ВІДГУК

на дисертаційну роботу

Галини Василівни Шелепало

"Класифікація квазігрупових функційних рівнянь і тотожностей мінімальної довжини"

подану на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

зі спеціальності 01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Функційні рівняння з'явилися майже одночасно з теорією функцій. Задача розв'язування функційних рівнянь є однією із найстаріших в математичному аналізі. Ще в 1769 році Даламбер звів обґрунтування закону додавання сил до розв'язування функційного рівняння. Одне із перших систематизованих досліджень функційних рівнянь опубліковане Коші в 1821, відоме сьогодні як функційне рівняння Коші. Функційні рівняння виникають в найрізноманітніших галузях математики, зазвичай в тих випадках, коли потрібно описати всі функції, що володіють заданими властивостями. До функційних рівнянь по суті відносять диференціальні рівняння, інтегральні рівняння, рівняння в кінцевих різницях та інші.

Узагальнені тотожності (узагальнені функційні рівняння), розглядалися над квазігруповими операціями вперше Р. Шауффлером. Будь-яка тотожність в групі чи в квазігрупі призводить до деякої узагальненої тотожності (функційного рівняння) в класі квазігрупових операцій. Прикладами є узагальнені тотожності асоціативності, медіальності, дистрибутивності, Бола, Муфанг та інші. Функційне рівняння узагальненої асоціативності та узагальненої медіальності розв'язане Білоусовим у 60-х роках. Узагальнені тотожності Бола (зліва, справа) розглянуті В. Білоусовим та П. Каннаппаном, які дають повний розв`язок над групами. Істотні результати в даному напрямку отримані А. Садом, С. Стейном, Е. Івансом, М. Тейлором, А. Крапежем, Ф. Сохацьким та іншими. Література в даній області обширна. Відзначимо однак, що до теперішнього часу відсутня універсальна техніка (методи) розв'язування функційних рівнянь.

Поряд з пошуком розв'язків функційних рівнянь, актуальним питанням є їх класифікація. Відомими підходами в цьому напрямку є, наприклад, метод графів, запропонований А. Крапєжем і С. Крстичем, який застосовний для випадку квадратичних функційних рівнянь, тобто тих, в який кожна предметна змінна зустрічається точно два рази. Класифікації узагальнених квадратичних рівнянь на квазігрупах присвячені також роботи Ф. М. Сохацького, Р. Коваль та інших.

Другий підхід до класифікації функційних рівнянь на квазігрупах – метод парастрофної симетрії, запропонований Ф. М. Сохацьким, відповідно до якого два рівняння називаються парастрофно-первинно-рівносильними, якщо можна перейти від одного до другого шляхом скінченної кількості перетворень, основаних на первинних тотожностях, які визначають оборотність функцій. Даний метод має в основі той факт, що деяке твердження (зокрема, тотожність $u = v$) істинне в класі квазігруп (визначає многовид) $\mathfrak{A}$ тоді і тільки тоді, коли його σ-парастроф ${}^{\sigma}P$ (відповідно, ${}^{\sigma}(u = v)$) істинний в (визначає многовид) ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$, який складається із всіх σ-парастрофів операції з $\mathfrak{A}$. Відзначимо, що функційні рівняння на множині квазігрупових операцій можуть бути рівносильними системі рівнянь від меншої кількості змінних, цей факт ставить задачу класифікації рівнянь мінімальної довжини.

Дана дисертаційна робота присвячена класифікації і розв'язуванню неквадратичних функційних рівнянь і тотожностей довжини $n \leq 4$ на множині бінарних квазігрупових операцій. Застосовуючи метод парастрофної симетрії, авторка дисертації зводить класифікацію узагальнених функційних рівнянь (тобто функційних рівнянь, в яких невизначена залежність між символами операцій) з точністю до парастрофно-первинної рівносильності та в кожному отриманому класі – з точністю до парастрофної рівносильності. Тотожності, задані розв'язками отриманих функційних рівнянь класифікуються з точністю до рівносильності і, відповідно, парастрофної рівносильності. Проводиться аналіз відповідних многовидів.

Дисертація Г. В. Шелепало складається з вступу, чотирьох розділів, висновків і бібліографії із 138 літературних джерел, а її загальний об'єм – 191 сторінка.

У вступі сформульовані цілі та задачі роботи, обґрунтована актуальність теми, наукова новизна та значущість отриманих результатів, надані відомості про публікації, особистий внесок здобувачки і апробацію результатів дисертації.

В першому розділі "Огляд літератури, вибір методів досліджень і допоміжні результати" авторка наводить необхідні поняття і результати, а також огляд літератури за темою дисертації.

В другому розділі "Деякі класи квазігруп за групами симетрій" розглядаються класифікація групових ізотопів за групами парастрофної симетрії. Зокрема, наведені множини всіх попарно неізоморфних групових ізотопів для груп простого порядку p ($p>3$), знайдено їх кількість і описані напівсиметричні ізотопи груп, відповідно булевих груп (теореми 2.4, 2.5 і 2.6). Відзначимо теорему 2.8, де показано, що многовиди: напівсиметричних квазігруп ($\mathfrak{S}$), напівсиметричного ізотопного замикання всіх груп ($\mathfrak{G}_{SS}$), напівсиметричного ізотопного замикання абелевих груп ($\mathfrak{A}_{SS}$), напівсиметричного ізотопного замикання булевих груп ($\mathfrak{B}_{SS}$) є попарно різними і утворюють такий ланцюг $\mathfrak{B}_{SS} \subset \mathfrak{A}_{SS} \subset \mathfrak{G}_{SS} \subset \mathfrak{S}$.

Останніх два розділи містять основні результати роботи. В третьому розділі "Класифікація і розв'язування узагальнених функційних рівнянь" розглядаються функційні рівняння без функційних і предметних сталих, в яких всі функційні змінні попарно різні (чисті функційні рівняння). Класифікації з точністю до парастрофно-первинної рівносильності узагальнених функційних рівнянь довжини два, три і чотири дано в теоремах 3.1, 3.2 і 3.3 відповідно.

В теоремі 3.1. доведено, що з точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує точно 3 узагальнених функційних рівняння довжини два, з яких два рівняння мають тип (2;2): $F_1(x;y) = F_2(x;y)$, $F_1(x;x) = F_2(y;y)$ і одне має тип (4;0): $F_1(x;x) = F_2(x;x)$. Відзначимо, що на множині бінарних квазігруп перше рівняння типу (2;2) розв'язане А. Крапежем, друге рівняння розв'язане Р. Коваль, а квазігруповий розв'язок рівняння типу (4;0) отримано Г. Шелепало і наведено в твердженні 3.2 диссертации. Таким чином, в роботі завершена класифікація узагальнених функційних рівнянь довжини 2 на множині бінарних квазігрупових операцій.

Класифікації узагальнених функційних рівнянь довжини три дано в теоремі 3.2. Доведено, що з точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує точно 4 таких рівняння, з яких 3 мають тип (3;2): $F_1(x;F_2(x;y)) = F_3(x;y)$, $F_1(x;F_2(x;x)) = F_3(x;y)$, $F_1(x;F_2(x;x)) = F_3(y;y)$, і одне рівняння має тип (5;0): $F_1(x;F_2(x;x)) = F_3(x;x)$. У твердженнях 3.3-3.6 дано розв'язки отриманих узагальнених функційних рівнянь довжини три на множині бінарних квазігрупових операцій.

У теоремі 3.3 показано, що з точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує точно 19 узагальнених функційних рівнянь довжини 4, в тому числі 5 рівнянь типу (2;2;2), 6 рівнянь типу (4;2;0), 6 рівнянь типу (3;3;0) і 2 рівняння типу (6;0;0). Також в теоремі 3.3 доведена попарна парастрофно-первинна нерівносильність отриманих рівнянь.

Відзначимо, що в даний час на множині бінарних квазігрупових операцій всі узагальнені функційні рівняння типу (2;2;2) є розв'язаними: рівняння узагальненої асоціативності $F_1(F_2(x;y);z) = F_3(x;F_4(y;z))$ розв'язано В. Білоусовим ("теорема Білоусова про чотири квазігрупи"), а решта розв'язані Р. Коваль (три рівняння) і А. Крапежем (одне рівняння). У твердженнях 3.7-3.12 і відповідно у твердженнях 3.13-3.18, авторка дисертації наводить умови, за яких четвірка квазігрупових бінарних операцій є розв'язком функційних рівнянь довжини 4, які мають тип (4;2;0):

$$F_1(x;y) = F_2\left(x, F_3(x;;F_4(x;y))\right), \quad F_1(x;x) = F_2\left(y, F_3(y;F_4(x;x))\right),$$

$$F_1(x;x) = F_2(F_3(x;y);F_4(x;y)), \quad F_1(x;x) = F_2\left(x, F_3(y;F_4(x;y))\right),$$

$$F_1(y;y) = F_2(F_3(x;x);F_4(x;x)), \quad F_1(y;y) = F_2(x;F_3(x;F_4(x;x)),$$

і відповідно, які мають тип (3;3;0):

$$F_1(x;y) = F_2(F_3(x;y);F_4(x;y)), \quad F_1(x;y) = F_2(F_3(x;x);F_4(y;y)),$$

$$F_1(x;F_2(x;y)) = F_3(F_4(x;y);y), \quad F_1(x;F_2(y;y)) = F_3(x;F_4(x;y)),$$

$$F_1(x;F_2(x;x)) = F_3(y;F_4(y;y)), \quad F_1(x;F_2(y;y)) = F_3(y;F_4(x;x)).$$

Необхідні і достатні умови, за яких четвірка квазігрупових операцій є розв'язком функційних рівнянь довжини 4 типу (6;0;0):

$$F_1(x;F_2(x;x)) = F_3(x;F_4(x;x)), \quad F_1(x;x) = F_2(F_3(x;x);F_4(x;x)),$$

дані у твердженнях 3.19 і 3.20.

Остання частина третього розділу присвячена дослідженню розв'язків чотирьох (із п`яти відомих) узагальнених дистрибутивно-подібних функційних рівнянь довжини 5, тобто функційних рівнянь типу (3;2;2), без термів виду $F(x,x)$, на множині бінарних квазігрупових операцій. У теоремах 3.4-3.7 наведено розв'язки функційних рівнянь

$F_1(y;F_2(x;z)) = F_3(F_4(y;F_5(x;z));x)$, $\quad F_1(F_2(x;y);y) = F_3(x;F_4(F_5(x;z));z)$,

$F_1(x;F_2(x;z)) = F_3(F_4(F_5(x;y);y);z)$, $\quad F_1(y;F_2(x;z)) = F_3(y;F_4(x;F_5(x;z)))$

відповідно.

Використовуючи отримані в третьому розділі результати, в четветому розділі "Класифікація тотожностей на квазігрупах", дано повні класифікації тотожностей довжини 2 і 3 на квазігрупах з точністю до рівносильності та парастрофної рівносильності, а також описано розподіл відповідних многовидів квазігруп на пучки, відповідно до парастрофно симетрії. Авторка вводить поняття узагальненої тотожності (функційне рівняння, в якому функційні змінні є попарно різними узагальненими парастрофами однієї й тієї ж функційної змінної) і доводить, що з точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує точно три узагальнених тотожності довжини два (наслідок 4.1). У теоремах 4.1-4.7 знайдено многовиди, задані розв'язками узагальнених тотожностей довжини 2 і їх розбиття на різні пучки згідно з парастрофною симетрією. Доведено, що з точністю до рівносильності (парастрофної рівносильності) існує 14 (відповідно 6) квазігрупових тотожностей довжини 2. Задані ними многовиди розбиваються на 6 пучків згідно з парастрофною симетрією, серед яких два тотально-симетричних і чотири односторонньо-симетричних (наслідок 4.5). Підсумковий результат поданий у таблиці 4.2.

Тотожності довжини три розглянуті в теоремі 4.12, де показано, що з точністю до рівносильності (парастрофної рівносильності) існує 74 (відповідно 20) тотожностей довжини три. Квазігрупові тотожності довжини три визначають многовиди, які розприділені в 20 пучків згідно з парастрофною симетрією, серед яких: п'ять тотально-симетричних, вісім асиметричних і сім односторонньо-симетричних. Знайдено тотожності, які визначають кожен пучок многовидів. Підсумковий результат поданий у таблиці 4.6.

Відмітимо, що отримані тотожності довжини 2 і 3 містять відомі в теорії квазігруп тотожності ідемпотентності, напівсиметричності, комутативності, IP, тотожності, які розглянуті Т. Івансом при вивченні парастрофної ортогональності, а також мінімальні нетривіальні тотожності із класифікації В. Білоусова і Ф. Бенета, в тому числі тотожності Стейна, Шредера та інші.

Все вищесказане дозволяє зробити висновок, що дисертаційна робота Галини Василівни Шелепало написана на актуальну тему, містить глибокі вичерпні математичні результати, в тому числі отримані класифікації нетривіальних узагальнених функційних рівнянь (тотожностей) мінімальної довжини і дано опис відповідних пучків многовидів. Робота є завершеним дослідженням і характеризує її автора як дослідника, здатного будувати нові теорії, що дозволять розв'язувати важливі математичні проблеми.

Дисертаційна робота має теоретичний характер, робить важливий внесок у теорію функційних рівнянь на квазігрупах, в теорію неасоціативних алгебричних структур, зокрема в загальну теорію бінарних груп і луп. Отримані результати можуть бути застосованими в алгебрі, а також в комбінаториці, теорії кодування і шифрування інформації та інших суміжних галузях.

Дисертація оформлена належним чином. Автореферат правильно відображає зміст дисертації і оформлений відповідно до вимог МОН України, проте виявлені деякі неточності та описки, зокрема:

1) на с. 11 автореферату в теоремі 3.4 формули п'ятірки операцій позначені номером (13), а далі в тексті теореми міститься посилання на формули (19). Відмітимо, що в авторефераті немає формули з номером (19);

2) на с. 8 дисертації, в анотації на англійській мові, неточно написані прізвища низки учених, а саме: "Kiddvel", "Benet", "Krapez", "Koval" замість "Keedwell", "Bennett", "Krapež", "Koval'", відповідно;

3) в тексті дисертації, між формулами чи всередині формул є неперекладені слова з англійської мови, зокрема, на с. 34 зустрічається слово "and", на с. 46 в одній із формул зустрічаються слова "if", "and", "or", "otherwise";

4) на с. 49 неточно сформульовано означення 1.9: після слова "якщо" доцільно написати такий текст "тотожність ${}^{\sigma}\iota\partial$ можна отримати заміною головної операції на її σ^{-1}-парастроф в тотожності $\iota\partial$";

5) на с. 50 в означенні σ-парастрофно-первинно-рівносильних тотожностей, між формулами (1.2) і (1.42) має бути кома, а не дефіс, теж саме на с. 49 після означення 1.9;

6) технічна описка зустрічається на с. 54, 9-й рядок знизу: 'T/!-квазігрупа', а має бути 'T-квазігрупа';

7) немає необхідності давати назву таблиці в наслідку 2.5 на с. 60, оскільки посилання на цю таблиці в тексті дисертації немає;

8) на с. 110 в доведенні використовуються поняття "суто средня лупа", "тристороння лупа", а точні означення цих понять не дано.

Відмітимо, що вищесказані до роботи зауваження мають редакційний характер і не зменшують її наукову цінність.

Результати дисертації пройшли високу апробацію, оскільки були повідомлені на численних національних та міжнародних конференціях, в тому числі: Денвер (США), Берлін (Німеччина), Трешт (Чехія), Ріо де Жанейро (Бразилія), Охрід (Північна Македонія), Москва (Росія), Кишинів, Бєльци (Молдова), Мінськ (Білорусь), Київ, Львів, Харків (Україна) тощо.

Результати дисертації опубліковані в 28 наукових працях, в тому числі 8 статей в рецензованих журналах за спеціальністю, з яких 3 журнали входять в базу Scopus, та 20 тез конференцій.

Враховуючи вищевикладене, вважаю, що за актуальністю тематики, обсягом виконаної роботи, новизною і науковою цінністю отриманих результатів дисертаційна робота "Класифікація квазігрупових функційних рівнянь і тотожностей мінімальної довжини" задовольняє всім вимогам пп. 9, 11-14 "Порядку присудження наукових ступенів" (Постанова Кабінету Міністрів України № 567 від 24. 07. 2013) щодо кандидатських дисертацій, а її автор, Шелепало Галина Василівна, заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.06 – алгебра та теорія чисел.

10 червня 2019

Офіційний опонент,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики
Молдавського державного університету
м. Кишинів, Республіка Молдова

P. Syrbu

П. М. Сирбу

Підпис Сирбу П. М. засвідчую

Проректор з наукової роботи
Молдавського державного університету
м Кишинів, Республіка Молдова
Професор, доктор наук Ф. Паладі

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CULTURII ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA
UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA
IDNO 1006600064263

Прикарпатський національний
університет ім. Василя Стефаника
Вх. НДОР № 03-0215/264
20. 06 2019 р.