доведення.

Спочатку Спрінгер обчислює в [103] два перші доданки розкладу в ряд Лорана в околі точки $z = 1$ функції

$$\frac{(1-z^2)z^{j(j+1)}}{(j, z^2)!(d-j, z^2)!}.$$

Потім знаходить коефіцієнти перших двох доданків розкладу в ряд Лорана ряду Пуанкаре (див.[103, лема 6]). Далі враховуючи, що коефіцієнт біля першого доданка дорівнює 0, коефіцієнт біля другого доданка і є степенем цієї алгебри у випадку непарного d. Зазначимо, що останнього твердження в доведенні Спрінгера немає. Можливо, він керувався міркуваннями описаними нижче.

При парному d, полюс функції

$$\frac{(1-z^2)z^{j(j+1)}}{(j,z^2)!(d-j,z^2)!}$$

в точках $z=-1$ і $z=1$ дає [103, лема 4] полюс функції

$$\varphi_{d-2j}\left(\frac{(1-z^2)z^{j(j+1)}}{(j,z^2)!(d-j,z^2)!}\right)$$

в точці $z=1$. Тому у випадку парного d в теоремі 1.2.3 Спрінгером отримано інший вираз для обчислення степеня алгебри $\mathcal{I}_d$.

У [104, с. 39] Спрінгер доводить, що степінь трансцендентності алгебри SL_2-інваріантів $\mathbb{C}[V]^{SL_2}$ над полем комплексних чисел дорівнює

$$r=\operatorname{tr}\deg_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[V]^{SL_2}=\dim V-3.$$

Згідно з вище сказаним, маємо

$$\operatorname{tr}\deg_{\mathbb{C}}\mathcal{I}_{\mathbf{d}}=d_1+1+d_2+1+\ldots+d_n+1-3=d_1+d_2+\ldots+d_n+n-3,$$

$$\operatorname{tr}\deg_{\mathbb{C}}\mathcal{C}_{\mathbf{d}}=d_1+1+d_2+1+\ldots+d_n+1+2-3=d_1+d_2+\ldots+d_n+n-1,$$

де $\mathbf{d}=(d_1,d_2,\ldots d_n)$.

У роботах Л. Бедратюка знайдено явний вигляд рядів Пуанкаре, зокрема, для таких алгебр SL_2-інваріантів:

-алгебри коваріантів бінарної $d-$форми $\mathcal{C}_d$,

-алгебри спільних інваріантів двох бінарних форм $\mathcal{I}_{d_1,d_2}$,

-алгебри спільних коваріантів двох бінарних форм $\mathcal{C}_{d_1,d_2}$,

-алгебри спільних інваріантів n лінійних форм $\mathcal{I}_1^{(n)}$,

-алгебри спільних коваріантів n лінійних форм $\mathcal{C}_1^{(n)}$,

-алгебри спільних інваріантів n квадратичних форм $\mathcal{I}_2^{(n)}$,

-алгебри спільних коваріантів n квадратичних форм $\mathcal{C}_2^{(n)}$.

Наведемо теореми, в яких обчислено ряди Пуанкаре цих алгебр.

Теорема 1.2.4([25]) *Ряд Пуанкаре алгебри коваріантів бінарної $d-$форми можна обчислити за такою формулою*

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_d,z)=\sum_{0\le k<d/2}\varphi_{d-2\,k}\left(\frac{(-1)^k z^{k(k+1)}(1+z)}{(z^2,z^2)_k\,(z^2,z^2)_{d-k}}\right).$$

У наступних трьох теоремах обчислено ряди Пуанкаре алгебри спільних інваріантів двох бінарних форм $\mathcal{I}_{d_1,d_2}$ та алгебри спільних коваріантів двох бінарних форм $\mathcal{C}_{d_1,d_2}$ для різних значень парності чисел d_1 і d_2.

Теорема 1.2.5. ([19]) *Нехай $d_2 - d_1 = 1 \pmod 2$ і $d_2 > d_1$. Тоді ряди Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{d_1,d_2}, z)$ і $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{d_1,d_2}, z)$ мають вигляд:*

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_{d_1,d_2}, z)= \sum_{d_1/2\leq k\leq d_1} \varphi_{2k-d_1}\left((1+z)A_k(z)\right) + \sum_{k=0}^{[d_2/2]} \varphi_{d_2-2k}\left((1+z)B_k(z)\right),$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{d_1,d_2}, z)= \sum_{d_1/2\leq k\leq d_1} \varphi_{2k-d_1}\big((1-z^2)A_k(z)\big) + \sum_{k=0}^{[d_2/2]} \varphi_{d_2-2k}\big((1-z^2)B_k(z)\big),$$

де

$$A_k(z) = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1+1)} z^{(d_1-k)(d_1-k+1)+\frac{1}{4}(d_1+d_2-2k+1)^2}}{(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_1-k}(z,z^2)_{\frac{d_2+d_1+1}{2}-k}(z,z^2)_{\frac{d_2-d_1+1}{2}+k}},$$

$$B_k(z) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k z^{k(k+1)}}{(z^{d_2-d_1-2k},z^2)_{d_1+1}(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_2-k}} \text{ при } 2k < d_2-d_1, \\[4ex] \dfrac{(-1)^{\frac{d_2-d_1-1}{2}} z^{k(k+1)+1/4(d_2-d_1-1-2k)^2}}{(z,z^2)_{s+1}(z,z^2)_{d_1-s}(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_2-k}} \text{ при } s = \dfrac{2k-(d_2-d_1)-1}{2}. \end{cases}$$

Теорема 1.2.6. ([19]) *При $d_2 - d_1 = 0 \pmod 2$ і при $d_2 > d_1$ ряди Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{d_1,d_2}, z)$ і $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{d_1,d_2}, z)$ обчислюються за такими формулами:*

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_{d_1,d_2}, z)= \\ = \sum_{d_1/2\leq k\leq d_1} \varphi_{2k-d_1}\big((1+z)\bar{A}_k(z)\big) + \sum_{d_1/2\leq k\leq d_1} \Big(z\,\varphi_{2k-d_1}\big((1+z)\bar{B}_k(z)\big)\Big)'_z +$$

$$+ \sum_{0\leq 2k\leq d_2-d_1-2} \varphi_{d_2-2k}\left((1+z)S_k(z)\right) + \sum_{d_1+d_2+2\leq 2k\leq 2d_2} \varphi_{d_2-2k}\left((1+z)S_k(z)\right);$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{d_1,d_2},z)=$$
$$=\sum_{d_1/2\le k\le d_1}\varphi_{2k-d_1}\left((1-z^2)\bar{A}_k(z)\right)+\sum_{d_1/2\le k\le d_1}\left(z\,\varphi_{2k-d_1}\left((1-z^2)\bar{B}_k(z)\right)\right)'_z+$$

$$+\sum_{0\le 2k\le d_2-d_1-2}\varphi_{d_2-2k}\left((1-z^2)S_k(z)\right)+\sum_{d_1+d_2+2\le 2k\le 2d_2}\varphi_{d_2-2k}\left((1-z)^2S_k(z)\right),$$

де

$$\bar{A}_k(z)=-\frac{1}{z^{d_2+d_1-2k}}\lim_{t\to z^{2k-(d_1+d_2)}}\left(f_{d_1,d_2}(tz^{d_2},z)(1-tz^{d_2+d_1-2k})^2\right)'_t;$$

$$\bar{B}_k(z)=\lim_{t\to z^{2k-(d_1+d_2)}}\left(f_{d_1,d_2}(tz^{d_2},z)(1-tz^{d_2+d_1-2k})^2\right);$$

$$S_k(z)=\lim_{t\to z^{-2k}}\left(f_{d_1,d_2}(tz^{d_2},z)(1-tz^{2k})\right);$$
$$f_{d_1,d_2}(tz^{d_2},z):=\frac{1}{(tz^{d_2-d_1},z^2)_{d_1+1}(t,z^2)_{d_2+1}}.$$

Теорема 1.2.7.([19]) *Нехай $d_2=d_1=d$. Тоді ряди Пуанкаре алгебри спільних інваріантів двох бінарних форм $\mathcal{I}_{d,d}$ та алгебри спільних коваріантів двох бінарних форм $\mathcal{C}_{d,d}$ обчислюються за такими формулами:*

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{d,d},z)=$$
$$=\sum_{0\le k\le d/2}\varphi_{d-2k}\left((1-z^2)\tilde{A}_k(z)\right)+\sum_{0\le k\le d/2}\left(z\,\varphi_{d-2k}\left((1-z^2)\tilde{B}_k(z)\right)\right)'_z,$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_{d,d},z)=$$
$$=\sum_{0\le k\le d/2}\varphi_{d-2k}\left((1+z)\tilde{A}_k(z)\right)+\sum_{0\le k\le d/2}\left(z\,\varphi_{d-2k}\left((1+z)\tilde{B}_k(z)\right)\right)'_z,$$

де

$$\tilde{B}_k(z)=\lim_{t\to z^{d-2k}}\left(f_{d,d}(tz^d,z)(1-tz^{2k})^2\right)=\left(\frac{z^{k(k+1)}}{(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d-k}}\right)^2,$$

$$\tilde{A}_k(z)=-\frac{1}{z^{2k}}\lim_{t\to z^{-2k}}\left(f_{d,d}(tz^d,z)(1-tz^{2k})^2\right)'_t=$$

$$= 2\,\tilde{B}_k(z)\,\left(s + \frac{z^{2(s+1)}}{1-z^{2(s+1)}} + \cdots + \frac{z^{2s'}}{1-z^{2s'}}\right),$$
$$s = \min(k, d-k),$$
$$s' = \max(k, d-k).$$

Теорема 1.2.8.([20]) *Ряди Пуанкаре алгебр спільних інваріантів і коваріантів n лінійних форм обчислюються за такими формулами:*

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(n)}, z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(n)_{n-k}}{(k-1)!(n-k)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\left(\frac{z}{1-z^2}\right)^{2n-k-1}\right);$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n)}, z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(n)_{n-k}}{(k-1)!(n-k)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\frac{(1+z)z^{2n-k-1}}{(1-z^2)^{2n-k}}\right).$$

Теорема 1.2.9.([20]) *Ряди Пуанкаре алгебр спільних інваріантів і коваріантів n квадратичних форм можна обчислити за формулами:*

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_2^{(n)}, z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \frac{(n)_j (n)_{n-k-j} z^{2n-k-j-1}}{(1-z)^{n+j}(1-z^2)^{2n-k-j}}\right);$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_2^{(n)}, z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \frac{(n)_j (n)_{n-k-j} z^{2n-k-j-1}}{(1-z)^{n+j-1}(1-z^2)^{2n-k-j}}\right).$$

1.3. Функції, що використовуються у формулах для обчислення рядів Пуанкаре алгебр SL_2- інваріантів

Формули рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних та n квадратичних форм обчислено в теоремі 1.2.8 та в теоремі 1.2.9. У [28] висловлено гіпотезу про те, що дві з цих формул можна звести до такого явного вигляду:

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(n)}, z) = \frac{N_{n-2}(z^2)}{(1-z^2)^{2n-3}};$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_2^{(n)}, z) = \frac{W_{n-1}(z^2)}{(1-z)^{3n-1}(1+z)^{2n-1}},$$

де

$$N_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \binom{n-1}{k-1} \binom{n}{k-1} z^{k-1}$$

– многочлен Нараяна і

$$W_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 z^k.$$

– многочлен Нараяна типу B.

Інформація про многочлени Нараяна дає можливість отримати цікаві співвідношення для рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних та n квадратичних форм. Тому розглянемо їх дещо детальніше.

Числа Нараяна

$$N_{n,k} = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}, (1 \leq k \leq n)$$

зустрічаються [102, 76] у багатьох комбінаторних структурах.

Многочлен

$$N_n(z) = \sum_{k=1}^{n} N_{n,k} z^{k-1}$$

називається [78] многочленом Нараяна (у деяких джерелах [83] його називають асоційованим многочленом Нараяна).

Породжуюча функція

$$G(z,t) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} N_n(z) t^j = \frac{1-(1-z)t - \sqrt{(1-z)^2 t^2 - 2(1+z)t + 1}}{2zt}$$

задовольняє [126] функціональне рівняння

$$ztG(z,t)^2 + (t + zt - 1)G(z,t) + t = 0.$$

У [78] знайдено таке рекурентне співвідношення для многочленів Нараяна

$$N_n(z) = (1-z)N_{n-1}(z) + z \sum_{j=0}^{n-1} N_j(z) N_{n-1-j}(z).$$

Аналогічні рекурентні співвідношення для многочленів Нараяна обох типів доведено в роботі [15]. У роботі [109] комбінаторними методами доведено зручніше рекурентне співвідношення

$$(n+1)N_n(z) = (2n-1)(1+z)N_{n-1}(z) - (n-2)(1-z)^2 N_{n-2}.$$

У [83] многочлени Нараяна виражено через зсунуті многочлени Лежандра: $N_n(z) = (z-1)^{n+1} \int\limits_0^{\frac{z}{z-1}} L_n(2x-1)dx$.

Розглянемо детальніше властивості функції φ_n, що використовується у теоремах 1.2.2, 1.2.4, 1.2.5, 1.2.6, 1.2.7. Опишемо спосіб [4], як можна ввести цю функцію.

Розглянемо $\mathbb{C}$-алгебру формальних степеневих рядів $\mathbb{C}[[z]]$ від z. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ визначимо $\mathbb{C}$-лінійну функцію $\varphi_n : [[z]] \to [[z]]$ наступним чином

$$\varphi_n\big(z^m\big) = \begin{cases} z^{\frac{m}{n}}, \text{ якщо } m = 0 \pmod n, \\ 0, \text{ якщо } m \neq 0 \pmod n, \\ 1, \text{ якщо } m = 0. \end{cases}$$

Зрозуміло, що для довільного ряду

$$A = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

отримаємо

$$\varphi_n(A) = a_0 + a_n z + a_{2\,n} z^2 + \cdots + a_{s\,n} z^s + \cdots .$$

У [4] Л. Бедратюком показано, що введена таким чином функція, є функцією

$$\varphi_n(f(z)) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(e^{\frac{2\pi i j}{n}} z),$$

означеною в попередньому підрозділі

Цим же автором доведена така властивість функції φ_n.

Лема 1.3.1.([23]) *Нехай $R(z)$ деякий многочлен від z. Тоді*

$$\varphi_n\left(\frac{R(z)}{(1-z^{k_1})(1-z^{k_2})\cdots(1-z^{k_m})}\right) = \frac{\varphi_n\big(R(z)Q_n(z^{k_1})Q_n(z^{k_2})Q_n(z^{k_m})\big)}{(1-z^{k_1})(1-z^{k_2})\cdots(1-z^{k_m})},$$

тут $Q_n(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}$, *а* k_i *– натуральні числа.*

У наступній лемі встановлено властивість полюсів функції φ_n.

Лема 1.3.2.(Спрінгер [103, лема 4]) *Нехай* $f \in \mathbb{C}(z)$. *Тоді полюси функції* $\varphi_n(f)$ *мають вигляд* α^n, *де* $\alpha \neq 0$ *— полюс функції* f. *Якщо функція* f *має лише один полюс* α *максимального порядку* h, *то максимальний з порядків полюсів функції* $\varphi_n(f)$ *також дорівнює* h *і* $\varphi_n(f)$ *має лише однин полюс максимального порядку, а саме* α^n.

1.4. Многочлени Гільберта алгебр SL_2-інваріантів

Як було зазначено вище, алгебра інваріантів $\mathcal{I}_{\mathbf{d}} = \mathbb{K}[V_{\mathbf{d}}]^{SL_2}$ є скінченно породженою і градуйованою

$$\mathcal{I}_{\mathbf{d}} = (\mathcal{I}_{\mathbf{d}})_0 \oplus (\mathcal{I}_{\mathbf{d}})_1 \oplus \ldots \oplus (\mathcal{I}_{\mathbf{d}})_m \oplus \ldots,$$

де $(\mathcal{I}_{\mathbf{d}})_m$ – векторний $\mathbb{K}-$простір інваріантів степеня m. Розмірність векторного простору $(\mathcal{I}_{\mathbf{d}})_m$ [1, с. 19] називається *функцією Гільберта* алгебри $\mathcal{I}_{\mathbf{d}}$. Вона визначається, як функція від змінної m

$$\mathcal{H}(\mathcal{I}_{\mathbf{d}}, m) = \dim(\mathcal{I}_{\mathbf{d}})_m.$$

Відомо [48, с. 7] (див. також [98, 105]), що функція Гільберта довільної скінченно породженої градуйованої $\mathbb{K}$-алгебри є квазімногочленом починаючи з деякого m. Оскільки алгебра інваріантів $\mathcal{I}_{\mathbf{d}}$ скінченно породжена, то її функції Гільберта можна подати у такому вигляді

$$\mathcal{H}(\mathcal{I}_{\mathbf{d}}, m) = h_0(m)m^r + h_1(m)m^{r-1} + \ldots,$$

де $h_k(m)$ – деяка періодична функція із значеннями в $\mathbb{Q}$. Квазімногочлен $\mathcal{H}(\mathcal{I}_{\mathbf{d}}, m)$ називається *многочленом Гільберта* [32] алгебри інваріантів $\mathcal{I}_{\mathbf{d}}$.

Приклад 1.4.1.([27]) *Многочлени Гільберта алгебри інваріантів бінарної форми порядку* 4 *мають вигляд*

$$\mathcal{H}(\mathcal{I}_4, m) = \frac{1}{6}\, m + \frac{1}{4} \cos(\pi m) + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{2}{3}\, \pi m\right) - \frac{\sqrt{3}}{9} \sin\left(\frac{2}{3} \pi m\right) + \frac{5}{12}.$$

У випадку однієї бінарної форми $n = 1$ (тобто для алгебри інваріантів бінарної d-форми) існує класична формула Келі-Сільвестра [114] для обчислення значення многочленів Гільберта алгебри $\mathcal{I}_d$

$$\mathcal{H}(\mathcal{I}_d, m) = \omega_d(m, 0) - \omega_d(m, 2),$$

де $\omega_d(m, k)$ – кількість невід'ємних цілих розв'язків системи

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + d\alpha_d = \dfrac{dm - k}{2}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_d = m. \end{cases}$$

Крім цього, у праці [104, п. 3.3.7] наведена інша формула для обчислення многочленів Гільберта алгебри $\mathcal{I}_d$

$$\mathcal{H}(\mathcal{I}_d, m) = \left[q^{\frac{md}{2}}\right] \left(\frac{\left(1 - q^{d+1}\right)\left(1 - q^{d+2}\right) \ldots \left(1 - q^{d+m}\right)}{\left(1 - q^2\right)\left(1 - q^3\right) \ldots \left(1 - q^m\right)} \right),$$

де $\left[q^{\frac{md}{2}}\right]$ позначає коефіцієнт при $q^{\frac{md}{2}}$.

Для алгебр SL_n-інваріантів обидві формули для обчислення функцій Гільберта узагальнені в [19], [20], [25],[21], [3]. Зокрема, в [20] наведено формули обох типів для алгебр $\mathcal{I}_{\mathbf{d}}$ спільних інваріантів та алгебр $\mathcal{C}_{\mathbf{d}}$ спільних коваріантів n бінарних форм ($\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$):

$$\mathcal{H}(\mathcal{I}_{\mathbf{d}}, m) = [t^m] \left(\left(1 - z^2\right) f(t, z) \right),$$
$$\mathcal{H}(\mathcal{C}_{\mathbf{d}}, m) = [t^m] \left((1 + z) f(t, z) \right),$$

де

$$f(t, z) = \frac{1}{(1 - tz^{d_1})(1 - tz^{d_1 - 2}) \cdots (1 - tz^{-d_1}) \cdots (1 - tz^{d_n})(1 - tz^{d_n - 2}) \cdots (1 - tz^{-d_s})}.$$

Аналог формули Келі-Сільвестра для алгебр спільних інваріантів та алгебр спільних коваріантів n бінарних форм в цій же роботі має вигляд:

$$\mathcal{H}(\mathcal{I}_{\mathbf{d}}, m) = \omega_{\mathbf{d}}(m, 0) - \omega_{\mathbf{d}}(m, 2),$$

$$\mathcal{H}(\mathcal{C}_{\mathbf{d}}, m) = \omega_{\mathbf{d}}(m, 0) - \omega_{\mathbf{d}}(m, 1),$$

де $\omega_d(m,k)$ – кількість невід'ємних цілих розв'язків системи

$$\begin{cases} d_1\alpha^{(1)}+\ldots+d_n\alpha^{(n)}-2\left(\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}+\ldots+d_1\alpha_{d_1}^{(1)}\right)-\ldots- \\ -2\left(\alpha_1^{(n)}+2\alpha_2^{(n)}+\ldots+d_n\alpha_{d_n}^{(n)}\right)=k, \\ \alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}+\ldots+\alpha^{(n)}=m. \end{cases}$$

Проте, всі ці формули комбінаторні і не виражають явно многочлен Гільберта через параметр m. Крім того, провести обчислення за такими формулами досить складно навіть для невеликих значень d_k, n та m. Хоча в [27] запропоновано процедури для обчислення многочленів Гільберта алгебри $\mathcal{I}_{\mathbf{d}}$ для невеликих значень d_k та n.

Часткову характеристику многочленів Гільберта алгебр з нестандартним градуюванням було отримано в [39].

РОЗДІЛ 2
АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РЯДУ ПУАНКАРЕ АЛГЕБРИ КОВАРІАНТІВ БІНАРНОЇ $d-$ФОРМИ

У цьому розділі обчислено степінь $\deg(\mathcal{C}_d)$ та число $\psi(\mathcal{C}_d)$ алгебри коваріантів бінарної d-форми. Також тут знайдено їх інтегральне зображення та асимптотичну поведінку.

2.1. Степінь алгебри коваріантів бінарної $d-$форми

Формули для обчислення рядів Пуанкаре алгебр інваріантів і коваріантів бінарної d-форми, подані в теоремах 1.2.2 та 1.2.4 відрізняються лише множником $1-z$ в аргументі функції φ. Тому для отримання формули степеня алгебри коваріантів бінарної $d-$форми використаємо метод, за допомогою якого Спрінгер, використовуючи формулу ряду Пуанкаре алгебри $\mathcal{I}_d$ отриману в теоремі 1.2.2, знайшов степінь алгебри $\mathcal{I}_d$ в [103].

Для знаходження раціональних коефіцієнтів $\deg(\mathcal{C}_d), \psi(\mathcal{C}_d)$ доведемо ряд допоміжних фактів. Зауважимо, що леми цього підрозділу наведені Спрінгером у [103] без доведення. Доведемо ці леми.

Лема 2.1.1. ([103, лема 6]) *Справедливі такі твердження:*

1) *Початок ряду Тейлора, для функції $(z^2,z^2)_j$ в точці $z=1$ дорівнює*
$$(z^2,z^2)_j = 2^j j!(1-z)^j - 2^{j-1} j!\, j^2 (1-z)^{j+1} + \cdots ;$$

2) *Початок ряду Лорана для функції*
$$\frac{(-1)^j z^{j(j+1)}(1+z)}{(z^2,z^2)_j\,(z^2,z^2)_{d-j}}$$
в точці $z=1$ дорівнює
$$\frac{(-1)^j}{2^{d-1} j!(d-j)!}\frac{1}{(1-z)^d} + \frac{(-1)^j}{2^{d-1} j!(d-j)!}(d+1)\left(\frac{1}{2}d - j - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{(1-z)^{d-1}} + \cdots .$$

Доведення. 1) Маємо

$$(z^2,z^2)_j=(1-z^2)(1-z^4)\dots(1-z^{2j}).$$

Розкладемо спочатку многочлен $1-z^n$ в ряд Тейлора за степенями $1-z$. Отримуємо

$$1-z^n=-n(z-1)-\frac{n(n-1)}{2!}(z-1)^2+\dots=n(1-z)-\frac{n(n-1)}{2!}(1-z)^2+O((1-z)^3).$$

Тому

$$(z^2,z^2)_j=(1-z^2)(1-z^4)\dots(1-z^{2j})=$$
$$=(2(1-z)-\frac{2}{2!}(1-z)^2+\cdots)(4(1-z)-\frac{4\cdot 3}{2!}(1-z)^2+\cdots)\dots(2j(1-z)-$$
$$-\frac{2j(2j-1)}{2!}(1-z)^2+\cdots)=$$
$$=(2\cdot 4\cdots 2j(1-z)^j+(1+3+5\cdots+2j-1)2^{j-1}j!(1-z)^{j+1}+\cdots)=$$
$$=2^j j!(1-z)^j-2^{j-1}j!\,j^2(1-z)^{j+1}+\cdots.$$

Звідси одразу випливає, що

$$(z^2,z^2)_j(z^2,z^2)_{d-j}=(2^j j!(1-z)^j-2^{j-1}j!\,j^2(1-z)^{j+1}+\cdots)\times$$
$$\times(2^{d-j}(d-j)!(1-z)^{d-j}-2^{d-j-1}(d-j)!\,(d-j)^2(1-z)^{d-j+1}+\cdots)=$$
$$=2^d j!(d-j)!(1-z)^d-2^{d-1}j!(d-j)!((d-j)^2+j^2)(1-z)^{d+1}+\cdots.$$

2) Знайдемо перші члени розкладу в ряд Лорана в точці $z=1$ виразу

$$\frac{(-1)^j z^{j(j+1)}(1+z)}{(z^2,z^2)_j\,(z^2,z^2)_{d-j}}.$$

Спочатку розкладемо чисельник в ряд Тейлора за степенями $(1-z)$. Маємо

$$1+z=2-(1-z),$$
$$z^{j(j+1)}=1-j(j+1)(1-z)+\cdots,$$
$$(1+z)z^{j(j+1)}=2-(2j(j+1)+1)(1-z)+\cdots.$$

Використаємо просте співвідношення, яке справедливе для формальних рядів

$$\frac{a_0 + a_1 x + \cdots}{b_0 + b_1 x + \cdots} = \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2} x + \cdots\,, \text{ при } b_0 \neq 0.$$

Тоді після нескладних обчислень, знаходимо

$$\frac{(-1)^j z^{j(j+1)}(1+z)}{(z^2, z^2)_j\,(z^2, z^2)_{d-j}} =$$

$$= \frac{2 - (2j(j+1)+1)(1-z) + \cdots}{2^d j!(d-j)!(1-z)^d - 2^{d-1} j!(d-j)!((d-j)^2 + j^2)(1-z)^{d+1} + \cdots} =$$

$$= \frac{1}{(1-z)^d} \frac{2 - (2j(j+1)+1)(1-z) + \cdots}{2^d j!(d-j)! - 2^{d-1} j!(d-j)!((d-j)^2 + j^2)(1-z) + \cdots} =$$

$$= \frac{1}{(1-z)^d} \left(\frac{1}{2^{d-1} j!(d-j)!} + \frac{(-1)^j}{2^{d-1} j!(d-j)!} (d+1) \left(\frac{1}{2} d - j - \frac{1}{2} \right) (1-z) + \cdots \right).$$

Звідси одразу отримується твердження леми. $\diamondsuit$

Доведемо ще одну властивість функції φ_n. Необхідність у доведенні наступної леми зумовлена тим, що ця лема, як і лема 2.1.1, наведена в [103] без доведення.

Лема 2.1.2.([103, лема 3]) *Справедлива така рівність*

$$\varphi_n \left(\frac{1}{(1-z)^h} \right) = \sum_{k=0}^{h} \frac{\alpha_{n\,k}}{(1-z)^k},$$

де $h \in \mathbb{N}$;

$$\alpha_{nh} = n^{h-1};$$

$$\alpha_{n,h-1} = -n^{n-2}(n-1)\frac{h}{2}.$$

Доведення. Скориставшись попередньою лемою, матимемо

$$\varphi_n \left(\frac{1}{(1-z)^h} \right) = \frac{\varphi_n \left((1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1})^h \right)}{(1-z)^h}.$$

Очевидно, що коефіцієнт α_{nh} є остачею від ділення $\varphi_n \left((1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1})^h \right)$ на $(1 - z)$. Обчислимо вираз $\varphi_n \left((1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1})^h \right)$, скориставшись означенням функції φ_n

$$\varphi_n \left((1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1})^h \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 + \zeta_n^j z + (\zeta_n^j)^2 z^2 + \cdots + (\zeta_n^j)^{n-1} z^{(n-1)} \right)^h \Big|_{z^n = z},$$

де $\zeta_n^j = e^{\frac{2\pi ij}{n}}$ – корінь з 1. Остача від ділення цього многочлена на $(1-z)$ рівна його значенню при $z=1$. Врахувавши той факт, що сума всіх коренів з 1 дорівнює нулю, отримаємо

$$\varphi_n\left((1+z+z^2+\dots+z^{n-1})^h\right)\Big|_{z=1}=$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(1+\zeta_n^j+(\zeta_n^j)^2+\dots+(\zeta_n^j)^{n-1}\right)^h=n^{h-1}.$$

Коефіцієнт $\alpha_{n,h-1}$ дорівнює коефіцієнту при $(1-z)$ розкладу в ряд Тейлора функції $\varphi_n\left((1+z+z^2+\dots+z^{n-1})^h\right)$ в точці $z=1$. Тобто

$$\alpha_{n,h-1}=-\lim_{z\to 1}(\varphi_n\left((1+z+z^2+\dots+z^{n-1})^h\right))'.$$

Маємо

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(1+\zeta_n^j z+(\zeta_n^j)^2z^2+\dots+(\zeta_n^j)^{n-1}z^{(n-1)}\right)^h\right)'=$$

$$=\frac{h}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(1+\zeta_n^j z+(\zeta_n^j)^2z^2+\dots+(\zeta_n^j)^{n-1}z^{(n-1)})^{h-1}\times$$
$$\times(\zeta_n^j+2(\zeta_n^j)^2z+\dots+(n-1)(\zeta_n^j)^{n-1}z^{(n-2)}).$$

Звідси

$$\lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(1+\zeta_n^j z+(\zeta_n^j)^2z^2+\dots+(\zeta_n^j)^{n-1}z^{(n-1)}\right)^h\right)'=$$
$$=\frac{h}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(1+\zeta_n^j+(\zeta_n^j)^2+\dots+(\zeta_n^j)^{n-1})^{h-1}\times$$
$$\times(\zeta_n^j+2(\zeta_n^j)^2+\dots+(n-1)(\zeta_n^j)^{n-1})=$$
$$=\frac{h}{n}n^{h-1}(1+2+\ldots+(n-1))=\frac{1}{2}h(n-1)n^{h-1}.$$

Врахувавши очевидне співвідношення

$$\lim_{z\to 1}\left(f(z^n)|_{z^n=z}\right)'=\frac{1}{n}\lim_{z\to 1}f'(z^n),$$

матимемо

$$\alpha_{n,h-1} = -\lim_{z\to 1}(\varphi_n\left((1+z+z^2+\cdots+z^{n-1})^h\right))' =$$
$$= -\frac{1}{n}\lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(1+\zeta_n^j z+(\zeta_n^j)^2z^2+\cdots+(\zeta_n^j)^{n-1}z^{(n-1)}\right)^h\right)' =$$
$$= -\frac{1}{2}h(n-1)n^{h-2}.$$

$\diamondsuit$

Обчислимо коефіцієнти $\deg(\mathcal{C}_d), \psi(\mathcal{C}_d)$.

Теорема 2.1.1. *Справедливі такі формули:*

$$\deg(\mathcal{C}_d) = \lim_{z\to 1}(1-z)^d\mathcal{P}(\mathcal{C}_d,z) = \frac{1}{d!}\sum_{0\le j<d/2}(-1)^j\binom{d}{j}\left(\frac{d}{2}-j\right)^{d-1};$$

$$\psi(\mathcal{C}_d) = \lim_{z\to 1}\left(-(1-z)^d\mathcal{P}(\mathcal{C}_d,z)\right)'_z = \frac{1}{2\,d!}\sum_{0\le j<d/2}(-1)^j\binom{d}{j}\left(\frac{d}{2}-j\right)^{d-1}.$$

Доведення. Згідно означення поданого в підрозділі 1.2, числа $\deg(\mathcal{C}_d), \psi(\mathcal{C}_d)$ є коефіцієнтами перших двох доданків розкладу ряду Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{C}_d,z)$ в ряд Лорана в точці $z=1$. Для обчислення цих коефіцієнтів скористаємось формулою для ряду Пуанкаре алгебри коваріантів бінарної форми порядку d отриманою теоремі 1.2.4.

Застосувавши леми 2.1.1 і 2.1.2, отримуємо

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_d,z) = \sum_{0\le j<d/2}\varphi_{d-2j}\left(\frac{(-1)^j z^{j(j+1)}(1+z)}{(z^2,z^2)_j\,(z^2,z^2)_{d-j}}\right) =$$
$$= \sum_{0\le j<d/2}\varphi_{d-2j}\left(\frac{(-1)^j}{2^{d-1}j!(d-j)!}\frac{1}{(1-z)^d}+\cdots\right) =$$
$$= \sum_{0\le j<d/2}\frac{(-1)^j}{2^{d-1}j!(d-j)!}\varphi_{d-2j}\left(\frac{1}{(1-z)^d}\right)+$$
$$+\sum_{0\le j<d/2}\frac{(-1)^j}{2^{d-1}j!(d-j)!}(d+1)\left(\frac{1}{2}d-j-\frac{1}{2}\right)\varphi_{d-2j}\left(\frac{1}{(1-z)^{d-1}}\right)+\cdots=$$

$$= \frac{1}{(1-z)^d} \sum_{0 \le j < d/2} \frac{(-1)^j (d-2j)^{d-1}}{2^{d-1} j! (d-j)!} -$$

$$- \frac{1}{(1-z)^{d-1}} \frac{1}{2} \sum_{0 \le j < d/2} \frac{(-1)^j}{2^{d-1} j! (d-j)!} (d-2j)^{d-2} (d-2j-1)(d-1) +$$

$$+ \frac{1}{(1-z)^{d-1}} \frac{1}{2} \sum_{0 \le j < d/2} \frac{(-1)^j}{2^{d-1} j! (d-j)!} (d+1)(d-2j-1)(d-2j)^{d-2} + \cdots .$$

Отже, коефіцієнт біля $\dfrac{1}{(1-z)^d}$ дорівнює

$$\deg(\mathcal{C}_d) = \sum_{0 \le j < d/2} \frac{(-1)^j (d-2j)^{d-1}}{2^{d-1} j! (d-j)!} = \frac{1}{d!} \sum_{0 \le j < d/2} (-1)^j \binom{d}{j} \left(\frac{d}{2} - j \right)^{d-1}.$$

Після спрощення знаходимо коефіцієнт біля $\dfrac{1}{(1-z)^{d-1}}$

$$\psi(\mathcal{C}_d) = \frac{1}{2d!} \sum_{0 \le j < d/2} (-1)^j \binom{d}{j} \left(\frac{d}{2} - j \right)^{d-1}.$$

$\diamondsuit$

Алгебра інваріантів $\mathcal{C}_d$ є горенштейнівською. Це рівносильне тому, див. [103], що ряд Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{C}_d, z)$ задовольняє такому функціональному рівнянню

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_d, z^{-1}) = (-1)^d z^q \mathcal{P}(\mathcal{C}_d, z),$$

де q — різниця степенів знаменника і чисельника раціональної функції $\mathcal{P}(\mathcal{C}_d, z)$. Із [96, теорема 2], випливає, що

$$\frac{2\deg(\mathcal{C}_d)}{\psi(\mathcal{C}_d)} = q - d.$$

Отже, враховуючи доведену теорему, отримуємо, що

$$q = d + 1 = \dim V_d.$$

2.2. Асимптотична поведінка степеня алгебри коваріантів бінарної $d-$форми

Перед тим, як розглядати питання про асимптотику $\deg(\mathcal{C}_d)$, встановимо формулу для його інтегрального представлення. Позначимо через

$$c_d := \deg(\mathcal{C}_d) \cdot d! = \sum_{0 \le j < d/2} (-1)^j \binom{d}{j} \left(\frac{d}{2} - j\right)^{d-1}.$$

Теорема 2.2.1. *Справедливі такі твердження:*

1) $c_d = 2\pi^{-1}(d-1)! \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^d x}{x^d} dx;$

2) $\deg(\mathcal{C}_d) > 0.$

Доведення. 1) Маємо

$$2c_d = \sum_{0 \le j < d/2} (-1)^j \binom{d}{j} \left(\frac{d}{2} - j\right)^{d-1} + \sum_{0 \le j < d/2} (-1)^j \binom{d}{j} \left(\frac{d}{2} - j\right)^{d-1} =$$

$$= \sum_{0 \le j < d/2} (-1)^j \binom{d}{j} \left(\frac{d}{2} - j\right)^{d-1} + \sum_{d/2 \le j < d} (-1)^j \binom{d}{j} \operatorname{sign}\left(\frac{d}{2} - j\right) \left(\frac{d}{2} - j\right)^{d-1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{d} (-1)^j \binom{d}{j} \operatorname{sign}\left(\frac{d}{2} - j\right) \left(\frac{d}{2} - j\right)^{d-1}.$$

Далі доведення аналогічне доведенню леми 3.4.7 в [104]. Скористаємося відомою формулою [13, с. 149] для інтегрального зображеня функції sign

$$\frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(a) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx.$$

Тоді

$$\pi c_d = \frac{\pi}{2} \sum_{j=0}^{d} (-1)^j \binom{d}{j} \operatorname{sign}\left(\frac{d}{2} - j\right) \left(\frac{d}{2} - j\right)^{d-1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{d} (-1)^j \binom{d}{j} \left(\frac{d}{2} - j\right)^{d-1} \int\limits_0^\infty \frac{\sin(\frac{d}{2} - j)x}{x} dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty \operatorname{Im} \left(\sum_{j=0}^{d} (-1)^j \binom{d}{j} \left(\frac{d}{2} - j\right)^{d-1} e^{i(\frac{d}{2} - j)x} \right) \frac{dx}{x}.$$

З іншого боку,

$$\sin^d \frac{x}{2} = \left(\frac{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}}{2i} \right)^d = \frac{1}{2^d i^d} \sum_{j=0}^{d} \binom{d}{j} \left(e^{\frac{ix}{2}}\right)^{d-j} \left(e^{-\frac{ix}{2}}\right)^j =$$

$$= \frac{1}{2^d i^d} \sum_{j=0}^{d} (-1)^j \binom{d}{j} e^{ix(\frac{d}{2} - j)}.$$

Диференціюючи $d-1$ раз по x, одержимо

$$\left(\sin^d \frac{x}{2}\right)^{(d-1)} = \frac{i^{d-1}}{2^d i^d} \sum_{0 \le j \le d} (-1)^j \binom{d}{j} \left(\frac{d}{2} - j\right)^{d-1} e^{ix(\frac{d}{2} - j)}.$$

Звідси знаходимо

$$\operatorname{Im} \left(\sum_{j=0}^{d} (-1)^j \binom{d}{j} \left(\frac{d}{2} - j\right)^{d-1} e^{i(\frac{d}{2} - j)x} \right) = 2^d \left(\sin^d \frac{x}{2}\right)^{(d-1)}.$$

Тому

$$c_d = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty 2^d \left(\sin^d \frac{x}{2}\right)^{(d-1)} \frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \left(\sin^d x\right)^{(d-1)} \frac{dx}{x}.$$

Проінтегрувавши частинами $d-1$ раз, отримаємо

$$c_d = \frac{2(d-1)!}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\sin^d x}{x^d} dx.$$

2) Доведемо спочатку збіжність інтеграла

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^d x}{x^d} dx$$

при парних p, що еквівалентно абсолютній збіжності при непарних p. Подамо його у вигляді суми

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^d x}{x^d}dx = \int\limits_0^1 \frac{\sin^d x}{x^d}dx + \int\limits_1^\infty \frac{\sin^d x}{x^d}dx.$$

Оскільки

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

то функція $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^p$, доозначена в точці $x = 0$, буде неперервна на промені $x \geq 0$, а, отже, інтегровна за Ріманом на відрізку $[0, 1]$. Крім того,

$$\left|\frac{\sin^d x}{x^d}\right| \leq \frac{1}{x^d}.$$

Інтеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^d}dx$$

збіжний при $d > 1$. Тому збіжним при $d \geq 2$ (а при непарних d ще й абсолютно збіжним) є інтеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin^d x}{x^d}dx,$$

отже, й інтеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^d x}{x^d}dx.$$

Для доведення леми досить показати, що

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^d x}{x^d}dx > 0.$$

Зауважимо, що при парних d підінтегральний вираз додатний, тому залишається довести нерівність при непарних d. У силу абсолютної збіжності інтеграла, можна подати цей інтеграл у вигляді

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^d x}{x^d}dx = \sum_{k=0}^\infty \left(\int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin^d x}{x^d}dx + \int\limits_{(2k+1)\pi}^{4k\pi} \frac{\sin^d x}{x^d}dx \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin^d x}{x^d} dx + \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin^d (x+\pi)}{(x+\pi)^d} dx \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \left(\frac{\sin^d x}{x^d} - \frac{\sin^d x}{(x+\pi)^d} \right) dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin^d x}{x^d (x+\pi)^d} \left((x+\pi)^d - x^d \right) dx > 0.$$

Що й потрібно було довести.

$\diamondsuit$

Умова $\deg(\mathcal{C}_d) > 0$ рівносильна тому, що степінь трансцендентності поля часток алгебри $\mathcal{C}_d$ над полем комплексних чисел дорівнює d.

Цікаво, що у загальному випадку має місце формула Волстенголма,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^p x}{x^s} = \frac{(-1)^{\frac{p-s}{2}}}{(s-1)!} \frac{\pi}{2^p} \sum_{p-2j>0} (-1)^j \binom{p}{j} (p-2j)^{s-1},$$

якщо $p - s$ парне, див. [47, Задача 1033].

В силу попередньої леми, питання про асимптотичну поведінку числа $\deg(\mathcal{C}_d)$ зводиться до питання про асимптотичну поведінку інтегралу

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^d x}{x^d} dx.$$

Теорема 2.2.2. *Справедлива така формула*

$$\lim_{d \to \infty} d^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\sin^d x}{x^d} dx = \frac{(6\pi)^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Доведення. Позначимо ліву частину рівності через I. Маємо

$$I = \lim_{d \to \infty} d^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\sin^d x}{x^d} dx = \lim_{d \to \infty} d^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^d x}{x^d} dx + \lim_{d \to \infty} d^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin^d x}{x^d} dx.$$

Оскільки

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\sin^d x}{x^d}dx\right| \le \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} x^{-d}dx = \lim_{b\to\infty}\frac{x^{-d+1}}{1-d}\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{b} = \frac{1}{(d-1)x^{d-1}}$$

і

$$\lim_{d\to\infty}\frac{d^{\frac{1}{2}}}{(d-1)x^{d-1}} = 0,$$

то

$$I = \lim_{d\to\infty} d^{\frac{1}{2}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^d x}{x^d}dx.$$

Зафіксуємо тепер достатньо мале $\varepsilon > 0$. Оскільки функція $\frac{sinx}{x}$ монотонно спадає при $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, то $\frac{sinx}{x} \le \frac{sin\varepsilon}{\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{3!} + \frac{\varepsilon^4}{5!} - \cdots$, якщо $\varepsilon \le x \le \frac{\pi}{2}$. Тоді існує така додатна константа a, для якої

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^d x}{x^d}dx = O\left(e^{-a\cdot d\varepsilon^2}\right).$$

При $0 \le x \le \varepsilon$ маємо

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^d = \left(1 - \frac{1}{6}x^2 + O\left(\varepsilon^4\right)\right)^d = e^{-\frac{1}{6}x^2 + O\left(\varepsilon^4\right)}.$$

Звідси

$$\int\limits_{0}^{\varepsilon}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^d dx = e^{O\left(d\varepsilon^4\right)}\int\limits_{0}^{\varepsilon}\left(-\frac{1}{6}dx^2\right)dx = e^{O\left(d\varepsilon^4\right)}\int\limits_{0}^{\varepsilon d^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{6}x^2}dx.$$

Нехай тепер $\varepsilon = \frac{\ln d}{\sqrt{d}}$. Тоді інтеграл зводиться до інтеграла Ейлера-Пуасона

$$I = \lim_{d\to\infty} d^{\frac{1}{2}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^d x}{x^d}dx = \sqrt{6}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{6\pi}}{2}.$$

$\diamondsuit$

Висновки до розділу 2

У цьому розділі досліджена асимптотична поведінка ряду Пуанкаре алгебри коваріантів бінарної $d-$форми. Знайдено коефіцієнти перших доданків розкладу в ряд Тейлора в околі точки $z = 1$ ряду Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{C}_d, z)$. Доведено, що ці коефіцієнти є додатними числами. З доведеного у цьому розділі випливає, що інтегральне зображення степеня алгебри таке

$$\deg(\mathcal{C}_d) = \frac{2}{\pi d} \int\limits_0^\infty \frac{\sin^d x}{x^d} dx.$$

Звідси випливає, що асимптотика степеня $\deg(\mathcal{C}_d)$ при $d \to \infty$ така

$$\deg(\mathcal{C}_d) = \frac{c_d}{d!} \sim \sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{1}{d^{\frac{3}{2}}},$$

де $\sim$ позначає асимптотичну еквівалентність.

Результати, наведені в цьому розділі, опубліковані в роботі [26].

РОЗДІЛ 3
СТЕПЕНІ АЛГЕБР СПІЛЬНИХ ІНВАРІАНТІВ ТА КОВАРІАНТІВ ДВОХ БІНАРНИХ ФОРМ

У цьому розділі знайдемо степені алгебр $\mathcal{I}_{d_1,\, d_2}$ та $\mathcal{C}_{d_1,\, d_2}$ для різних значень парності чисел d_1 та d_2. Всі обчислення проведемо у рамках підходу Спрінгера, як і в попередньому розділі.

3.1. Степені алгебр $\mathcal{C}_{d_1,d_2}$ і $\mathcal{I}_{d_1,d_2}$ у випадку різної парності d_1 і d_2

У межах цього пірозділу вважаємо, що числа d_1 і d_2 мають різну парність, та $d_1 < d_2$. Для обчислення степенів алгебр спільних інваріантів та алгебр спільних коваріантів двох бінарних форм використаємо ряд Пуанкаре цієї алгебри з теореми 1.2.5. У цьому підрозділі будемо використовувати позначеня:

$$\begin{aligned}
A_k(z) \; &= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1+1)} z^{(d_1-k)(d_1-k+1)+\frac{1}{4}(d_1+d_2-2k+1)^2}}{(z^2,z^2)_k (z^2,z^2)_{d_1-k} (z,z^2)_{\frac{d_2+d_1+1}{2}-k} (z,z^2)_{\frac{d_2-d_1+1}{2}+k}},\\
B_k(z) \; &= \begin{cases} \dfrac{(-1)^k z^{k(k+1)}}{(z^{d_2-d_1-2k},z^2)_{d_1+1}(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_2-k}} \text{ при } 2k < d_2-d_1,\\[2ex] \dfrac{(-1)^{\frac{d_2-d_1-1}{2}} z^{k(k+1)+1/4(d_2-d_1-1-2k)^2}}{(z,z^2)_{s+1}(z,z^2)_{d_1-s}(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_2-k}} \text{ при } s = \dfrac{2k-(d_2-d_1)-1}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Щоб обчислити раціональний коефіцієнт $\deg(\mathcal{C}_{d_1,d_2})$, доведемо таку лему.

Лема 3.1.1. *Справедливі такі твердження:*

1) *Початок розкладу функції* $(1+z)A_k(z)$ *в ряд Лорана в точці* $z=1$ *має вигляд*

$$\frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1+1}}\cdot\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1+1)}}{2^{d_1-1}k!(d_1-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!}-$$
$$-\frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1}}\cdot\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1+1)}\left((d_1-2k+1)(d_1+d_2+2)\right)}{2^{d_1}k!(d_1-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!}+\cdots;$$

2) *Початок розкладу функції* $(1+z)B_k(z)$ *в ряд Лорана в точці* $z=1$ *має вигляд*

$$\frac{1}{(1-z)^{d_1+d_2+1}}\cdot\frac{(-1)^k}{2^{d_2-1}k!(d_2-k)!\prod\limits_{j=0}^{d_1}(d_2-d_1-2k+2j)}+$$
$$+\frac{(-1)^k}{(1-z)^{d_2+d_1}}\cdot\frac{(d_1+d_2+2)(d_2-2k-1)}{2^{d_2}k!(d_2-k)!\prod\limits_{j=0}^{d_1}(d_2-d_1-2k+2j)}+\cdots.$$

Доведення. 1) Розкладемо функцію

$$(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_1-k}(z,z^2)_{\frac{d_2+d_1+1}{2}-k}(z,z^2)_{\frac{d_2-d_1+1}{2}+k}$$

в ряд Тейлора за степенями $(1-z)$.

Оскільки початок ряду Тейлора за степенями $(1-z)$ функції

$$(z,z^2)_k(z^2,z^2)_{d-k}$$

має вигляд

$$(z,z^2)_n=(1-z)(1-z^3)\cdots(1-z^{2n-1})=$$
$$=(1-z)(3(1-z)-3(1-z)^2+\cdots)\cdots\times$$
$$\times((2n-1)(1-z)-(n-1)(2n-1)(1-z)^2+\cdots)=$$
$$=(2n-1)!!(1-z)^n-(2n-1)!!\frac{n(n-1)}{2}(1-z)^{n+1}+\cdots,$$

то

$$(z,z^2)_{\frac{d_2+d_1+1}{2}-k}=(d_2+d_1-2k)!!(1-z)^{\frac{d_2+d_1+1}{2}-k}-$$
$$-(d_2+d_1-2k)!!\frac{1}{8}((d_2+d_1-2k)^2-1)(1-z)^{\frac{d_2+d_1+1}{2}-k+1}+\cdots,$$

$$(z,z^2)_{\frac{d_2-d_1+1}{2}+k}=(d_2{-}d_1{+}2k)!!(1-z)^{\frac{d_2-d_1+1}{2}+k}-$$
$$-(d_2{-}d_1{+}2k)!!\frac{1}{8}((d_2{-}d_1{+}2k)^2{-}1)(1-z)^{\frac{d_2-d_1+1}{2}+k+1}+\cdots.$$

У попередньому розділі доведено, що

$$(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d-k}=$$
$$=2^dk!(d-k)!(1-z)^d-2^{d-1}k!(d-k)!((d-k)^2+k^2)(1-z)^{d+1}+$$
$$+O((1-z)^{d+2}).$$

Отже, маємо перші доданки розкладу знаменника дробу

$$\frac{z^{(d_1-k)(d_1-k+1)+\frac{1}{4}(d_1+d_2-2k+1)^2}(1+z)}{(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_1-k}(z,z^2)_{\frac{d_2+d_1+1}{2}-k}(z,z^2)_{\frac{d_2-d_1+1}{2}+k}}$$

в ряд Тейлора за степенями $(1-z)$

$$(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_1-k}(z,z^2)_{\frac{d_2+d_1+1}{2}-k}(z,z^2)_{\frac{d_2-d_1+1}{2}+k}=$$
$$=2^{d_1}k!(d_1{-}k)!(d_2{+}d_1{-}2k)!!(d_2{-}d_1{+}2k)!!(1{-}z)^{d_2+d_1+1}-$$
$$-2^{d_1-1}(d_2{+}d_1{-}2k)!!(d_2{-}d_1{+}2k)!!k!(d_1-k)!\times$$
$$\times\left(\frac{1}{4}\left((d_2{-}d_1{+}2k)^2+(d_2{+}d_1{-}2k)^2{-}2\right)+(d_1-k)^2+k^2\right)(1{-}z)^{d_2+d_1+2}+\ldots.$$

Тепер розкладемо чисельник цього ж дробу в ряд Тейлора за степенями $(1-z)$. Маємо

$$(1+z)z^{(d_1-k)(d_1-k+1)+\frac{1}{4}(d_1+d_2-2k+1)^2}=$$
$$=2-(2(d_1-k)(d_1-k+1)+\frac{1}{2}(d_1+d_2-2k+1)^2+1)(1-z)+\cdots.$$

Перші два доданки ряду Тейлора для

$$\frac{a_0+a_1x+\cdots}{b_0+b_1x+\cdots},$$

при $b_0\neq 0$, мають вигляд

$$\frac{a_0}{b_0}+\frac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2}x+\cdots.$$

Тому

$$(1+z)\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1+1)}z^{(d_1-k)(d_1-k+1)+\frac{1}{4}(d_1+d_2-2k+1)^2}}{(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_1-k}(z,z^2)_{\frac{d_2+d_1+1}{2}-k}(z,z^2)_{\frac{d_2-d_1+1}{2}+k}}=$$

$$=\frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1+1}}\cdot\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1+1)}}{2^{d_1-1}k!(d_1-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!}+$$

$$+\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1+1)}}{(1-z)^{d_2+d_1}}\cdot\frac{2(d_1-k)(d_1-k+1)+\frac{1}{2}(d_1+d_2-2k+1)^2+1}{2^{d_1}k!(d_1-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!}-$$

$$-\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1+1)}}{(1-z)^{d_2+d_1}}\times$$

$$\times\frac{\frac{1}{4}((d_2-d_1+2k)^2+(d_1+d_2-2k)^2-2)+(d_1-k)^2+k^2}{2^{d_1}k!(d_1-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!}+\cdots.$$

Звідки отримуємо твердження 1 леми.

2) Розглянемо спочатку випадок $2k<d_2-d_1$. Помітимо, що початок розкладу функції

$$(z^{d_2-d_1-2k},z^2)_{d_1+1}$$

в ряд Тейлора за степенями $1-z$ має вигляд

$$\frac{(d_1+d_2-2k)!!}{(d_2-d_1-2k-2)!!}(1-z)^{d_1+1}-$$

$$-\frac{(d_1+d_2-2k)!!(d_1+1)(d_2-2k-1)}{2(d_2-d_1-2k-2)!!}(1-z)^{d_1+2}+\cdots.$$

Міркуючи аналогічно, як при доведенні пункту 1 леми, отримуємо початок розкладу функції

$$\frac{(-1)^k(1+z)z^{k(k+1)}}{(z^{d_2-d_1-2k},z^2)_{d_1+1}(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_2-k}},$$

в ряд Лорана за степенями $(1-z)$

$$\frac{(-1)^k(1+z)z^{k(k+1)}}{(z^{d_2-d_1-2k},z^2)_{d_1+1}(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_2-k}}=$$

$$= \frac{1}{(1-z)^{d_1+d_2+1}} \cdot \frac{(-1)^k(d_2-d_1-2k-2)!!}{2^{d_2-1}k!(d_2-k)!(d_1+d_2-2k)!!} -$$

$$-(-1)^k \frac{(2k^2+2k+1)\frac{2^{d_2}k!(d_2-k)!(d_1+d_2-2k)!!}{(d_2-d_1-2k-2)!!}}{\left(\frac{2^{d_2}k!(d_2-k)!(d_1+d_2-2k)!!}{(d_2-d_1-2k-2)!!}\right)^2(1-z)^{d_1+d_2}} +$$

$$+(-1)^k \frac{2\frac{2^{d_2-1}k!(d_2-k)!(d_1+d_2-2k)!!\left((d_2-k)^2+k^2+(d_1+1)(d_2-2k-1)\right)}{(d_2-d1-2k-2)!!}}{\left(\frac{2^{d_2}k!(d_2-k)!(d_1+d_2-2k)!!}{(d_2-d_1-2k-2)!!}\right)^2(1-z)^{d_1+d_2}} + \cdots .$$

Звідси випливає твердження пункту 2 леми для випадку $2k < d_2 - d_1$.

В іншому випадку

$$B_k = \frac{(-1)^{\frac{d_2-d_1-1}{2}}(1+z)z^{k(k+1)+1/4(d_2-d_1-1-2k)^2}}{(z,z^2)_{\frac{d_1-d_2+1}{2}+k}(z,z^2)_{\frac{d_1+d_2+1}{2}-k}(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_2-k}}.$$

З доведеного вище випливає, що початок розкладу в ряд Тейлора за степенями $(1-z)$ знаменника має такий вигляд

$$(z,z^2)_{\frac{d_1-d_2+1}{2}+k}(z,z^2)_{\frac{d_1+d_2+1}{2}-k}(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_2-k} =$$

$$= 2^{d_2}k!(d-k)!(d_1-d_2+2k)!!(d_1+d_2-2k)!!(1-z)^{d_1+d_2+1} -$$

$$-2^{d_2-1}k!(d-k)!(d_1-d_2+2k)!! \times$$

$$\times (d_1+d_2-2k)!! \left(\frac{1}{2}({d_1}^2+{d_2}^2-1)+(d_2-2k)^2\right)(1-z)^{d_1+d_2+2} + \cdots .$$

Початок розкладу чисельника в ряд Тейлора за степенями $(1-z)$ має такий вигляд

$$(1+z)z^{k(k+1)+1/4(d_2-d_1-1-2k)^2} =$$

$$= 2 - (2k(k+1) + \frac{1}{2}(d_2-d_1-2k-1)^2+1)(1-z) + \cdots .$$

Аналогічно як при доведенні пункту 1 леми, знаходимо

$$(1+z)\frac{(-1)^{\frac{d_2-d_1-1}{2}}z^{k(k+1)+1/4(d_2-d_1-1-2k)^2}}{(z,z^2)_{\frac{d_1-d_2+1}{2}+k}(z,z^2)_{\frac{d_1+d_2+1}{2}-k}(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_2-k}} =$$

$$= \frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1}} \cdot \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1-1)}}{2^{d_2-1}k!(d_2-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_1-d_2+2k)!!} +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1-1)}}{(1-z)^{d_2+d_1-1}} \times$$

$$\times \frac{-2k(k+1) - \frac{1}{2}(d_2-d_1-2k)^2 - 1 + \frac{{d_1}^2+{d_2}^2-1}{2} + (d_2-2k)^2}{2^{d_2}k!(d_2-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_1-d_2+2k)!!} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1+1}} \cdot \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1-1)}}{2^{d_2-1}k!(d_2-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_1-d_2+2k)!!} +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1)}}{(1-z)^{d_2+d_1-1}} \frac{(d_1+d_2+2)(d_2-2k-1)}{2^{d_2}k!(d_2-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_1-d_2+2k)!!} + O((1-z)^{d_2+d_1-2}).$$

Врахувавши, що при $2k \geq d_2 - d_1$ справедливою є рівність

$$\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1-1)}}{(d_2+d_1-2k)!!(d_1-d_2+2k)!!} = \frac{(-1)^k}{\prod\limits_{j=0}^{d_1}(d_2-d_1-2k+2j)},$$

отримаємо твердження 2 леми. $\diamondsuit$

Зауважимо, що згідно теореми 1.2.5 ряди Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{d_1,d_2}, z)$ і $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{d_1,d_2}, z)$ є сумою функцій φ_n, де $n \in \{2k - d_1,\ d_2 - 2m\}$, при $\frac{d_1}{2} \leq k \leq d_1, 0 \leq m \leq \frac{d_2}{2}$. У випадку різної парності чисел d_1 та d_2 числа з множини $\{2k - d_1,\ d_2 - 2m\}$– взаємно прості. Тому згідно леми 1.3.2 функції $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{d_1,d_2}, z)$ і $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{d_1,d_2}, z)$ у цьому випадку мають лише один полюс максимального порядку, а саме $z = 1$.

Позначимо

$$g(b,d,c,n) = \frac{1}{d!} \sum_{k=0}^{c/2} \frac{(-1)^k \binom{d}{k} (\frac{d}{2} - k)^n}{\prod\limits_{j=0}^{b} (\frac{d-b}{2} - k + j)}.$$

Зазначимо, що в таких позначеннях результат Спрінгера (див. [103, с. 42]) і Гільберта (див. [61, с. 341]), поданий в теоремі 1.2.3, має вигляд

$$\deg(\mathcal{I}_d) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4} g(0,d,d,d-3), \ d \text{ – непарне}, \\ \\ -\dfrac{1}{2} g(0,d,d,d-3), \ d \text{ – парне}. \end{cases}$$

Отримана в попередньому розділі формула степеня алгебри коваріантів бінарної $d-$форми матиме вигляд

$$\deg(\mathcal{C}_d) = g(0, d, d, d-1).$$

Обчислимо коефіцієнт $\deg(\mathcal{C}_{d_1,d_2})$.

Теорема 3.1.1. *Степінь алгебри спільних коваріантів двох бінарних форм* $\deg(\mathcal{C}_{d_1,d_2})$ *у випадку різної парності чисел* d_1 *і* d_2 *при* $d_1 < d_2$, *обчислюється за такою формулою*

$$\deg(\mathcal{C}_{d_1,d_2}) = g(d_1, d_2, d_2, d_1+d_2) + g(d_2, d_1, d_1, d_1+d_2).$$

Доведення. Згідно теореми 1.2.5 ряд Пуанкаре алгебри спільних коваріантів двох бінарних форм для випадку, коли числа d_1 і d_2 мають різну парність та $d_1 < d_2$ обчислюється за формулою

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_{d_1,d_2}, z) = \sum_{d_1/2 \le k \le d_1} \varphi_{2k-d_1}\left((1+z)A_k(z)\right) + \sum_{k=0}^{[d_2/2]} \varphi_{d_2-2k}\left((1+z)B_k(z)\right).$$

Застосовуючи леми 2.1.2 і 3.1.1, маємо

$$\sum_{d_1/2 \le k \le d_1} \varphi_{2k-d_1}\left((1+z)A_k(z)\right) =$$

$$= \sum_{k=\frac{d_1}{2}}^{d_1} \varphi_{2k-d_1}\Big(\frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1+1}} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1+1)}}{2^{d_1-1}k!(d_1-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!} + \cdots\Big) =$$

$$= \sum_{d_1/2 \le k \le d_1} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1+1)}}{2^{d_1-1}k!(d_1-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!} \times$$

$$\times \varphi_{2k-d_1}\left(\frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1+1}}\right) + \cdots =$$

$$= \frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1+1}} \sum_{d_1/2 \le k \le d_1} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1-1)}(2k-d_1)^{d_2+d_1}}{2^{d_1-1}k!(d_1-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!} + \cdots.$$

Застосовуючи ці ж леми до другої суми, отримаємо

$$\sum_{0\le k<[d_2/2]} \varphi_{d_2-2k}\left((1+z)B_k(z)\right) =$$

$$=\sum_{k=0}^{[d_2/2]} \varphi_{d_2-2k}\left(\frac{1}{(1-z)^{d_1+d_2+1}}\frac{(-1)^k}{2^{d_2-1}k!(d_2-k)!\prod\limits_{j=0}^{d_1}(d_2-d_1-2k+2j)}+\cdots\right)=$$

$$=\frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1+1}}\sum_{0\le k\le d_2/2}\frac{(-1)^k(d_2-2k)^{d_2+d_1}}{2^{d_2-1}k!(d_2-k)!\prod\limits_{j=0}^{d_1}(d_2-d_1-2k+2j)}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1+1}}\sum_{k=0}^{[d_2/2]}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1-1)}(d_2-2k)^{d_2+d_1}}{2^{d_2-1}k!(d_2-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!}+\cdots.$$

Скориставшись теоремою 1.2.5, після нескладних обчислень отримаємо твердження теореми. $\diamondsuit$

Міркуючи аналогічно, обчислимо степінь алгебри спільних інваріантів двох бінарних форм $\mathcal{I}_{d_1,d_2}$ у випадку різної парності чисел d_1 і d_2.

Теорема 3.1.2. *Степінь алгебри спільних інваріантів двох бінарних форм* $\deg(\mathcal{I}_{d_1,d_2})$ *при* $d_2-d_1=1 \pmod 2$ *і при* $d_1<d_2$ *обчислюється за такою формулою*

$$\deg(\mathcal{I}_{d_1,d_2})=-(g(d_1,d_2,d_1,d_1+d_2-2)+g(d_2,d_1,d_2,d_1+d_2-2)).$$

Доведення. Як зазначено в підрозділі 1.2, степінь трансцендентності поля часток алгебри спільних інваріантів двох бінарних форм дорівнює числу

$$\operatorname{tr}\deg_{\mathbb{C}}\mathcal{I}_{d_1,d_2}=d_1+d_2-1.$$

Згідно теореми 1.2.5 потрібно обчислити коефіцієнт біля $\frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1-1}}$ виразу

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{d_1,d_2},z)=\sum_{d_1/2\le k\le d_1}\varphi_{2k-d_1}\left((1-z)^2A_k(z)\right)+\sum_{k=0}^{[d_2/2]}\varphi_{d_2-2k}\left((1+z)^2B_k(z)\right).$$

Застосовуючи леми 2.1.2 і 3.1.1, маємо

$$\sum_{d_1/2\le k\le d_1} \varphi_{2k-d_1}\left((1-z^2)A_k(z)\right) =$$

$$= \frac{1}{(1{-}z)^{d_2+d_1}} \sum_{d_1/2\le k\le d_1} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1-1)}(2k{-}d_1)^{d_2+d_1-1}}{2^{d_1-1}k!(d_1{-}k)!(d_2{+}d_1{-}2k)!!(d_2{-}d_1{+}2k)!!}+$$

$$+\frac{1}{(1{-}z)^{d_2+d_1-1}} \sum_{d_1/2\le k\le d_1} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1-1)}(2k{-}d_1)^{d_2+d_1-2}(2k{-}d_1{-}1)}{2^{d_1-1}k!(d_1{-}k)!(d_2{+}d_1{-}2k)!!(d_2{-}d_1{+}2k)!!}\cdots.$$

Аналогічно отримуємо

$$\sum_{0\le k<[d_2/2]} \varphi_{d_2-2k}\left((1-z^2)B_k(z)\right) =$$

$$= \frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1}} \sum_{0\le k\le d_2/2} \frac{(-1)^k(d_2-2k)^{d_2+d_1-1}}{2^{d_2-1}k!(d_2{-}k)!\prod\limits_{j=0}^{d_1}(d_2{-}d_1{-}2k+2j)}+$$

$$+\frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1-1}} \sum_{0\le k\le d_2/2} \frac{(-1)^k(d_2-2k)^{d_2+d_1-2}(d_2-2k-1)}{2^{d_2-1}k!(d_2{-}k)!\prod\limits_{j=0}^{d_1}(d_2{-}d_1{-}2k+2j)}+\cdots.$$

Застосовуючи теорему 1.2.5, одержимо

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{d_1,d_2},z)=$$

$$= \frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1}}\left(\frac{1}{d_1!2^{d_1-1}} \sum_{d_1/2\le k\le d_1} \binom{d_1}{k}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1-1)}(2k-d_1)^{d_2+d_1-1}}{(d_2{+}d_1{-}2k)!!(d_2{-}d_1{+}2k)!!}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{d_2!2^{d_2-1}} \sum_{0\le k\le d_2/2} \binom{d_2}{k}\frac{(-1)^k(d_2-2k)^{d_2+d_1-1}}{\prod\limits_{j=0}^{d_1}(d_2{-}d_1{-}2k+2j)}\right)+$$

$$+\frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1-1}}\left(\frac{1}{d_1!2^{d_1-1}}\sum_{d_1/2\le k\le d_1}\binom{d_1}{k}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1-1)}(2k-d_1)^{d_2+d_1-1}}{(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!}+\right.$$

$$+\frac{1}{d_2!2^{d_2-1}}\sum_{0\le k\le d_2/2}\binom{d_2}{k}\frac{(-1)^k(d_2-2k)^{d_2+d_1-1}}{\prod\limits_{j=0}^{d_1}(d_2-d_1-2k+2j)}-$$

$$-\frac{1}{d_1!2^{d_1-1}}\sum_{d_1/2\le k\le d_1}\binom{d_1}{k}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1-1)}(2k-d_1)^{d_2+d_1-1}}{(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!}-$$

$$\left.-\frac{1}{d_2!2^{d_2-1}}\sum_{0\le k\le d_2/2}\binom{d_2}{k}\frac{(-1)^k(d_2-2k)^{d_2+d_1-2}}{\prod\limits_{j=0}^{d_1}(d_2-d_1-2k+2j)}\right).$$

Оскільки

$$\operatorname{tr}\deg_{\mathbb{C}}\mathcal{I}_{d_1,d_2}=d_1+d_2-1,$$

то

$$\frac{1}{d_1!2^{d_1-1}}\sum_{d_1/2\le k\le d_1}\binom{d_1}{k}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1-1)}(2k-d_1)^{d_2+d_1-1}}{(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!}+$$

$$+\frac{1}{d_2!2^{d_2-1}}\sum_{0\le k\le d_2/2}\binom{d_2}{k}\frac{(-1)^k(d_2-2k)^{d_2+d_1-1}}{\prod\limits_{j=0}^{d_1}(d_2-d_1-2k+2j)}=0.$$

Отже,

$$\deg(\mathcal{I}_{d_1,d_2})=-\frac{1}{2^{d_1-1}d_1!}\sum_{k=[\frac{d_1}{2}]+1}^{d_1}\binom{d_1}{k}\frac{(-1)^{\frac{d_2-d_1+1}{2}}(2k-d_1)^{d_2+d_1-2}}{(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!}-$$

$$-\frac{1}{2^{d_2-1}d_2!}\sum_{k=0}^{\frac{d_2}{2}}\binom{d_2}{k}\frac{(-1)^k(d_2-2k)^{d_2+d_1-2}}{\prod\limits_{j=0}^{d_1}(d_2-d_1-2k+2j)}.$$

Що доводить теорему. $\diamondsuit$

3.2. Степені алгебр $\mathcal{C}_{d_1,d_2}$ і $\mathcal{I}_{d_1,d_2}$ у випадку однакової парності d_1 і d_2

У межах цього підрозділу вважаємо, що числа d_1 і d_2 мають однакову парність та $d_1 < d_2$. Для обчислення степенів алгебр спільних коваріантів та інваріантів двох бінарних форм у випадку однакової парності чисел d_1 і d_2 знову скористаємось рядами Пуанкаре цих алгебр. Тому використаємо позначення теореми 1.2.6, в якій обчислено ці ряди Пуанкаре. Нехай

$$\bar{A}_k(z) := -\frac{1}{z^{d_2+d_1-2k}} \lim_{t \to z^{2k-(d_1+d_2)}} \left(f_{d_1,d_2}(tz^{d_2}, z)(1 - tz^{d_2+d_1-2k})^2 \right)'_t ;$$

$$\bar{B}_k(z) := \lim_{t \to z^{2k-(d_1+d_2)}} \left(f_{d_1,d_2}(tz^{d_2}, z)(1 - tz^{d_2+d_1-2k})^2 \right) ;$$

$$S_k(z) := \lim_{t \to z^{-2k}} \left(f_{d_1,d_2}(tz^{d_2}, z)(1 - tz^{2k}) \right) ;$$

де $f_{d_1,d_2}(tz^{d_2}, z) = \frac{1}{(tz^{d_2-d_1}, z^2)_{d_1+1}(t, z^2)_{d_2+1}}$.

Подамо коефіцієнти $\bar{A}_k(z), \bar{B}_k(z), S_k$ у явному вигляді. Почнемо з $\bar{A}_k(z)$ Оскільки

$$2d_2 \geq d_1 + d_2 \geq d_1 + d_2 - 2k \geq d_2 - d_1 \geq 0,$$

маємо

$$\left(f_{d_1,d_2}(tz^{d_2}, z)(1 - tz^{d_2+d_1-2k})^2 \right)'_t = \Bigg(\frac{z^{d_1+d_2}}{1 - tz^{d_1+d_2}} + \ldots + \frac{z^{d_1+d_2-2k+2}}{1 - tz^{d_1+d_2-2k+2}} +$$
$$+ \frac{z^{d_1+d_2-2k-2}}{1 - tz^{d_1+d_2-2k-2}} + \ldots + \frac{z^{d_2-d_1}}{1 - tz^{d_2-d_1}} + \frac{z^{2d_2}}{1 - tz^{2d_2}} + \ldots + \frac{z^{d_1+d_2-2k+2}}{1 - tz^{d_1+d_2-2k+2}} +$$
$$+ \frac{z^{d_1+d_2-2k-2}}{1 - tz^{d_1+d_2-2k-2}} + \ldots + \frac{1}{1-t} \Bigg) \times$$

$$\times \frac{1}{(1 - tz^{d_1+d_2}) \cdots (1 - tz^{d_1+d_2-2k+2})(1 - tz^{d_1+d_2-2k-2}) \cdots (1 - tz^{d_2-d_1})} \times$$

$$\times \frac{1}{(1 - tz^{2d_2}) \cdots (1 - tz^{d_1+d_2-2k+2})(1 - tz^{d_1+d_2-2k-2}) \cdots (1 - t)}.$$

Врахувавши далі очевидні тотожності

$$\frac{z^{-n}}{1-z^{-n}}+\frac{z^{n}}{1-z^{n}}=-1$$

і

$$(-1)^{\frac{3*d_1+d_2}{2}}=(-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}},$$

отримаємо

$$\bar{A}_k(z)=(-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}}z^{(1+d_1-k)(d_1-k)+(1+\frac{d_1+d_2}{2}-k)(\frac{d_1+d_2}{2}-k)}\times$$
$$\times\frac{2k-\frac{d_1-d_2}{2}-\sum\limits_{j=d_1-k+1}^{k}\left(\frac{1}{1-z^{2j}}+\frac{1}{1-z^{2j-d_1+d_2}}\right)}{(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_1-k}(z^2,z^2)_{k-\frac{d_1-d_2}{2}}(z^2,z^2)_{\frac{d_1+d_2}{2}-k}}.$$

Перейшовши у функції $\bar{B}_k(z)$ до границі, маємо

$$\bar{B}_k(z)=$$
$$=\lim_{t\to z^{2k-(d_1+d_2)}}\frac{1}{(1-tz^{d_2+d_1})\cdots(1-tz^{d_2+d_1-2(k-1)})}\times$$
$$\times\frac{1}{(1-tz^{d_2+d_1-2(k+1)})\cdots(1-tz^{d_2-d_1})}\times$$
$$\times\frac{1}{(1-t)\cdots(1-tz^{d_2+d_1-2(k-1)})(1-tz^{d_2+d_1-2(k+1)})\cdots(1-tz^{2d_2})}=$$

$$=\frac{1}{(1-z^{2k})\cdots(1-z^2)(1-z^{-2})\cdots(1-z^{-2(d_1-k)})}\times$$
$$\times\frac{1}{(1-z^{2k+d_2-d_1})\cdots(1-z^2)(1-z^{-2})\cdots(1-z^{-(d_1+d_2-2k)})}.$$

У випадку, коли

$$2k\le d_2-d_1-2,$$

у [19] встановлено такий явний вираз для $S_k(z)$

$$S_k(z)=\frac{(-1)^k z^{k(k+1)}}{(z^{d_2-d_1-2k},z^2)_{d_1+1}(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_2-k}}.$$

Зазначимо, що $d_2-2k<0$ при $\frac{d_1+d_2}{2}+2\le k\le d_2$.

Згідно теореми 1.2.6 ряд Пуанкаре алгебри спільних коваріантів двох бінарних форм $\mathcal{C}_{d_1,d_2}$ у випадку однакової парності чисел d_1 і d_2 має вигляд

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_{d_1,d_2},z)= \\ =\sum_{d_1/2\leq k\leq d_1}\varphi_{2k-d_1}\left((1{+}z)\bar{A}_k(z)\right)+\sum_{d_1/2\leq k\leq d_1}\left(z\,\varphi_{2k-d_1}\left((1{+}z)\bar{B}_k(z)\right)\right)'_z+$$

$$+\sum_{0\leq 2k\leq d_2-d_1-2}\varphi_{d_2-2k}\left((1+z)S_k(z)\right)+\sum_{d_1+d_2+2\leq 2k\leq 2d_2}\varphi_{d_2-2k}\left((1+z)S_k(z)\right),$$

а формула ряду Пуанкаре алгебри спільних інваріантів двох бінарних форм $\mathcal{I}_{d_1,d_2}$ для цього ж випадку така

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{d_1,d_2},z)= \\ =\sum_{d_1/2\leq k\leq d_1}\varphi_{2k-d_1}\left((1{-}z^2)\bar{A}_k(z)\right)+\sum_{d_1/2\leq k\leq d_1}\left(z\,\varphi_{2k-d_1}\left((1{-}z^2)\bar{B}_k(z)\right)\right)'_z+$$

$$+\sum_{0\leq 2k\leq d_2-d_1-2}\varphi_{d_2-2k}\left((1-z^2)S_k(z)\right)+\sum_{d_1+d_2+2\leq 2k\leq 2d_2}\varphi_{d_2-2k}\left((1-z)^2S_k(z)\right).$$

З цих міркувань отримаємо ще один вираз для рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів двох бінарних форм.

Теорема 3.2.1. *При $d_2-d_1=0 \pmod 2$ і $d_2>d_1$ ряди Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{d_1,d_2},z)$ і $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{d_1,d_2},z)$ обчислюються за такими формулами:*

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_{d_1,d_2},z)=\sum_{d_1/2\leq k\leq d_1}\varphi_{2k-d_1}\Big((1+z)\breve{A}_k(z)\Big)+ \\ +\textstyle\sum_{d_1/2\leq k\leq d_1}\displaystyle\Big(z\,\varphi_{2k-d_1}\Big((1+z)\breve{B}_k(z)\Big)\Big)'_z+\sum_{0\leq 2k\leq d_2-d_1-2}\varphi_{d_2-2k}\Big((1+z)\breve{S}_k(z)\Big);$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{d_1,d_2},z)=\sum_{d_1/2\leq k\leq d_1}\varphi_{2k-d_1}\Big((1-z^2)\breve{A}_k(z)\Big)+ \\ +\textstyle\sum_{d_1/2\leq k\leq d_1}\displaystyle\Big(z\,\varphi_{2k-d_1}\Big((1-z^2)\breve{B}_k(z)\Big)\Big)'_z+\sum_{0\leq 2k\leq d_2-d_1-2}\varphi_{d_2-2k}\Big((1-z^2)\breve{S}_k(z)\Big),$$

де

$$\breve{A}_k(z) = (-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}} z^{(1+d_1-k)(d_1-k)+(1+\frac{d_1+d_2}{2}-k)(\frac{d_1+d_2}{2}-k)}\times$$
$$\times\frac{2k-\frac{d_1-d_2}{2}-\sum\limits_{j=d_1-k+1}^{k}\left(\frac{1}{1-z^{2j}}+\frac{1}{1-z^{2j-d_1+d_2}}\right)}{(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_1-k}(z^2,z^2)_{k-\frac{d_1-d_2}{2}}(z^2,z^2)_{\frac{d_1+d_2}{2}-k}};$$
$$\breve{B}_k(z) = \frac{(-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}} z^{(1+d_1-k)(d_1-k)+(1+\frac{d_1+d_2}{2}-k)(\frac{d_1+d_2}{2}-k)}}{(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_1-k}(z^2,z^2)_{\frac{d_2}{2}+k-\frac{d_1}{2}}(z^2,z^2)_{\frac{d_2}{2}-(k-\frac{d_1}{2})}};$$
$$\breve{S}_k(z) = \frac{(-1)^k z^{k(k+1)}}{(z^{d_2-d_1-2k},z^2)_{d_1+1}(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_2-k}}.$$

Перед тим як обчислити степінь алгебри спільних коваріантів, доведемо декілька допоміжних тверджень.

Лема 3.2.1. *Справедливі такі твердження:*

1) *Початок ряду Лорана за степенями* $1-z$ *функції* $(1+z)\breve{B}_k(z)$ *має вигляд*

$$\frac{(-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}}}{(1-z)^{d_1+d_2}}\cdot\frac{1}{2^{d_1+d_2-1}k!(d_1-k)!\left(\frac{d_2-d_1}{2}+k\right)!\left(\frac{d_2+d_1}{2}-k\right)!}+$$

$$+\frac{(-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}}}{(1-z)^{d_1+d_2-1}}\cdot\frac{(d_1+d_2+2)(2k-d_1-1)+1}{2^{d_1+d_2}k!(d_1-k)!\left(\frac{d_2-d_1}{2}+k\right)!\left(\frac{d_2+d_1}{2}-k\right)!}+\ldots;$$

2) *Початок розкладу функції* $(1+z)\breve{A}_k(z)$ *в ряд Лорана за степенями* $1-z$ *має вигляд*

$$-\frac{\sum\limits_{j=d_1-k+1}^{k}\frac{1}{j}+\sum\limits_{j=\frac{d_1+d_2}{2}-k+1}^{k+\frac{d_2-d_1}{2}}\frac{1}{j}}{(-1)^{\frac{d_2-d_1}{2}}2^{d_1+d_2}k!(d_1-k)!\left(\frac{d_2-d_1}{2}+k\right)!\left(\frac{d_2+d_1}{2}-k\right)!(1-z)^{d_1+d_2+1}}+$$

$$+\frac{(-1)^{\frac{d_2-d_1}{2}}(d_1+d_2)}{(1-z)^{d_1+d_2}\cdot 2^{d_1+d_2-1}k!(d_1-k)!\left(\frac{d_2-d_1}{2}+k\right)!\left(\frac{d_2+d_1}{2}-k\right)!}-$$

$$-\frac{(-1)^{\frac{d_2-d_1}{2}}(d_1{+}d_2{+}2)(d_1{-}2k{+}1)\left(\sum\limits_{j=d_1-k+1}^{k}\frac{1}{j}+\sum\limits_{j=\frac{d_1+d_2}{2}-k+1}^{k+\frac{d_2-d_1}{2}}\frac{1}{j}\right)}{(1{-}z)^{d_1+d_2}\cdot 2^{d_1+d_2+1}k!(d_1{-}k)!\left(\frac{d_2-d_1}{2}{+}k\right)!\left(\frac{d_2+d_1}{2}{-}k\right)!}+\ldots.$$

Доведення. 1) Обчислюючи аналогічно, як у лемах 2.1.1 і 3.1.1, отримаємо початок розкладу знаменника функції

$$\frac{(z+1)z^{(1+d_1-k)(d_1-k)+(1+\frac{d_1+d_2}{2}-k)(\frac{d_1+d_2}{2}-k)}}{(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_1-k}(z^2,z^2)_{\frac{d_2}{2}+k-\frac{d_1}{2}}(z^2,z^2)_{\frac{d_2}{2}-(k-\frac{d_1}{2})}}$$

в ряд Тейлора за степенями $(1-z)$

$$(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_1-k}(z^2,z^2)_{\frac{d_2}{2}+k-\frac{d_1}{2}}(z^2,z^2)_{\frac{d_2}{2}-(k-\frac{d_1}{2})}=$$
$$=2^{d_1+d_2}k!(d_1-k)!\left(\frac{d_2-d_1}{2}+k\right)!\left(\frac{d_2+d_1}{2}-k\right)!(1-z)^{d_1+d_2}-$$
$$-2^{d_1+d_2-1}k!(d_1-k)!\left(\frac{d_2-d_1}{2}+k\right)!\left(\frac{d_2+d_1}{2}-k\right)!\times$$
$$\times\left((d_1-k)^2+k^2+(\frac{d_2-d_1}{2}+k)^2+(\frac{d_2+d_1}{2}-k)^2\right)(1-z)^{d_1+d_2+1}+\cdots.$$

Помітимо, що початок такого розкладу чисельника цієї ж функції має вигляд

$$(1+z)z^{(k-d_1)(k-d_1-1)+\frac{(d_1+d_2-2k)(d_1+d_2-2k+2)}{4}}=$$
$$=2-\left(2(k{-}d_1)(k{-}d_1{-}1)+\frac{(d_1{+}d_2{-}2k)(d_1{+}d_2{-}2k{+}2)}{2}+1\right)(1{-}z)+\cdots.$$

Отже, початок розкладу функції $(1+z)\breve{B}_k(z)$ в ряд Лорана за степенями $(1-z)$ має вигляд

$$\frac{(-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}}z^{(k-d_1)(k-d_1-1)+\frac{(d_1+d_2-2k)(d_1+d_2-2k+2)}{4}}(1+z)}{(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_1-k}(z^2,z^2)_{\frac{d_2}{2}+k-\frac{d_1}{2}}(z^2,z^2)_{\frac{d_2}{2}-(k-\frac{d_1}{2})}}=$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}}}{(1-z)^{d_1+d_2}} \cdot \frac{1}{2^{d_1+d_2-1}k!(d_1-k)!\left(\frac{d_2-d_1}{2}+k\right)!\left(\frac{d_2+d_1}{2}-k\right)!} +$$
$$+ \frac{(-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}}}{(1-z)^{d_1+d_2-1}} \left(\frac{(d_1-k)^2+k^2+(\frac{d_2-d_1}{2}+k)^2+(\frac{d_2+d_1}{2}-k)^2}{2^{d_1+d_2}k!(d_1-k)!\left(\frac{d_2-d_1}{2}+k\right)!\left(\frac{d_2+d_1}{2}-k\right)!} - \right.$$
$$\left. - \frac{2(k-d_1)(k-d_1-1)+\frac{(d_1+d_2-2k)(d_1+d_2-2k+2)}{2}+1}{2^{d_1+d_2}k!(d_1-k)!\left(\frac{d_2-d_1}{2}+k\right)!\left(\frac{d_2+d_1}{2}-k\right)!} \right) + \ldots .$$

Після спрощень отримуємо твердження пункту 1 леми.

2) Розкладемо функцію $1-z^{2j}$ в ряд Тейлора за степенями $(1-z)$. Маємо

$$1-z^{2j} = 2j(1-z) - j(2j-1)(1-z)^2 + O((1-z)^3).$$

Врахувавши доведене в попередньому пункті леми, отримаємо

$$(1-z^{2j})(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_1-k}(z^2,z^2)_{\frac{d_2}{2}+k-\frac{d_1}{2}}(z^2,z^2)_{\frac{d_2}{2}-(k-\frac{d_1}{2})} =$$
$$= 2^{d_1+d_2+1}jk!(d_1-k)!\left(\frac{d_2-d_1}{2}+k\right)!\left(\frac{d_2+d_1}{2}-k\right)!(1-z)^{d_1+d_2+1} -$$
$$-2^{d_1+d_2}jk!(d_1-k)!\left(\frac{d_2-d_1}{2}+k\right)!\left(\frac{d_2+d_1}{2}-k\right)! \times$$
$$\times \left(2j-1+(d_1-k)^2+k^2+(\frac{d_2+d_1}{2}-k)^2+(\frac{d_2-d_1}{2}+k)^2\right)(1-z)^{d_1+d_2+2} + \cdots .$$

Звідси після нескладних перетворень отримаємо твердження 2 леми. $\diamondsuit$

Для обчисленя степенів алгебр $\mathcal{C}_{d_1,d_2}$ і $\mathcal{I}_{d_1,d_2}$ у випадку однакової парності d_1 і d_2 скористаємось наступною лемою.

Лема 3.2.2. *Справедливе таке твердження*

$$z\varphi_n\left(\frac{1}{(1-z)^h}\right) = \sum_{k=0}^{h} \frac{\beta_{n\,k}}{(1-z)^k}, h \in \mathbb{N},$$

де $\beta_{nh} = n^{h-1}$, $\beta_{n,h-1} = -n^{h-2}\left((n-1)\frac{h}{2}+n\right)$.

Доведення. Помітимо, що $z = 1-(1-z)$ і скористаємось лемою 2.1.2.

Отримаємо

$$z\varphi_n\left(\frac{1}{(1-z)^h}\right)=\varphi_n\left(\frac{1}{(1-z)^h}\right)-(1-z)\varphi_n\left(\frac{1}{(1-z)^h}\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{h}\frac{\alpha_{n\,k}}{(1-z)^k}-\sum_{k=0}^{h}\frac{\alpha_{n\,k}}{(1-z)^{k-1}}.$$

Врахувавши значення коефіцієнтів

$$\alpha_{nh}=n^{h-1},$$
$$\alpha_{n,h-1}=-n^{h-2}(n-1)\frac{h}{2}$$

в лемі 2.1.2, матимемо

$$\beta_{nh}=\alpha_{nh}=n^{h-1},$$
$$\beta_{n,h-1}=\alpha_{n,h-1}-\alpha_{n,h}=-n^{h-2}(n-1)\frac{h}{2}-n^{h-1}=-n^{h-2}\left((n-1)\frac{h}{2}+n\right).$$

Що й вимагалось довести. $\diamondsuit$

Тепер обчислимо степінь алгебри спільних коваріантів двох бінарних форм $\deg(\mathcal{C}_{d_1,d_2})$, у випадку коли числа d_1 і d_2 мають різну парність і $d_1<d_2$.

Для цього введемо ще одну функцію

$$h(b,d,n):=$$
$$=\frac{(-1)^{\frac{d-b}{2}}}{b!d!}\sum_{k=0}^{b/2}(\frac{b}{2}-k)^n\binom{b}{k}\binom{d}{\frac{d+b}{2}-k}\left(H_k-H_{b-k}+H_{k+\frac{d-b}{2}}-H_{\frac{b+d}{2}-k}+\frac{n}{k-\frac{b}{2}}\right),$$

де $b,d,n\in\mathbb{N};\ b\le d;$

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

– n-не гармонічне число

Теорема 3.2.2. *Степінь алгебри спільних коваріантів двох бінарних форм* $\deg(\mathcal{C}_{d_1,d_2})$ *у випадку однакової парності чисел* d_1 *і* d_2, *при* $d_1<d_2$ *обчислюється за формулою*

$$\deg(\mathcal{C}_{d_1,d_2})=h(d_1,d_2,d_2+d_1)+g(d_2,d_1,d_2-d_1-2,d_2+d_1).$$

Доведення. Як зазначено в підрозділі 1.2

$$\operatorname{tr}\deg_{\mathbb{C}\ d_1,d_2} = d_1 + d_2 + 1.$$

Тому згідно теореми 3.2.1 та означення степеня алгебри, потрібно обчислити коефіцієнт біля $\frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1+1}}$ виразу

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_{d_1,d_2}, z) = \sum_{d_1/2 \le k \le d_1} \varphi_{2k-d_1}\left((1+z)\breve{A}_k(z)\right) +$$

$$+ \sum_{d_1/2 \le k \le d_1} \left(z\,\varphi_{2k-d_1}\left((1+z)\breve{B}_k(z)\right)\right)'_z + \sum_{0 \le 2k \le d_2-d_1-2} \varphi_{d_2-2k}\left((1+z)\breve{S}_k(z)\right).$$

Знайдемо початок розкладу в ряд Лорана за степенями $(1-z)$ першої суми. Для цього скористаємось лемами 2.1.2 та 3.2.1. Отримаємо

$$\sum_{\frac{d_1}{2} \le k \le d_1} \varphi_{2k-d_1}\left((1+z)\breve{A}_k(z)\right) = -\frac{(-1)^{\frac{d_2-d_1}{2}}}{(1-z)^{d_1+d_2+1} d_1! d_2!} \times$$

$$\times \sum_{\frac{d_1}{2} \le k \le d_1} \binom{d_1}{k} \binom{d_2}{\frac{d_2+d_1}{2}-k} \left(\sum_{j=d_1-k+1}^{k} \frac{1}{j} + \sum_{j=\frac{d_1+d_2}{2}-k+1}^{k+\frac{d_2-d_1}{2}} \frac{1}{j} \right) (k-\frac{d_1}{2})^{d_1+d_2} +$$

$$+ O((1-z)^{-d_1-d_2}).$$

Враховуючи результати лем 3.2.1 і 3.2.2, маємо

$$\sum_{\frac{d_1}{2} \le k \le d_1} \left(z\varphi_{2k-d_1}\left(1+z)\breve{B}_k(z)\right)\right)'_z =$$

$$= \sum_{\frac{d_1}{2} \le k \le d_1} \left(\frac{(-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}}}{2^{d_1+d_2-1} k!(d_1-k)! \left(\frac{d_2-d_1}{2}+k\right)! \left(\frac{d_2+d_1}{2}-k\right)!} \times \right.$$

$$\left. \times\, z\varphi_{2k-d_1}\left(\frac{1}{(1-z)^{d_1+d_2}}\right)\right)'_z + \left(O((1-z)^{-d_1-d_2+1})\right)'_z =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}}(d_1+d_2)}{2^{d_1+d_2-1}d_1!d_2!(1-z)^{d_1+d_2+1}} \sum_{\frac{d_1}{2} \le k \le d_1} \left((2k-d_1)^{d_1+d_2-1} \binom{d_1}{k} \binom{d_2}{\frac{d_2+d_1}{2}-k} \right) +$$

$$+O((1-z)^{-d_1-d_2}).$$

Враховуючи леми 3.1.1 та 2.1.2, маємо

$$\sum_{\frac{d_1+d_2}{2}+1 \le k \le d_2} \varphi_{d_2-2k}\left((1+z)\breve{S}_k(z)\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{d_2-1}d_2!(1-z)^{d_1+d_2+1}} \times$$

$$\times \sum_{\frac{d_1+d_2}{2}+1 \le k \le d_2} \binom{d_2}{k} \frac{(-1)^{k+d_1}(d_2-2k)^{d_1+d_2}}{\prod\limits_{j=0}^{d_1}(d_2-d_1-2k+2j)} + O((1-z)^{-d_1-d_2}).$$

Додавши відповідні частини отриманих рівностей та скориставшись теоремою 3.2.1 після нескладних перетворень, одержимо потрібну рівність. $\diamondsuit$

Зауважимо, що найбільший спільний дільник чисел виду $2k-d_1$ і d_2-2m буде рівним 2 тоді, коли обидва числа d_1 і d_2 — парні. У цьому випадку, оскільки ряди Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{d_1,d_2}, z)$ та $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{d_1,d_2}, z)$ мають полюс у точці $z = 1$, то згідно леми 1.3.2, полюси функцій $(1+z)\breve{A}_k(z)$, $(1-z^2)\breve{A}_k(z)$, $(1+z)\breve{B}_k(z)$, $(1-z^2)\breve{B}_k(z)$, $(1+z)\breve{S}_k(z)$ та $(1-z^2)\breve{S}_k(z)$ мають вигляд $z = \pm 1$. У силу парності функцій $(1-z^2)\breve{A}_k(z)$, $(1-z^2)\breve{B}_k(z)$, та $(1-z^2)\breve{S}_k(z)$, можна стверджувати, що вони мають полюс в точці $z = -1$ того ж порядку, що і в точці $z = 1$. З'ясуємо тепер, яким є порядок полюсу функцій $(1+z)\breve{A}_k(z)$, $(1+z)\breve{B}_k(z)$ та $(1+z)\breve{S}_k(z)$ в точці $z = -1$. Провівши міркування аналогічні до тих, які наводились в лемі 3.2.1, розкладаючи відповідні функції в ряди Тейлора і Лорана в околі точки $z = -1$, приходимо до висновку, що порядок полюсу в точці $z = -1$ цих функцій на 1 менший, ніж порядок полюсу в точці $z=1$. Отже, згідно леми 1.3.2, кожна з функцій $\varphi_{2k-d_1}((1+z)\breve{A}_k(z))$, $\varphi_{2k-d_1}((1+z)\breve{B}_k(z))$ та $\varphi_{d_2-2k}((1+z)\breve{S}_k(z))$ має лише один полюс максимального порядку $z=1$, що співпадає з порядком полюсів відповідно функцій $(1+z)\breve{A}_k(z)$, $(1+z)\breve{B}_k(z)$ та $(1+z)\breve{S}_k(z)$ у цій точці.

Теорема 3.2.3. *Нехай d_1 і d_2 непарні і $d_2>d_1$; тоді степінь алгебри спільних інваріантів двох бінарних форм $\deg(\mathcal{I}_{d_1,d_2})$ обчислюється за формулою*

$$\deg(\mathcal{I}_{d_1,d_2})=-\frac{1}{4}\left(h(d_1,d_2,d_2+d_1-2)+g(d_2,d_1,d_2-d_1-2,d_2+d_1-2)\right).$$

Доведення. Використовуючи леми 2.1.2 і 3.2.1, маємо

$$\sum_{\frac{d_1}{2}\le k\le d_1}\varphi_{2k-d_1}\Big((1-z^2)\breve{A}_k(z)\Big)=$$

$$=-\frac{\sum\limits_{k=\frac{d_1}{2}}^{d_1}\binom{d_1}{k}\binom{d_2}{\frac{d_2+d_1}{2}-k}\Big(H_k-H_{d_1-k}+H_{k+\frac{d_2-d_1}{2}}-H_{\frac{d_1+d_2}{2}-k}\Big)(k-\frac{d_1}{2})^{d_1+d_2-1}}{(-1)^{\frac{d_2-d_1}{2}}2(1-z)^{d_1+d_2}d_1!d_2!}+$$

$$+\frac{\sum\limits_{\frac{d_1}{2}\le k\le d_1}\binom{d_1}{k}\binom{d_2}{\frac{d_2+d_1}{2}-k}\Big(H_k-H_{d_1-k}+H_{k+\frac{d_2-d_1}{2}}-H_{\frac{d_1+d_2}{2}-k}\Big)(2k-d_1)^{d_1+d_2-2}}{(-1)^{\frac{d_2-d_1}{2}}2^{d_1+d_2}(1-z)^{d_1+d_2-1}d_1!d_2!}\times$$

$$\times((2k-d_1-1)(d_1+d_2)+(d_1+d_2+2)(d_1-2k+1))+$$

$$+\sum_{\frac{d_1}{2}\le k\le d_1}\frac{(-1)^{\frac{d_2-d_1}{2}}(2k-d_1)^{d_1+d_2-2}(d_1+d_2)}{(1-z)^{d_1+d_2-1}\cdot 2^{d_1+d_2-1}k!(d_1-k)!\left(\frac{d_2-d_1}{2}+k\right)!\left(\frac{d_2+d_1}{2}-k\right)!}+$$

$$+O((1-z)^{-d_1-d_2+1}).$$

Аналогічно, використовуючи лему 3.2.1, отримаємо

$$\sum_{\frac{d_1}{2}\le k\le d_1}\Big(z\varphi_{2k-d_1}\Big(1-z^2)\breve{B}_k(z)\Big)\Big)'_z=\frac{1}{(1-z)^{d_1+d_2}}\cdot\frac{(-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}}(d_1+d_2-1)}{2^{d_1+d_2-1}d_1!d_2!}\times$$

$$\times\sum_{\frac{d_1}{2}\le k\le d_1}(2k-d_1)^{d_1+d_2-2}\binom{d_1}{k}\binom{d_2}{\frac{d_2+d_1}{2}-k}-$$

$$-\frac{1}{(1-z)^{d_1+d_2-1}}\cdot\frac{(-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}}(d_1+d_2-2)}{2^{d_1+d_2}d_1!d_2!}\times$$
$$\times\sum_{\frac{d_1}{2}\le k\le d_1}\left((2k-d_1)^{d_1+d_2-2}+2(2k-d_1)^{d_1+d_2-3}\right)\binom{d_1}{k}\binom{d_2}{\frac{d_2+d_1}{2}-k}+$$
$$+O((1-z)^{-d_1-d_2+2}).$$

Застосуємо теорему 1.2.6. Як зазначено в підрозділі 1.2

$$\operatorname{tr}\deg_{\mathbb{C}}\mathcal{I}_{d_1,d_2}=d_1+d_2-1.$$

Тому коефіцієнт перед $\frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1}}$ розкладу ряду Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{d_1,d_2},z)$ в ряд Лорана в $z=1$ дорівнює 0. Позначимо цей коефіцієнт через y. Маємо

$$y=-\frac{(-1)^{\frac{d_2-d_1}{2}}}{d_1!d_2!}\times$$
$$\times\sum_{\frac{d_1}{2}\le k\le d_1}\binom{d_1}{k}\binom{d_2}{\frac{d_2+d_1}{2}-k}\left(H_k-H_{d_1-k}+H_{k+\frac{d_2-d_1}{2}}-H_{\frac{d_1+d_2}{2}-k}\right)(k-\frac{d_1}{2})^{d_1+d_2-1}+$$
$$+\frac{(-1)^{\frac{d_2-d_1}{2}}(d_1+d_2-1)}{2^{d_1+d_2-1}d_1!d_2!}\sum_{\frac{d_1}{2}\le k\le d_1}\left((2k-d_1)^{d_1+d_2-2}\binom{d_1}{k}\binom{d_2}{\frac{d_2+d_1}{2}-k}\right)+$$
$$+\frac{1}{2^{d_2-1}d_2!}\sum_{k=0}^{\frac{d_2-d_1}{2}-1}\binom{d_2}{k}\frac{(-1)^{k+d_1+1}(d_2-2k)^{d_1+d_2-1}}{\prod\limits_{j=0}^{d_1}(2k-d_1-d_2+2j)}=0.$$

Звівши коефіцієнти перед $\frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1-1}}$, отримаємо

$$\deg(\mathcal{I}_{d_1,d_2})=\lim_{z\to1}(1-z)^{d_2+d_1-1}\mathcal{P}(\mathcal{I}_{d_1,d_2},z)=$$
$$=y+\frac{1}{4d_1!d_2!}\sum_{\frac{d_1}{2}\le k\le d_1}(-1)^{\frac{d_2-d_1}{2}}\binom{d_1}{k}\binom{d_2}{\frac{d_2+d_1}{2}-k}\times$$
$$\times\left(H_k-H_{d_1-k}+H_{k+\frac{d_2-d_1}{2}}-H_{\frac{d_1+d_2}{2}-k}\right)(k-\frac{d_1}{2})^{d_1+d_2-2}-$$
$$-\frac{(-1)^{\frac{d_2-d_1}{2}}(d_1+d_2-2)}{2^{d_1+d_2-1}d_1!d_2!}\sum_{\frac{d_1}{2}\le k\le d_1}\left((2k-d_1)^{d_1+d_2-3}\binom{d_1}{k}\binom{d_2}{\frac{d_2+d_1}{2}-k}\right)-$$

$$-\frac{1}{2^{d_2-1}d_2!}\sum_{0\le 2k\le d_2-d_1-2}\binom{d_2}{k}\frac{(-1)^{k+d_1+1}(d_2-2k)^{d_1+d_2-2}}{\prod\limits_{j=0}^{d_1}(2k-d_1-d_2+2j)}.$$

Для завершення доведення нагадаємо, що $y=0$. $\diamondsuit$

Згідно леми 1.3.2 полюси функцій $(1-z^2)\breve{A}_k(z)$, $(1-z^2)\breve{B}_k(z)$ та $(1-z^2)\breve{S}_k(z)$ в точці $z=-1$ дають відповідно полюси функцій $\varphi_{2k-d_1}\Big((1-z^2)\breve{A}_k(z)\Big)$, $\varphi_{2k-d_1}\Big((1-z^2)\breve{B}_k(z)\Big)$ та $\varphi_{d_2-2k}\Big((1-z^2)\breve{S}_k(z)\Big)$ в точці $z=1$. Таким чином справедлива така теорема.

Теорема 3.2.4. *Степінь алгебри спільних інваріантів двох бінарних форм* $\deg(\mathcal{I}_{d_1,d_2})$ *у випадку парності чисел* d_1 *і* d_2 *при* $d_1<d_2$ *обчислюється за такою формулою*

$$\deg(\mathcal{I}_{d_1,d_2})=-\frac{1}{2}\left(h(d_1,d_2,d_2+d_1-2)+g(d_2,d_1,d_2-d_1-2,d_2+d_1-2)\right).$$

3.3. Степені алгебр $\mathcal{C}_{d,d}$ і $\mathcal{I}_{d,d}$

Розглянемо випадок, коли $d_1=d_2=d$.

Нехай

$$\tilde{B}_k(z)=\lim_{t\to z^{d-2k}}\left(f_{d,d}(tz^d,z)(1-tz^{2k})^2\right)=\left(\frac{z^{k(k+1)}}{(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d-k}}\right)^2,$$

$$\tilde{A}_k(z)=-\frac{1}{z^{2k}}\lim_{t\to z^{-2k}}\left(f_{d,d}(tz^d,z)(1-tz^{2k})^2\right)'_t=$$

$$=2\,\tilde{B}_k(z)\left(s+\frac{z^{2(s+1)}}{1-z^{2(s+1)}}+\cdots+\frac{z^{2s'}}{1-z^{2s'}}\right),$$
$$s=\min(k,d-k),$$
$$s'=\max(k,d-k).$$

Доведемо таке допоміжне твердження.

Лема 3.3.1. *Початок ряду Лорана за степенями* $1-z$

1) *функції* $(1+z)\tilde{B}_k(z)$ *має вигляд*

$$\frac{1}{(1-z)^{2d}}\left(\frac{1}{2^{2d-1}k!^2(d-k)!^2}+\frac{2d^2-4dk-4k-1}{2^{2d}k!^2(d-k)!^2}(1-z)+\cdots\right);$$

2) *функції* $(1+z)\tilde{A}_k(z)$ *має вигляд*

$$\frac{1}{(1-z)^{2d+1}}\left(\frac{H_{d-k}-H_k}{2^{2d-1}k!^2(d-k)!^2}+\right.$$
$$\left.\frac{3k-d+2+2(H_{d-k}-H_k)(d+1)(d-2k-1)}{2^{2d}k!^2(d-k)!^2}(1-z)+\ldots\right).$$

Доведення. 1) Скористаємось доведенням лем 2.1.1 і 3.2.1, щоб знайти перші доданки розкладу виразу

$$\frac{z^{2k(k+1)}(1+z)}{(z^2,z^2)_k^2\,(z^2,z^2)_{d-k}^2}.$$

Спочатку розкладемо чисельник в ряд Тейлора за степенями $(1-z)$. Маємо

$$1+z=2-(1-z),$$
$$z^{2k(k+1)}=1-2k(k+1)(1-z)+\cdots,$$
$$(1+z)z^{2k(k+1)}=2-(4k(k+1)+1)(1-z)+\cdots.$$

З доведення леми 3.2.1 слідує

$$(z^2,z^2)_k^2(z^2,z^2)_{d-k}^2=2^{2d}k!^2(d-k)!^2(1-z)^{2d}-$$
$$-2^{2d}k!^2(d-k)!^2\left((d-k)^2+k^2\right)(1-z)^{2d+1}+\cdots.$$

Після нескладних обчислень, знаходимо

$$\frac{z^{2k(k+1)}(1+z)}{(z^2,z^2)_k^2\,(z^2,z^2)_{d-k}^2}=$$
$$=\frac{2-(4k(k+1)+1)(1-z)+\cdots}{2^{2d}k!^2(d-k)!^2(1-z)^{2d}-2^{2d}k!^2(d-k)!^2\left((d-k)^2+k^2\right)(1-z)^{2d+1}+\cdots}=$$
$$=\frac{1}{(1-z)^{2d}}\left(\frac{1}{2^{2d-1}k!^2(d-k)!^2}+\frac{2d^2-4dk-4k-1}{2^{2d}k!^2(d-k)!^2}(1-z)+\cdots\right).$$

Звідси одразу отримується твердження 1 леми.

2) Зазначимо, що вираз для $\tilde{A}_k$ в теоремі 1.2.7 зустрічається лише для $0 \le k \le d/2$. Тому в позначеннях цієї теореми $s = k$ і $s' = d - k$. Зауваживши також, що

$$\frac{z^{2j}}{1-z^{2j}} = \frac{1}{1-z^{2j}} - 1,$$

матимемо

$$\tilde{A}_k(z) = 2\,\tilde{B}_k(z)\,\left(3k - d + \sum_{j=k+1}^{d-k} \frac{1}{1-z^{2j}}\right) =$$

$$= \frac{2(3k-d)z^{2k(k+1)}(1+z)}{(z^2,z^2)_k^2(z^2,z^2)_{d-k}^2} + \sum_{j=k+1}^{d-k} \frac{2z^{2k(k+1)}(1+z)}{(1-z^{2j})(z^2,z^2)_k^2(z^2,z^2)_{d-k}^2}.$$

Зауважимо, що чисельник першого дробу відрізняється від чисельника дробу

$$(1+z)\tilde{B}_k = \frac{z^{2k(k+1)}(1+z)}{(z^2,z^2)_k^2(z^2,z^2)_{d-k}^2}$$

лише лінійним множником $2(3k-d)$. Крім цього, з доведення леми 3.2.1 випливає, що

$$(1-z^{2j})(z^2,z^2)_k^2(z^2,z^2)_{d-k}^2 = 2^{2d+1} j k!^2 (d-k)!^2 (1-z)^{2d+1} -$$
$$-2^{2d} j k!^2 (d-k)!^2 \left(2k^2 + 2(d-k)^2 + 2j - 1\right)(1-z)^{2d+2} + \ldots.$$

Отже, початок розкладу функції $\tilde{A}_k$ в ряд Лорана за степенями $(1-z)$ має вигляд

$$\breve{A}_k = \frac{3k-d}{2^{2d}k!^2(d-k)!^2(1-z)^{2d}} + \frac{\sum\limits_{j=k+1}^{d-k}\frac{1}{j}}{2^{2d-1}k!^2(d-k)!^2}\frac{1}{(1-z)^{2d+1}} +$$
$$+ \sum_{j=k+1}^{d-k} \frac{d^2 - 2dk - 2k - 1 + j}{j2^{2d-1}k!^2(d-k)!^2(1-z)^{2d}} + \ldots =$$
$$= \frac{H_{d-k} - H_k}{2^{2d-1}k!^2(d-k)!^2}\frac{1}{(1-z)^{2d+1}} + \frac{3k-d}{2^{2d}k!^2(d-k)!^2(1-z)^{2d}} +$$
$$+ \sum_{j=k+1}^{d-k} \frac{(d+1)(d-2k-1)\sum_{j=k+1}^{d-k}\frac{1}{j}}{2^{2d-1}k!^2(d-k)!^2(1-z)^{2d}} + \frac{1}{2^{2d-1}k!^2(d-k)!^2(1-z)^{2d}} \ldots$$

Зібравши коефіцієнти при степенях $(1-z)^{-2d}$, отримаємо потрібний вираз. $\diamondsuit$

Зауважимо, що отримані вирази для першого доданку $(1+z)\tilde{A}_k$ і $(1+z)\tilde{B}_k$ є окремим випадком виразів, отриманих в лемі 3.2.1 при $d_1 = d_2 = d$. Згідно теореми 1.2.7 ряд Пуанкаре алгебри спільних коваріантів двох бінарних форм порядку d має такий вигляд

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{d,d}, z) = \sum_{0\le k\le d/2} \varphi_{d-2k}\left((1-z^2)\tilde{A}_k(z)\right) + \sum_{0\le k\le d/2}\left(z\,\varphi_{d-2k}\left((1-z^2)\tilde{B}_k(z)\right)\right)'_z.$$

Міркуючи аналогічно як при доведенні теореми 3.2.2 отримаємо таке твердження.

Теорема 3.3.1. *Степінь алгебри спільних коваріантів двох бінарних $d-$форм дорівнює*

$$\deg(\mathcal{C}_{d,d}) = h(d, d, 2d).$$

Аналогічно отримуємо вирази для степеня алгебри інваріантів двох бінарних $d-$форм.

Теорема 3.3.2. *Степінь алгебри спільних інваріантів двох бінарних $d-$форм дорівнює*

$$\deg(\mathcal{I}_{d,d}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}h(d, d, 2d-2), \text{ якщо } d- \text{ непарне}, \\ \\ -\dfrac{1}{2}h(d, d, 2d-2), \text{ якщо } d- \text{ парне}. \end{cases}$$

Висновки до розділу 3

У цьому розділі досліджується асимптотична поведінка рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів двох бінарних форм.

Зокрема, обчислено степінь алгебри спільних коваріантів двох бінарних форм $\deg(\mathcal{C}_{d_1,d_2})$. Отримано різні вирази для $\deg(\mathcal{C}_{d_1,d_2})$ для таких випадків:

1. числа d_1 та d_2 мають різну парність;
2. числа d_1 та d_2 мають однакову парність і $d_1 < d_2$;
3. числа d_1 та d_2 рівні.

Також в цьому розділі отримано різні вирази для степеня алгебри спільних інваріантів двох бінарних форм $\deg(\mathcal{I}_{d_1,d_2})$ таких випадків:

1. числа d_1 та d_2 мають різну парність;
2. обидва числа d_1 та d_2 непарні і $d_1 < d_2$;
3. обидва числа d_1 та d_2 парні і $d_1 < d_2$;
4. числа d_1 та d_2 рівні і непарні;
5. числа d_1 та d_2 рівні і парні.

Результати наведені в цьому розділі опубліковані в працях [65] та [10].

РОЗДІЛ 4
АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РЯДІВ ПУАНКАРЕ АЛГЕБР СПІЛЬНИХ ІНВАРІАНТІВ ТА КОВАРІАНТІВ n ЛІНІЙНИХ ТА n КВАДРАТИЧНИХ ФОРМ

В цьому розділі ряди Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних та квадратичних форм виражено через многочлени Нараяна, знайдено рекурентні співвідношення для цих рядів Пуанкаре, обчислено перші два коефіцієнти розкладу рядів Пуанкаре цих алгебр в ряд Лорана в околі точки $z = 1$. Крім цього, тут обчислено многочлени Гільберта алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних та n квадратичних форм.

4.1. Комбінаторні тотожності з числами та многочленами Нараяна

У цьому підрозділі наведемо комбінаторні тотожності, необхідні для доведення основних тверджень в наступних підрозділах.

Лема 4.1.1. ([120]) *Для довільних цілих невід'ємних m, k, s справедлива тотожність*

$$\sum_{t=0}^{min\{k,m\}} \binom{m}{t}\binom{m+2s}{t+s}\binom{k-t+2m+2s}{2m+2s} = \binom{m+k+s}{m+s}\binom{m+k+2s}{m+s}.$$

У випадку $s = 0$, отримаємо відому [9, с. 51] тотожність Лі Жень-чу

$$\sum_{t=0}^{m} \binom{m}{t}^2\binom{k+2m-t}{2m} = \binom{m+k}{k}.$$

У наступній лемі знайдено ще один вираз для числа Нараяна, необхідний для доведення основних тверджень розділу.

Лема 4.1.2. *Число Нараяна можна подати у вигляді*

$$N_{n+k-1,\,k+1} = \sum_{t=0}^{\min\{k,n-1\}} (-1)^t \binom{n+t-1}{t}\binom{n+k-2}{k-t}\binom{n+2k-t-1}{2k},$$

при $n > 1, k > 0$.

Доведення. Зауважимо, що

$$\sum_{t=0}^{\min\{k,n-1\}} (-1)^t \binom{n+t-1}{t}\binom{n+k-2}{k-t}\binom{n+2k-t-1}{2k} =$$
$$= \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t \binom{n+t-1}{t}\binom{n+k-2}{k-t}\binom{n+2k-t-1}{2k} =$$
$$= \sum_{t=0}^{k} (-1)^t \binom{n+t-1}{t}\binom{n+k-2}{k-t}\binom{n+2k-t-1}{2k}.$$

Оскільки

$$\binom{n+t-1}{t}\binom{n+k-2}{k-t} = \frac{n+t-1}{n-1}\binom{n+k-2}{n+t-2}\binom{n+t-2}{n-2} = \frac{n+t-1}{n-1}\binom{n+k-2}{n-2}\binom{k}{t}$$

і

$$\frac{n-1}{k+1}\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{k+1},$$

то залишилось довести, що

$$\sum_{t=0}^{k} (-1)^t (n-1+t)\binom{k}{t}\binom{n+2k-t-1}{2k} = \binom{n+k-1}{k+1}.$$

Позначимо

$$S_1 = \sum_{t=0}^{k} (-1)^t (n-1+t)\binom{k}{t}\binom{n+2k-t-1}{2k}.$$

Маємо

$$S_1 = (n-1)\sum_{t=0}^{k} (-1)^t \binom{k}{t}\binom{n+2k-t-1}{2k} + \sum_{t=0}^{k} (-1)^t t\binom{k}{t}\binom{n+2k-t-1}{2k}.$$

Використовуючи тотожність

$$\sum_{t} (-1)^t \binom{n-t}{m-t}\binom{p}{t} = \binom{n-p}{m},$$

див. [14, с. 18], одержимо

$$S_1 = (n-1)\binom{n+k-1}{k} - k\sum_{t=1}^{k}(-1)^{t-1}\binom{k-1}{t-1}\binom{n+2k-(t-1)-2}{2k} =$$
$$= (n-1)\binom{n+k-1}{k} - k\sum_{t=0}^{k-1}(-1)^{t}\binom{k-1}{t}\binom{n+2k-2-t}{n-2-t} =$$
$$= (n-1)\binom{n+k-1}{k} - k\binom{n+k-1}{n-2} =$$
$$= (n-1)\left(\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} - \frac{(n+k-1)!k}{(k+1)!(n-1)!}\right) = \frac{n-1}{k+1}\frac{(n+k-1)!}{(k+1)!(n-2)!} =$$
$$= \binom{n+k-1}{k+1}.$$

Що і вимагалось довести. ♢

Підкладаючи $m = n-3$ і $s = 1$ в лему 4.1.1, маємо

$$\sum_t \binom{n-3}{t}\binom{n-1}{t+1}\binom{2n+k-t-4}{k-t} = \binom{n+k-1}{n-2}\binom{n-2+k}{n-2}.$$

Домноживши обидві частини на $\frac{1}{n-1}$ (нагадаємо, що $n > 2$) і використавши останню лему, отримаємо таку комбінаторну тотожність.

Наслідок 4.1.1. *Справедлива така тотожність*

$$\sum_{t=0}^{\min\{k,n-1\}}(-1)^t\binom{n+t-1}{t}\binom{n+k-2}{k-t}\binom{n+2k-t-1}{2k} =$$
$$= \sum_{t=0}^{\min\{k,n-3\}}\binom{n-3}{t}\binom{n-2}{t}\binom{2n+k-t-4}{k-t}\frac{1}{t+1}.$$

Доведемо твердження, яке є не лише допоміжним для обчислень, але й становить певний науковий інтерес.

Теорема 4.1.1. *Для невід'ємного a і натуральних n, k справедливі* *такі тотожності:*

1) $W_{n-1}(z^2) =$

$$= \frac{(1-z)^a(1-z^2)^{2n-1}}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(\frac{z^{2n-k-1+a}}{(1-z)^{2n-k+a}}\frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}}\frac{1}{z^a(1+z)^n}\right);$$

2) $N_{n-1}(z^2) =$

$$= \frac{(1-z)^a(1-z^2)^{2n-1}}{n!z}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(\frac{z^{2n-k+a}}{(1-z)^{2n-k+a}}\frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}}\frac{1}{z^a(1+z)^n}\right).$$

Доведення. Доведення обох тотожностей проведемо індукцією по a.

1) Зауважимо, що при $a = 0$ потрібна тотожність матиме вигляд

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}^2 z^{2k}}{(1-z^2)^{2n-1}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}(n)_{n-k}}{(k-1)!(n-k)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(\frac{z^{2n-k-1}}{(1-z^2)^{2n-k}}\right).$$

Розкладемо ліву частину в ряд Тейлора в околі точки $z = 0$

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}^2 z^{2k}}{(1-z^2)^{2n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}^2 z^{2k}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{(2n-1)+t-1}{t}z^{2t} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\min\{k,n-1\}}\binom{n-1}{t}^2\binom{2n+k-t-2}{k-t}z^{2k}.$$

Використовуючи тотожність Лі Жень-чу, отримаємо

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}^2 z^{2k}}{(1-z^2)^{2n-1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}z^{2k}\sum_{t=0}^{\min\{k,n-1\}}(-1)^t\binom{k}{t}\binom{n+2k-t-1}{2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\min\{k,n-1\}}(-1)^t\binom{n+t-1}{t}\binom{n+k-1}{k-t}\binom{n+2k-t-1}{2k}z^{2k}.$$

З іншого боку, отриманий ряд є розкладом в ряд Тейлора в околі точки $z = 0$ функції

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}(n)_{n-k}}{(k-1)!(n-k)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(\frac{z^{2n-k-1}}{(1-z^2)^{2n-k}}\right).$$

Припустимо, що тотожність справедлива при деякому невід'ємному $a = m$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-k)!(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(\frac{z^{2n-k-1+m}}{(1-z)^{2n-k+m}}\frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}}\left(\frac{1}{z^m(1+z)^n}\right)\right)=$$
$$=\frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1}\binom{n-1}{t}^2 z^{2t}}{(1-z)^m(1-z^2)^{2n-1}}.$$

Нам потрібно довести, що вона справедлива і при $a = m+1$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-k)!(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(\frac{z^{2n-k+m}}{(1-z)^{2n-k+m}}\frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}}\left(\frac{1}{z^{m+1}(1+z)^n}\right)\right)=$$
$$=\frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1}\binom{n-1}{t}^2 z^{2t}}{(1-z)^{m+1}(1-z^2)^{2n-1}}.$$

Тобто нам потрібно довести, що

$$(1-z)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-k)!(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(\frac{z^{2n-k-1+(m+1)}}{(1-z)^{2n-k+(m+1)}}\frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}}\frac{1}{z^{m+1}(1+z)^n}\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-k)!(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(\frac{z^{2n-k-1+m}}{(1-z)^{2n-k+m}}\frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}}\frac{1}{z^m(1+z)^n}\right).$$

Позначимо ліву частину останньої тотожності через $C(z)$, а праву – через $D(z)$. Як і при доведенні базисного випадку, розкладемо обидві частини потрібної тотожності в ряд Тейлора в околі точки $z = 0$. Маємо

$$C(z)=(1-z)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-k)!(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(\frac{z^{2n-k-1+m+1}}{(1-z)^{2n-k+m+1}}\frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}}\frac{1}{z^{m+1}(1+z)^n}\right)=$$
$$=(1-z)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{min\{k,n-1\}}\sum_{t=0}^{k-j}\binom{n+k-j-1}{k}\binom{n+m+k-t}{k-j-t}(-1)^t\times$$
$$\times\binom{n+t-1}{t}\binom{t-m-1}{j}z^k=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{min\{k,n-1\}}\sum_{t=0}^{k-j}\left(\binom{n+k-j-1}{k}\binom{n+m+k-t}{k-j-t}-\right.$$
$$\left.-\binom{n+k-j-2}{k-1}\binom{n+m+k-t-1}{k-j-t-1}\right)(-1)^t\binom{n+t-1}{t}\binom{t-m-1}{j}z^k.$$

Зробимо те ж саме для правої частини

$$D(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-k)!(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(\frac{z^{2n-k-1+m}}{(1-z)^{2n-k+m}}\frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}}\left(\frac{1}{z^m(1+z)^n}\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{min\{k,n-1\}}\sum_{t=0}^{k-j}\binom{n+k-j-1}{k}\binom{n+m+k-t-1}{k-j-t}(-1)^t\binom{n+t-1}{t}\binom{t-m}{j}z^k.$$

Отже, тепер наша задача звелась до того, щоб довести таку тотожність

$$\sum_{j=0}^{\min\{k,n-1\}}\sum_{t=0}^{k-j}\binom{n+k-j-1}{k}\binom{n+m+k-t-1}{k-j-t}(-1)^t\binom{n+t-1}{t}\binom{t-m}{j}=$$

$$=\sum_{j=0}^{min\{k,n-1\}}\sum_{t=0}^{k-j}\left(\binom{n+k-j-1}{k}\binom{n+m+k-t}{k-j-t}-\right.$$

$$\left.-\binom{n+k-j-2}{k-1}\binom{n+m+k-t-1}{k-j-t-1}\right)(-1)^t\binom{n+t-1}{t}\binom{t-m-1}{j}.$$

Використовуючи тотожності

$$\binom{n}{m}=\frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1},$$

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1},$$

отримаємо

$$\sum_{j=0}^{\min\{k,n-1\}}\sum_{t=0}^{k-j}\binom{n+k-j-1}{k}\binom{n+m+k-t-1}{k-j-t}(-1)^t\binom{n+t-1}{t}\binom{t-m}{j}=$$

$$=\sum_{j=0}^{min\{k,n-1\}}\sum_{t=0}^{k-j}(-1)^t\binom{n+t-1}{t}\binom{t-m}{j}\binom{n+k-j-1}{k}\binom{n+m+k-t}{k-j-t}-$$

$$-\sum_{j=0}^{min\{k,n-1\}}\sum_{t=0}^{k-j}(-1)^t\binom{n+t-1}{t}\binom{t-m}{j}\binom{n+k-j-1}{k}\binom{n+m+k-t-1}{k-j-t-1}=$$

$$= \sum_{j=0}^{\min\{k,n-1\}} \sum_{t=0}^{k-j} (-1)^t \binom{n+t-1}{t} \binom{t-m-1}{t-m-j-1} \binom{n+k-j-1}{k} \binom{n+m+k-t}{k-j-t} \times$$

$$\times \frac{t-m}{t-m-j} - \sum_{j=0}^{\min\{k,n-1\}} \sum_{t=0}^{k-j} (-1)^t \binom{n+t-1}{t} \binom{t-m-1}{t-m-j-1} \binom{n+k-j-2}{k-1} \times$$

$$\times \binom{n+m+k-t-1}{k-j-t-1} \frac{t-m}{t-m-j} \frac{n+k-j-1}{k}.$$

Позначимо

$$Q = \sum_{j=0}^{\min\{k,n-1\}} \sum_{t=0}^{k-j} (-1)^t \binom{n+t-1}{t} \binom{t-m-1}{t-m-j-1} \binom{n+k-j-1}{k} \binom{n+m+k-t}{k-j-t} \times$$

$$\times \frac{j}{t-m-j} - \sum_{j=0}^{\min\{k,n-1\}} \sum_{t=0}^{k-j} (-1)^t \binom{n+t-1}{t} \binom{t-m-1}{t-m-j-1} \binom{n+k-j-2}{k-1} \times$$

$$\times \binom{n+m+k-t-1}{k-j-t-1} \left(\frac{j}{t-m-j} + \frac{n-j-1}{k} + \frac{j}{t-m-j} \frac{n-j-1}{k} \right).$$

Залишилось показати, що $Q = 0$.

$$Q = \sum_{j=0}^{\min\{k,n-1\}} \sum_{t=0}^{k-j} (-1)^t \binom{n+t-1}{t} \binom{t-m-1}{j-1} \binom{n+k-j-1}{k} \binom{n+m+k-t}{k-j-t} -$$

$$- \sum_{j=0}^{\min\{k,n-1\}} \sum_{t=0}^{k-j} (-1)^t \binom{n+t-1}{t} \binom{t-m-1}{j} \binom{n+k-j-2}{k-1} \binom{n+m+k-t-1}{k-j-t-1} \times$$

$$\times \frac{n-j-1}{k} - \sum_{j=0}^{\min\{k,n-1\}} \sum_{t=0}^{k-j} (-1)^t \binom{n+t-1}{t} \binom{t-m-1}{j-1} \binom{n+k-j-2}{k-1} \times$$

$$\times \binom{n+m+k-t-1}{k-j-t-1} \frac{n-j-1}{k} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\min\{k,n-1\}} \sum_{t=0}^{k-j} (-1)^t \binom{n+t-1}{t} \binom{t-m-1}{j-1} \binom{n+k-j-1}{k} \binom{n+m+k-t-1}{k-j-t} -$$

$$- \sum_{j=0}^{\min\{k,n-1\}} \sum_{t=0}^{k-j} (-1)^t \binom{n+t-1}{t} \binom{t-m-1}{j} \binom{n+k-j-2}{k} \binom{n+m+k-t-1}{k-j-t-1}.$$

Зауважимо, що

$$\binom{n+k-j-2}{k} = 0, \text{ при } j = n-1,$$

$$\binom{n+m+k-t-1}{k-j-t-1} = 0, \text{ при } t = k-j,$$

$$\binom{t-m-1}{j-1} = 0, \text{ коли } j = 0.$$

Тому $Q = 0$. Що повністю доводить тотожність 1.

2) Доведемо тільки базу індукції. У випадку $a = m+1$ доведення тотожності цілком аналогічне доведенню попереднього пункту теореми. Зауважимо, що при $a = 0$ потрібна тотожність матиме вигляд

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(n)_{n-k}}{(k-1)!(n-k)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\frac{z^{2n-k}}{(1-z^2)^{2n-k}} \right) = \frac{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k}\binom{n}{k+1} z^{2k+1}}{(1-z^2)^{2n-1}}.$$

Далі діємо аналогічно, як в пункті 1. Розкладемо ліву частину в ряд Тейлора в околі точки $z = 0$. Маємо

$$B_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(n)_{n-k}}{(k-1)!(n-k)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\frac{z^{2n-k}}{(1-z^2)^{2n-k}} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\min\{k,n-1\}} (-1)^t \binom{n+t-1}{t} \binom{n+k-1}{k-t} \binom{n+2k-t}{2k+1} z^{2k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^{2k+1} \sum_{t=0}^{\min\{k,n-1\}} (-1)^t \binom{k}{t} \binom{n+2k-t}{n-1-t} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} \binom{n+k}{n-1} z^{2k+1}.$$

Використовуючи лему 4.1.1 ($m = n-2, s = 1$), отримаємо

$$B_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\min\{k,n-2\}} \binom{n-2}{t} \binom{n}{t+1} \binom{k-t+2n-2}{2n-2} z^{2k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \binom{n}{k+1} z^{2k+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{(2n-1)+t-1}{t} z^{2t} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k}\binom{n}{k+1} z^{2k+1}}{(1-z^2)^{2n-1}}.$$

Індуктивний перехід відбувається аналогічно як в попердньому пункті. $\diamondsuit$

4.2. Асимптотична поведінка рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних форм

Комбінаторні тотожності, отримані в лемі 4.1.4, дозволяють значно спростити формули для рядів Пуанкаре алгебри спільних інваріантів n лінійних форм

$$\mathcal{I}_1^{(n)} = \mathbb{C}[\underbrace{V_1 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_1}_{n \text{ разів}}]^{SL_2}$$

та алгебри спільних коваріантів n лінійних форм

$$\mathcal{C}_1^{(n)} = \mathbb{C}[\underbrace{V_1 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_1}_{n \text{ разів}} \oplus \mathbb{C}^2]^{SL_2},$$

отримані в теоремі 1.2.8.

Виразимо ряди Пуанкаре цих алгебр через многочлени Нараяна.

Теорема 4.2.1. *Справедливі такі рівності:*

1) $\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(n)}, z) = \dfrac{N_{n-2}(z^2)}{(1-z^2)^{2n-3}};$

2) $\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n)}, z) = \dfrac{W_{n-1}(z^2) + nzN_{n-1}(z^2)}{(1-z^2)^{2n-1}}.$

Доведення. 1) Доведення цієї частини теореми аналогічне до доведення теореми 4.1.1.

Розкладемо функцію

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(n)_{n-k}}{(k-1)!(n-k)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\left(\frac{z}{1-z^2} \right)^{2n-k-1} \right)$$

в ряд Тейлора. Згідно теореми 4.1.8, ця функція дозволяє обчислити ряд Пуанкаре алгебри спільних інваріантів n лінійних форм, тому

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(n)}, z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(n)_{n-k}}{(k-1)!(n-k)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(z^{2n-k-1} \sum_{t=0}^{\infty} \binom{2n-k+t-2}{t} z^{2t} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(n)_{n-k}}{(k-1)!(n-k)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\sum_{t=0}^{\infty} \binom{2n-k+t-2}{t} z^{2t+2n-k-1} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(n)_{n-k}}{(k-1)!(n-k)!} \sum_{t=0}^{\infty} \binom{2n-k+t-2}{t} \frac{(2t+2n-k-1)!}{(2t+2n-2k)!} z^{2t+2n-2k}.$$

Після підстановки $j = n-k$, матимемо

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(n)}, z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^{j}(n)_{j}}{(n-j-1)!j!} \sum_{t=0}^{\infty} \binom{n+j+t-2}{t} \frac{(2t+n+j-1)!}{(2t+2j)!} z^{2t+2j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^{j}(n+j-1)!}{(n-j-1)!j!(n-1)!} \sum_{t=0}^{\infty} \binom{n+t+j-2}{t} \frac{(n+2t+2j-j-1)!}{(2t+2j)!} z^{2t+2j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j} \binom{n+j-1}{j} \sum_{t=0}^{\infty} \binom{n+t+j-2}{t} \binom{2t+n+j-1}{2t+2j} z^{2t+2j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\min\{k,n-1\}} (-1)^{t} \binom{n+t-1}{t} \binom{n+k-2}{k-t} \binom{n+2k-t-1}{2k} z^{2k}.$$

Використовуючи наслідок 4.1.1, одержимо

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(n)}, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\min\{k,n-3\}} \binom{n-3}{t} \binom{n-2}{t} \binom{2n+k-t-4}{k-t} \frac{1}{t+1} z^{2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} \binom{n-2}{k} \frac{z^{2k}}{k+1} \sum_{t=0}^{\infty} \binom{(2n-3)+t-1}{t} z^{2t}.$$

Зазначимо, що

$$\frac{1}{(1-z^2)^{2n-3}} = \sum_{t=0}^{\infty} \binom{2n-4+t}{t} z^{2t}.$$

Це завершує доведення цієї частини теореми.

2) Згідно теореми 1.2.8

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n)},z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}(n)_{n-k}}{(k-1)!(n-k)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(\frac{z^{2n-k-1}}{(1-z^2)^{2n-k}}\right)+ \\ +\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}(n)_{n-k}}{(k-1)!(n-k)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(\frac{z^{2n-k}}{(1-z^2)^{2n-k}}\right).$$

Скориставшись теоремою 4.1.1 при $a=0$, отримаємо

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n)},z)=\frac{W_{n-1}(z^2)}{(1-z^2)^{2n-1}}+\frac{nzN_{n-1}(z^2)}{(1-z^2)^{2n-1}}.$$

Що повністю доводить теорему. $\diamondsuit$

Зауважимо, що степінь трансцендентності над $\mathbb{C}$ поля часток алгебр $\mathcal{I}_1^{(n)},\mathcal{C}_1^{(n)}$ рівний порядку полюсів $\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(n)},z)$, $\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n)},z)$ в точці $z=1$ відповідно. Зазначимо, що $N_n(1)\neq 0$ і $W_n(1)\neq 0$ для кожного n. Використавши формули для рядів Пуанкаре, отримані в теоремі 4.2.1, отримаємо таку лему.

Лема 4.2.1. *Справедливі такі твердження:*

1) $\operatorname{tr}\deg_{\mathbb{C}}\mathcal{I}_1^{(n)}=2n-3$;

2) $\operatorname{tr}\deg_{\mathbb{C}}\mathcal{C}_1^{(n)}=2n-1$.

Зауважимо, що формули, отримані в цій лемі, можна було одержати також з формул у підрозділі 1.2.

Згідно означення, даного в підрозділі 1.2, степінь градуйованої алгебри R можна обчислити за формулою

$$\deg(R)=\lim_{z\to 1}(1-z)^{\operatorname{tr}\deg_{\mathbb{C}}R}\mathcal{P}(R,z).$$

Скористаємось цим для обчислення степенів алгебр $\mathcal{I}_1^{(n)}$ та $\mathcal{C}_1^{(n)}$.

Теорема 4.2.2. *Степені алгебр спільних інваріантів і коваріантів n лінійних форм дорівнюють:*

1) $\deg(\mathcal{I}_1^{(n)},z)=\dfrac{N_{n-2}(1)}{2^{2n-3}}=\dfrac{\binom{2n-4}{n-2}}{(n-1)2^{2n-3}}$;

2) $\deg(\mathcal{C}_1^{(n)}, z) = \dfrac{\binom{2n-2}{n-1}}{2^{2n-2}}$.

Доведення. 1) Використовуючи доведені в цьому підрозділі твердження, маємо

$$\deg(\mathcal{I}_1^{(n)}) = \lim_{z=1}(1-z)^{2n-3}\mathcal{P}(\mathcal{I}_n, z) =$$

$$= \lim_{z\to 1}(1-z)^{2n-3}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}\binom{n-3}{k-1}\binom{n-2}{k-1}z^{2k-2}}{(1-z^2)^{2n-3}} = \frac{N_{n-2}(1)}{2^{2n-3}}.$$

Застосувавши формулу згортки Вандермонда до суми в чисельнику, отримаємо що $N_{n-2}(1)$ дорівнює числу Каталана. Звідки випливає, що

$$\deg(\mathcal{I}_1^{(n)}) = \frac{\binom{2n-4}{n-2}}{(n-1)2^{2n-3}}.$$

2)Аналогічно

$$\deg(\mathcal{C}_1^{(n)}) = \lim_{z\to 1}(1-z)^{2n-1}\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n)}, z) =$$

$$= \lim_{z\to 1}(1-z)^{2n-1}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}^2 z^{2k} + \sum\limits_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\binom{n}{k+1}z^{2k+1}}{(1-z^2)^{2n-1}} =$$

$$= \frac{\binom{2n-2}{n-1} + n\frac{\binom{2n-2}{n-1}}{n}}{2^{2n-1}} = \frac{\binom{2n-2}{n-1} + nN_{n-1}(1)}{2^{2n-1}} = \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{2^{2n-2}}.$$

$\diamondsuit$

У [93] знайдено асимптотику та інтегральне зображення числа Каталана:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^4 x^n\sqrt{\frac{4-x}{x}}dx \sim \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}.$$

Використовши ці факти, отримаємо асимптотику та інтегральне зображення степенів алгебр $\mathcal{I}_1^{(n)}$ та $\mathcal{C}_1^{(n)}$.

Наслідок 4.2.1. *Асимптотична поведінка степенів алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних форм така:*

$$\deg(\mathcal{I}_1^{(n)}) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi n^3}};$$
$$\deg(\mathcal{C}_1^{(n)}) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Наслідок 4.2.2. *Інтегральне зображення степенів алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних форм таке:*

$$\deg(\mathcal{I}_1^{(n)}) = \frac{1}{2^{2n-2}\pi}\int\limits_0^4 x^{n-2}\sqrt{\frac{4-x}{x}}dx;$$
$$\deg(\mathcal{C}_1^{(n)}) = \frac{n}{2^{2n-1}\pi}\int\limits_0^4 x^{n-1}\sqrt{\frac{4-x}{x}}dx.$$

Зауважимо, що відомі й інші інтегральні зображення числа Каталана, див. [101]. Проте вони виражаються досить громіздкими формулами.

Обчислимо числа $\psi(\mathcal{C}_1^{(n)}), \psi(\mathcal{I}_1^{(n)})$, означені в підрозділі 1.2. Зауважимо, що наступна теорема є окремим випадком результату, що був отриманий Поповим зовсім іншим способом. Наведемо простіше доведення цього результату, використовуючи формулу ряду Пуанкаре алгебри інваріантів отриману в теоремі 4.2.1.

Теорема 4.2.3.(В.Попов, [97, с. 50]).*Справедлива така формула*

$$\psi(\mathcal{I}_1^{(n)}) = \frac{3\deg(\mathcal{I}_1^{(n)})}{2}.$$

Доведення. Знайдемо спочатку похідну многочлена Нараяна в точці $z=1$. Застосувавши формулу згортки Вандермонда, маємо

$$N_n'(z^2)\big|_{z=1} = 2\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k-1} = 2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}\binom{n}{k+2} =$$
$$= 2\binom{2n-1}{n+1}.$$

З означення числа ψ випливає

$$\psi(\mathcal{I}_1^{(n)}) = \lim_{z\to 1}\Big(-(1-z)^{2n-3}\mathcal{P}(I_1^{(n)}, z)\Big)'_z.$$

Використаємо формулу для ряду Пуанкаре алгебри спільних інваріантів n лінійних форм, отриману в теоремі 4.2.1. Отримаємо

$$\psi(\mathcal{I}_1^{(n)}) = -\lim_{z\to 1}\left(\frac{N_{n-2}(z^2)}{(1+z)^{2n-3}}\right)'_z =$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{(2n-3)N_{n-2}(z^2)-(1+z)N'_{n-2}(z^2)}{(1+z)^{2n-2}} = \frac{\frac{2n-3}{n-2}\binom{2n-4}{n-3}-4\binom{2n-5}{n-1}}{2^{2n-2}} =$$

$$= \frac{3\binom{2n-4}{n-2}}{2^{2n-2}(n-1)}.$$

$\diamondsuit$

Теорема 4.2.4. *Справедлива така формула*

$$\psi(\mathcal{C}_1^{(n)}) = \frac{\deg(\mathcal{C}_1^{(n)})}{2}.$$

Доведення. Для доведення твердження обчислимо похідну многочлена Нараяна типу B точці $z=1$. Отримаємо

$$W'_n(z^2)\big|_{z=1} = 2\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\binom{n}{k} = 2n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{n-1-k}\binom{n}{k+1} =$$

$$= 2n\binom{2n-1}{n} = n\binom{2n}{n}.$$

Скористаємось означенням числа ψ та формулою для ряду Пуанкаре алгебри $\mathcal{C}_1^{(n)}$, отриманою в теоремі 4.2.1. Маємо

$$\psi(\mathcal{C}_1^{(n)}) = -\lim_{z\to 1}\left(\frac{W_{n-1}(z^2)+nzN_{n-1}(z^2)}{(1+z)^{2n-1}}\right)'_z =$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{(2n-1)\left(W_{n-1}(z^2)+nzN_{n-1}(z^2)\right)-(1+z)\left(W_{n-1}(z^2)+nzN_{n-1}(z^2)\right)'_z}{(1+z)^{2n}} =$$

$$= \frac{2(2n-1)\binom{2n-2}{n-1}-2(n-1)\binom{2n-2}{n-1}}{2^{2n}} = \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{2^{2n-1}}.$$

$\diamondsuit$

4.3. Асимптотична поведінка рядів Пуанкаре алгебр спільних SL_2 інваріантів n квадратичних форм

Діючи аналогічно, як і в попередньому підрозділі виразимо ряд Пуанкаре алгебр спільних інваріантів n квадратичних форм та ряд Пуанкаре алгебр спільних коваріантів n квадратичних форм через многочлени Нараяна.

Теорема 4.3.1. *Справедливі такі рівності:*

1) $\mathcal{P}(\mathcal{C}_2^{(n)}, z) = \dfrac{W_{n-1}(z^2)}{(1-z)^{3n-1}(1+z)^{2n-1}}$;

2) $\mathcal{P}(\mathcal{I}_2^{(n)}, z) = \dfrac{W_{n-1}(z^2) - nzN_{n-1}(z^2)}{(1-z)^{3n-1}(1+z)^{2n-1}}$.

Доведення. 1) Скористаємось формулою для ряду Пуанкаре алгебри спільних коваріантів, обчисленою в теоремі 1.2.9. Маємо

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_2^{(n)}, z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \frac{(n)_j (n)_{n-k-j} z^{2n-k-j-1}}{(1-z)^{n+j}(1-z^2)^{2n-k-j}} \right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k)!(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\frac{z^{3n-k-1}}{(1-z)^{3n-k}} \frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}} \left(\frac{1}{(z(1+z))^n} \right) \right).$$

Застосувавши теорему 4.1.1 при $a = n$, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k)!(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\frac{z^{3n-k-1}}{(1-z)^{3n-k}} \frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}} \left(\frac{1}{(z(1+z))^n} \right) \right) =$$
$$= \frac{W_{n-1}(z^2)}{(1-z)^n(1-z^2)^{2n-1}}.$$

2) Здійснимо перетворення виразу для ряду Пуанкаре алгебри спільних інваріантів n квадратичних форм, отриманого в теоремі 1.2.9. Отримаємо

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_2^{(n)}, z) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \frac{(n)_j (n)_{n-k-j} z^{2n-k-j-1}}{(1-z)^{n+j-1}(1-z^2)^{2n-k-j}} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k)!(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\frac{z^{3n-k-1}}{(1-z)^{3n-k-1}} \frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}} \left(\frac{1}{(z(1+z))^n} \right) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k)!(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\frac{z^{3n-k-1}}{(1-z)^{3n-k}} \frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}} \left(\frac{1}{(z(1+z))^n} \right) \right) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k)!(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\frac{z^{3n-k}}{(1-z)^{3n-k}} \frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}} \left(\frac{1}{(z(1+z))^n} \right) \right).$$

Як і в попередньому пункті, скористаємось теоремою 4.1.1, взявши n замість a. Отримаємо

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_2^{(n)}, z) = \frac{W_{n-1}(z^2)}{(1-z)^n(1-z^2)^{2n-1}} - \frac{nzN_{n-1}(z^2)}{(1-z)^n(1-z^2)^{2n-1}}.$$

Що повністю доводить теорему. $\diamondsuit$

Обчислимо степінь трансцендентності поля часток алгебр спільних інваріантів та коваріантів n квадратичних форм над $\mathbb{C}$.

Лема 4.3.1. *Справедливі такі твердження:*

1) $\operatorname{tr}\deg_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_2^{(n)} = 3n-1$;

2) $\operatorname{tr}\deg_{\mathbb{C}} \mathcal{I}_2^{(n)} = 3n-3$.

Доведення. Степінь трансцендентності над $\mathbb{C}$ алгебр $\mathcal{I}_2^{(n)}$, $\mathcal{C}_2^{(n)}$ дорівнює порядку полюсів $\mathcal{P}(\mathcal{I}_2^{(n)}, z), \mathcal{P}(\mathcal{C}_2^{(n)}, z)$ відповідно в точці $z=1$. Оскільки

$$\frac{W_{n-1}(1)}{2^{2n-1}} \neq 0$$

для всіх n, то

$$\operatorname{tr}\deg_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_2^{(n)} = 3n-1.$$

Зазначимо, що

$$(W_{n-1}(z^2) - nzN_{n-1}(z^2)) \mid_{z=1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}^2 - n\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \binom{n-2}{k-1}\binom{n-1}{k-1} = 0,$$

$$(W_{n-1}(z^2) - nzN_{n-1}(z^2))' \mid_{z=1} =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-1}{k}^2 - n\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k-1}{k} \binom{n-2}{k-1}\binom{n-1}{k-1} = 0,$$

$$(W_{n-1}(z^2){-}nzN_{n-1}(z^2))'' \mid_{z=1} = \sum_{k=1}^{n-1} 2k(2k-1)\binom{n-1}{k}^2 -$$

$$-n\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}(2k-1)(2k-2)\binom{n-1}{k-1}\binom{n-2}{k-1} = \binom{2n-4}{n-2} \neq 0.$$

Отже, функція $(W_{n-1}(z^2) - nzN_{n-1}(z^2))$ має полюс порядку 2 в точці $z = 1$. Оскільки

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{2n}, z) = \frac{W_{n-1}(z^2) - nzN_{n-1}(z^2)}{(1-z)^{3n-1}(1+z)^{2n-1}},$$

то

$$\operatorname{tr}\deg_{\mathbb{C}} \mathcal{I}_{2n} = 3n - 3.$$

$\diamondsuit$

Зазначимо, що доведення попередньої леми пряме. У підрозділі 1.2 наведено формули для більш загального випадку.

Обчислимо степені алгебр $\mathcal{C}_2^{(n)}$ та $\mathcal{I}_2^{(n)}$.

Теорема 4.3.2. *Степені алгебр спільних коваріантів та інваріантів n квадратичних форм обчислюються за такими формулами:*

1) $\deg\left(\mathcal{C}_2^{(n)}\right) = \dfrac{\binom{2n-2}{n-1}}{2^{2n-1}}$;

2) $\deg\left(\mathcal{I}_2^{(n)}\right) = \dfrac{\binom{2n-4}{n-2}}{(n-1)2^{2n-1}}$.

Доведення. 1) Використовуючи теорему 4.3.1 і лему 4.3.1, отримаємо

$$\deg(\mathcal{C}_2^{(n)}) = \lim_{z=1}(1-z)^{3n-1}\mathcal{P}(\mathcal{C}_2^{(n)}, z) =$$

$$= \lim_{z=1}(1-z)^{3n-1}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}^2 z^{2k}}{(1-z)^n(1-z^2)^{2n-1}} = \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{2^{2n-1}}.$$

2) Аналогічно, для алгебри спільних інваріантів n квадратичних форм

$$\deg(\mathcal{I}_2^{(n)}){=}\lim_{z=1}(1{-}z)^{3n-3}\mathcal{P}(\mathcal{I}_2^{(n)}, z) =$$

$$= \lim_{z=1}\frac{W_{n-1}(z^2){-}nzN_{n-1}(z^2)}{(1{-}z)^2(1{+}z)^{2n-1}} {=} \lim_{z=1}\frac{\left(W_{n-1}(z^2){-}nzN_{n-1}(z^2)\right)''}{\left((1{-}z)^2(1{+}z)^{2n-1}\right)''} {=} \frac{\binom{2n-4}{n-2}}{(n{-}1)2^{2n-1}}.$$

$\diamondsuit$

Взявши до уваги асимптотику чисел Каталана (див. [93]) отримаємо асимптотичну поведінку степенів алгебр $\mathcal{I}_2^{(n)}$ і $\mathcal{C}_2^{(n)}$.

Наслідок 4.3.1. *Асимптотична поведінка степенів алгебр спільних інваріантів та коваріантів n квадратичних форм така:*

$$\deg(\mathcal{I}_2^{(n)}) \sim \frac{1}{8\sqrt{\pi n^3}};$$
$$\deg(\mathcal{C}_2^{(n)}) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}.$$

Скориставшись інтегральним зображенням чисел Каталана, обчисленим в [93], отримаємо інтегральне зображення степенів алгебр $\mathcal{I}_2^{(n)}$ і $\mathcal{C}_2^{(n)}$.

Наслідок 4.3.2. *Інтегральне зображення степенів алгебр спільних інваріантів та коваріантів n квадратичних форм таке:*

$$\deg(\mathcal{I}_2^{(n)}) = \frac{1}{2^{2n}\pi}\int\limits_0^4 x^{n-2}\sqrt{\frac{4-x}{x}}dx;$$
$$\deg(\mathcal{C}_2^{(n)}) = \frac{n}{2^{2n}\pi}\int\limits_0^4 x^{n-1}\sqrt{\frac{4-x}{x}}dx.$$

Обчислимо число $\psi(\mathcal{C}_2^{(n)})$ означене в підрозділі 1.2. Беручи до уваги лему 4.3.1, маємо

$$\psi(\mathcal{C}_2^{(n)}) = \lim_{z\to 1}\Big(-(1-z)^{3n-3}\mathcal{P}(\mathcal{C}_2^{(n)}, z)\Big)'_z = -\lim_{z\to 1}\left(\frac{W_{n-1}(z^2)}{(1+z)^{2n-1}}\right)'_z =$$
$$= \lim_{z\to 1}\frac{(2n-1)W_{n-1}(z^2)-(1+z)W'_{n-1}(z^2)}{(1+z)^{2n}} =$$
$$= \frac{(2n-1)\binom{2n-2}{n-1}-2(n-1)\binom{2n-2}{n-1}}{2^{2n}} = \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{2^{2n}}.$$

Звідси випливає така теорема

Теорема 4.3.3. *Справедлива така формула*

$$\psi(\mathcal{C}_2^{(n)}) = \frac{\deg(\mathcal{C}_2^{(n)})}{2}.$$

4.4. Рекурентні співвідношення для рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних та n квадратичних форм

Щоб отримати рекурентні співвідношення для рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних та n квадратичних форм, скористаємось тим фактом, що многочлени Нараяна можна виразити [54] через многочлени Лежандра. Виходячи з цього можна отримати багато комбінаторних тотожностей, в тому числі і рекурентні формули для многочленів Нараяна, формули типу Родріга і т.п.

Нагадаємо, що многочленом Лежандра $L_n(x)$ [6, с. 125] називається розв'язок такого диференціального рівняння

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}L_n(x)\right)+n(n+1)L_n(x)=0.$$

Доведено [6, с. 151], що він має вигляд

$$L_n=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right].$$

Остання формула є формулою Родріга для многочлена Лежандра.

Відома [6, с. 141] також рекурентна формула для многочлена Лежандра

$$(n+1)L_{n+1}(x)=(2n+1)xL_n(x)-nL_{n-1}(x).$$

Приєднані многочлени Лежандра визначаються [6, с. 149] за наступною формулою Родріга

$$L_n^m=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}L_n(x)$$

і є розв'язком [6, с. 149] такого диференціального рівняння

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}y(x)\right)+\left(n(n+1)\frac{m^2}{1-x^2}\right)y(x)=0.$$

Відомо [6, с. 162], що рекурентне співвідношення для приєднаних многочленів Лежандра при $m=-1$ має вигляд

$$(n+1)L_n^{-1}(z) = z(2n-1)L_{n-1}^{-1}(z) - (n-2)L_{n-2}^{-1}(z).$$

Лема 4.4.1.([54]) *Многочлен Нараяна типу B виражається через многочлен Лежандра*

$$W_n(z) = (1-z)^n L_n\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Доведемо, що многочлен Нараяна $N_n(z)$ можна виразити через приєднані многочлени Лежандра.

Лема 4.4.2. *Многочлен Нараяна виражається через многочлени Лежандра*

$$N_n(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}\,(1-z)^n\,L_n^{-1}\left(\frac{z+1}{1-z}\right).$$

Доведення. Відомо [6, с. 149], що при $m=-1$ приєднаний многочлен Лежандра можна виразити таким чином

$$L_n^{-1}(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\int\limits_1^z L_n(x)dx.$$

Маємо

$$\frac{1}{\sqrt{z}}\,(1-z)^n\,L_n^{-1}\left(\frac{z+1}{1-z}\right) = \frac{1}{\sqrt{z}}\,(1-z)^n\,\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{z+1}{1-z}\right)^2-1}}\int\limits_1^{\frac{z+1}{1-z}} L_n(x)dx =$$

$$= \frac{(1-z)^{n+1}}{2z}\int\limits_1^{\frac{z+1}{1-z}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{2n-k}{n}(\frac{x-1}{2})^{n-k}dx =$$

$$= \frac{(1-z)^{n+1}}{2z}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{2n-k}{n}\frac{(\frac{z+1}{1-z}-1)^{n-k+1}}{2^{n-k}(n-k+1)} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\binom{2n-k}{n}z^{n-k}(1-z)^k.$$

Відомо [43], що многочлен Нараяна можна обчислити згідно такої формули

$$N_n(z) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\binom{2n-k}{n}z^{n-k}(1-z)^k.$$

Звідси отримаємо твердження леми. $\diamondsuit$

Використавши відомі вирази (див., наприклад [54]) для многочленів Лежандра

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n}\frac{x^{n-2k}}{2^n} =$$
$$2^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{\frac{n+k-1}{2}}{n}x^k,$$

отримаємо такі вирази для многочленів Нараяна.

Наслідок 4.4.1. *Многочлени Нараяна можна подати у такому вигляді*

$$N_n(z) =$$
$$=\frac{1}{2^{n+1}n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{j=0}^{n-2k+1}(-1)^k\left(1-(-1)^j\right)\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n-1}\binom{n-2k+1}{j}(1-z)^{2k}z^{j-1}=$$
$$=\frac{2^{n-1}}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k+1}\left(1-(-1)^j\right)\binom{n+1}{k+1}\binom{\frac{n+k-1}{2}}{n}\binom{k+1}{j}(1-z)^{n-k}z^{j-1}.$$

Скориставшись формулою Родріга для приєднаних многочленів Лежандра, отримаємо наступне твердження.

Наслідок 4.4.2. *Формула типу Родріга для многочлена Нараяна має вигляд*

$$N_n(z) = \frac{(-1)^n(z-1)^{2n+1}}{z(n+1)!}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{z-1}\right)^{n+1}.$$

У роботі [109] Р. А. Суланке отримав таке рекурентне співвідношення для многочленів Нараяна

$$(n+1)N_n(z) = (2n-1)(1+z)N_{n-1}(z) - (n-2)(1-z)^2N_{n-2}.$$

Скористаємось рекурентним співвідношенням для многочлена Лежандра, щоб отримати рекурентне співвідношення для многочленів Нараяна типу B.

Теорема 4.4.1. *Справедлива така формула для многочленів Нараяна типу* B

$$(n+1)W_{n+1}(z) = (2n+1)(1+z)W_n(z) - n(1-z)^2 W_{n-1}(z).$$

Доведення. Перепишемо рекурентну формулу для многочлена Лежандра

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

у вигляді

$$(n+1)L_{n+1}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = (2n+1)\frac{1+z}{1-z}P_n\left(\frac{1+z}{1-z}\right) - nP_{n-1}\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Формуємо потрібні вирази, домноживши на $(1-z)^{n+1}$

$$(n+1)(1-z)^{n+1}L_{n+1}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) =$$
$$= (2n+1)(1-z)^{n+1}\frac{1+z}{1-z}P_n\left(\frac{1+z}{1-z}\right) - n(1-z)^{n+1}P_{n-1}\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Після спрощення отримаємо

$$(n+1)W_{n+1}(z) = (2n+1)(1+z)W_n(z) - n(1-z)^2 W_{n-1}(z).$$

$\diamondsuit$

У теоремах 4.2.1 і 4.3.1 ряди Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n)}, z)$ і $\mathcal{P}(\mathcal{I}_2^{(n)}, z)$ виражаються через такі многочлени:

$$R_n(z^2) := W_{n-1}(z^2) + nzN_{n-1}(z^2) \quad \text{і}$$

$$R_n^*(z^2) := W_{n-1}(z^2) - nzN_{n-1}(z^2).$$

Обчислимо рекурентні формули для многочленів $R_n(z^2)$ і $R_n^*(z^2)$, використовуючи рекурентні формули для многочленів Нараяна.

Лема 4.4.3. *Справедливі такі формули:*

$$(n-1)(n-2)R_n(z^2) = 2(2n-5)(n-2)(1+z^2)R_{n-1}(z^2)-$$
$$-2(3(n-3)^2(1+z^4)+2(n-2)(n-4)z^2)R_{n-2}(z^2)+$$
$$+2\ (2\,n-7)\,(n-4)\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)^2 R_{n-3}(z^2)-$$
$$-\,(n-5)\,(n-4)\left(1-z^2\right)^4 R_{n-4}(z^2);$$
$$(n-1)(n-2)R^*_n(z^2) = 2(2n-5)(n-2)(1+z^2)R^*_{n-1}(z^2)-$$
$$-2(3(n-3)^2(1+z^4)+2(n-2)(n-4)z^2)R^*_{n-2}(z^2)+$$
$$+2\ (2\,n-7)\,(n-4)\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)^2 R^*_{n-3}(z^2)-$$
$$-\,(n-5)\,(n-4)\left(1-z^2\right)^4 R^*_{n-4}(z^2).$$

Доведення. Застосуємо декілька разів рекурентні формули для рядів Нараяна обох типів, щоб виразити $R_n(z^2)$ через $N_{n-4}(z^2), W_{n-4}(z^2), N_{n-5}(z^2)$ та $W_{n-5}(z^2)$. Отримаємо

$$(n-1)(n-2)R_n(z^2) = (2n-3)(n-2)(1+z^2)W_{n-2}(z^2)-$$
$$-(n-2)^2(1-z^2)^2W_{n-3}(z^2)+(n-1)(n-2)(2n-3)(1+z^2)zN_{n-2}(z^2)-$$
$$-(n-1)(n-2)(n-3)(1-z^2)^2zN_{n-3}(z^2) =$$

$$= \big((2n-3)(2n-5)(2n-7)(1+z^2)^3 -$$
$$-\,((n-2)^2(2n-7)+(n-3)^2(2n-3))(1-z^2)^2(1+z^2)\big)\,W_{n-4}(z^2)+$$
$$+\left((n-2)^2(n-4)(1-z^2)^4-(2n-3)(2n-5)(n-4)(1+z^2)^2(1-z^2)^2\right)W_{n-5}(z^2)+$$
$$+\left(\frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)}{(n-1)(n-2)}(1+z^2)^3-\left(\frac{(n-3)(2n-7)}{n-2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,\frac{(n-4)(2n-3)}{n-1}\right)(1-z^2)^2(1+z^2)\right)(n-1)(n-2)nN_{n-4}(z^2)+$$
$$+\,\big((n-1)(n-3)(n-5)(1-z^2)^4 -$$
$$-\,(2n-3)(2n-5)(n-5)(1+z^2)^2(1-z^2)^2\big)\,nN_{n-5}(z^2).$$

Далі згрупуємо доданки, відповідно до коефіцієнтів, які потрібно отримати перед $R_{n-1}(z^2)$, $R_{n-2}(z^2)$, $R_{n-3}(z^2)$ та $R_{n-4}(z^2)$. Після нескладних обчислень отримаємо

$$
\begin{gathered}
(n-1)(n-2)R_n(z^2) = \\
= 2(2n-5)(n-2)(1+z^2)\left(W_{n-2}(z^2)+(n-1)zN_{n-2}(z^2)\right) - \\
-((2n-5)(2n-7)(1+z^2)^2+(2n^2-12n+19)(1-z^2)^2)\times \\
\times\left(W_{n-3}(z^2)+(n-2)zN_{n-3}(z^2)\right) + \\
+2\,(2\,n-7)\,(n-4)\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)^2\left(W_{n-4}(z^2)+(n-3)zN_{n-4}(z^2)\right) - \\
-\,(n-5)\,(n-4)\left(1-z^2\right)^4\left(W_{n-5}(z^2)+(n-4)zN_{n-5}(z^2)\right)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
2(2n-5)(n-2)(1+z^2)R_{n-1}(z^2)-2(3(n-3)^2(1+z^4)+ \\
+2(n-2)(n-4)z^2)R_{n-2}(z^2)+ \\
+2\,(2\,n-7)\,(n-4)\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)^2 R_{n-3}(z^2)- \\
-\,(n-5)\,(n-4)\left(1-z^2\right)^4 R_{n-4}(z^2).
\end{gathered}
$$

Доведення рекурентної форми для $R_n^*(z^2)$ повністю аналогічне. $\diamondsuit$

Теорема 4.4.2. *Ряди Пуанкаре алгебр спільних інваріантів і коваріантів n лінійних та n квадратичних форм задовольняють таким рекурентним співвідношенням:*

1) $(n+1)(1-z^2)^2\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(n+2)},z)=(2n-1)(1+z^2)\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(n+1)},z)-(n-2)\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(n)},z);$

2) $(n-1)(n-2)(1-z^2)^4\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n)},z) =$
$= 2(2n-5)(n-2)(1+z^2)(1-z^2)^2\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n-1)},z)-$
$-2(3(n-3)^2(1+z^4)+2(n-2)(n-4)z^2)\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n-2)},z)+$
$+2\,(2\,n-7)\,(n-4)\left(1+z^2\right)\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n-3)},z)-$
$-\,(n-5)\,(n-4)\,\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n-4)},z);$

3) $(n-1)(1-z^2)^2(1-z)^2\mathcal{P}(\mathcal{C}_2^{(n)},z) =$
$= (2n-3)(1+z^2)(1-z)\mathcal{P}(\mathcal{C}_2^{(n-1)},z)-(n-2)\mathcal{P}(\mathcal{C}_2^{(n-2)},z);$

4) $(n-1)(n-2)(1-z^2)^4(1-z)^4\mathcal{P}(\mathcal{I}_2^{(n)},z)=$
$=2(2n-5)(n-2)(1+z^2)(1-z^2)^2(1-z)^3\mathcal{P}(\mathcal{I}_2^{(n-1)},z)-$
$-2(3(n-3)^2(1+z^4)+2(n-2)(n-4)z^2)(1-z)^2\mathcal{P}(\mathcal{I}_2^{(n-2)},z)+$
$+2\,(2\,n-7)\,(n-4)\left(1+z^2\right)(1-z)\mathcal{P}(\mathcal{I}_2^{(n-3)},z)-$
$-(n-5)\,(n-4)\,\mathcal{P}(\mathcal{I}_2^{(n-4)},z).$

Доведення. 1) Скористаємось рекурентною формулою для многочленів Нараяна

$$(n+1)N_n(z^2)=(2n-1)(1+z^2)N_{n-1}(z^2)-(n-2)(1-z^2)^2N_{n-2}(z^2).$$

Врахувавши, що

$$N_n(z^2)=(1-z^2)^{2n+1}\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(n+2)},z),$$

отримаємо

$$(n+1)(1-z^2)^{2n+1}\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(n+2)},z)=(2n-1)(1+z^2)(1-z^2)^{2n-1}\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(n+1)},z)-$$
$$-(n-2)(1-z^2)^2(1-z^2)^{2n-3}\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(n)},z).$$

Домноживши обидві частини останньої рівності на $\frac{1}{(1-z)^{2n-1}}$, отримаємо твердження 1 теореми.

2) Використаємо знайдену вище рекурентну формулу для многочлена $R_n(z)$

$$(n-1)(n-2)(1-z^2)^4\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n)},z)=(n-1)(n-2)(1-z^2)^4\frac{R_n(z^2)}{(1-z^2)^{2n-1}}=$$
$$=2(2n-5)(n-2)(1+z^2)(1-z^2)^2\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n-1)},z)-$$
$$-2(3(n-3)^2(1+z^4)+2(n-2)(n-4)z^2)\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n-2)},z)+$$
$$+2\,(2\,n-7)\,(n-4)\left(1+z^2\right)\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n-3)},z)-$$
$$-(n-5)\,(n-4)\,\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n-4)},z).$$

3) Вище показано, що

$$W_{n-1}(z^2)=(1-z^2)^{2n-1}(1-z)^n\mathcal{P}(\mathcal{C}_2^{(n)},z).$$

Підставивши вирази для $W_{n-1}(z^2), W_{n-2}(z^2)$ і $W_{n-3}(z^2)$ в рекурентну формулу для многочленів Нараяна типу B, після нескладних обчислень, отримаємо

$$
\begin{gathered}
(n-1)(1-z^2)^2(1-z)^2\mathcal{P}(\mathcal{C}_2^{(n)}, z) = \\
= (2n-3)(1+z^2)(1-z)\mathcal{P}(\mathcal{C}_2^{(n-1)}, z) - (n-2)\mathcal{P}(\mathcal{C}_2^{(n-2)}, z).
\end{gathered}
$$

4) У теоремі 4.3.1 доведено, що

$$
\mathcal{P}(\mathcal{I}_2^{(n)}, z) = \frac{R_n^*(z^2)}{(1-z)^{3n-1}(1+z)^{2n-1}}.
$$

Виразивши звідси $R_n^*(z^2)$ і підставивши отриманий вираз в рекурентну формулу для $R_n^*(z^2)$, отримаємо рекурентну формулу для ряду Пуанкаре алгебри спільних інваріантів n квадратичних форм. ♢

Використовуючи рекурентні формули для многочленів Нараянаобох типів, отримаємо ще один вираз для ряду Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{I}_2^{(n)}, z)$.

Наслідок 4.4.3. *Ряд Пуанкаре алгебри спільних інваріантів n квадратичних форм обчислюється за формулою*

$$
\mathcal{P}(\mathcal{I}_2^{(n)}, z) = \frac{W_{n-2}(z^2) - (n-2)zN_{n-2}(z^2)}{(1-z)^{3n-3}(1+z)^{2n-1}}.
$$

Доведення. Міркуючи аналогічно, як при доведені леми 4.4.3, отримаємо

$$
W_{n-1}(z^2) - nzN_{n-1}(z^2) = (1-z)^2(W_{n-2}(z^2) - (n-2)zN_{n-2}(z^2)).
$$

Застосувавши цю тотожність до формули ряду Пуанкаре алгебри спільних інваріантів n квадратичних форм, отриманої в теоремі 4.3.1, отримаємо твердження наслідку. ♢

Отриманий вираз для ряду Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{I}_2^{(n)}, z)$ дозволяє отримати число $\psi(\mathcal{I}_2^{(n)})$ для алгебри спільних інваріантів n квадратичних форм.

Зауважимо, що наступна теорема є окремим випадком результату, що був отриманий Поповим зовсім іншим способом. Наведемо простіше доведення цього результату, використовуючи формулу ряду Пуанкаре алгебри інваріантів отриману в наслідку 4.4.3.

Теорема 4.4.3.[97, с. 50].*Справедлива така формула*

$$\psi(\mathcal{I}_2^{(n)}) = \frac{3}{2}\deg(\mathcal{I}_2^{(n)}).$$

Доведення. Скористаємось формулою для ряду Пуанкаре спільних інваріантів n квадратичних форм, отриманою в наслідку 4.4.3. Міркуючи аналогічно, як в доведенні теореми 4.2.4, маємо

$$\begin{gathered}\psi(\mathcal{I}_2^{(n)}) = -\lim_{z\to 1}\left(\frac{W_{n-2}(z^2)-(n-2)zN_{n-2}(z^2)}{(1+z)^{2n-1}}\right)'_z = \\ = \frac{(W_{n-2}(1)-(n-2)N_{n-2}(1))\,(2n-1)}{2^{2n}} - \\ -2\frac{W'_{n-2}(1)-(n-2)N_{n-2}(1)-(n-2)N'_{n-2}(1)}{2^{2^n}}.\end{gathered}$$

Врахувавши комбінаторні тотожності

$$\begin{gathered}N_n(1) = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}, \\ W_n(1) = \binom{2n}{n}, \\ N'_n(z^2)\big|_{z=1} = 2\binom{2n-1}{n+1}, \\ W'_n(z^2)\big|_{z=1} = n\binom{2n}{n},\end{gathered}$$

до яких ми звертались в підрозділі 4.2, після нескладних дій з біноміальними коефіцієнтами, отримаємо потрібний вираз. $\diamondsuit$

4.5. Многочлени Гільберта алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних форм

Як зазначено вище, алгебри $\mathcal{I}_1^{(n)}$ спільних інваріантів n лінійних форм та $\mathcal{C}_1^{(n)}$ спільних коваріантів n лінійних форм градуйовані

$$\mathcal{I}_1^{(n)} = (\mathcal{I}_1^{(n)})_0 + (\mathcal{I}_1^{(n)})_1 + \cdots + (\mathcal{I}_1^{(n)})_m + \cdots ,$$
$$\mathcal{C}_1^{(n)} = (\mathcal{C}_1^{(n)})_0 + (\mathcal{C}_1^{(n)})_1 + \cdots + (\mathcal{C}_1^{(n)})_m + \cdots ,$$

де кожен з підпросторів $(\mathcal{C}_1^{(n)})_m, (\mathcal{I}_1^{(n)})_m$ є скінченно вимірним. Функції

$$\mathcal{H}(\mathcal{I}_1^{(n)}, m) = \dim(\mathcal{I}_1^{(n)})_m,$$
$$\mathcal{H}(\mathcal{C}_1^{(n)}, m) = \dim(\mathcal{C}_1^{(n)})_m$$

називаються [20] многочленами Гільберта алгебри спільних інваріантів n лінійних форм та многочленами Гільберта алгебри спільних коваріантів n лінійних форм відповідно. Згідно означення ряду Пуанкаре та многочлена Гільберта маємо

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(n)}, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}(\mathcal{I}_1^{(n)}, m)\, z^m,$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n)}, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}(\mathcal{C}_1^{(n)}, m)\, z^m.$$

Теорема 4.5.1. *Многочлени Гільберта алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних форм обчислюються за такими формулами:*

1) $\mathcal{H}(\mathcal{I}_1^{(n)}, m) = \begin{cases} N_{n+k-1,\, k+1}, \text{ при } m = 2k, \\ 0, \text{ при } m = 2k+1; \end{cases}$

2) $\mathcal{H}(\mathcal{C}_1^{(n)}, m) = \begin{cases} \binom{n+k-1}{k}^2, \text{ при } m=2k, \\ nN_{n+k,\, k+1}, \text{ при } m=2k+1. \end{cases}$

Доведення. 1) Для доведення рівності скористаємось виразом для ряду Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(n)}, z)$ алгебри спільних інваріантів n лінійних форм отриманим в теоремі 4.2.1. Розкладемо його в ряд Тейлора в околі точки $z=0$

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(n)},z)=\sum_{k=0}^{n-3}\binom{n-3}{k}\binom{n-2}{k}\frac{z^{2k}}{k+1}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{(2n-3)+m-1}{m}z^{2m}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\min\{k,n-3\}}\binom{n-3}{m}\binom{n-2}{m}\binom{2n+k-m-4}{k-m}\frac{1}{m+1}z^{2k}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{n-1}\sum_{m=0}^{\min\{k,n-3\}}\binom{n-3}{m}\binom{n-1}{m+1}\binom{2n+k-m-4}{k-m}.$$

Використовуючи лему 4.1.1 ($m=n-3$ і $s=1$), отримаємо

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(n)},z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n-1}\binom{n+k-2}{n-2}\binom{n+k-1}{n-2}z^{2k}.$$

З означень ряду Пуанкаре, многочлена Гільберта та чисел Нараяна слідує твердження 1 теореми.

Зауважимо, що в ході доведення цієї частини теореми ми спирались на тотожності, які справедливі при $n\geq 3$. Розглянемо випадок $n=2$. Оскільки породжуючим інваріантом алгебри спільних інваріантів двох лінійних форм є квадратичний інваріант, то її ряд Пуанкаре має вигляд

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(2)},z)=\frac{1}{1-z^2}=1+z^2+z^4+z^6+\ldots.$$

Звідси, згідно означення

$$\mathcal{H}(\mathcal{I}_1^{(2)},m)=\cos^2\frac{\pi m}{2}=N_{2+[\frac{m}{2}]-1,\,2-1}\cos^2\frac{m\pi}{2}.$$

Це доводить, що твердження 1 справедливе для $n\geq 2$.

2) Для обчислення многочленів Гільберта алгебри спільних коваріантів n лінійних форм знову скористаємось формулою для ряду Пуанкаре цієї алгебри, отриманою в теоремі 4.2.1 (при $n>1$)

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n)}, z) = \frac{W_{n-1}(z^2)}{(1-z^2)^{2n-1}} + nz\frac{N_{n-1}(z^2)}{(1-z^2)^{2n-1}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}^2 z^{2k}}{(1-z^2)^{2n-1}} + \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\binom{n}{k+1}z^{2k+1}}{(1-z^2)^{2n-1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}^2 z^{2k}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{(2n-1)+m-1}{m}z^{2m} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\binom{n}{k+1}z^{2k+1}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{(2n-1)+m-1}{m}z^{2m} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\min\{k,n-1\}}\binom{n-1}{m}^2\binom{2n+k-m-2}{k-m}z^{2k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\min\{k,n-2\}}\binom{n-2}{m}\binom{n}{m+1}\binom{k-m+2n-2}{2n-2}z^{2k+1}.$$

Скориставшись лемою 4.1.1, отримаємо

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_1^{(n)}, z) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}^2 z^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n-1}\binom{n+k}{n-1}z^{2k+1}.$$

Що доводить твердження 2 теореми при $n > 1$.

Скориставшись процедурами [27] для обчислення многочленів Гільберта алгебр спільних коваріантів бінарних форм, отримаємо $\mathcal{H}(\mathcal{C}_1^{(1)}, m) = 1$. Зазначимо, що формула, яку ми довели для $n > 1$ дає той же результат. Отже твердження 1 леми справедливе для $n \geq 1$. $\diamondsuit$

Подамо знайдені многочлени Гільберта алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних форм безпосередньо у вигляді многочлена.

Наслідок 4.5.1. *Многочлени Гільберта алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних форм обчислюються за формулами:*

1) $\mathcal{H}(\mathcal{I}_1^{(n)},m) =$

$$= \frac{1}{(n-1)!(n-2)!}\sum_{t=1}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\t\end{bmatrix}\left[\frac{m}{2}\right]^{t-1}\sum_{j=1}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\j\end{bmatrix}\left(\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)^{j-1}, \textit{при } n>1;$$

2) $\mathcal{H}(\mathcal{C}_1^{(n)},m) = \dfrac{1}{(n-1)!^2}\times$

$$\times\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\begin{bmatrix}n\\t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}\frac{m^{t+j-2}\cos^2\frac{m\pi}{2}+(m+1)^{t-1}(m-1)^{j-1}\sin^2\frac{m\pi}{2}}{2^{t+j-2}},$$

де $\begin{bmatrix}n\\t\end{bmatrix}$ *– числа Стірлінга першого роду без знаку.*

Доведення. 1) Подамо число Нараяна з формули в попередній теоремі в термінах чисел Стірлінга першого роду без знаку

$$N_{n+[\frac{m}{2}]-1,\,n-1} = \frac{1}{n-1}\binom{n+[\frac{m}{2}]-2}{n-2}\binom{n+[\frac{m}{2}]-1}{n-2} =$$

$$= \frac{\left([\frac{m}{2}]\right)_{n-1}\left([\frac{m}{2}]+1\right)_{n-1}}{(n-1)!(n-2)![\frac{m}{2}]([\frac{m}{2}]+1)} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!(n-2)!}\sum_{t=1}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\t\end{bmatrix}\left[\frac{m}{2}\right]^{t-1}\sum_{j=1}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\j\end{bmatrix}\left(\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)^{j-1}.$$

тут $(x)_n = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$ – символ Похгаммера.

Згідно доведеного в попередній теоремі

$$\mathcal{H}(\mathcal{I}_1^{(n)},m) = N_{n+[\frac{m}{2}]-1,\,n-1}\cos^2\frac{m\pi}{2} \text{ при } n>1.$$

Оскільки $\cos^2\frac{m\pi}{2}=0$ при непарному m, при $n>1$ одержимо

$$\mathcal{H}(\mathcal{I}_1^{(n)},m) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!(n-2)!}\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-1\\j\end{bmatrix}\left(\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)^{j-1}\left[\frac{m}{2}\right]^{t-1}\cos^2\frac{m\pi}{2} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!(n-2)!}\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-1\\j\end{bmatrix}\frac{m^{t-1}(m+2)^{j-1}}{2^{t+j-2}}\cos^2\frac{m\pi}{2}.$$

2) Доведення твердження повністю аналогічне доведенню попереднього пункту теореми. ♢

4.6. Многочлени Гільберта алгебр спільних інваріантів та коваріантів n квадратичних форм

Як зазначалося вище, алгебри спільних інваріантів n квадратичних форм $\mathcal{I}_2^{(n)}$ та спільних коваріантів n квадратичних форм $\mathcal{C}_2^{(n)}$ градуйовані

$$\mathcal{I}_2^{(n)} = (\mathcal{I}_2^{(n)})_0 + (\mathcal{I}_2^{(n)})_1 + \cdots + (\mathcal{I}_2^{(n)})_m + \cdots ,$$
$$\mathcal{C}_2^{(n)} = (\mathcal{C}_2^{(n)})_0 + (\mathcal{C}_2^{(n)})_1 + \cdots + (\mathcal{C}_2^{(n)})_m + \cdots ,$$

де кожен з підпросторів $(\mathcal{C}_2^{(n)})_m$ і $(\mathcal{I}_2^{(n)})_m$ – скінченно породжений. Функції

$$\mathcal{H}(\mathcal{I}_2^{(n)}, m) = \dim(\mathcal{I}_2^{(n)})_m, \quad \mathcal{H}(\mathcal{C}_2^{(n)}, m) = \dim(\mathcal{C}_2^{(n)})_m$$

називаються [20] многочленами Гільберта алгебри спільних інваріантів n квадратичних форм $\mathcal{I}_2^{(n)}$ та алгебри спільних коваріантів n квадратичних форм відповідно. Згідно означення

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_2^{(n)}, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}(\mathcal{I}_2^{(n)}, m)\, z^m, \;\; \mathcal{P}(\mathcal{C}_2^{(n)}, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}(\mathcal{C}_2^{(n)}, m)\, z^m.$$

Як і в попередньому підрозділі, використаємо формули рядів Пуанкаре алгебр $\mathcal{I}_2^{(n)}$ і $\mathcal{C}_2^{(n)}$, щоб отримати явний вигляд їх многочленів Гільберта.

Теорема 4.6.1. *Многочлени Гільберта алгебр спільних інваріантів та коваріантів n квадратичних форм обчислюються за такими формулами:*

$$1) \;\; \mathcal{H}(\mathcal{I}_2^{(n)}, m) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \binom{n+k-1}{k}^2 \binom{n+m-2k-2}{n-2} \frac{3k-m+1}{k+1}, \;\; \textit{при } m>1, n>1;$$

$$2) \;\; \mathcal{H}(\mathcal{C}_2^{(n)}, m) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \binom{n+k-1}{k}^2 \binom{n+m-2k-1}{n-1}.$$

Доведення. Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теореми 4.5.1. Скористаємось формулами для рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних та n квадратичних форм, отриманими в теоремі 4.3.1. Доведемо спочатку твердження 2.

2) Розкладемо вираз для ряду Пуанкаре алгебри $\mathcal{C}_2^{(n)}$ в ряд Тейлора в околі точки $z=0$. Згідно з доведеним в пункті 2 теореми 4.5.1 маємо

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_2^{(n)},z)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}^2 z^{2k}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{n+m-1}{m}z^m=$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{n+k-1}{k}^2\binom{n+m-2k-1}{m-2k}z^m.$$

1) Аналогічні дії проведемо для формули ряду Пуанкаре алгебри спільних інваріантів n квадратичних форм. Використовуючи теорему 4.3.1, отримаємо

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_2^{(n)},z)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}^2 z^{2k}-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n-1}\binom{n+k}{n-1}z^{2k+1}\right)\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\binom{n+m-1}{m}z^m=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[m/2]}\binom{n+k-1}{k}^2\binom{n+m-2k-1}{n-1}z^m-$$
$$-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[m/2]}\binom{n+k-1}{k}\binom{n+k}{n-1}\binom{n+m-2k-1}{n-1}z^{m+1}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{[m/2]}\binom{n+k-1}{k}^2\binom{n+m-2k-1}{n-1}-\right.$$
$$=\left.\sum_{k=0}^{[(m-1)/2]}\binom{n+k-1}{k}\binom{n+k}{n-1}\binom{n+m-2k-2}{n-1}\right)z^m.$$

Згідно означень ряду Пуанкаре та многочлена Гільберта маємо

$$
\begin{gathered}
\mathcal{H}(\mathcal{I}_2^{(n)},m)=\sum_{k=0}^{[m/2]}\binom{n+k-1}{k}^2\binom{n+m-2k-1}{n-1}-\\
-\sum_{k=0}^{[(m-1)/2]}\binom{n+k-1}{k}\binom{n+k}{n-1}\binom{n+m-2k-2}{n-1}.
\end{gathered}
$$

Оскільки

$$
\binom{n+m-2k-2}{n-1}=0,
$$

при $k>\left[\frac{m-1}{2}\right]$, одержимо

$$
\begin{gathered}
\mathcal{H}(\mathcal{I}_2^{(n)},m)=\sum_{k=0}^{[m/2]}\binom{n+k-1}{k}^2\binom{n+m-2k-1}{n-1}-\\
-\sum_{k=0}^{[m/2]}\binom{n+k-1}{k}\binom{n+k}{n-1}\binom{n+m-2k-2}{n-1}=\\
=\sum_{k=0}^{[m/2]}\binom{n+k-1}{k}^2\binom{n+m-2k-2}{n-2}\frac{3k-m+1}{k+1}.
\end{gathered}
$$

Ми використовували формули для рядів Пуанкаре $\mathcal{I}_2^{(n)}$ і $\mathcal{C}_2^{(n)}$, що були справедливі для $n>1$. Використовуючи процедури для обчислення многочленів Гільберта цих алгебр (див. [27]), отримаємо

$$
\begin{gathered}
\mathcal{H}(\mathcal{I}_2^{(1)},m)=\frac{1}{2}\cos(\pi m)+\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right),\\
\mathcal{H}(\mathcal{C}_2^{(1)},m)=\frac{m}{2}+\frac{1}{4}\cos(\pi m)+\frac{3}{4}=\left[\frac{m}{2}\right]+1.
\end{gathered}
$$

Формула для $\mathcal{H}(\mathcal{C}_2^{(n)},m)$, яку ми довели для $n>1$, дає той же результат, що доводить теорему повністю. $\diamondsuit$

Подамо отриманий вираз для многочленів Гільберта алгебри спільних коваріантів n квадратичних форм у вигляді многочлена.

Наслідок 4.6.1. *Многочлени Гільберта алгебр спільних інваріантів* *та коваріантів n квадратичних форм обчислюються за формулами:*

$$1)\quad \mathcal{H}(\mathcal{C}_2^{(n)},m)=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]}\sum_{t=1}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}^2\begin{bmatrix}n-1\\t\end{bmatrix}(m-2k)^{t-1};$$

$$2)\quad \mathcal{H}(\mathcal{I}_2^{(n)},m)=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]}\sum_{t=1}^{n-2}\binom{n+k-1}{k}\binom{n+k-1}{k+1}\begin{bmatrix}n-2\\t\end{bmatrix}(m-2k)^{t-1}(3k-m+1).$$

Доведення. 1) Згідно доведеного вище

$$\mathcal{H}(\mathcal{C}_2^{(n)},m)=\sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]}\binom{n+k-1}{k}^2\binom{n+m-2k-1}{m-2k}.$$

Міркуючи аналогічно, як при доведенні наслідку 4.5.1, отримаємо

$$\binom{n+m-2k-1}{m-2k}=\frac{\sum\limits_{t=1}^{n-1}\left[{n-1\atop t}\right](m-2k)^{t-1}}{(n-1)!}.$$

2) Доведення цього пункту аналогічне до доведення попереднього пункту теореми. $\diamondsuit$

Виразимо формули для многочленів Гільберта алгебр спільних коваріантів та інваріантів n квадратичних форм у термінах узагальненої гіпергеометричної функції. Нагадаємо, що *узагальнена гіпергеометрична функція* [56, с. 232]. є степеневим рядом відносно z з $(p+q)$ параметрами, який виражається через символ Похгаммера $(a)_k=a(a+1)\ldots(a+k-1)$ таким чином

$${}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\middle|\,z\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{h=1}^{p}(a_h)_k z^k}{\prod\limits_{j=1}^{q}(b_j)_k k!}.$$

Зазначимо, що коли хоча б один з a_i від'ємне ціле або нуль, то гіпергеометричний ряд вироджується в многочлен.

Наслідок 4.6.2. *Многочлени Гільберта алгебр спільних інваріантів та коваріантів n квадратичних форм обчислюються за формулами:*

$$1)\quad \mathcal{H}(\mathcal{C}_2^{(n)}, m) = \binom{n+m-1}{m} {}_4F_3\left[\begin{matrix} n, n, -\frac{m}{2}, -\frac{m-1}{2}, -\frac{n}{3} \\ 1, -\frac{n+m-1}{2}, -\frac{n+m-2}{2} \end{matrix}\middle| 1\right], \text{ при } n > 2;$$

$$2)\quad \mathcal{H}(\mathcal{I}_2^{(n)}, m) = (1-n)\binom{n+m-2}{m} {}_5F_4\left[\begin{matrix} n, n, -\frac{m}{2}, -\frac{m-1}{2}, -\frac{m}{3}+\frac{4}{3} \\ 1, -\frac{n+m-2}{2}, -\frac{n+m-3}{2}, -\frac{m}{3}+\frac{1}{3} \end{matrix}\middle| 1\right],$$

при $n > 3$ і $m > 1$.

Доведення. 1) Згідно попередньої теореми

$$\mathcal{H}(\mathcal{C}_2^{(n)}, m) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \binom{n+k-1}{k}^2 \binom{n+m-2k-1}{m-2k}.$$

Оскільки

$$\binom{n+m-2k-1}{m-2k} = 0$$

при $2k > m$, то верхню межу цієї суми можна замінити нескінченністю

$$\mathcal{H}(\mathcal{C}_2^{(n)}, m) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k}^2 \binom{n+m-2k-1}{m-2k}.$$

Виразимо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k}^2 \binom{n+m-2k-1}{m-2k}$$

у вигляді узагальненої гіпергеометричної функції аналогічно до того, як це зроблено в [56, с. 235–236]. Для цього спочатку позначимо вираз під сумою через a_k

$$a_k = \binom{n+k-1}{k}^2 \binom{n+m-2k-1}{m-2k}.$$

Маємо

$$a_0 = \binom{n+m-1}{m},$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+n)^2(k-\frac{m}{2})(k-\frac{m-1}{2})}{(k+1)^2(k-\frac{n+m-1}{2})(k-\frac{n+m-2}{2})}.$$

Звідси випливає, що

$$\mathcal{H}(\mathcal{C}_2^{(n)}, m) = \binom{n+m-1}{m} {}_4F_3\left[\begin{matrix} n, n, -\frac{m}{2}, -\frac{m-1}{2} \\ 1, -\frac{n+m-1}{2}, -\frac{n+m-2}{2} \end{matrix} \middle| 1\right].$$

2) Застосувавши цей же підхід до формули для $\mathcal{H}(\mathcal{I}_2^{(n)}, m)$, отриманої в останній теоремі, одержимо потрібне твердження. $\diamondsuit$

4.7. Особливі випадки

Отримані формули для рядів Пуанкаре та степенів алгебр SL_2-інваріантів не визначені для таких тривіальних випадків:

- алгебра коваріантів бінарної d форми для випадку $d = 1$, оскільки формули для ряду Пуанкаре (див. теорему 2.1.1 та теорему 4.2.2) та формули для обчислення степеня цієї алгебри (див. теорему 2.2.2 та теорему 4.2.3) містять функції, що не є визначеними при $d = 1$;
- алгебри спільних інваріантів одної та двох лінійних форм (теорема 4.2.2 та теорема 4.2.3);
- алгебра інваріантів однієї квадратичної форми (теорема 4.3.2 та теорема 4.3.3).

У цьому підрозділі наведемо ряди Пуанкаре та степені вказаних алгебр.

Ряд Пуанкаре алгебри спільних інваріантів двох лінійних форм обчислено у доведені теореми 4.5.1:

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(2)}, z) = \frac{1}{1-z^2}.$$

Породжуючим інваріантом алгебри інваріантів однієї квадратичної форми також є квадратичний інваріант, тому

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_2, z) = \mathcal{P}(\mathcal{I}_1^{(2)}, z) = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \ldots = \frac{1}{1-z^2}.$$

Коефіцієнти перших доданків розкладу вказаної функції в ряд Лорана в околі точки $z = 1$ такі:

$$\deg(\mathcal{I}_1^{(2)}) = \deg(\mathcal{I}_2) = \frac{1}{2},$$

$$\psi(\mathcal{I}_1^{(2)}) = \deg(\mathcal{I}_2) = \frac{1}{4}.$$

Скориставшись [28], отримаємо

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_1, z) = \frac{1}{1-z},$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_1, z) = 1.$$

Звідси, за означенням степеня алгебри, маємо

$$\deg(\mathcal{C}_1) = 1, \psi(\mathcal{C}_1) = 0,$$

$$\deg(\mathcal{I}_1) = 1, \psi(\mathcal{I}_1) = 0.$$

Висновки до розділу 4

У цьому розділі досліджуються ряди Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних та n квадратичних форм.

Зокрема, суттєво спрощено формули для рядів Пуанкаре цих алгебр. Знайдено рекурентні співвідношення для рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних та n квадратичних форм. Обчислено коефіцієнти перших двох доданків розкладу рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних та n квадратичних форм в ряд Лорана в околі точки $z = 1$. Знайдено інтегральне зображення та асимптотичну поведінку цих коефіцієнтів.

Обчислено многочлени Гільберта алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних форм і алгебр спільних інваріантів та коваріантів n квадратичних форм в явному вигляді.

Крім того, отримано тотожності з многочленами Нараяна обох типів . Зокрема, знайдено формулу типу Родріга для многочлена Нараяна.

Результати наведені у цьому розділі опубліковані в таких працях: [64], [66], [67].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню алгебр SL_n-інваріантів, зокрема, обчисленню степенів цих алгебр та дослідженню їх рядів Пуанкаре.

В дисертаційній роботі отримано такі результати:

1. Обчислено коефіцієнти перших двох доданків розкладу ряду Пуанкаре алгебри коваріантів бінарної d-форми $\mathcal{P}(\mathcal{C}_d, z)$ в ряд Лорана в околі точки $z = 1$; знайдено інтегральне зображення та асимптотику цих коефіцієнтів.

2. Обчислено степені алгебр спільних інваріантів та коваріантів двох бінарних форм.

3. Обчислено коефіцієнти перших доданків розкладу в ряд Лорана в околі точки $z = 1$ рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів і спільних коваріантів n лінійних та n квадратичних форм; знайдено асимптотику цих коефіцієнтів; крім цього, для алгебр спільних інваріантів і спільних коваріантів n лінійних та n квадратичних форм отримано явні формули многочленів Гільберта та суттєво спрощено вирази для рядів Пуанкаре цих алгебр.

4. Отримано нові комбінаторні тотожності для многочленів Нараяна обох типів від аргументу парного степеня.

Відкритими залишились задачі обчислення степенів алгебр інваріантів тернарної та кватернарної форм, та алгебр спільних інваріантів більш ніж двох бінарних форм, порядких яких більші, ніж 2. Результати дисертаційної роботи можна застосувати в теорії інваріантів, комутативній алгебрі, алгебраїчній геометрії, теорії зображень груп та комбінаториці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аржанцев И. В. Градуированные алгебры и 14-я проблема Гильберта: Учебное пособие. – М.: МЦНМО, 2019. – 64 с.

2. Бедратюк Л. П., Бедратюк С. Л. Повна система коваріантів бінарної форми восьмого порядку // Математичний вісник НТШ. – 2008. – Т. 5. – С. 11–22.

3. Бедратюк Л. П. Аналог формули Келлі–Сильвестра та ряди Пуанкаре алгебр інваріантів тернарної форми // Український математичний журнал. – Т. 62, № 11 – 2010 — P. 1561–1570.

4. Бедратюк Л. П. Ряди Пуанкаре алгебр інваріантів бінарної і тернарної форм // Наукові записки НАУКМА. Фізико-математичні науки. – 2011. – Т. 113. – С. 7–11.

5. Бедратюк Л. П. Ряди Пуанкаре мультиградуйованих алгебр SL_2-інваріантів // Український математичний журнал. – 2011. – Т. 63, № 6. – С. 755–763.

6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1965. – 296 с.

7. Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. – М.:ВИНИТИ, 1989. – Т. 55. – С. 137–310.

8. Дискмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. – М.: Мир, 1978. – 408 с.

9. Егорычев Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. – Новосибирск: Наука, 1977. – 285 с.

10. Ілаш Н. Б. Степінь алгебри коваріантів двох бінарних форм // Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки. – 2015. – № 1/2. – С. 37–45.

11. Ілаш Н. Б. Асимптотична поведінка рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів n лінійних форм // II Всеукраїнська науково-практична конференція молодих вчених „Сучасні тенденції у розвитку науки та освіти“ (Кам'янець-Подільський, 24 березня 2016 р.) : збірник матеріалів. – Кам'янець-Подільський: ТОВ «Друкарня Рута», 2016. – С. 112–117.

12. Ілаш Н. Б. Використання процедурного програмування системи комп'ютерної алгебри Maple для перевірки степеня алгебр інваріантів бінарних форм // Восьма науково-технічна конференція „Актуальні проблеми комп'ютерних технологій 2014“ (Хмельницький, 21–22 травня, 2014) : Збірник наукових праць. – Хмельницький : ХНУ, 2014. – С. 147–152.

13. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитианалитических функций. – М.: Наука, 1961. – 388 с.

14. Риордан Д. Комбинаторные тождества. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

15. Alexeev N., Tikhomirov A. Singular Values Distribution of Squares of Elliptic Random Matrices and type B Narayana Polynomials // J. Theoret. Probab. – 2017. – Vol. 30, № 3. – P. 1170–1190.

16. Aronhold S. Theorie der homogenen Functionen dritten Gradesvon drei Veränderlichen // J. Reine Angew. Math. – 1858. – Vol. 55. – S. 97–191.

17. Bedratyuk L. On complete system of invariants for the binary form of degree 7 // J. Symbolic Comput. – 2007. – Vol. 42, № 10. – P. 935-947.

18. Bedratyuk L. A complete minimal system of covariants for the binary form of degree 7 // J. Symbolic Comput. – 2009. – Vol. 44, № 2. – P. 211-220.

19. Bedratyuk L. The Poincaré series of the algebras of simultaneous invariants and covariants of two binary forms // Linear Multilinear Algebra. – 2010. – Vol. 58, № 6. – P. 789–803.

20. Bedratyuk L. Weitzenböck derivations and the classical invariant theory, I: Poincaré series // Serdica Math. J. – 2010. – Vol. 36, № 2. – P. 99–120.

21. Bedratyuk L. Analogue of the Cayley-Sylvester formula and the Poincaré series for the algebra of invariants of n-ary form // Linear Multilinear Algebra. – 2011. – Vol. 59, № 9. – P. 911–925.

22. Bedratyuk L., Xin G. MacMahon Partition Analysis and the Poincaré series of the algebras of invariants of ternary and quaternary forms // Linear Multilinear Algebra. – 2011. – Vol. 59, № 7. – P. 789–799.

23. Bedratyuk L. The bivariate Poincaré series for the algebra of covariants of a binary form // ISRN Algebra. –Електрон. текст. дані. – 2011. – DOI: 10.5402/2011/312789 (дата звернення: 15.02.2019).

24. Bedratyuk L. Weitzenböck derivations and the classical invariant theory, II: The symbolic method // Serdica Math. J. – 2011. – Vol. 37, № 2. – P. 87–106.

25. Bedratyuk L. The Poincaré series of the covariants of binary forms // International Journal of Algebra. – 2010. – Vol. 4, № 25. – P. 1201–1207.

26. Bedratyuk L., Ilash N. The degree of the algebra of covariants of a binary form // J. Commut. Algebra. – 2015. – Vol. 7, № 4. – P. 459–472.

27. Bedratyuk L. Hilbert polynomials of the algebras of SL_2-invariants // arXiv. – Електрон. текст. дані. – 2011. – URL: https://arxiv.org/abs/1102.3290 (дата звернення: 15.02.2019).

28. Bedratyuk L. The MAPLE package for calculating Poincaré series // arXiv. – Електрон. текст. дані. – 2011. – URL: https://arxiv.org/abs/1006.5372 (дата звернення: 15.02.2019).

29. Benson D. Polynomial invariants of finite groups. – London: Cambridge University Press, 1993. – 118 p.

30. Benson D. J. , Crawley-Boevey W. W. A ramication formula for Poincaré series, and a hyperplane formulafor modular invariants // Bull. London Math. Soc. – 1995. – Vol. 27, № 5. – P. 435–440.

31. Boole G. Exposition of a general theory of linear transformations, parts I, II // The Cambridge mathematical journal. – 1843. – № 3. – PP. 1–20, 106–119.

32. Brenti F. Hilbert Polynomials in Combinatorics // J. Algebraic Combin. – 1998. – Vol. 7. – P. 127–156.

33. Brion M. Invariants de plusieurs formes binaires // Bull. Soc. Math. Fr. – 1982. – Vol. 110. – P. 429–445.

34. Broer B. A new method for calculating Hilbert series // J. Algebra. – 1994. – Vol. 168. – P. 43–70.

35. Brouwer A. E., Popoviciu M. The invariants of the binary nonic // J. Symb. Comput. – 2010. – Vol. 45, № 6. – P. 709–720.

36. Brouwer A. E., Popoviciu M. The invariants of the binary decimic // J. Symb. Comput. – 2010. – Vol. 45, № 8. – P. 837–843.

37. Brouwer A. E., Popoviciu M. SL_2-modules of small homological dimension // Transform. Groups. – 2011. – Vol. 16. – P. 599–617.

38. Bruns W., Herzog J. Cohen-Macaulay rings. – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – 453 p.

39. Bruns W., Ichim B. On the coefficients of Hilbert quasipolynomials // Proc. Amer. Math. Soc. – 2007. – Vol. 135, № 5. – P. 1305–1308.

40. Cayley A. On the theory of Linear transformations // The Cambridge mathematical journal. – 1845. – № 4. - P. 193–209.

41. Cayley A. On linear transformations // The Cambridge and Dublin Mathematical Journal. – 1846. – № 1. – P. 104—122.

42. Cayley A. Mémorie sur les Hyperdéterminants // J. Reine Angew. Math. – 1846. – Vol. 30. – P. 1–37.

43. Chen W. Y. C., Pang S. X. M. On the combinatorics of the Pfaff identity // Discrete Math. – 2009. – Vol. 309. – P. 2190–2196.

44. Cowie L. E., Herbig H.-C. , Herden D., Seaton C. The Hilbert series and $a-$invariant of circle invariants // J. Pure Appl. Algebra. – 2019. – Vol. 223, № 1. – P. 395–421.

45. Derksen H., Kemper G. Computational Invariant Theory. – New York: Springer-Verlag, 2002. – 241 p.

46. Dolgachev I. Lectures on invariant theory. – Cambridge: London Mathematical Society, 2003. – 232 p.

47. Edwards J. A Treatise on the Integral Calculus: With Applications, Examples, and Problems. – London: Macmillan and Co Limited, 1922.

48. Eisenbud D. The geometry of syzygies. A second course in commutative algebra and algebraic geometry. – NY: Springer, 2005. – 246 p.

49. von Gall A. Das vollständige Formensystem der binären Form achter Ordnung // Math. Ann. – 1880. – Vol. 17. – PP. 31–51, 139–152.

50. von Gall A. Das vollständige Formensystem der binären Form 7^{ter} Ordnung // Math. Ann. – 1888. – № 3. – P. 318–336.

51. Gordan P. Invariantentheorie. – Leipzig: Chelsea Publ. Co., 1987.–354 s.

52. Gordan P. Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer binдren Form eine ganze Function mit numerischen Coefficienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist // J. Reine Angew. Math. – 1868. – Vol. 69. – S. 323–354.

53. Goto S., Watanabe K. On graded rings // I. J. Math. Soc. Japan. – 1978. – Vol. 30, № 2. – P. 179–213.

54. Gould H. W. Combinatorial Identities: Table II: Advanced Techniques for Summing Finite Series. From the seven unpublished manuscripts of H. W. Gould Edited and Compiled by Jocelyn Quaintance. – Електрон. текст. дані. – URL: http://www.math.wvu.edu/ gould/Vol.5.PDF (дата звернення: 06.09.17)

55. Graham R., Riordan G. The Solution of a Certain Recurrence // Amer. Math. Monthly. – 1966. – Vol. 73, № 6. – P. 604–608.

56. Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science. – MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1994. – xiv+657 p.

57. Grilly T. The decline of Cayley's invariant theory (1863–1895) // Historia Math. – 1988. – Vol. 15, № 4. – P. 332–347.

58. Grosshans F. D. Algebraic Homogeneous Spaces and Invariant Theory. – Berlin: Springerr-Verlag, 1997. – 148 p.

59. Hilbert D. Über die Theorie der algebraischen Formen // Math. Ann. – 1890. – Vol. 36, № 4. – S. 473–534.

60. Hilbert D. Über die vollen Invariantensysteme // Math. Ann. – 1893. – Vol. 42. – S. 313–373.

61. Hilbert D. Theory of algebraic invariants. – Cambridge University Press, 1993. – 191 p.

62. Huang I-C. Pseudofunctors onmodules with zero dimensional support. – Proc. Amer. Math. Soc., 1995. – xii+53 p.

63. Huang I-C. Applications of residues to combinatorial identities // Proc. Amer. Math. Soc. – 1997. – Vol. 125, № 4. – P. 1011–1017.

64. Ilash N. The Poincaré series for the algebras of joint invariants and covariants of n linear forms. // C. R. Acad. Bulgare Sci. – 2015. – Vol. 68, № 6 – P. 715-724.

65. Ilash N. B. The degree of the algebra of joint invariants of two binary forms // Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки. – 2016. – № 1/2 – С. 28–34.

66. Ilash N. B. Poincaré series for the algebras of joint invariants and covariants of n quadratic forms // Carpathian Math. Publ. – 2017. – Vol. 9, № 1. – P. 57–62.

67. Ilash N. B. Hilbert polynomials of the algebras of SL_2-invariants // Carpathian Math. Publ. – 2018. – Vol. 10, № 2. – P. 303–312.

68. Ilash N. Asymptotic behavior of the degree of an algebra of SL_2-invariants // 9th International Algebraic Conference in Ukraine (Lviv, July 8–13, 2013) : Abstracts. – Lviv, 2013. – P. 77.

69. Ilash N. B. The degree of an algebra of SL_2-invariants // International Algebraic Conference dedicated to the 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin (Kyiv, July 7-12, 2014) : Abstracts of reports. — Kyiv, 2014. – P. 35–36.

70. Ilash N. The degrees for the algebras of joint invariants and covariants of n linear and n quadratic forms // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd (Odessa, August 20 –27, 2015) : Abstracts. – Odessa : TES, 2015. – P. 49.

71. Ilash N. B. The Poincar'e series for the algebras of joint invariants and covariants of linear forms // International Conference of Young Mathematicians (Kyiv, June 3–6, 2015) : Abstracts. – Kyiv : Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015. – P. 12.

72. Ilash N. B. Recurrence relation for the Poincaré series of the algebras of SL_2-invariants // International Mathematical Conference „Group and Actions: Geometry and Dynamics“ dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy (Kyiv, December 19–22, 2016) : Abstracts of reports. – Kyiv, 2016. – P. 25-26.

73. Ilash N. B. Hilbert polynomials of the algebras of SL_2-invariants // XI International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko (Kyiv, July 3–7, 2017) : Abstracts. – Kyiv, 2017. – P. 52.

74. Kempf G. R. Instability in invariant theory // Ann. of Math. – 1978. – Vol. 106. – P. 299–316.

75. Kraft H. Geometrische Methoden in der Invariantentheorie, Aspects of Mathematics. – Braunschweig: Friedr. Vieweg and Sohn, 1984. – 308 s.

76. Kreveras G. Sur les partitions non cro isées d'un cycle // Descrete Math. – 1972. – Vol. 4, № 1. – P. 333–350.

77. Kung J. P. S., Rota G.-C. The invariant theory of binary forms // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) – 1984. – Vol. 10. – P. 27–85.

78. Lassalle M. Narayana polynomials and Hall-Littlewood symmetric functions // Adv. in Appl. Math. – 2012. – Vol. 49, № 3. – P. 239–262.

79. Littelman P., Procesi C. On the Poincaré series of the invariants of binary forms // J. Algebra. – 1990. – Vol. 133, № 2. – P. 490–499.

80. Luna D. Sur les orbites fermées des groupes algébriques róductifs // Invent. Math. – 1972. – Vol. 16. – P. 1–5.

81. Macdonald I. Symmetric functions and Hall polynomials. – Oxford: Oxford University Press, 1998. – 475 p.

82. MacMahon P. A. Combinatory Analysis. – Cambridge: Cambridge University Press, 1916. – 512 p.

83. Mansour T., Suna Y. Identities involving Narayana polynomials and Catalan numbers // Descrete Math. – 2009. – Vol. 309, № 12. – P. 4079–4088.

84. Mansour T. Dyck Paths and partial Bell polynomials // Australas. J. Combin. – 2008. – Vol. 42. – P. 285–297.

85. Molien T. Über die Invarianten der linearen Substitutionsgruppen // Sitz. König. Preuss. Akad. Wiss. – 1897. – № 52. – P. 1152–1156.

86. Mukai S. An introduction to invariants and moduli. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. – 318 p.

87. Mumford D. Geometric invariant theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1965. – 145 p.

88. Naimark M., Stern A. Theory of group representations. – New York: Springer-Verlag, 1982. – 432 p.

89. Nagata M. On the 14-th problem of Hilbert // Amer. J. Math. – 1959. – Vol. 81. – P. 766–772.

90. Nagata M. Lectures on the fourteenth problem of Hilbert. – Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1965. – 78 p.

91. Naimark M., Stern A. Theory of group representations. – New York: Springer-Verlag, 1982. – 432 p.

92. Olver P. Classical invariant theory. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999. – 280 p.

93. Penson K. A., Sixdeniers J.-M. Integral representations of Catalan and related numbers // Journal of Integer Sequences. – 2001. – Vol. 4. – URL: https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL4/SIXDENIERS/Catalan.pdf (дата звернення: 15.02.2019).

94. Poincaré H. Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires // J. de l'Éc. Pol. – 1881. – Vol. 50. – P. 199–253.

95. Popov V. Hilbert's theorem on invariants // Soviet Math. Dokl. – 1979. – Vol. 20. – P. 1318–1322.

96. Popov V. Homological dimension of algebras of invariants // J. Reine Angew. Math. – 1983. – Vol. 341. – P. 157–173.

97. Popov V. L. Groups, generators, syzygies, and orbits in invariant theory. Transl. Math. Mono. 100. – Providence, RI: American Mathematical Society, 1992. – 248 p.

98. Robbiano L. Introduction to the Theory of Hilbert Function // Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics. – 1990. – Vol. 85. – P. 1–26.

99. Roberts M. The covariants of a binary quantic of the n-th degree // Quarterly J. Math. – 1861. – Vol. 4. – P. 168–178.

100. Schur I. Vorlesungen über Invariantentheorie. – Berlin: Springer, 1968. – 134 s.

101. Shi X.-T, Liu F.-F., Qi F. An integral representation of the Catalan numbers // Global Journal of Mathematical Analysis. – 2015. – Vol. 3, № 3. – P. 130–133.

102. Simion R. Combinatorial statistics on noncrossing partitions. // J. Combin. Theory Ser. A. – 1994. – Vol. 66, № 2. – P. 270–301.

103. Springer T. A. On the invariant theory of SU_2 // Indag. Math. – 1980. – Vol. 42. – P. 339–345.

104. Springer T. Invariant theory // Lecture Notes in Math. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1977. – Vol. 585. – P. 1–110.

105. Stanley R. Hilbert functions of graded algebras // Adv. Math. – 1978. – Vol. 28. – P. 57–83.

106. Stanley R. Invariants of finite groups and their applications to combinatorics // Bull. Amer. Math. Soc. – 1979. – № 1. – P. 475—511.

107. Stanley R. Bijective proof problems, 2009. URL: http://www-math.mit.edu/ rstan/bij.pdf/ (дата звернення: 06.09.17).

108. Sturmfels B. Algorithms in invariant theory. Texts and Monographs in Symbolic Computation. – Wien: Springer, 2008. – 197 p.

109. Sulanke R. A. The Narayana distribution. Special issue on lattice path combinatorics and applications // J. Statist. Plann. Inference. – 2002. – Vol. 101, № 1–2. – P. 311–326.

110. Sylvester J. J. Sur les covariants fondamentaux d'un systéme cubo-biquadratique binaire // Comptes Rendus. – 1878. – Vol. 87. – PP. 242–244, 287–289.

111. Sylvester J. J. Sur le vrai nombre des formes irréductibles du systéme cubo-biquadratique // Comptes Rendus. – 1878. – Vol. 87. – P. 445–447.

112. Sylvester J. J. Détermination du nombre exact des covariants irréductibles du systéme cubo-biquadratique binaire // Comptes Rendus. – 1878. – Vol. 87. – P. 477–481.

113. Sylvester, J. J. Sur les invariants // Comptes Rendus. – 1878. – Vol. 85. – P. 992–995, 1035–1039, 1091–1093.

114. Sylvester J. J. Proof of the hitherto undemonstrated fundamental theorems of invariants // Phil. Magazine. – 1878. – P. 178–188.

115. Sylvester J. J. Tables of the generating functions and groundforms for simultaneous binary quantic of the first four ordres, taken two and two together // Amer. J. Math. – 1879. – Vol. 2. – P.293–306.

116. Sylvester J. J. Tables of generating functions, reduced and representative for certain ternary systems of binary forms // Amer. J. Math. – 1883. – Vol. 5. – P. 241–251.

117. Sylvester J. J. Tables of the generating functions and groundforms of the binary duodecimic, with some general remarks, and tables of the irreducible syzigies of certain quantics // Amer. J. Math. – 1881. – Vol. 4. – P. 41–62.

118. Sylvester J. J. Table des nombres de dérivées invariantives d'ordre et de degré donnés, appartenant á la forme binaire du dixiéme ordre // Comptes Rendus. – 1880. – Vol. 89. – P. 395–396.

119. Sylvester J. J. Demonstration of the impossibility of the binary octavic possessing any groundform of degorder 10.4 // Amer. J. Math. – 1881. – Vol. 4. – P. 62–85.

120. Székely L. Common origin of cubic binomial identities; a generalization of Surányi's proof on Le Jen Shoo's formula // J. Combin. Theory Ser. A. – 1985. – Vol. 40. – P. 171–174.

121. Weitzenböck R. Invariantentheorie. – Groningen: P. Noordhoff, 1923. – 320 s.

122. Weitzenböck R. Über die Invarianten von linearen Gruppen // Acta Math. – 1932. – Vol. 58. – P. 231–293.

123. Weyl H. Classical groups: Their Invariants and Representations. – Princeton: Princeton Univer. Press, 1946. – 320 p.

124. Wolfson P. R. George Boole and the origins of invariant theory // Historia Math. – 2008. – Vol. 35. – P. 37–46.

125. Young A. The irreducible concomitants of any number of binary quartics // Proc. London Math. Soc. – 1899. – Vol. 30. – P. 290–307.

126. Zeilberger D. Six etudes in generating functions // Int. J. Comput. Math. – 1989. – Vol. 29, № 2–4. – P. 201–215.

ДОДАТКИ

Список публікацій за темою дисертації

1. Bedratyuk L., Ilash N. The degree of the algebra of covariants of a binary form // J. Commut. Algebra. – 2015. – Vol. 7, № 4. – P. 459–472.

2. Ilash N. The Poincaré series for the algebras of joint invariants and covariants of n linear forms // C. R. Acad. Bulgare Sci. – 2015. – Vol. 68, № 6. – P. 715–724.

3. Ілаш Н. Б. Степінь алгебри коваріантів двох бінарних форм // Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки. – 2015. – № 1/2. – С. 37–45.

4. Ilash N. B. The degree of the algebra of joint invariants of two binary forms // Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки. – 2016. – № 1/2. – С. 28–34.

5. Ilash N. B. Poincaré series for the algebras of joint invariants and covariants of n quadratic forms // Carpathian Math. Publ. – 2017. – Vol. 9, № 1. – P. 57–62.

6. Ilash N. B. Hilbert polynomials of the algebras of SL_2-invariants // Carpathian Math. Publ. – 2018. – Vol. 10, № 2. – P. 303–312.

7. Ilash N. Asymptotic behavior of the degree of an algebra of SL_2-invariants // 9th International Algebraic Conference in Ukraine (Lviv, July 8-13, 2013) : Abstracts. – Lviv, 2013. – P. 77.

8. Ilash N. B. The degree of an algebra of SL_2-invariants // International Algebraic Conference dedicated to the 100th anniversary of L.A.Kaluzhnin (Kyiv, July 7-12, 2014) : Abstracts of reports. — Kyiv, 2014. – P. 35–36.

9. Ілаш Н. Б. Використання процедурного програмування системи комп'ютерної алгебри Maple для перевірки степеня алгебр інваріантів бінарних форм // Восьма науково-технічна конференція „Актуальні проблеми комп'ютерних технологій 2014“ (Хмельницький, 21–22 травня, 2014) : Збірник наукових праць. – Хмельницький : ХНУ, 2014. – С. 147–152.

10. Ilash N. The degrees for the algebras of joint invariants and covariants of n linear and n quadratic forms // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd (Odessa, August 20 –27, 2015) : Abstracts. – Odessa : TES, 2015. – P. 49.

11. Ilash N. B. The Poincar'e series for the algebras of joint invariants and covariants of linear forms // International Conference of Young Mathematicians (Kyiv, June 3–6, 2015) : Abstracts. – Kyiv : Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015. – P. 12.

12. Ilash N. B. Recurrence relation for the Poincaré series of the algebras of SL_2-invariants // International Mathematical Conference „Group and Actions: Geometry and Dynamics“ dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy (Kyiv, December 19–22, 2016) : Abstracts of reports. – Kyiv, 2016. – P. 25-26.

13. Ілаш Н. Б. Асимптотична поведінка рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів n лінійних форм // ІІ Всеукраїнська науково-практична конференція молодих вчених „Сучасні тенденції у розвитку науки та освіти“ (Кам'янець-Подільський, 24 березня 2016 р.) : Збірник матеріалів. – Кам'янець-Подільський: ТОВ „Друкарня Рута“, 2016. – С. 112–117.

14. Ilash N. B. Hilbert polynomials of the algebras of SL_2-invariants // XI International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anni-

versary of V. V. Kirichenko (Kyiv, July 3–7, 2017) : Abstracts. – Kyiv, 2017. – P. 52.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Результати дисертації доповідалися і обговорювалися на таких конференціях та семінарах:

- IX Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні(Львів, 8–13 липня 2013 р.);
- Міжнародній алгебраїчній конференції присвяченій 100-річчю від дня народження Л. А. Калужніна (Київ, 7–12 липня 2014 р.);
- VIII Міжнародній науково-технічній конференції „Актуальні проблеми комп'ютерних технологій 2014“ (Хмельницький, 21–22 травня 2014 р.);
- X Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю від дня народження Ю. А. Дрозда (Одеса, 20–27 серпня 2015 р.);
- Міжнародній конференції молодих математиків (Київ, 3–6 червня 2015 р.);
- Всеукраїнській науково-практичній конференції молодих вчених „Сучасні тенденції у розвитку науки та освіти“ (Кам'янець-Подільський, 24 березня 2016 р.);
- Міжнародній математичній конференції „Групи і дії: Геометрія і динаміки“ присвяченій пам'яті професора Віталія Івановича Сущанського (Київ, 19–22 грудня 2016 р.);
- XI Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 75-річчю В. В. Кириченка (Київ, 3–7 липня 2017 р.);

- науковому семінарі кафедри алгебри та математичної логіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А. П. Петравчук, Київ, 24 грудня 2014 р.)
- міжнародній конференції „Молоді жінки в теорії зображень“ (Бонн, Німеччина, 23–25 червня 2016 р.);
- алгебраїчному семінарі інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор Ю. А. Дрозд, Київ, 23 травня 2017 р.).