Інститут прикладних проблем механіки і математики
імені Я. С. Підстригача
Національна академія наук України

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника"
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Терлич Наталія Іванівна

УДК 517.98

ДИСЕРТАЦІЯ

Прямі та обернені спектральні задачі для рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами

01.01.01 "Математичний аналіз"

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
____________________Н. І. Терлич.

Науковий керівник
Гринів Ростислав Олегович
кандидат фізико–математичних наук,
старший науковий співробітник

Львів — 2018

АНОТАЦІЯ

Терлич Н. І. Прямі та обернені спектральні задачі для рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико–математичних наук за спеціальністю 01.01.01 "Математичний аналіз". — Інститут прикладних проблем механіки та математики імені Я. С. Підстригача НАН України. — ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", Івано–Франківськ, 2018.

Останніми роками обернені задачі привертають дедалі більшу увагу науковців, а їх дослідження стають особливо актуальними. Це пов'язано з тим, що такі задачі природним чином виникають при розв'язуванні багатьох практичних завдань сучасного світу — наприклад, в медичній діагностиці, неруйнівному контролі, геологорозвідуванні, в класичній та квантовій механіці. До таких також належать задачі, де певні характеристики моделі намагаються відновити за спектральними даними, тобто обернені спектральні задачі.

Наприклад, для рівнянь Штурма–Ліувілля класичною оберненою спектральною задачею є задача відновлення потенціалу за власними значеннями. Перші вагомі результати тут отримав Ґ. Борг у 1946. Він показав, що за одним спектром відновити потенціал рівняння Штурма–Ліувілля неможливо, але ще один спектр (для інших крайових умов) визначає потенціал однозначно. У 50-х роках минулого століття І. Гельфанд, М. Крейн, Б. Левітан та В. Марченко розвинули обернену спектральну теорію для операторів Штурма–Ліувілля з регулярними потенціалами. Наступним етапом розвитку спектральної теорії операторів Штурма–Ліувілля стало вивчення прямих та обернених спектральних задач у випадку сингулярних потенціалів, що можуть містити узагальнені функції, зокрема, дельта-функції Дірака. У 1999 році А. Савчук та А. Шкаліков запропонували метод регуляризації

відповідних диференціальних виразів, що дозволило детально дослідити спектральні властивості операторів Штурма–Ліувілля із сингулярними потенціалами. Обернену спектральну теорію для таких операторів розвинули Р. Гринів та Я. Микитюк.

Рівняння Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами є узагальненнями класичних рівнянь Штурма–Ліувілля і теж часто виникають у практичних задачах класичної та квантової механіки — наприклад, при моделюванні коливань механічних систем у середовищі з тертям, при розв'язування рівнянь Кляйна–Ґордона та ін. Раніше такі рівняння з'являлися в контексті теорії розсіювання у роботах С. Жина, М. Жилена, В. Пивоварчика, К. ван дер Мей. Проте обернені спектральні задачі для рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами майже не вивчались. Опубліковані лише деякі результати для досить часткового випадку (за сильніших припущень про гладкість потенціалів) в короткій статті М. Гасимова і Г. Гусейнова 1981 року, яка не містить доведень, та результати щодо єдиності відновлення в такому ж частковому випадку і для періодичних граничних умов. Тому виникає природна потреба продовження досліджень рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами та розвитку оберненої спектральної теорії, яка б охоплювала якнайширший клас таких рівнянь.

У цій дисертаційній роботі вперше повністю досліджено прямі та обернені спектральні задачі для рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами за якнайслабших припущень про гладкість потенціалів. На відміну від класичних рівнянь Штурма–Ліувілля, розглядувані рівняння мають два дійснозначні потенціали і значно складніші спектральні властивості. А саме, вони можуть мати недійсні та непрості власні значення, і це робить дослідження відповідних обернених задач набагато складнішим.

У першому розділі дисертації описано головний об'єкт дослідження. Спектральні задачі для рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами подано як відповідні задачі для квадратичних операторних в'язок. Це дозволило дати строге означення досліджуваних спектральних задач. Також тут наведені основні означення зі спектральної теорії операторних в'язок, які використовуються в роботі.

У другому розділі дисертації досліджено спектральні властивості рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами. Доведено твердження про дискретність та геометричну простоту спектрів, про симетричність спектрів відносно дійсної осі; отримано оцінки на кількість недійсних та непростих власних значень та їх алгебраїчну кратність. Виведено асимптотики власних значень та власних функцій рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами.

У третьому розділі введено означення нормівних множників для розглядуваних рівнянь, що є узагальненням відповідного поняття для звичайних рівнянь Штурма–Ліувілля. Це означення досить загальне і охоплює випадок як дійсних і простих власних значень, так і комплексних і не простих. У роботі досліджено властивості нормівних множників. Зокрема, отримано їхні асимптотики та виведено формулу, яка дозволяє визначити ці величини за двома спектрами. Вивчення властивостей нормівних множників дозволило отримати достатні умови простоти та дійсності власних значень розглядуваних задач.

У четвертому розділі дисертації досліджені обернені спектральні задачі відновлення енергозалежних рівнянь Штурма–Ліувілля за їхнім спектром Діріхле та послідовністю нормівних множників. Для класу розглядуваних задач подано повний опис відповідних спектральних даних, запропоновано алгоритм відновлення і встановлено єдиність відновлення. Підхід базований на зв'язку між спектральними задачами для енергозалежних рівнянь Штурма–Ліувілля та операторами Дірака спеціального вигляду.

У п'ятому розділі досліджені задачі відновлення рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами за двома спектрами (спектром Діріхле та спектром змішаного типу). Запропоновано два підходи до їх розв'язування. Перший аналогічний до використаного у четвертому розділі і полягає у зведенні розглядуваних спектральних задач до відповідних задач для операторів Дірака. Другий підхід використовує можливість визначити нормівні множники з двох спектрів. Тоді за одним спектром та отриманим набором нормівних множників ми можемо відновити енергозалежне рівняння Штурма–Ліувілля, користуючись результатами четвертого розділу. За запропонованими підходами двома способами доведено теорему про існування та єдиність розв'язку досліджуваної оберненої задачі та описано і обґрунтовано два алгоритми відновлення.

Результати цього дисертаційного дослідження мають теоретичний характер. Вони є внеском в обернену спектральну теорію диференціальних рівнянь. Методи, запропоновані в роботі, можна використати для дослідження прямих та обернених спектральних задач для рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами в інших постановках (за інших припущень про гладкість потенціалів чи з іншими граничними умовами).

Ключові слова: рівняння Штурма–Ліувілля, енергозалежні потенціали, обернені задачі, спектральні задачі, спектральні властивості, асимптотики.

ABSTRACT

Terlych N. I. Direct and inverse spectral problems for energy-dependent Sturm–Liouville equations. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.01 “Mathematical analysis”. — Pidstrygach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine. — Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2018.

During the last few decades, inverse problems have been attracting considerable interest of scientists, and their study has become especially relevant. This is due to the fact that such problems arise in solving of many practical tasks of modern life, e. g., in medical diagnostics, non-destructive testing,

geology exploration, in classical and quantum mechanics. Among such problems there are the ones aiming at reconstructing some characteristics of a given model from its spectral data, i. e., inverse spectral problems.

For example, the classical inverse spectral problem for Sturm–Liouville equations consists in reconstructing the potential from the corresponding eigenvalues or norming constants. The first important results here were obtained by G. Borg in 1946, who proved that it is impossible to reconstruct the potential from one spectrum only. However, one more spectrum (for other boundary conditions) already allows to determine the potential uniquely. In the 1950-ies, I. Gelfand, M. Krein, B. Levitan and V. Marchenko developed the inverse spectral theory for Sturm–Liouville operators with regular potentials. The next stage in the development of spectral theory for the Sturm–Liouville operators was the study of direct and inverse spectral problems in the case of singular potentials that may contain distributions, in particular Dirac delta–functions. In 1999, A. Savchuk and A. Shkalikov suggested a regularization method for the corresponding differential expressions, which facilitated a detailed study of the spectral properties of the corresponding operators. The inverse spectral theory for Sturm–Liouville equations with singular potentials was developed by R. Hryniv and Ya. Mykytyuk.

Sturm–Liouville equations with energy-dependent potentials are generalizations of standard Sturm–Liouville equations. They often arise in practical problems of classical and quantum mechanics, e. g., in modeling of mechanical system vibrations in viscous media, in solving Klein–Gordon equations etc. Previously, such equations appeared in the context of the inverse scattering theory in the papers of M. Jaulent and C. Jean, V. Pivovarchyk and C. van der Mee. However, inverse spectral problems for Sturm–Liouville equations with energy-dependent potentials have barely been studied. There were only a few results for very particular case (under stronger assumptions on the regularity of potentials) in a short 1981 paper of M. Gasymov and G. Guseinov containing no proofs, and some results on uniqueness of reconstruction in a similar particular case for periodic boundary conditions. That is why there is a natural necessity to continue the study of Sturm–Liouville equations with energy-dependent potentials and to develop an inverse spectral theory covering the widest possible class of such equations.

In this thesis work, the direct and inverse spectral problems for Sturm–Liouville equations with energy-dependent potentials are studied completely for the first time under weak assumptions on the smoothness of potentials. Unlike the classical Sturm–Liouville equations, the equations under consideration contain two real-valued potentials and have more involved spectral properties. In particular, they may have non-real and/or non-simple eigenvalues. This makes the study of the corresponding inverse problems more complicated.

In the first chapter, the main object of the research is described. The spectral problems for Sturm–Liouville equations with energy–dependent potentials are formulated as those for the corresponding quadratic operator pencils. Also main definitions from the spectral theory for operator pencils are recalled here.

In the second chapter, spectral properties of Sturm–Liouville equations with energy-dependent potentials are studied. It is proved that the spectrum is discrete, geometrically simple, symmetric with respect to the real axis. Estimates on the numbers of non-real and non-simple eigenvalues and their algebraic multiplicities are obtained. Asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions of Sturm–Liouville equations with energy-dependent potentials are derived.

In the third chapter, the definition of the norming constants for energy-dependent Sturm–Liouville equations is introduced for the first time. It is shown that this definition is a generalization of the corresponding notion for classical Sturm–Liouville equations. Properties of norming constants are studied, and, in particular, their asymptotics are established and the formula determining them from two spectra is derived. Further analysis of the properties of norming constants allowed us to obtain sufficient conditions for the eigenvalues to be simple and real.

In the forth chapter, the inverse spectral problems of reconstructing energy-dependent Sturm–Liouville equations from the spectrum and the set of norming constants are studied. For the class of considered problems the complete description of the spectral data is given; the reconstruction algorithm is suggested and uniqueness of reconstruction is established. The approach is based on connection between the spectral problems for energy-dependent Sturm–Liouville equations and the Dirac operators of a special form.

In the fifth chapter, the inverse problems of reconstructing energy-dependent Sturm–Liouville equations from two spectra are studied. Two approaches to solving such problems are suggested. The first one uses reduction of considered spectral problems to those for Dirac operators. The second one uses connection of inverse problems under study and those of reconstruction from one spectrum and the set of norming constants. We proved the theorem on existence and uniqueness of the solution of considered inverse problem by two methods and also gave and justified two algorithms reconstructing the considered equation.

The results of this thesis are theoretical. They are a contribution to the inverse spectral theory for differential equations. Methods suggested in the research may be used for studying the direct and inverse spectral problems for Sturm–Liouville equations with energy-dependent potentials in different settings (under other assumptions on the smoothness of potentials or with other boundary conditions).

Key words: Sturm–Liouville equations, energy-dependent potentials, inverse problems, spectral problems, spectral properties, asymptotics.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Наукові статті у фахових виданнях

1. Hryniv R. and Pronska N. Inverse spectral problems for energy-dependent Sturm–Liouville equations // Inverse Probl. – 2012. – Vol. 28, №8. – P. 085008.

2. Pronska N. Asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions of energy-dependent Sturm–Liouville equations // Mat. Stud. – 2013. – Vol. 40, №1. – P. 38–52.
3. Pronska N. Reconstruction of energy-dependent Sturm–Liouville equations from two spectra // Integr. Equ. Oper. Theory. – 2013. – Vol. 76, №3. – P. 403–419.
4. Pronska N. Reconstruction of energy-dependent Sturm–Liouville equations from two spectra. II // Carpathian Math. Publ. – 2013. – Vol. 5, №2. – P. 315–325.
5. Pronska N. Spectral properties of Sturm–Liouville equations with singular energy-dependent potentials // Methods Funct. Anal. Topol. – 2013. – Vol. 19, №4 – P. 327–345.

Матеріали та тези конференцій

6. Pronska N. On reconstruction of energy-dependent Sturm–Liouville equations from two spectra // Spectral Theory and Differential Equations. International Conference in honor of Vladimir A. Marchenko's 90th birthday, August 20–24, 2012, Kharkiv: book of abstracts. – Kharkiv, 2012. – P. 86–87.
7. Terlych N. On reconstruction of energy-dependent Sturm–Liouville equations // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики", 21–25 травня 2013 р., Львів: тези доповідей. – Т. 3. – Львів, 2013. – С. 103–104.
8. Terlych N. Spectral properties of Sturm–Liouville equations with singular energy-dependent potentials // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, September 18–23, 2017, Lviv: book of abstracts. – Lviv, 2017. – P. 55–56.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\rho(T)$	—	резольвентна множина лінійного оператора чи квадратичної операторної в'язки T;
$\sigma(T)$	—	спектр лінійного оператора чи квадратичної операторної в'язки T;
$\sigma_{\mathrm{p}}(T)$	—	точковий спектр лінійного оператора чи квадратичної операторної в'язки T;
$\mathbb{Z}^*$	—	множина цілих чисел без нуля;
$(\cdot,\cdot)_{L_2}$	—	скалярний добуток в $L_2(0,1)$;
$L_{2,\mathbb{R}}(0,1)$	—	множина дійснозначних функцій в $L_2(0,1)$;
$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	—	лінійний простір матриць розміру $n \times n$ з комплексними елементами з евклідовою операторною нормою.

Верхній індекс t — транспонування векторів та матриць, наприклад, $(c_1, c_2)^{\mathrm{t}}$ — це вектор-стовпець $\binom{c_1}{c_2}$.

ВСТУП

Актуальність теми. Багато важливих задач у сучасному світі природно приводять до обернених задач. Вони виникають, наприклад, в медичній діагностиці, неруйнівному контролі, геологорозвідуванні, в класичній та квантовій механіці. Цим пояснюється підвищене зацікавлення теорією обернених задач та їх практичними застосуваннями. У найзагальнішому сенсі обернені задачі полягають у відновленні внутрішньої структури досліджуваного об'єкта за даними зовнішніх вимірювань. Математично це означає, що за множиною даних, які відображають поведінку розв'язку, потрібно визначити невідомі параметри моделі.

Серед розмаїття обернених задач можна виділити клас обернених спектральних задач, у яких внутрішню структуру моделі пробують відновити за спектральними даними. Наприклад, природним є питання, чи визначають власні значення λ^2 задачі Штурма–Ліувілля

$$-y'' + qy = \lambda^2 y$$

з умовами Діріхле $y(0) = y(1) = 0$ потенціал q. Ще у 1946 р. Г. Борг отримав перші важливі результати з оберненої спектральної теорії для таких рівнянь. Він довів, що для однозначного відновлення потенціалу q потрібна додаткова інформація (наприклад, ще один спектр) [39]. Основи оберненої спектральної теорії для операторів Штурма–Ліувілля, Шредингера та Дірака заклали у 50-их роках минулого століття І. Гельфанд, М. Крейн, Б. Левітан та В. Марченко [6, 14, 15, 19, 20]. Досить детально вивчені також обернені задачі для рівнянь Штурма–Ліувілля із сингулярними потенціалами, які включають випадок, коли q — узагальнена функція, що, зокрема, може містити дельта-функцію Дірака. Такі задачі досліджували А. Савчук і А. Шкаліков [83] та Р. Гринів і Я. Микитюк [44–47]. Останні автори у своїх роботах повністю розв'язали обернені задачі для рівнянь Штурма–Ліувілля із сингулярними потенціалами у різних постановках (відновлення за двома спектрами, за спектром та нормівними множниками та ін.), зокрема, надали повний опис спектральних даних у кожній з таких задач, довели відповідні теореми про існування та єдиність розв'язків, побудували та обґрунтували відповідні алгоритми відновлення.

Проте у фізиці та механіці часто виникають обернені задачі для інших класів рівнянь — наприклад, для рівянянь Штурма–Ліувілля з потенціалами, що залежать від частоти коливань, або, іншими словами, з енергозалежними потенціалами. Мова йде про узагальнення спектральної задачі Штурма–Ліувілля вигляду

$$-y'' + 2\lambda py + qy = \lambda^2 y$$

з додатковим потенціалом p. Такі рівняння виникають, наприклад, у неконсервативних системах (і тоді p описує сили тертя), чи у рівнянні Кляйна–Ґордона (коли p описує безспіновий піон). Спектральні властивості рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами з умовами Діріхле (чи іншими крайовими умовами) є набагато складнішими, ніж такі властивості класичних рівнянь Штурма–Ліувілля. Зокрема, у першому випадку можуть виникати недійсні та/або кратні власні значення, а тому задача відновлення потенціалів p та q за спектральними даними стає зовсім нетривіальною. Зазначимо, що хоча обернену задачу розсіювання для рівняння Штурма–Ліувілля з енергозалежним потенціалом досліджували починаючи з 70-х років минулого століття М. Жолен, С. Жин [51–54], Д. Сатинґер, Я. Шміґельський [82], К. ван дер Мей, В. Пивоварчик [63] та ін., обернену спектральну задачу майже не вивчали — схоже, єдині змістовні результати анонсували М. Ґасимов та Г. Гусейнов у короткій статті [3] 1981 року без доведень, причому у дуже частковому випадку.

Тому предметом цього дисертаційного дослідження стали прямі та обернені спектральні задачі для рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами за якнайслабших припущень про гладкість потенціалів p та q. А саме, наші дослідження охоплюють випадок, коли дійснозначний потенціал p належить до простору $L_2(0,1)$, а q може бути дійснозначною узагальненою функцією. Зауважимо, що тоді вираз $-y''+qy$ потребує регуляризації. Для цього ми застосували метод, запропонований А. Савчуком та А. Шкаліковим [28,29], який використовує квазіпохідні $y^{[1]} := y'-ry$, де r — первісна потенціала q. Також ми розглянули крайові умови, що містять квазіпохідну. Зауважимо, що тоді в оберненій задачі для рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами з такими крайовими умовами треба відновити не тільки потенціал q, а і його первісну r. У роботі проведені відповідні дослідження і отримані результати, які дають розв'язки таких задач.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Результати дисертації отримані в рамках виконання держбюджетних тем Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача "Прямі та обернені задачі спектральної теорії операторів та функціональних алгебр на банахових просторах" (державний реєстраційний номер 0111U008862), ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" "Розробка аналітичних методів у нескінченновимірному комплексному аналізі та теорії операторів" (державний реєстраційний номер 0113U000184) та Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова "Спектральні проблеми теорії диференціальних і різницевих операторів" (номер держреєстрації 0115U000556).

Мета і задачі дослідження. *Мета роботи* — дослідити прямі та обернені спектральні задачі для рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами.

Задачі дослідження:

- вивчити спектральні властивості рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами;
- дати повний опис спектральних даних, за якими можна однозначно відновити потенціали енергозалежних рівнянь Штурма–Ліувілля;
- розв'язати обернену задачу відновлення рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами за двома спектрами, а саме: дослідити існування та єдиність такого відновлення, запропонувати та обґрунтувати алгоритм відновлення;
- розв'язати обернену задачу відновлення рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами за спектром та нормівними множниками, а саме: дослідити існування та єдиність такого відновлення, запропонувати та обґрунтувати алгоритм відновлення.

Об'єктом дисертаційного дослідження є рівняння Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами.

Предмет дослідження — прямі спектральні задачі для рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами та обернені задачі відновлення потенціалів таких рівнянь за спектральними даними.

Методи дослідження. У дослідженні використані методи теорії операторних в'язок, спектральної теорії диференціальних операторів та диференціальних рівнянь, теорії аналітичних функцій, теорії просторів Понтрягіна, асимптотичні методи.

Наукова новизна отриманих результатів. У роботі вперше отримано такі результати:

— досліджено загальні властивості спектрів рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами (дискретність та геометрична простота власних значень, їх розташування відносно дійсної осі, оцінка зверху кількості непростих або комплексних власних значень та їхніх алгебраїчних кратностей);

— виведено асимптотики власних значень та власних функцій рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами;

— введено означення нормівних множників для рівнянь Штурма–Ліувілля з енегозалежними потенціалами, яке є узагальненням відповідного означення для звичайних рівнянь Штурма–Ліувілля, і пояснено його змістовність. Досліджено властивості нормівних множників, їхні асимптотики;

— повністю розв'язана обернена задача відновлення потенціалів енергозалежного рівняння Штурма–Ліувілля за спектром та відповідним набором нормівних множників. Зокрема, подано повний опис спектральних даних, доведено теореми про існування та єдиність розв'язку, запропоновано та обґрунтовано алгоритм відновлення рівняння Штурма–Ліувілля з енергозалежним потенціалом за спектром та нормівними множниками;

— повністю розв'язана обернена задача відновлення рівняння Штурма–Ліувілля з енергозалежним потенціалом за двома спектрами. Подано повний опис спектральних даних. Запропоновано два методи розв'язування такої задачі. Двома способами доведено теорему про існування та єдиність розв'язку, описано та обґрунтовано два алгоритми відновлення потенціалу p та первісної r потенціала q енергозалежного рівняння Штурма–Ліувілля

$$-y'' + 2\lambda py + qy = \lambda^2 y.$$

Практичне значення отриманих результатів. Результати цієї дисертаційної роботи мають теоретичний характер і є внеском в теорію прямих та обернених спектральних задач. Запропоновані у роботі методи можна використати для дослідження обернених задач для рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами в інших постановках (за інших припущень на гладкість потенціалів, з іншими крайовими умовами чи при вивченні відновлення за іншими наборами спектральних даних).

Особистий внесок здобувача. Основні результати, висвітлені в дисертації, отримані автором самостійно. У спільній з науковим керівником праці [42] Р. О. Гриніву належать постановка задачі, аналіз та передбачення отриманих результатів.

Апробація роботи. Результати дисертаційної роботи автор доповідала на таких наукових семінарах та конференціях: семінарі відділу функціонального аналізу Інституту прикладних проблем механіки та математики імені Я. С. Підстригача (м. Львів, 2012 р., 2013 р.); Львівському міжвузівському семінарі з функціонального аналізу (м. Львів, 2013 р.); семінарі кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" (м. Івано-Франківськ, 2017 р.); Міжнародній конференції з функціонального аналізу, присвяченій 90-річчю В. Е. Лянце, (м. Львів, 17–21 листопада 2010 р.); IV Конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача (м. Львів, 24–27 травня 2011 р.); Літній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз та Застосування" (м. Херсон-Лазурне, 5–15 липня 2011 р.); Вступному Воркшопі до програми "Обернені задачі" (м. Кембридж, Великобританія, 25–29 липня 2011 р., постерна доповідь); Міжнародній математичній конференції імені В. Я. Скоробогатька (м. Дрогобич, 19–23 вересня 2011 р.); Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (смт. Ворохта, 20–26 лютого 2012 р.); Чотирнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (м. Київ, 19–21 квітня 2012 р.); Конференції молодих учених "Підстригачівські читання – 2012" (м. Львів, 23–25 травня 2012 р.); Міжнародній конференції, присвяченій 90-річчю Володимира Марченка, "Спектральна теорія і диференціальні рівняння" (м. Харків, 28–30 серпня 2012 р.); Міжнародній конференції, присвяченій 120-річчю Стефана Банаха, (м. Львів, 17–21 вересня 2012 р.); Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки та математики” (м. Львів, 21–25 травня 2013 р.); Конференції молодих учених “Підстригачівські читання – 2017” (м. Львів, 23–25 травня 2017 р.); Міжнародній конференції, присвяченій 125-річчю Стефана Банаха, (м. Львів, 18–23 вересня 2017 р.).

Структура та обсяг дисертації. Робота складається зі вступу, п’яти розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації — 124 сторінки. Список використаних джерел займає 10 сторінок та містить 96 найменувань. Додатки займають 4 сторінки і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

РОЗДІЛ 1
ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ

1.1. Головний об'єкт дослідження

Головним об'єктом цього дисертаційного дослідження є задачі Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами, задані диференціальними рівняннями

$$-y'' + qy + 2\lambda py = \lambda^2 y \tag{1.1}$$

на (0,1) і крайовими умовами Діріхле

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{1.2}$$

Тут і надалі $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральний параметр, p — дійснозначна функція з $L_2(0,1)$, q — дійснозначний розподіл з простору Соболєва $W_2^{-1}(0,1)$, тобто $q = r'$ з дійснозначною функцією $r \in L_2(0,1)$. Строге означення задачі подано далі у цьому розділі. Зауважимо, що так само можна працювати з іншими відокремленими крайовими умовами; наприклад, з так званими крайовими умовами змішаного типу

$$y(0) = y^{[1]}(1) + hy(1) = 0,$$

де $h \in \mathbb{R}$ — деяка стала, а $y^{[1]} := y' - ry$ — квазіпохідна функції y, яка використовується у процедурі регуляризації виразу $-y'' + qy$, запропонованій А. Савчуком та А. Шкаліковим (див. [28, 29] і подані нижче деталі). Оскільки первісна r потенціалу q визначена лише з точністю до адитивної сталої, заміною r на $r - h$ наведені вище крайові умови змішаного типу можна звести до таких:

$$y(0) = y^{[1]}(1) = 0. \tag{1.3}$$

У роботі ми також досліджуватимемо задачу (1.1), (1.3), проте здебільшого зосередимо свою увагу на (1.1), (1.2) для того, щоб висвітлити ідею та уникнути зайвих технічних ускладнень.

Основна мета нашого дослідження — вивчити прямі та обернені спектральні задачі для рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами. Прямі задачі полягають у вивченні спектральних властивостей таких рівнянь. При вивченні обернених задач ми досліджуємо можливість і методи відновлення потенціалів p та q рівняння (1.1) за відповідними наборами спектральних даних.

Спектральні задачі Штурма–Ліувілля з потенціалами, залежними від спектрального параметра, виникають у різноманітних моделях квантової і класичної механіки. Наприклад, до цього вигляду можна звести відповідні еволюційні рівняння (такі як рівняння Кляйна–Ґордона [55, 67]), які використовують для моделювання взаємодії релятивістських частинок. Тоді множник λ^2 пов'язаний з енергією системи, і це пояснює термін "енергозалежний" у назві задач. Ще один типовий приклад, де виникають такі рівняння, — це моделювання коливань механічних систем у середовищі з тертям, див. [94].

Задачі вигляду (1.1) також з'являлися у фізичній літературі у контексті розсіяння хвиль і частинок. Зокрема, М. Жилен та С. Жин у працях [51–54] вивчали обернену задачу розсіяння для енергозалежних операторів Шредінґера на прямій; див. також статті [9, 10, 33, 56, 63, 65, 66, 82, 90]. Деякі зі спектральних властивостей таких задач на прямій були встановлені у [64].

Нелінійна залежність рівняння (1.1) від спектрального параметра λ вказує на те, що розглядувану задачу слід трактувати як спектральну задачу для квадратичної операторної в'язки. Хоча деякі спектральні властивості такої задачі можна легко вивести із загальної спектральної теорії поліноміальних операторних в'язок [18], було небагато досліджень оберненої задачі відновлення потенціалів p та q за відповідно визначеними спектральними даними. Задачу з $p \in W_2^1(0,1)$, $q \in L_2(0,1)$ та крайовими умовами третього типу розглядали М. Гасимов та Ґ. Гусейнов у їхній короткій статті [3] 1981 року, що не містить доведень. Такі задачі для (квазі-) періодичних крайових умов розглядали, напр., в [8, 11, 23, 24, 95], проте зазвичай там встановлювали тільки результати типу Борґа про єдиність. Деякі некласичні постановки оберненої спектральної задачі (напр., задачі зі змішаними вихідними даними, задачі типу Гохштадта чи обернені вузлові задачі) розглянуті в [59–61].

Головна мета нашого дослідження — вивчити спектральні властивості задачі для рівняння (1.1) з деякими крайовими умовами та відповідні обернені спектральні задачі за мінімальних припущень про гладкість дійснозначних потенціалів p та q. Зокрема, розподіл q може, наприклад, включати дельта-функції Дірака з кулонівськими сингулярностями, що широко використовуються у квантовій механіці при моделюванні взаємодій у молекулах та атомах; див. монографії С. Альбеверіо та ін. [34], С. Альбеверіо та П. Курасова [37] та розгорнуту бібліографію, подану в цих працях.

1.2. Початкові відомості

Рівняння (1.1) залежить від спектрального параметру λ нелінійно. Тому для того, щоб дати строге означення спектральної задачі, яку ми вивчаємо, слід подати (1.1) як спектральну задачу для операторної в'язки. Для початку розглянемо диференціальний вираз

$$\ell(y) := -y'' + qy.$$

Оскільки q — це дійснозначний розподіл з $W_2^{-1}(0,1)$, необхідно пояснити, як діє вираз $\ell(y)$. Для цього ми використовуємо метод регуляризації за допомогою квазіпохідних (див., напр., [28, 29]), який полягає в наступному. Візьмемо дійснозначну функцію $r \in L_2(0,1)$ таку, що $q = r'$ у сенсі розподілів і для кожної абсолютно неперервної функції y позначимо через $y^{[1]} := y' - ry$ її *квазіпохідну.* Тоді визначимо ℓ як

$$\ell(y) = -\big(y^{[1]}\big)' - ry^{[1]} - r^2 y$$

на області

$$\operatorname{dom}\ell = \{y \in AC(0,1) \mid y^{[1]} \in AC(0,1),\ \ell(y) \in L_2(0,1)\}.$$

Пряма перевірка показує, що за такого означення $\ell(y)$ збігається з $-y''+qy$ у сенсі розподілів. Зазначимо також, що для будь-якої f з $L_2(0,1)$, довільних комплексних a, b, μ та будь-якого x_0 з $[0,1]$ рівняння $\ell(y) = \mu y + f$ має єдиний розв'язок, що задовольняє початкові умови $y(x_0) = a$ і $y^{[1]}(x_0) = b$ (див., напр., [28]).

Позначимо через A оператор, що діє за формулою

$$Ay := \ell(y)$$

на області визначення

$$\operatorname{dom} A := \{y \in \operatorname{dom}\ell \mid y(0) = y(1) = 0\}.$$

Для регулярного $q \in L_1(0,1)$ оператор A — це звичайний оператор Штурма–Ліувілля з потенціалом q та крайовими умовами Діріхле. В [28, 29] було показано, що якщо $q \in W_2^{-1}(0,1)$ дійсnозначний, то оператор A самоспряжений, обмежений знизу і має простий дискретний спектр.

Зауваження 1.1. Нагадаємо, що оператор S має дискретний спектр, якщо $\sigma(S)$ складається з ізольованих точок, кожна з яких є власним значенням скінченної алгебраїчної кратності. За теоремою III.6.29 з [58], S має дискретний спектр, якщо його резольвента є компактною хоча б для одного (а тоді і для всіх) $\lambda \in \rho(S)$.

Далі позначимо через B оператор множення на функцію $2p \in L_2(0,1)$, через I — тотожний оператор і визначимо квадратичну операторну в'язку T як

$$T(\lambda) := \lambda^2 I - \lambda B - A, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.4}$$

на λ-незалежній області визначення $\operatorname{dom} T := \operatorname{dom} A$. Тоді спектральну задачу (1.1), (1.2) можна розглядати як спектральну задачу для операторної в'язки T.

Для задачі (1.1) з крайовими умовами змішаного типу (1.3) позначимо через A_M оператор, що діє за формулою

$$A_M y := \ell(y)$$

на області визначення

$$\operatorname{dom} A_M := \{y \in \operatorname{dom} \ell \mid y(0) = y^{[1]}(1) = 0\}.$$

Визначимо операторну в'язку T_M формулою (1.4) з A_M замість A. Тобто

$$T_M(\lambda) := \lambda^2 I - \lambda B - A_M, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.5}$$

на λ-незалежній області визначення $\operatorname{dom} T_M := \operatorname{dom} A_M$. Тоді спектральну задачу (1.1), (1.3) можна розглядати як задачу для T_M.

Нагадаємо деякі поняття зі спектральної теорії для операторних в'язок (див. [18]), які використовуються у цьому дисертаційному дослідженні.

Операторна в'язка T — це операторнозначна функція на $\mathbb{C}$. *Спектром* операторної в'язки T називаємо множину $\sigma(T)$ всіх $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, що оператор $T(\lambda)$ не є обмежено оборотним, тобто

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 \in \sigma(T(\lambda))\}.$$

Число $\lambda \in \mathbb{C}$ називаємо *власним значенням* T, якщо $T(\lambda)y = 0$ для деякої ненульової функції $y \in \operatorname{dom} T$, яку тоді називаємо відповідною *власною* *функцією.* Власні значення T складають її *точковий спектр* $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$, тобто

$$\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(T(\lambda))\}.$$

Множину

$$\rho(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$$

називаємо *резольвентною множиною* операторної в'язки T.

Кажуть, що вектори $y_1, ..., y_{m-1}$ є приєднаними до власного вектора y_0, що відповідає власному значенню λ, якщо вони задовольняють рівності

$$\sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!} T^{(k)}(\lambda) y_{j-k} = 0, \quad j = 1, ..., m-1. \tag{1.6}$$

Тут $T^{(k)}$ позначає k-у похідну T по λ. Число m називається довжиною ланцюжка $y_0, \ldots, y_{m-1}$ власного і приєднаних векторів. Максимальну довжину ланцюжка, що починається з y_0, називаємо *алгебраїчною кратністю* власного вектора y_0.

Для власного значення λ в'язки T вимірність ядра оператора $T(\lambda)$ називаємо *геометричною кратністю* λ. Кажуть, що власне значення *геометрично просте*, якщо його геометрична кратність дорівнює одиниці. Для геометрично простого власного значення його *алгебраїчна кратність* дорівнює алгебраїчній кратності відповідного власного вектора. (Якщо власне значення λ не є геометрично простим, його алгебраїчна кратність дорівнює кількості векторів у відповідній канонічній системі, див. [13, 18]). Кажуть, що власне значення є *алгебраїчно простим* (або коротко *простим*), якщо його алгебраїчна кратність дорівнює одиниці.

Мета цього дослідження — вивчити обернені задачі відновлення потенціалів p та $q = r'$ рівняння (1.1) за спектральними даними задач (1.1), (1.2) та (1.1), (1.3), що еквівалентно відновленню відповідних операторних в'язок T та T_M. При вивченні таких задач нам важливо відрізняти операторні в'язки, що відповідають енергозалежним рівнянням Штурма–Ліувілля з різними парами потенціалів p та $q = r'$. Для цього там, де це важливо, ми будемо вказувати відповідні символи біля назви в'язки. Наприклад, $T(p, r)$ буде позначати операторну в'язку (1.4), побудовану за рівнянням (1.1) з потенціалами p та $q = r'$.

У розділі 5 ми вивчаємо відновлення рівняння (1.1) за двома спектрами: спектром Діріхле та спектром змішаного типу. Крайові умови змішаного типу (1.3) містять регуляризований потенціал r, і спектр операторної в'язки $T_M(p, r)$ залежить від конкретної первісної r потенціала q. Тому щоб знайти операторну в'язку $T_M(p, r)$ і відповідні крайові умови змішаного типу, в оберненій задачі нам потрібно відновити потенціал p та первісну r потенціала q рівняння (1.1). У розділі 4 ми вивчаємо обернену задачу відновлення рівняння (1.1) за спектром Діріхле та відповідно визначеними нормівними множниками. Зауважимо, що ні крайові умови Діріхле (1.2), ні спектральні дані (спектр та відповідно визначені нормівні множники) в'язки T не залежать від первісної r потенціала q. Зрозуміло, за такими спектральними даними ми не можемо однозначно відновити регуляризований потенціал r. Проте у розділі 4 показано, що у цій оберненій задачі за відповідними спектральними даними ми можемо однозначно відновити потенціали p та q операторної в'язки T, а отже і саму в'язку T. Враховуючи сказане, коли будемо говорити про однозначність відновлення в'язки $T(p, r)$ за спектром і нормівними множниками, будемо розуміти, що потенціал r відновлюється однозначно з точністю до адитивної сталої.

Всі доведення в роботі наведені для операторної в'язки T, щоб уникнути зайвих технічних ускладнень. Проте для в'язки T_M можна отримати аналогічні результати. У випадках, де це важливо, ми сформулюємо відповідні твердження для T_M без доведень.

Властивості операторів A та B гарантують, що в'язка T визначена коректно; точніше, справедливе наступне твердження.

Твердження 1.1. *Для кожного фіксованого* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *оператор* $T(\lambda_0)$ *є замкнутим на області* $\operatorname{dom} T$ *і має дискретний спектр.*

Доведення. Оскільки область визначення оператора A складається лише з обмежених функцій, то $\operatorname{dom} B \supset \operatorname{dom} A$. Звідси відразу випливає, що оператор $T(\lambda_0)$ визначений коректно для кожного $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.

Зафіксуємо $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Візьмемо довільне $\mu \in \rho(A)$ і позначимо через φ_- і φ_+ розв'язки рівняння $\ell(y) = \mu y$, що задовольняють крайові умови $\varphi_-(0) = 0$, $\varphi_-^{[1]}(0) = 1$ та $\varphi_+(1) = 0$, $\varphi_+^{[1]}(1) = 1$. Тоді функція Ґріна для $A - \mu I$, тобто ядро резольвенти $(A - \mu I)^{-1}$, дорівнює

$$k_0(x,s) := \begin{cases} \varphi_+(x)\varphi_-(s)/W, & \text{коли } x > s, \\ \varphi_-(x)\varphi_+(s)/W, & \text{коли } x \leqslant s, \end{cases}$$

де $W = \varphi_+(x)\varphi_-^{[1]}(x) - \varphi_-(x)\varphi_+^{[1]}(x)$ — вронскіан розв'язків φ_+ та φ_-. Зокрема, функція Ґріна є неперервною на квадраті $\Omega := [0,1] \times [0,1]$. Звідси випливає, що оператор $(\lambda_0^2 I - \lambda_0 B)(A - \mu I)^{-1}$ є інтегральним з ядром

$$k(x,s) = (\lambda_0^2 - 2\lambda_0 p(x))k_0(x,s).$$

Оскільки ядро k є інтегровним з квадратом на Ω, то інтегральний оператор $(\lambda_0^2 I - \lambda_0 B)(A - \mu I)^{-1}$ є з класу Гільберта–Шмідта, а отже, $\lambda_0^2 I - \lambda_0 B$ є A–компактним (див. [58, Р. IV]). За теоремою IV.1.11 з [58], оператор $T(\lambda_0)$ є замкнутим на $\operatorname{dom} A$. Більше того, з теореми IV.5.35 з [58] слідує, що істотні спектри операторів A та $T(\lambda_0)$ збігаються. Оскільки A має дискретний спектр, то його істотний спектр порожній, а отже спектр $T(\lambda_0)$ є дискретним. □

Для в'язки T з (1.4) оператор $-T(\lambda_0)$ є оператором Штурма–Ліувілля з потенціалом $q + 2\lambda_0 p - \lambda_0^2$ з крайовими умовами Діріхле, а тому вимірність його ядра є щонайбільше один. Звідси випливає, що усі власні значення в'язки T, яку ми вивчаємо, є геометрично простими.

Проте загалом спектр операторної в'язки T не обов'язково дійсний чи алгебраїчно простий, що показано у наступному прикладі.

Приклад 1.1. Розглянемо операторну в'язку, визначену у просторі $L_2(0,1)$ як

$$T(\lambda) := \lambda^2 - 2\lambda\pi + \frac{d^2}{dx^2} + 5\pi^2 = (\lambda - \pi)^2 + 4\pi^2 + \frac{d^2}{dx^2},$$

з умовами Діріхле (1.2), тобто в'язку T з $p \equiv \pi$ та $q = r' \equiv -5\pi^2$. Тоді $\lambda_{\pm 1} = (1 \pm i\sqrt{3})\pi$ — комплексно спряжені власні значення цієї операторної в'язки, а $\lambda_2 = \pi$ — її власне значення алгебраїчної кратності щонайменше 2, оскільки $y_0 = \sin 2\pi x$ та $y_1 \equiv 0$ утворюють відповідний ланцюжок власного і приєднаного векторів.

Нехай $y(x,z)$ — розв'язок (1.1) з z замість λ, який задовольняє початкові умови $y(0) = 0$, $y^{[1]}(0) = 1$. Цей розв'язок існує і єдиний [28], тому λ є власним значенням задачі (1.1), (1.2) тоді і лише тоді, коли воно є нулем *характеристичної функції* $\varphi(z) := y(1,z)$. Відповідна власна функція збігається з точністю до сталого множника з $y(\cdot,\lambda)$.

У наступному твердженні ми показуємо, що порядок λ як нуля характеристичної функції φ збігається з алгебраїчною кратністю λ як власного значення операторної в'язки T, визначеної формулою (1.4).

Твердження 1.2. *Нехай λ — власне значення спектральної задачі* (1.1), (1.2)*. Тоді λ є нулем характеристичної функції φ порядку m тоді і лише тоді, коли λ є власним значенням операторної в'язки T, заданої в* (1.4)*, алгебраїчної кратності m.*

Доведення. Припустимо, що $y(x,z)$ — розв'язок рівняння (1.1), який задовольняє початкові умови $y(0,z) = 0$, $y^{[1]}(0,z) = 1$, і що λ є нулем $\varphi(z) = y(1,z)$ порядку m. Тоді $y(x,\lambda)$ є власною функцією задачі (1.1), (1.2), що відповідає λ. Очевидно, $y(x,\lambda)$ також є власною функцією операторної в'язки T, що відповідає власному значенню λ. Розглянемо ланцюжок векторів y_j з $j = 0, 1, \dots$ такий, що $y_0 = y(x, \lambda)$ і

$$y_j(x, \lambda) := \frac{1}{j!} \frac{\partial^j y(x, z)}{\partial z^j}\bigg|_{z=\lambda}, \quad j \geqslant 1.$$

Покладемо

$$\tau(\lambda) y := \lambda^2 y - 2\lambda p y - \ell(y).$$

Пряма перевірка показує, що y_j задовольняє рівності (1.6) з τ замість T. Більше того, оскільки λ є нулем $y(1, z)$ порядку m, то $y_1(1) = \dots = y_{m-1}(1) = 0$ і всі функції y_j, $j = 0, \dots, m-1$, належать до області визначення T, а отже утворюють ланцюжок власного та приєднаних векторів T, що відповідає λ. Тому m не перевищує алгебраїчної кратності λ як власного значення T.

Припустимо, що $v_0, \dots, v_l$ — ланцюжок власного та приєднаних векторів, який відповідає власному значенню λ в'язки T. Тоді v_0 розв'язує рівняння

$$\tau(\lambda) y = 0$$

і задовольняє крайові умови (1.2), а отже, збігається з y_0 з точністю до скалярного множника. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $v_0 = y_0$, і тоді покажемо за індукцією, що існує така послідовність $(c_k)_{k=1}^{l}$, що

$$v_k - y_k = \sum_{j=1}^{k} c_j v_{k-j}. \tag{1.7}$$

Спочатку зауважимо, що

$$\tau'(\lambda)(v_0 - y_0) + \tau(\lambda)(v_1 - y_1) = 0.$$

Але $v_0 - y_0 = 0$ і $(v_1 - y_1)(0) = 0$. Тому $v_1 - y_1 = c_1 v_0$, що дає базу індукції. Далі припустимо, що твердження справедливе для всіх $k < n$, і доведемо його для $k = n$. Зауважимо, що

$$\tau(\lambda)(v_n - y_n) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} \tau^{(j)}(v_{n-j} - y_{n-j}).$$

За припущенням, отримуємо рівності

$$\begin{aligned}\tau(\lambda)(v_n - y_n) &= -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!}\tau^{(j)}\Big(\sum_{i=1}^{n-j} c_i v_{n-j-i}\Big)\\ &= -\sum_{i=1}^{n-1} c_i \Big(\sum_{j=1}^{n-i} \frac{1}{j!}\tau^{(j)} v_{n-j-i}\Big) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \tau(\lambda) v_{n-i}.\end{aligned}$$

Тому

$$\tau(\lambda)\Big(v_n - y_n - \sum_{j=1}^{n-1} c_j v_{n-j}\Big) = 0$$

і

$$\Big(v_n - y_n - \sum_{j=1}^{n-1} c_j v_{n-j}\Big)(0) = 0,$$

звідки

$$v_n - y_n - \sum_{j=1}^{n-1} c_j v_{n-j} = c_n v_0$$

для деякої сталої c_n, тобто справджується (1.7).

Якщо припустимо, що $l \geqslant m$, то отримаємо, що $v_m - y_m = \sum_{j=1}^{m} c_j v_{m-j}$, а тому $y_m(1) = 0$. Це суперечить тому, що λ є нулем $\varphi(z)$ порядку m. Твердження доведено. □

Аналогічно можна ввести означення характеристичної функції для задачі (1.1), (1.3). Нехай $y(x, z)$ — розв'язок рівняння (1.1) із z замість λ, з початковими умовами $y(0) = 0$, $y^{[1]}(0) = 1$. Тоді μ є власним значенням задачі (1.1), (1.3) тоді і лише тоді, коли воно є нулем *характеристичної функції* $\psi(z) := y^{[1]}(1, z)$. Відповідна власна функція збігається з точністю до сталого множника з $y(\cdot, \mu)$. Аналогічно до попереднього можна довести таке твердження.

Твердження 1.3. *Нехай μ — власне значення спектральної задачі* (1.1), (1.3). *Тоді μ є нулем характеристичної функції ψ порядку m тоді і лише тоді, коли μ є власним значенням операторної в'язки T_M, заданої в* (1.5), *алгебраїчної кратності m.*

У цьому розділі описано головний об'єкт нашого дослідження. Рівняння Штурма–Ліувілля з енергозалежним потенціалом залежить від спектрального параметру нелінійно. Тому для того, щоб дати строге означення досліджуваної спектральної задачі, енергозалежне рівняння Штурма–Ліувілля ми подали як спектральну задачу для відповідної квадратичної операторної в'язки. Також тут наведені основні означення зі спектральної теорії операторних в'язок та сформульовані деякі допоміжні твердження, які будуть використані у дослідженні.

Наведені тут результати опубліковані в працях [70, 73].

РОЗДІЛ 2
СПЕКТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ЕНЕРГОЗАЛЕЖНИХ РІВНЯНЬ ШТУРМА–ЛІУВІЛЛЯ

У цьому розділі ми досліджуємо спектральні властивості задач Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенцілами (див. [70, 73, 75, 77, 88]). Деякі з таких властивостей отримані із загальної спектральної теорії поліноміальних операторних в'язок (див. [18]) та з безпосереднього аналізу відповідної квадратичної операторної в'язки. Ми доводимо еквівалентність спектральної задачі для (1.1) та спектральної задачі для лінеаризації $\mathscr{L}$. Лінійний оператор $\mathscr{L}$ є самоспряженим у відповідно визначеному просторі Понтряґіна, звідки випливають додаткові спектральні властивості $\mathscr{L}$, а отже, і операторної в'язки T.

Також ми описуємо зведення спектральної задачі для (1.1) до відповідної задачі для системи Дірака спеціального вигляду. У цьому розділі ми використовуємо його для дослідження асимптотик власних значень та власних функцій задач Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами. А саме, з такого зв'язку ми отримуємо інтегральне зображення для розв'язку рівняння (1.1), що в свою чергу є базою для подальшого асимптотичного аналізу відповідних спектральних характеристик. Описане тут зведення до системи Дірака також використовується при розв'язуванні обернених задач відновлення у розділах 4 та 5.

2.1. Спектральні властивості операторної в'язки

У цьому підрозділі ми обговоримо деякі основні спектральні властивості операторної в'язки $T(\lambda) = \lambda^2 I - \lambda B - A$, визначеної у підрозділі 1.2.

Почнемо з наступних лем.

Лема 2.1. *Спектр операторної в'язки T складається лише з власних значень.*

Доведення. За означенням, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ належить до спектра в'язки T тоді і лише тоді, коли $0 \in \sigma(T(\lambda_0))$. Оскільки $\sigma(T(\lambda_0)) = \sigma_{\mathrm{p}}(T(\lambda_0))$ (див. Твердження 1.1), кожне λ_0 зі спектру T є його власним значенням. □

Лема 2.2. *Резольвентна множина операторної в'язки T непорожня.*

Доведення. Оскільки оператор A напівобмежений знизу, існує таке число μ, що оператор $A+\mu^2 I$ додатний. Покажемо, що тоді число $i\mu$ належить до резольвентної множини $\rho(T)$ операторної в'язки T. Припустимо, що це не так. Тоді, за попередньою лемою, $i\mu$ є власним значенням T та існує відповідна ненульова власна функція y. З рівності $T(i\mu)y = 0$ випливає, що

$$((A + \mu^2 I)y, y)_{L_2} + i\mu(By, y)_{L_2} = 0.$$

А це суперечить додатності $A + \mu^2 I$. Отже, $i\mu$ належить до $\rho(T)$ і лему доведено. □

Використовуючи ці леми, ми можемо довести дискретність спектру операторної в'язки T.

Лема 2.3. *Спектр операторної в'язки T є дискретною підмножиною $\mathbb{C}$.*

Доведення. Візьмемо деяке $\lambda_0 \in \rho(T)$ і перепишемо $T(\lambda)$ так:

$$T(\lambda) = T(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)[2\lambda_0 I - B] + (\lambda - \lambda_0)^2 I.$$

Покладемо $\widehat{B} := 2\lambda_0 I - B$, $\widehat{A} := T(\lambda_0)$, $\mu := \lambda - \lambda_0$ і розглянемо в'язку $\widehat{T}(\mu) := T(\lambda)T^{-1}(\lambda_0)$, яку можна записати так

$$\widehat{T}(\mu) := I + \mu\widehat{B}\widehat{A}^{-1} + \mu^2\widehat{A}^{-1}.$$

Використовуючи міркування, аналогічні до використаних у доведенні твердження 1.1, отримуємо, що оператор $\mu\widehat{B}\widehat{A}^{-1} + \mu^2\widehat{A}^{-1}$ є з класу Гільберта–Шмідта, а отже, є компактним. Тоді застосуємо теорему Ґохберга про аналітичні операторнозначні функції [7, P.I] до в'язки $I - S(\mu)$ з $S(\mu) := -(\mu\widehat{B}\widehat{A}^{-1} + \mu^2\widehat{A}^{-1})$. Отримаємо, що для всіх $\mu \in \mathbb{C}$ за винятком, можливо, деяких ізольованих точок, оператор $\widehat{T}(\mu)$ є обмежено оборотним, тоді як ці ізольовані точки є власними значеннями $\widehat{T}$ скінченної алгебраїчної кратності. Це показує, що спектр $\widehat{T}$ є дискретною підмножиною $\mathbb{C}$.

Візьмемо $\lambda \in \sigma(T)$, що за лемою 2.1 означає, що $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$, і нехай x — відповідна власна функція. Тоді $y = T(\lambda_0)x$ — власна функція $\widehat{T}$, яка відповідає власному значенню $\mu = \lambda - \lambda_0$. Звідси

$$\lambda \in \sigma(T) \Rightarrow \mu = \lambda - \lambda_0 \in \sigma(\widehat{T}).$$

Зауважимо також, що якщо $\lambda \in \rho(T)$, тобто якщо $T(\lambda)$ обмежено оборотний, то оператор $T(\lambda_0)T^{-1}(\lambda)$ допускає замикання і визначений на всьому просторі $L_2(0,1)$, а тому є обмеженим за теоремою про замкнутий графік [58, Теорема III.5.20]. Безпосередня перевірка показує, що $T(\lambda_0)T^{-1}(\lambda)$ є оберненим оператором до $\widehat{T}(\mu)$ з $\mu = \lambda - \lambda_0$. Тому,

$$\lambda \in \rho(T) \Rightarrow \mu = \lambda - \lambda_0 \in \rho(\widehat{T}).$$

Ці дві імплікації дають еквівалентність

$$\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \mu = \lambda - \lambda_0 \in \sigma(\widehat{T}).$$

А отже, спектр операторної в'язки T є дискретним у $\mathbb{C}$ разом зі спектром $\widehat{T}$.

□

Підсумуємо вище наведені твердження у наступній теоремі.

Теорема 2.1. *Спектр операторної в'язки T з (1.4) є дискретною підмножиною $\mathbb{C}$ і складається з геометрично простих власних значень.*

Не обмежуючи загальності, ми можемо і будемо вважати надалі у цьому розділі, що виконується припущення

(A0) 0 не належить до $\sigma(T)$.

Чи еквівалентно

(A0) Оператор A є обмежено оборотним.

За попередньою теоремою, ми завжди можемо цього досягнути, зсунувши спектральний параметр на деяке дійсне число.

2.2. Лінеаризація та її властивості

У цьому підрозділі ми перепишемо спектральну задачу для операторної в'язки T як спектральну задачу для деякого лінійного оператора $\mathscr{L}$ і покажемо еквівалентність цих задач. Розглядаючи $\mathscr{L}$ у спеціально визначеному просторі Понтряґіна, ми виведемо деякі додаткові спектральні властивості в'язки T.

2.2.1. Лінеаризація. Покладемо $u_1 := y$ та $u_2 := \lambda y$ і перепишемо задачу (1.1), (1.2) як систему першого порядку

$$\begin{aligned} u_2 &= \lambda u_1, \\ A u_1 + B u_2 &= \lambda u_2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Система (2.1) є спектральною задачею для оператора

$$\mathscr{L}_0 := \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & B \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Тому спектральні властивості операторної в'язки T мають бути тісно пов'язані зі спектральними властивостями оператора $\mathscr{L}_0$. Останній природно розглянути в енергетичному просторі $\mathcal{E}$, визначеному далі.

Нагадаємо, за припущенням (A0) оператор A є обмежено оборотним. Позначимо через H_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, шкалу гільбертових просторів, утворених оператором A. Отже, простір H_0 збігається з $L_2(0,1)$, для $\alpha > 0$ простір H_α є областю визначення оператора $|A|^\alpha$ з нормою $\|x\|_\alpha := \||A|^\alpha x\|$, і для $\alpha < 0$ простір H_α – це поповнення H_0 за нормою $\|\cdot\|_\alpha$. Оскільки оператор A має компактну резольвенту, для кожного $\beta < \alpha$ вкладення $H_\alpha \hookrightarrow H_\beta$ є компактним. Зауважимо, що для будь-якого $\alpha < \theta$ звуження оператора A^α на H_θ є гомеоморфізмом між H_θ та $H_{\theta-\alpha}$. Так само для $\alpha > \theta$ розширення за неперервністю оператора A^α як відображення з H_θ в $H_{\theta-\alpha}$ є гомеоморфізмом.

Введемо гільбертів простір $(\mathcal{E}, (\cdot,\cdot)_\mathcal{E})$, де $\mathcal{E} := H_{1/2} \times H_0$ і скалярний добуток $(\cdot,\cdot)_\mathcal{E}$ задано рівністю

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_\mathcal{E} = (|A|^{1/2}x_1, |A|^{1/2}y_1)_{L_2} + (x_2, y_2)_{L_2}$$

для кожного $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\mathrm{t}$ та $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^\mathrm{t}$ в $\mathcal{E}$. Тоді оператор $\mathscr{L}_0$ з (2.2) визначений коректно на області

$$\operatorname{dom}\mathscr{L}_0 := \{(u_1, u_2)^\mathrm{t} \mid u_1 \in H_1;\ u_2 \in H_{1/2} \cap \operatorname{dom} B\}.$$

Проте $\mathscr{L}_0$ не є замкнутим на цій області. Щоб описати його замикання, нам потрібний такий додатковий результат.

Лема 2.4. *Оператор B можна розширити за неперервністю до компактного відображення $\widetilde{B}$ з $H_{1/2}$ в $H_{-1/2}$.*

Доведення. Використовуючи аргументи, аналогічні до використаних у доведенні твердження 1.1, можна показати, що оператор $BA^{-1} : H_0 \to H_0$ є компактним. Звідси випливає компактність B як відображення з H_1 в H_0.

Зауважимо, що $H_1 \hookrightarrow H_0 \hookrightarrow H_{-1}$ — оснащена трійка гільбертових просторів ([2, Р. 1], [5, Р. 1]). Позначивши через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ дуальність між H_{-1} та H_1, для $x \in H_1 \subset \operatorname{dom} B$ отримуємо, що

$$\begin{aligned}\|Bx\|_{-1} &= \sup_{y\in H_1 : \|y\|_1=1} |\langle Bx, y\rangle| = \sup_{y\in H_1 : \|y\|_1=1} |(Bx, y)_{L_2}| \\ &= \sup_{y\in H_1 : \|y\|_1=1} |(x, By)_{L_2}| \leqslant \|x\|_0 \|B\|_{H_1\to H_0}.\end{aligned}$$

Звідси випливає, що B можна розширити за неперервністю до обмеженого відображення з H_0 в H_{-1}. Тепер, використовуючи теорему про інтерполяцію для компактних операторів [68], отримуємо компактність $\widetilde{B} : H_{1/2} \to H_{-1/2}$. $\square$

Також нагадаємо, що A можна розширити за неперервністю до гомеоморфізму $\widetilde{A} : H_{1/2} \to H_{-1/2}$.

Лема 2.5 ([49]). *Оператор $\mathscr{L}_0$ допускає замикання в $\mathcal{E}$, і це замикання $\mathscr{L}$ задається формулами*

$$\begin{gathered} \mathscr{L}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \widetilde{A}x_1 + \widetilde{B}x_2 \end{pmatrix}, \\ \operatorname{dom}\mathscr{L} = \left\{(x_1, x_2)^{\mathrm{t}} \mid x_1, x_2 \in H_{1/2},\ \widetilde{A}x_1 + \widetilde{B}x_2 \in H_0\right\}. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Покажемо тепер, що спектри T та $\mathscr{L}$ збігаються. Для початку доведемо, що спектр $\mathscr{L}$ дискретний.

Лема 2.6. *Спектр оператора $\mathscr{L}$ дискретний.*

Доведення. За зауваженням 1.1, щоб показати дискретність спектра $\mathscr{L}$, достатньо встановити, що обернений оператор $\mathscr{L}^{-1}$ компактний.

Для $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{t}}$ з $\operatorname{dom}\mathscr{L}$ та $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^{\mathrm{t}}$ з $\mathcal{E}$, рівняння $\mathscr{L}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ можна переписати як систему

$$\begin{aligned} x_2 &= y_1, \\ \widetilde{A}x_1 + \widetilde{B}x_2 &= y_2. \end{aligned}$$

Оскільки оператор $\widetilde{A}$ є гомеоморфізмом між $H_{1/2}$ та $H_{-1/2}$, то оператор $\mathscr{L}$ обмежено оборотний і його обернений $\mathscr{L}^{-1}$ задається матрицею

$$\mathscr{L}^{-1} = \begin{pmatrix} -\widetilde{A}^{-1}\widetilde{B} & A^{-1} \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

на $\mathcal{E}$. Далі доведемо, що $\mathscr{L}^{-1} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ компактний оператор. Для цього покажемо компактність всіх елементів відповідної матриці операторів.

За лемою 2.4, оператор $\widetilde{B} : H_{1/2} \to H_{-1/2}$ компактний. Тому з обмеженості $\widetilde{A}^{-1} : H_{-1/2} \to H_{1/2}$ випливає компактність $\widetilde{A}^{-1}\widetilde{B} : H_{1/2} \to H_{1/2}$.

З того, що оператор $A^{-1} : H_0 \to H_1$ обмежений і вкладення $H_1 \hookrightarrow H_{1/2}$ компактне випливає, що оператор $A^{-1} : H_0 \to H_{1/2}$ компактний як композиція обмеженого та компактного операторів.

Нижній правий елемент I є вкладенням простору $H_{1/2}$ в H_0, а отже, це компактний оператор.

З цих зауважень випливає компактність $\mathscr{L}^{-1}$. Доведення завершене. $\square$

Для $\lambda \in \mathbb{C}$ покладемо

$$\widetilde{T}(\lambda) := \lambda^2 I - \lambda\widetilde{B} - \widetilde{A} \tag{2.4}$$

і розглянемо $\widetilde{T}(\lambda)$ як оператор з $H_{1/2}$ в $H_{-1/2}$.

Теорема 2.2 ([49], див. також [91, 92]). *Спектр оператора $\mathscr{L}$ збігається зі спектром $\sigma(\widetilde{T})$ операторної в'язки $\widetilde{T}$. Для кожного ненульового $\lambda \in \rho(\widetilde{T})$ справедливе таке зображення:*

$$(\mathscr{L} - \lambda\mathscr{I})^{-1} = \begin{pmatrix} -\lambda^{-1}(\widetilde{T}^{-1}(\lambda)\widetilde{A} + I) & -T^{-1}(\lambda) \\ -\widetilde{T}^{-1}(\lambda)\widetilde{A} & -\lambda T^{-1}(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

де $\mathscr{I}$ — тотожний оператор.

Тепер ми можемо показати, що спектри оператора $\mathscr{L}$ та операторної в'язки T збігаються. За лемами 2.3 та 2.6 достатньо показати, що збігаються відповідні власні значення.

Теорема 2.3. *Власні значення операторної в'язки T збігаються з власними значеннями оператора $\mathscr{L}$ враховуючи геометричні та алгебраїчні кратності.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що для кожного $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ оператор $\widetilde{T}(\lambda_0)$ є розширенням $T(\lambda_0)$. Тому якщо для деякого $\mu \in \rho(T(\lambda_0)) \cap \rho(\widetilde{T}(\lambda_0))$ маємо, що $(\widetilde{T}(\lambda_0)-\mu)u \in H_0$, то u належить до H_1, тобто до $\operatorname{dom} T$. Це зауваження буде використане у подальшому доведенні.

Припустимо, що $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ — власне значення T з відповідним ланцюжком власного та приєднаних векторів $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$. Тоді за означенням

$$(\lambda_0^2 - \lambda_0 B - A)y_k + (2\lambda_0 - B)y_{k-1} + y_{k-2} = 0$$

для $k = 0, \dots, m-1$ з y_{-1}, y_{-2} рівними нулю. Пряма перевірка показує, що ці рівності еквівалентні таким:

$$(\mathscr{L} - \lambda_0)\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_{k-1}, \quad k = 0, \dots, m-1,$$

з $\mathbf{y}_k := (y_k, \lambda_0 y_k + y_{k-1})^{\mathrm{t}}$. Зокрема, λ_0 є власним значенням $\mathscr{L}$, а вектори $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{m-1}$ належать до області визначення $\mathscr{L}$, і отже, утворюють ланцюжок власного та приєднаних векторів $\mathscr{L}$, що відповідає λ_0.

Далі припустимо, що $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ — власне значення $\mathscr{L}$ з відповідним ланцюжком власного та приєднаних векторів $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{m-1}$ довжини m. За означенням $(\mathscr{L} - \lambda_0)\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_{k-1}$ (з $\mathbf{y}_{-1} := 0$). Покладемо $\mathbf{y}_k := (y_{k,1}, y_{k,2})^{\mathrm{t}}$. Тоді

$$\begin{aligned} -\lambda_0 y_{k,1} + y_{k,2} &= y_{k-1,1}, \\ \widetilde{A} y_{k,1} + (\widetilde{B} - \lambda_0) y_{k,2} &= y_{k-1,2}. \end{aligned}$$

Звідси $y_{k,2} = \lambda_0 y_{k,1} + y_{k-1,1}$ і

$$(\lambda_0^2 - \lambda_0 \widetilde{B} - \widetilde{A}) y_{k,1} + (2\lambda_0 - \widetilde{B}) y_{k-1,1} + y_{k-2,1} = 0$$

для $k = 0, \dots m-1$, з $y_{-2,1} = 0$. Оскільки $\mathbf{y}_k = (y_{k,1}, y_{k,2})^{\mathrm{t}} \in \operatorname{dom} \mathscr{L}$, то $y_{k,1}$ належить до $H_{1/2}$. Тому з останньої рівності випливає, що $y_{0,1}, y_{1,1}, \dots, y_{m-1,1}$ — ланцюжок власного та приєднаних векторів операторної в'язки $\widetilde{T}$, що відповідає власному значенню λ_0.

Тепер доведемо за індукцією, що всі вектори $y_{0,1}, y_{1,1}, \dots, y_{m-1,1}$ належать до H_1, а тому утворюють ланцюжок власного та приєднаних векторів T, що відповідає λ_0. Для $\mu \in \rho(T(\lambda_0)) \cap \rho(\widetilde{T}(\lambda_0))$ виконується рівність $(\widetilde{T}(\lambda_0) - \mu)y_{0,1} = -\mu y_{0,1} \in H_0$. За зауваженням, зробленим на початку доведення, звідси випливає, що $y_{0,1}$ належить до H_1, а отже, є власним вектором T, що відповідає λ_0. Тепер припустимо, що $y_{j,1}$ належить до H_1 для кожного $j < k$; тоді

$$(\widetilde{T}(\lambda_0) - \mu)y_{k,1} = -\mu y_{k,1} - (2\lambda_0 - \widetilde{B})y_{k-1,1} + y_{k-2,1} \in H_0.$$

Аналогічно доводимо, що $y_{k,1}$ є з H_1; отже, ланцюжок власного та приєднаних векторів $\mathscr{L}$ генерує відповідний ланцюжок для T.

Вище наведені міркування показують, що між ланцюжками власних та приєднаних векторів T та $\mathscr{L}$, що відповідають одному і тому ж власному значенню існує взаємно однозначна відповідність. Це доводить твердження. $\square$

Те, що власні значення $\mathscr{L}$ та T збігаються, можна довести іншим способом. Зауважимо, що з леми 2.6 та теореми 2.2 випливає, що спектр $\widetilde{T}$ дискретний. Відомо (див. [85]), що дискретні частини спектрів T та $\widetilde{T}$ збігаються. З огляду на твердження 2.3, з цього отримуємо, що $\sigma(T) = \sigma(\widetilde{T})$, а тому $\sigma(T) = \sigma(\mathscr{L})$.

2.2.2. Деякі факти з теорії просторів Понтряґіна. Тепер нагадаємо деякі факти з теорії просторів Понтряґіна, які використовуються для виведення спектральних властивостей лінеаризації $\mathscr{L}$, а отже, і операторної в'язки T. Деталі теорії, більше спектральних властивостей самоспряжених операторів у просторах Понтряґіна та доведення наведених тут тверджень можна знайти у [1, 38, 62].

Лінійний простір Π називаємо *простором з внутрішнім добутком*, якщо існує комплекснозначна функція $[\cdot,\cdot]$, визначена на $\Pi \times \Pi$, така, що умови

$$[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v] = \alpha_1[u_1, v] + \alpha_2[u_2, v],$$
$$[u, v] = \overline{[v, u]}$$

виконуються для всіх $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ та $u_1, u_2, u, v \in \Pi$. Тоді функцію $[\cdot, \cdot]$ називамо *внутрішнім добутком.* Простір з внутрішнім добутком $(\Pi, [\cdot, \cdot])$ називаємо *простором Понтряґіна* з *від'ємним індексом* κ, якщо Π можна записати як

$$\Pi = \Pi_+ \, [\dot{+}] \, \Pi_-, \tag{2.6}$$

де $[\dot{+}]$ позначає пряму суму, ортогональну відносно $[\cdot, \cdot]$, $(\Pi_\pm, \pm[\cdot, \cdot])$ — простори Гільберта, а компонента Π_- має скінченну вимірність κ.

Елемент $x \in \Pi$ називаємо *додатним* (відповідно, *від'ємним, недодатним, невід'ємним, нейтральним*) якщо $[x, x] > 0$ (відповідно, $[x, x] < 0$, $[x, x] \leqslant 0$, $[x, x] \geqslant 0$, $[x, x] = 0$). Підпростір $\mathcal{M}$ простору P називаємо *додатним* (відповідно, *від'ємним, недодатним, невід'ємним, нейтральним*), якщо всі його ненульові вектори є додатними (відповідно, від'ємними, недодатними, невід'ємними, нейтральними).

У просторі Понтряґіна з від'ємним індексом κ вимірність недодатного підпростору не може перевищувати κ. Більше того, недодатний підпростір простору Понтряґіна є максимальним (тобто таким, що не вкладається строго у будь-який інший недодатний підпростір) тоді і лише тоді, якщо він має вимірність κ.

Простори Понтряґіна часто виникають з гільбертових просторів у такий спосіб. Припустимо, що $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ — простір Гільберта, а G — обмежений і самоспряжений оператор в $\mathcal{H}$ з $0 \in \rho(G)$, що має рівно κ від'ємних власних значень враховуючи їх кратності. Введемо внутрішній добуток

$$[x, y] := (Gx, y), \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Простір $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$ з таким добутком є простором Понтряґіна з від'ємним індексом κ, для якого в розкладі (2.6) Π_+ та Π_- можуть бути спектральними підпросторами G, що відповідають додатному та від'ємному спектру G відповідно.

Розглянемо простір Понтряґіна $\Pi := \big(\Pi, [\cdot,\cdot]\big)$ та замкнутий оператор $\mathcal{A}$, щільно визначений на Π. *Спряжений* $\mathcal{A}^{[*]}$ до оператора $\mathcal{A}$ в Π визначений на області

$$\operatorname{dom}\mathcal{A}^{[*]} := \{y \in \Pi \mid [\mathcal{A}\cdot, y] \text{ — неперервний лінійний функціонал на } \operatorname{dom}\mathcal{A}\}$$

співвідношенням

$$[\mathcal{A}x, y] = [x, \mathcal{A}^{[*]}y], \quad x \in \operatorname{dom}\mathcal{A},\ y \in \operatorname{dom}\mathcal{A}^{[*]}.$$

Оператор $\mathcal{A}$ називаємо *симетричним*, якщо $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^{[*]}$, і *самоспряженим*, якщо $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{[*]}$. На відміну від випадку гільбертового простору, спектр самоспряженого оператора у просторі Понтряґіна не обов'язково дійсний, але він завжди симетричний відносно дійсної осі.

Якщо для деякого власного значення λ самоспряженого оператора у просторі Понтряґіна всі власні вектори є додатними (відповідно, від'ємними), то кажуть, що λ є *додатного* (відповідно, *від'ємного*) *типу.*

Твердження 2.1. *Нехай $\mathcal{A}$ — самоспряжений оператор у просторі Понтряґіна* Π. *Тоді*

(1) *спектр $\mathcal{A}$ дійсний за можливим винятком щонайбільше κ пар власних значень λ та $\bar{\lambda}$ скінченної алгебраїчної кратності;*

(2) *якщо спектр оператора $\mathcal{A}$ дискретний, то множина всіх власних векторів та відповідних приєднаних векторів $\mathcal{A}$ утворює базу в* Π.

Позначимо через $\mathcal{M}_\lambda(\mathcal{A})$ кореневий простір оператора $\mathcal{A}$, що відповідає власному значенню λ.

Твердження 2.2. *Нехай $\mathcal{A}$ — самоспряжений оператор у просторі Понтряґіна. Тоді*

(1) *для власних значень λ та μ оператора $\mathcal{A}$ таких, що $\lambda \neq \overline{\mu}$, кореневі простори $\mathcal{M}_\lambda(\mathcal{A})$ та $\mathcal{M}_\mu(\mathcal{A})$ є $[\cdot,\cdot]$–ортогональними;*

(2) *лінійна оболонка всіх алгебраїчних кореневих просторів, що відповідають власним значенням $\mathcal{A}$ у верхній (або нижній) півплощині*

є нейтральним підпростором Π*;*

(3) *кореневі простори* $\mathcal{M}_\lambda(\mathcal{A})$ *та* $\mathcal{M}_{\bar\lambda}(\mathcal{A})$*, що відповідають комплексно спряженим власним значенням* λ *та* $\bar\lambda$*, ізоморфні; більше того, вони мають однакову жорданову структуру;*

(4) *позначимо через* $m(\lambda)$ *алгебраїчну кратність власного значення* λ*; тоді*

$$\sum_{\mathrm{Im}\lambda>0} m(\lambda) + \sum_{\mathrm{Im}\lambda=0} \left[\frac{m(\lambda)}{2}\right] \leqslant \kappa.$$

Зокрема, довжина кожного ланцюжка власного і приєднаних векторів не перевищує $2\kappa+1$*, а кількість непростих дійсних власних значень не перевищує* κ*.*

2.2.3. Властивості лінеаризації у просторі Понтряґіна та додаткові властивості операторної в'язки. Тепер покажемо, що лінеаризація $\mathscr{L}$ — самоспряжений оператор у деякому просторі Понтряґіна. Використавши властивості самоспряжених операторів у просторах Понтряґіна, наведені вище, ми отримаємо додаткові спектральні властивості $\mathscr{L}$.

Розглянемо оператор $J = P_+ - P_-$, де P_+ та P_- — ортогональні проектори на спектральні підпростори оператора A, що відповідають додатній та від'ємній частинам спектру відповідно. Покладемо $\mathscr{J} := \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ і визначимо скалярний добуток

$$[\mathbf{x},\mathbf{y}] := (\mathscr{J}\mathbf{x},\mathbf{y})_{\mathcal{E}} = (J|A|^{1/2}x_1, |A|^{1/2}y_1)_{L_2} + (x_2,y_2)_{L_2}$$

для кожного $\mathbf{x} = (x_1,x_2)^{\mathrm{t}}$ і $\mathbf{y} = (y_1,y_2)^{\mathrm{t}}$ з $\mathcal{E}$. Кількість від'ємних власних значень оператора $\mathscr{J}$ дорівнює кількості від'ємних власних значень J, враховуючи кратності, що в свою чергу дорівнює кількості від'ємних власних значень A. Але оператор A напівобмежений знизу і кількість його від'ємних власних значень скінченна, скажімо κ. Тому добуток $[\cdot,\cdot]$ індефінітний, а простір $\Pi := (\mathcal{E}, [\cdot,\cdot])$ є простором Понтряґіна з від'ємним індексом κ. Зауважимо, що топологія Π збігається з топологією $\mathcal{E}$.

Розглянемо оператор $\mathscr{L}_0$ у просторі Π. Для кожного $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{t}}$ з $\operatorname{dom}\mathscr{L}_0$ маємо

$$\begin{aligned}[\mathscr{L}_0\mathbf{x}, \mathbf{x}] &= (J|A|^{1/2}x_2, |A|^{1/2}x_1)_{L_2} + (Ax_1, x_2)_{L_2} + (Bx_2, x_2)_{L_2} \\ &= (Ax_1, x_2)_{L_2} + (x_2, Ax_1)_{L_2} + (Bx_2, x_2)_{L_2} \\ &= 2\mathrm{Re}(Ax_1, x_2)_{L_2} + (Bx_2, x_2)_{L_2}.\end{aligned}$$

Очевидно, це показує, що $[\mathscr{L}_0\mathbf{x}, \mathbf{x}]$ дійсне число, а значить, оператор $\mathscr{L}_0$ симетричний в Π. З цього та з дискретності спектру $\mathscr{L}$ (див. лему 2.6) випливає наступне твердження (див. [50, Теорема II.9.1]).

Твердження 2.3. *Оператор $\mathscr{L}$ самоспряжений у просторі Понтряґіна* Π.

Використовуючи цей результат і властивості самоспряжених операторів у просторах Понтряґіна (див. твердження 2.1), отримуємо, що спектр оператора $\mathscr{L}$ дійсний за можливим винятком щонайбільше κ пар комплексно спряжених власних значень λ та $\bar{\lambda}$. Алгебраїчна кратність кожного власного значення $\mathscr{L}$ не може перевищувати $2\kappa + 1$.

Якщо оператор A додатний, Π є гільбертовим простором (від'ємний індекс $\kappa = 0$). Тоді $\mathscr{L}$ — самоспряжений оператор у гільбертовому просторі, і тому його спектр дійсний, а геометричні та алгебраїчні кратності власних значень рівні. Власні значення $\mathscr{L}$ геометрично прості за теоремами 2.1 та 2.3, а тому спектр оператора $\mathscr{L}$ за такого припущення дійсний і простий.

Підсумовуючи всі ці результати та використовуючи зв'язок між спектральними задачами для операторної в'язки T і оператора $\mathscr{L}$, одержуємо такі спектральні властивості T.

Теорема 2.4. *Нехай κ — кількість від'ємних власних значень оператора A. Тоді*

(1) *спектр операторної в'язки T дійний за можливим винятком щонайбільше κ пар комплексно спряжених власних значень λ і $\bar{\lambda}$;*

(2) *позначимо через $m(\lambda)$ алгебраїчну кратність власного значення λ; тоді*

$$\sum_{\mathrm{Im}\lambda>0} m(\lambda) + \sum_{\mathrm{Im}\lambda=0} \left[\frac{m(\lambda)}{2}\right] \leqslant \kappa.$$

Зокрема, алгебраїчна кратність кожного власного значення T не перевищує $2\kappa+1$, а кількість кратних дійсних власних значень T не перевищує κ.

Наслідок 2.1. *Якщо оператор A додатний, то спектр операторної в'язки T дійсний і простий.*

В'язку T_M можна вивчати таким же чином, як і T. Більше того, за допомогою оператора A_M можна побудувати енергетичний простір $\mathcal{E}_M$, відповідний простір Понтряґіна Π_M та розглянути в ньому відповідну лінеаризацію $\mathscr{L}_M$ як це було зроблено для T. Очевидно, всі результати підрозділів 2.1 та 2.2, що стосуються в'язки T, справедливі також і для T_M.

2.3. Зведення до системи Дірака

У цьому підрозділі ми опишемо процедуру зведення енергозалежного рівняння Штурма–Ліувілля (1.1) до лінійної системи Дірака першого порядку (див. [25, 70]). Далі ми будемо вивчати асимптотики спектральних характеристик відповідного оператора Дірака і використаємо отримані результати, щоб вивести асимптотики відповідних спектральних характеристик для операторних в'язок T та T_M. Таке зведення до системи Дірака є одним із ключових кроків у нашому дослідженні і використовується, зокрема, при вивчені обернених задач для T та T_M (див. розділи 4 та 5).

Для процедури зведення важливо, що рівняння $\ell(y) = 0$ має розв'язок, який не досягає нуля на $[0, 1]$. Покажемо, що такий розв'язок існує. Почнемо з леми, аналогічної до класичної теореми Штурма про чергування нулів.

Лема 2.7. *Нехай* u *та* v *— два лінійно незалежні розв'язки рівняння* $\ell(y) = 0$, *а* x_1 *та* x_2 *— два послідовні нулі функції* u. *Тоді на проміжку* (x_1, x_2) *є нуль розв'язку* v *і до того ж тільки один.*

Доведення. Доведення цієї леми аналогічне до класичного випадку (див., напр., [17]; див. також [22]).

Проінтегруємо вираз $\ell(u)v - u\ell(v)$ на проміжку (x_1, x_2). Використовуючи інтегрування частинами, отримаємо

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} [\ell(u)v - u\ell(v)] = u^{[1]}(x_1)v(x_1) - u^{[1]}(x_2)v(x_2).$$

У правій частині цієї рівності $u^{[1]}(x_1)$ та $u^{[1]}(x_2)$ не можуть дорівнювати нулю, бо розв'язок u не дорівнює тотожно нулю. За умовою леми, u та v лінійно незалежні, тому $v(x_1)$ та $v(x_2)$ теж не можуть дорівнювати нулю. Оскільки x_1 та x_2 — послідовні нулі розв'язку u, використовуючи лему 2.5 з [57], отримуємо, що $u^{[1]}(x_1)$ та $u^{[1]}(x_2)$ різного знаку. А тому з останньої рівності $v(x_1)$ та $v(x_2)$ також різного знаку. Тоді, за теоремою про проміжне значення, на проміжку (x_1, x_2) існує принаймні один нуль функції v. Цей нуль єдиний, оскільки в протилежному випадку, використовуючи такі ж міркування, як вище, ми б могли показати, що на (x_1, x_2) існує ще один нуль функції u. А це суперечить тому, що x_1 та x_2 — послідовні нулі функції u. Лему доведено. □

Використовуючи цю лему, покажемо, що існує розв'язок $\ell(y) = 0$, який не досягає нуля на $[0, 1]$. Візьмемо два лінійно незалежні розв'язки цього рівняння u та v. За попередньою лемою, нулі u та v чергуються. Тому функція $y := u + iv$ не досягає нуля на $[0, 1]$, а отже є шуканим розв'язком рівняння $\ell(y) = 0$. Ми використаємо цей результат в описаній далі процедурі зведення рівняння Штурма–Ліувілля з енергозалежним потенціалом до системи Дірака.

Позначимо через y_0 деякий розв'язок $\ell(y) = 0$, що не досягає нуля на $[0,1]$ і покладемо $v := y_0'/y_0$. Зауважимо, що $v \in L_2(0,1)$ і $q = v' + v^2$, тобто q є потенціалом Міури (див. [57]). Тоді диференціальний вираз $-y'' + qy$ можна записати у факторизованій формі, а саме

$$-y'' + qy = -\Big(\frac{d}{dx} + v\Big)\Big(\frac{d}{dx} - v\Big)y. \tag{2.7}$$

Зауваження 2.1. Оскільки функція v задовольняє рівність $v - r = y_0^{[1]}/y_0$, то $v - r$ є неперервною функцією на $[0,1]$.

Для $\lambda \neq 0$ розглянемо функції $u_2 := y$ та $u_1 := (y' - vy)/\lambda$ і перепишемо рівняння (1.1) як таку систему першого порядку для u_1 та u_2:

$$u_2' - vu_2 = \lambda u_1, \tag{2.8}$$

$$-u_1' - vu_1 + 2pu_2 = \lambda u_2. \tag{2.9}$$

Покладемо

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P := \begin{pmatrix} 0 & -v \\ -v & 2p \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Тоді бачимо, що система (2.8)–(2.9) є спектральною задачею $\ell(P)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ для диференціального виразу Дірака $\ell(P)$, що діє в $L_2(0,1) \times L_2(0,1)$ за формулою

$$\ell(P)\mathbf{u} := J\frac{d\mathbf{u}}{dx} + P\mathbf{u} \tag{2.11}$$

на області

$$\operatorname{dom}\ell(P) = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}} \mid \mathbf{u} \in W_2^1(0,1) \times W_2^1(0,1)\}.$$

Для довільного матричнозначного потенціала $Q \in L_2\big((0,1), \mathcal{M}_2\big)$ позначимо через $\mathscr{D}_j(Q)$, $j = 1, 2$, оператори Дірака, породжені виразом $\ell(Q)$ на областях визначення

$$\operatorname{dom}\mathscr{D}_j(Q) := \{\mathbf{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}} \in W_2^1(0,1) \times W_2^1(0,1) \mid u_2(0) = u_j(1) = 0\}.$$

Зауваження 2.2. З вище наведених міркувань зрозуміло, що кожне власне значення λ в'язки T є також власним значенням оператора $\mathscr{D}_2(P)$. Навпаки, припустимо, що $\lambda \neq 0$ — власне значення $\mathscr{D}_2(P)$ і $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}}$ — відповідна власна функція. Визначимо u_1 через u_2 з (2.8) і підставимо в (2.9). Бачимо, що $y := u_2$ задовольняє рівність

$$-\frac{1}{\lambda}\Big(\frac{d}{dx} + v\Big)\Big(\frac{d}{dx} - v\Big)y - 2py = \lambda y,$$

звідки, з огляду на (2.7), випливає, що $T(\lambda)y = 0$. Очевидно, y нетривіальна і задовольняє крайові умови Діріхле; отже, це власна функція T, що відповідає власному значенню λ.

Зауважимо, що за припущенням (A0), $\lambda = 0$ не є власним значенням (1.1), (1.2); проте воно є в спектрі $\mathscr{D}_2(P)$:

Лема 2.8. *За припущення (A0)* $\lambda = 0$ *є власним значенням* $\mathscr{D}_2(P)$ *алгебраїчної кратності один.*

Доведення. Пряма перевірка показує, що $\lambda = 0$ є власним значенням оператора $\mathscr{D}_2(P)$ і що кожна відповідна власна функція має бути пропорційна до $\mathbf{u}_0 = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}}$, де $u_1 = \exp\{-\int v\}$, $u_2 \equiv 0$. Тому власне значення $\lambda = 0$ є геометрично простим.

Припустимо, що алгебраїчна кратність $\lambda = 0$ більша, ніж один. Тоді існує вектор $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^{\mathrm{t}}$ з області визначення $\mathscr{D}_2(P)$, приєднаний до $\mathbf{u}_0$, тобто такий, що задовольняє рівність $\mathscr{D}_2(P)\mathbf{w} = \mathbf{u}_0$. Тоді $\left(\frac{d}{dx} - v\right) w_2 = u_1$ і, отже, $\ell w_2 = -\left(\frac{d}{dx} + v\right)\left(\frac{d}{dx} - v\right) w_2 = -\left(\frac{d}{dx} + v\right) u_1 = 0$. Більше того, умова $\mathbf{w} \in \operatorname{dom} \mathscr{D}_2(P)$ означає, що $w_2(0) = w_2(1) = 0$, а тому або w_2 є власною функцією (1.1), (1.2) для власного значення $\lambda = 0$ або $\mathbf{w} \equiv 0$. Перша можливість виключається припущенням (A0), а друга є неможливою з огляду на співвідношення $w_2' - vw_2 = u_1$. Отримана суперечність показує, що не існує такого $\mathbf{w}$ і закінчує доведення. $\square$

2.4. Асимптотика власних значень і власних функцій енергозалежних рівнянь Штурма–Ліувілля

2.4.1. Оператор перетворення. У цьому підрозділі ми будуємо так званий оператор перетворення, що пов'язує розв'язок системи $\ell(P)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ з розв'язком $\ell(P_0)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, де P_0 – нульовий матричний потенціал (тобто такий, у якого всі компоненти тотожно рівні нулю).

Через $U(x, \lambda)$ позначимо функцію зі значеннями в $\mathcal{M}_2$, що задовольняє рівняння

$$J\frac{dU}{dx} + PU = \lambda U \tag{2.12}$$

та початкову умову $U(0) = I$.

Теорема 2.5. *Нехай* P *в* (2.12) *має вигляд* (2.10) *з* p *та* v *з* $L_2(0, 1)$. *Тоді*

$$U(x, \lambda) = e^{a(x)J} + \int\limits_0^x e^{-\lambda(x-2s)J} K(x, s) ds, \tag{2.13}$$

де $a(x) = a(x, \lambda) = \int_0^x p(s)ds - \lambda x$, *а* K *— матричнозначна функція така, що для кожного* $x \in [0, 1]$ *функція* $K(x, \cdot)$ *є з* $L_2((0, 1), \mathcal{M}_2)$. *Більше того, відображення*

$$x \mapsto K(x, \cdot) \in L_2((0, 1), \mathcal{M}_2) \tag{2.14}$$

неперервне на $[0, 1]$.

Ця теорема дуже схожа до відповідної теореми з [35] і її доведення вимагає лише незначних змін.

Доведення. Зауважимо, що систему (2.12) можна переписати як

$$J\frac{dU}{dx} + QU = (\lambda - p)U$$

з

$$Q = \begin{pmatrix} -p & -v \\ -v & p \end{pmatrix} = pJ_1 - vJ_2, \quad J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Метод варіації сталих показує, що U задовольняє таке інтегральне рівняння:

$$U(x) = e^{a(x)J} + \int_0^x e^{(a(x)-a(s))J} JQ(s)U(s)ds.$$

Це рівняння можна розв'язати методом послідовних наближень. Нехай

$$U_0(x) = e^{a(x)J}, \quad U_n(x) = \int_0^x e^{(a(x)-a(s))J} JQ(s)U_{n-1}(s)ds. \tag{2.15}$$

Тоді розв'язок вище наведеного рівняння можна формально подати як суму $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$. Нижче ми доведемо, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|U_n\|_\infty < \infty \tag{2.16}$$

(тут $\|U_n\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |U_n(x)|$, а $|U_n(x)|$ — евклідова норма матриці $U_n(x)$), а тому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ збігається у просторі $L_\infty([0,1], \mathcal{M}_2)$ до розв'язку рівняння (2.12), який задовольняє початкову умову $U(0) = I$.

Доведемо тепер (2.16). Нехай $\tilde{Q}(t) := \exp\{-2\int_0^t pJ\} JQ(t)$ і

$$\mathcal{Q}_n(t_1, \dots, t_n) := \tilde{Q}(t_n)\tilde{Q}(t_{n-1}) \dots \tilde{Q}(t_1).$$

Зауважимо спочатку, що матриця Q антикомутує з J і тому

$$e^{-tJ}\tilde{Q}(s) = \tilde{Q}(s)e^{tJ}.$$

Використовуючи це у співвідношеннях (2.15), отримуємо за індукцією, що

$$U_n(x) = e^{\int_0^x p(s)ds J} \int\limits_{\Pi_n(x)} e^{-\lambda(x-2\xi_n(\mathrm{t}))J} \mathcal{Q}_n(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n,$$

де

$$\Pi_n(x) = \{\mathrm{t} := (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant t_1 \leqslant \dots \leqslant t_n \leqslant x\},$$

$$\xi_n(\mathrm{t}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} t_j.$$

Покладемо $s = \xi_n(\mathrm{t})$. Тоді можемо переписати рівність для U_n як

$$U_n(x) = \int\limits_0^x e^{-\lambda(x-2s)J} K_n(x,s)ds,$$

де $K_1(x,s) \equiv e^{\int_0^x pJ} \tilde{Q}(s)$ і для $n \geqslant 2$

$$K_n(x,s) = e^{\int_0^x pJ} \int\limits_{\Pi^*_{n-1}(x,s)} \mathcal{Q}_n(t_1, \ldots, t_{n-1}, s + \xi_{n-1}(\mathrm{t}))dt_1 \ldots dt_{n-1}$$

з $0 \leqslant s < x \leqslant 1$ і

$$\begin{aligned}\Pi^*_{n-1}(x,s) =& \{\mathrm{t} := (t_1, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \\ & 0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{n-1} \leqslant \xi_{n-1}(\mathrm{t}) + s \leqslant x\}.\end{aligned}$$

Оцінимо L_2-норму $K_n(x,\cdot)$:

$$\begin{aligned}\|K_n(x,\cdot)\|_2^2 &= \int\limits_0^1 |K_n(x,s)|^2 ds \\ &\leqslant \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^1 ds \int\limits_{\Pi^*_{n-1}(x,s)} |\mathcal{Q}_n(t_1, \ldots, t_{n-1}, s + \xi_{n-1}(\mathrm{t}))|^2 dt_1 \ldots dt_{n-1} \\ &\leqslant \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{\Pi_n(x)} |\mathcal{Q}_n(t_1, \ldots, t_n)|^2 dt_1 \ldots dt_n \\ &= \frac{1}{((n-1)!)^2 n} \left(\int\limits_0^x |\tilde{Q}|^2 \right)^n \leqslant \frac{\|\tilde{Q}\|_2^{2n}}{((n-1)!)^2}\end{aligned}$$

де $\|K(\cdot)\|_2 := \left(\int_0^1 |K(s)|^2 ds \right)^{1/2}$, а $|K(x)|$ — евклідова норма матриці $K(x)$. Покладемо $C := \max_{x \in [-1,1]} |e^{-\lambda x J}|$. Тоді

$$|U_n(x)| \leqslant C \int\limits_0^x |K_n(x,s)| ds \leqslant C \|K_n(x,\cdot)\|_2 \leqslant C \frac{\|\tilde{Q}\|_2^n}{(n-1)!},$$

звідки випливає (2.16). З оцінки норми $\|K_n(x,\cdot)\|_2$ також випливає збіжність ряду $K(x,\cdot) := \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,\cdot)$ в $L_2((0,1),\mathcal{M}_2)$ з

$$\|K(x,\cdot)\|_2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\|p\|_1}\|\tilde{Q}\|_2^n}{(n-1)!} \leqslant \|\tilde{Q}\|_2 \exp\{\|\tilde{Q}\|_2\}.$$

Отже, перше твердження теореми доведено.

Щоб довести неперервність (2.14), достатньо перевірити неперервність відображення $x \mapsto \exp\Big\{-\int\limits_0^x pJ\Big\}K(x,\cdot) =: \tilde{K}(x,\cdot)$. Візьмемо $x_1, x_2 \in [0,1]$ такі, що $x_1 < x_2$. Покладемо $\tilde{K}_n(x,s) := \exp\Big\{-\int\limits_0^x pJ\Big\}K_n(x,s)$; тоді

$$\tilde{K}_n(x_2,s) - \tilde{K}_n(x_1,s) = \int\limits_{\Pi_{n-1}^{**}(x_1,x_2,s)} \mathcal{Q}_n(t_1,\dots,t_{n-1},s+\xi_{n-1}(\mathrm{t}))dt_1\dots dt_{n-1},$$

де

$$\begin{aligned}\Pi_{n-1}^{**}(x_1,x_2,s) :=&\{\mathrm{t} := (t_1,\dots,t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \\ &\quad 0 \leqslant t_1 \leqslant \dots \leqslant t_{n-1} \leqslant \xi_{n-1}(\mathrm{t}) + s, x_1 \leqslant \xi_{n-1}(\mathrm{t}) + s \leqslant x_2\}.\end{aligned}$$

Далі,

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 |\tilde{K}_n(x_2,s)-&\tilde{K}_n(x_1,s)|^2 ds \\ &\leqslant \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^1 \int\limits_{\Pi_{n-1}^{**}(x_1,x_2,s)} |\mathcal{Q}_n(t_1,\dots,t_{n-1},s+\xi_{n-1}(\mathrm{t})|^2 dt_1\dots dt_{n-1}ds \\ &\leqslant \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_1}^{x_2} dt_n \int\limits_{\Pi_{n-1}(x_2)} |\mathcal{Q}_n(t_1,\dots,t_n)|^2 dt_1\dots dt_{n-1} \\ &\leqslant \frac{1}{((n-1)!)^2}\|\tilde{Q}\|_2^{2(n-1)} \cdot \int\limits_{x_1}^{x_2} |\tilde{Q}(t)|^2 dt.\end{aligned}$$

Звідси випливає оцінка норм

$$\|\tilde{K}_n(x_2,\cdot) - \tilde{K}_n(x_1,\cdot)\|_2 \leqslant \frac{1}{(n-1)!}\|\tilde{Q}\|_2^{n-1}\left[\int\limits_{x_1}^{x_2} |\tilde{Q}(t)|^2 dt\right]^{1/2}$$

а отже,

$$\|\tilde{K}(x_1,\cdot)-\tilde{K}(x_2,\cdot)\|_2 \leqslant \left[\int\limits_{x_1}^{x_2} |\tilde{Q}(t)|^2 dt\right]^{1/2} \exp\{\|\tilde{Q}\|_2\}.$$

Це показує, що відображення $x \mapsto \tilde{K}(x,\cdot)$ неперервне з $[0,1]$ в $L_2((0,1),\mathcal{M}_2)$. Доведення завершено. $\square$

Зауважимо, що 2×2 матриця $U_0 = e^{-\lambda x J}$ є розв'язком системи $\ell(P_0)U = \lambda U$ з нульовим потенціалом P_0. Тому, за останньою теоремою, розв'язок U задачі (2.12) можна отримати з U_0 за допомогою оператора перетворення $\mathscr{T} = \mathscr{R} + \mathscr{K}$, де $\mathscr{R}$ є оператором множення на $\exp\{\int_0^x pJ\}$, а $\mathscr{K}$ є інтегральним оператором, що діє так:

$$\mathscr{K} f(x) = \int\limits_0^x f(x-2s)K(x,s)ds.$$

Цей оператор перетворення також здійснює подібність відповідних диференціальних виразів, а саме,

$$\ell(P)\mathscr{T} = \mathscr{T}\ell(P_0).$$

Далі ми використаємо результати цього підрозділу, щоб отримати асимптотики власних значень та власних функцій T.

2.4.2. Асимптотика власних значень та власних функцій. Розглянемо вектор $\mathbf{u}(x,\lambda) = U(x,\lambda)(1,0)^{\mathrm{t}} = (u_1(x,\lambda), u_2(x,\lambda))^{\mathrm{t}}$. З огляду на (2.13), друга компонента $u_2(x,\lambda)$ вектора $\mathbf{u}(x,\lambda)$ визначена так:

$$u_2(x,\lambda) = -\sin a(x) + \int\limits_0^x k_{11}(x,s)\sin(\lambda(x-2s))ds + \int\limits_0^x k_{21}(x,s)\cos(\lambda(x-2s))ds,$$

де k_{ij} — відповідні елементи матриці K. Зауважимо, що функція $u_2(x,\lambda)$ розв'язує рівняння (1.1) і задовольняє початкову умову $u_2(0,\lambda) = 0$. Проте

$$u_2^{[1]}(0,\lambda) = \lambda(u_1(0,\lambda) + cu_2(0,\lambda)) = \lambda,$$

де $c = (v - r)(0)$ (див. Зауваження 2.1). Тому $\varphi(\lambda) = u_2(1, \lambda)/\lambda$ є характеристичною функцією для спектральної задачі (1.1), (1.2).

Далі зауважимо, що $u_2(1, \lambda)$ можна записати як

$$u_2(1, \lambda) = \sin(\lambda - p_0) + \int_0^1 f(s) e^{i\lambda(1-2s)} ds \tag{2.17}$$

з $f(s) = \frac{1}{2}[k_{21}(1, s) + k_{21}(1, 1 - s) - ik_{11}(1, s) + ik_{11}(1, 1 - s)]$; також нагадаємо, що $p_0 := \int_0^1 p(s) ds$. Зробимо заміну змінних $z := \lambda - p_0$ і розглянемо функцію

$$\delta(z) = \sin z + \int_0^1 \tilde{f}(s) e^{iz(1-2s)} ds,$$

де $\tilde{f}(s) = f(s) e^{ip_0(1-2s)}$. Очевидно, $\delta(z) = u_2(1, z + p_0)$. За теоремою 4 з [16], нулі $\delta(z)$ можна занумерувати відповідно до їхніх кратностей як z_n, $n \in \mathbb{Z}$, так, що $z_n = \pi n + \tilde{\lambda}_n$, де послідовність $(\tilde{\lambda}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ належить до $\ell_2(\mathbb{Z})$. Отже, нулі функції $u_2(1, \lambda)$ можна занумерувати відповідно до їх кратностей як λ_n, $n \in \mathbb{Z}$, так, що

$$\lambda_n = \pi n + p_0 + \tilde{\lambda}_n.$$

З цієї асимптотики випливає, що всі крім скінченної кількості нулів $u_2(1, \lambda)$ прості.

Зауважимо, що $u_2(1, \lambda)$ є характеристичною функцією оператора $\mathscr{D}_2(P)$, визначеного у підрозділі 2.3, звідки $\lambda = 0$ є нулем $u_2(1, \lambda)$ порядку 1 (див. лему 2.8). Проте, за припущенням (A0), воно не є нулем характеристичної функції $\varphi(\lambda)$. Отже, множина всіх власних значень задачі (1.1), (1.2) збігається з множиною нулів функції $u_2(1, \lambda)$, відмінних від нуля. Тому справедлива така теорема.

Теорема 2.6. *Власні значення задачі* (1.1), (1.2) *можна занумерувати відповідно до їхніх кратностей як* λ_n *з* $n \in \mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *так, що вони* *задовольняють асимптотики*

$$\lambda_n = \pi n + p_0 + \tilde{\lambda}_n \tag{2.18}$$

з ℓ_2*-послідовністю* $(\tilde{\lambda}_n)$ *та* $p_0 := \int_0^1 p(s)ds$. *Зокрема, всі власні значення* λ_n *з досить великим* $|n|$ *прості.*

Перейдемо тепер до дослідження асимптотик власних функцій енергозалежних рівнянь Штурма–Ліувілля. Розглянемо вектори $\mathbf{u}_n := \mathbf{u}(x, \lambda_n)$. Покладемо $\mathbf{u}_{n,0} := (\cos\lambda_n x, \sin\lambda_n x)^{\mathrm{t}}$. Тоді, за теоремою 2.5, маємо

$$\mathbf{u}_n = \mathscr{R}\mathbf{u}_{n,0} + \mathscr{M}\mathbf{u}_{n,0},$$

де оператор $\mathscr{R}$ був визначений в кінці підрозділу 2.4.1 і

$$\mathscr{M}\mathbf{u}(x) = \int\limits_0^x M(x,s)\mathbf{u}(x-2s)ds$$

з

$$M(x,s) = \begin{pmatrix} k_{11}(x,s) & -k_{21}(x,s) \\ k_{21}(x,s) & k_{11}(x,s) \end{pmatrix}$$

і відповідними елементами k_{ij} матриці K з підрозділу 2.4.1. З цього випливає така

Теорема 2.7. *Власні функції* y_n *задачі* (1.1), (1.2), *що відповідають власним значенням* λ_n, *задовольняють асимптотику*

$$y_n(x) = \sin\left(\lambda_n x - \int\limits_0^x p\right) + \tilde{y}_n(x),$$

де $\tilde{y}_n(x) = (0,1)\mathscr{M}\mathbf{u}_{n,0}$ *і послідовність* $(\|\tilde{y}_n\|)$ *належить до* ℓ_2.

Доведення. За зауваженням 2.2, власна функція y_n задачі (1.1), (1.2), що відповідає власному значенню λ_n, збігається з другою компонентою відповідного власного вектора $\mathbf{u}_n$ оператора Дірака $\mathscr{D}_2(P)$. Тому залишається довести тільки твердження про $\|\tilde{y}_n\|$. Для цього ми покажемо, що послідовність норм $(\|\mathscr{M}\mathbf{u}_{n,0}\|)$ належить до ℓ_2.

Покладемо $\mathbf{v}_n := (\cos(\pi n + p_0)x, \sin(\pi n + p_0)x)^{\mathrm{t}}$ і $\mathbf{v}_{n,0} := (\cos \pi n x, \sin \pi n x)^{\mathrm{t}}$. Тоді вектори $\mathbf{v}_{n,0}$ утворюють ортонормальну базу в $L_2(0,1) \times L_2(0,1)$ і $\mathbf{v}_n = \mathscr{P}\mathbf{v}_{n,0}$, де $\mathscr{P}$ — оператор множення на $\exp\{p_0 x J\}$. Далі зауважимо, що

$$\|\mathbf{u}_{n,0} - \mathbf{v}_n\| = \left\|(e^{\tilde{\lambda}_n x J} - I)\mathbf{v}_n\right\| \leqslant \left\|\int_0^x \frac{d}{dt} e^{\tilde{\lambda}_n t J} dt\right\| \|\mathbf{v}_n\| \leqslant C|\tilde{\lambda}_n|,$$

з $C := \max_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{|\tilde{\lambda}_n|} \|\mathscr{P}\|$ так, що

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \|\mathbf{u}_{n,0} - \mathbf{v}_n\|^2 < \infty. \tag{2.19}$$

Тепер запишемо нерівність

$$\|\mathscr{M}\mathbf{u}_{n,0}\| \leqslant \|\mathscr{M}(\mathbf{u}_{n,0} - \mathbf{v}_n)\| + \|\mathscr{M}\mathbf{v}_n\| \tag{2.20}$$

і зауважимо, що послідовність $(\|\mathscr{M}(\mathbf{u}_{n,0} - \mathbf{v}_n)\|)$ належить до ℓ_2 за (2.19). Оператор $\mathscr{M}$ є з класу Гільберта–Шмідта $\mathfrak{S}_2$; тоді також $\mathscr{M}\mathscr{P} \in \mathfrak{S}_2$, а тому

$$\sum \|\mathscr{M}\mathbf{v}_n\|^2 = \sum \|\mathscr{M}\mathscr{P}\mathbf{v}_{n,0}\|^2 = \|\mathscr{M}\mathscr{P}\|_{\mathfrak{S}_2},$$

де $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}_2}$ — норма Гільберта–Шмідта оператора $\mathscr{M}\mathscr{P}$(див., напр., [58, V.2.4.]). Ці аргументи разом з (2.20) завершують доведення. □

Зауваження 2.3. Зауважимо, що справедлива така оцінка:

$$\begin{aligned} |\|\mathbf{u}_n\| - \|\mathscr{R}\mathbf{v}_n\|| &\leqslant \|\mathbf{u}_n - \mathscr{R}\mathbf{v}_n\| \leqslant \|\mathbf{u}_n - \mathscr{R}\mathbf{u}_{n,0}\| + \|\mathscr{R}\mathbf{u}_{n,0} - \mathscr{R}\mathbf{v}_n\| \\ &\leqslant \|\mathscr{M}\mathbf{u}_{n,0}\| + \|\mathscr{R}\|\|\mathbf{u}_{n,0} - \mathbf{v}_n\|. \end{aligned}$$

Тоді з доведення попередньої теореми випливає, що числова послідовність з $|\|\mathbf{u}_n\| - \|\mathscr{R}\mathbf{v}_n\||$ належить до ℓ_2. Оскільки p дійснозначна, то оператори $\mathscr{P}$ та $\mathscr{R}$ унітарні, а тому $\mathbf{v}_n$ утворює ортонормовану базу і $\|\mathscr{R}\mathbf{v}_n\| = 1$. Як наслідок,

$$\|\mathbf{u}_n\| = 1 + \tilde{\alpha}_n,$$

де $(\tilde{\alpha}_n)$ належить до ℓ_2.

Це зауваження буде використане у розділі 3 для дослідження асимптотик нормівних множників задачі Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами.

2.4.3. Факторизація характеристичних функцій. Далі використаємо отримане в цьому підрозділі інтегральне зображення (2.17) для другої компоненти власного вектора оператора Дірака, щоб побудувати факторизацію характеристичної функції $\varphi(\lambda)$, яка дозволяє визначити цю функцію через власні значення задачі (1.1), (1.2). Ця факторизація використовується при виведенні формули, яка визначає нормівні множники (1.1), (1.2) через два спектри рівняння (1.1) з двома типами крайових умов (див. підрозділ 3.3.2).

Теорема 2.8. *Нехай λ_n, $n \in \mathbb{Z}^*$, — власні значення спектральної задачі* (1.1)*,* (1.2)*. Тоді характеристичну функцію $\varphi(\lambda)$ можна факторизувати так:*

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \mathrm{V.p.} \prod\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \dfrac{\lambda_n - \lambda}{\pi n}, & \text{якщо } p_0 \neq \pi l, \ l \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^l \ \mathrm{V.p.} \prod\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \dfrac{\lambda_n - \lambda}{\pi n}, & \text{якщо } p_0 = \pi l, \ l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Доведення. Припустимо спочатку, що $p_0 \neq \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. Зауважимо, що функція $u_2(1, \lambda)$ задається (2.17), а тому є експоненційного типу 1. Нагадаємо також, що за лемою 2.8, $\lambda = 0$ є нулем $u_2(1, \lambda)$ порядку 1. Отже, за факторизаційною теоремою Адамара (див., напр., [96]) маємо[1]

$$u_2(1, \lambda) = \lambda e^{A\lambda + B} \prod_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_n}},$$

де A та B — деякі сталі, а λ_n — нулі функції $u_2(1, \lambda)$. З огляду на асимптотичний розподіл (2.18), ряд $\sum \frac{\lambda}{\lambda_n}$ збігається у сенсі головного значення.

[1]Тут і надалі всі нескінченні добутки і суми розуміємо у сенсі головного значення, а символ V.p. будемо опускати.

Справді,

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}+\frac{1}{\lambda_{-n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2n^2}{\lambda_n\lambda_{-n}}\cdot\frac{\lambda_n+\lambda_{-n}}{\pi^2n^2},$$

і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n+\lambda_{-n}}{\pi^2n^2}$ абсолютно збіжний, а послідовність $\left(\frac{\pi^2n^2}{\lambda_n\lambda_{-n}}\right)$ обмежена. Таким чином можна записати

$$u_2(1,\lambda)=\lambda e^{A'\lambda+B}\prod_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)$$

з деякою сталою A'.

Щоб знайти значення A' та B, розглянемо відношення $\frac{u_2(1,\lambda)}{\sin(\lambda-p_0)}$ і знайдемо його границю вздовж променя $\lambda=re^{i\theta}$, $\theta\neq 0,\pi$. За (2.17) та уточненою лемою Рімана–Лебега [21, Лема 1.3.1], маємо

$$\frac{u_2(1,re^{i\theta})}{\sin(re^{i\theta}-p_0)}=1+o(1),\quad r\to\infty. \tag{2.21}$$

Нагадаємо (див., напр., [96]), що функцію $\sin(\lambda-p_0)$ можна факторизувати так:

$$\sin(\lambda-p_0)=(\lambda-p_0)\prod_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\nu_n-\lambda}{\pi n},$$

де ν_n — нулі $\sin(\lambda-p_0)$, тобто $\nu_n=\pi n+p_0$. Отже,

$$\frac{u_2(1,\lambda)}{\sin(\lambda-p_0)}=\frac{\lambda e^{A'\lambda+B}}{\lambda-p_0}\cdot\prod_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\pi n}{\lambda_n}\cdot\frac{\lambda_n-\lambda}{\nu_n-\lambda}. \tag{2.22}$$

Покажемо, що $A'=0$. Якщо б A' не дорівнювало 0, то можна було б вибрати напрямок θ такий, що $\mathrm{Re}A're^{i\theta}$ прямувало б до нескінченності, коли $r\to\infty$. За лемою 2.9, поданою нижче, добуток $\prod\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\pi n}{\lambda_n}$ збіжний і, за лемою 2.10, добуток $\prod\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\lambda_n-re^{i\theta}}{\nu_n-re^{i\theta}}$ збігається до 1 при $r\to\infty$ і $\theta\neq 0,\pi$. Ці міркування разом з (2.21), (2.22) приводять до суперечності. Тому $A' = 0$ і

$$e^B \prod_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\pi n}{\lambda_n} = 1,$$

звідки випливає, що

$$\varphi(\lambda) = u_2(1, \lambda) = \prod_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{\pi n}.$$

Якщо $p_0 = \pi l$ для деякого $l \in \mathbb{Z}$, то

$$\sin(\lambda - p_0) = (-1)^l \lambda \prod_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\pi n - \lambda}{\pi n},$$

а отже,

$$\frac{u_2(1, \lambda)}{\sin(\lambda - p_0)} = (-1)^l e^{A'\lambda + B} \prod_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\pi n}{\lambda_n} \prod_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{\pi n - \lambda}.$$

Поєднуючи це, (2.21) та аргументи аналогічні до використаних у випадку, коли $p_0 \neq \pi l$, отримуємо, що $A' = 0$ і $e^B = (-1)^l \prod\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\pi n}$. Тому для $p_0 = \pi l$

$$\varphi(\lambda) = (-1)^l \prod_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{\pi n}.$$

Теорему доведено. □

Лема 2.9. *Добуток* $\prod\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\pi n}$ *збігається.*

Доведення. Почнемо з доведення наступної нерівності для $z \in \mathbb{C}$:

$$|(1 + z)e^{-z}| \leqslant e^{|z|^2}. \tag{2.23}$$

Справді,

$$(1 + z)e^{-z} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

з $c_0 = 1$ та $c_k = (-1)^{k+1}(k-1)/k!$. Для $|z| < 1$ маємо

$$|(1+z)e^{-z}| \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(|c_{2k}| + |c_{2k+1}|)|z|^{2k}$$

тоді як для $|z| \geqslant 1$

$$|(1+z)e^{-z}| \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(|c_{2k-1}| + |c_{2k}|)|z|^{2k}.$$

Залишається зауважити, що $|c_{2k}| + |c_{2k+1}| \leqslant 1/k!$ і $|c_{2k}| + |c_{2k-1}| \leqslant 1/k!$ для всіх $k \geqslant 1$.

Тепер розглянемо послідовність $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ комплексних чисел з $\ell_2(\mathbb{Z})$ таку, що $1 + a_n \neq 0$ і ряд $\sum a_n$ збігається. З огляду на (2.23), добуток $\prod(1+a_n)$ збігається. Більше того,

$$\left|\prod(1+a_n)\right| \leqslant \left|\exp\sum a_n\right| \cdot \exp\{\sum |a_n|^2\}.$$

Далі покажемо, що цей результат можна застосувати до $\prod\limits_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{\lambda_n}{\pi n}$. Покладемо $1 + a_n := \frac{\lambda_n}{\pi n}$, тобто $a_n = \frac{p_0+\tilde{\lambda}_n}{\pi n}$. Оскільки $\frac{1}{\pi n}$ належить до ℓ_2 та існує така стала $C < \infty$, що $|p_0 + \tilde{\lambda}_n| < C$ для кожного $n \in \mathbb{Z}^*$, послідовність (a_n) належить до ℓ_2. Зауважимо, що V.p. $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{p_0}{\pi n} = 0$ і ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{\tilde{\lambda}_n}{\pi n}$ збігається, бо послідовності $(\tilde{\lambda}_n)$ та $\frac{1}{\pi n}$ належать до ℓ_2. З цього випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^*} a_n$, що завершує доведення. □

Лема 2.10. *Добуток* $\prod\limits_{\substack{n=-\infty\\n\neq 0}}^{\infty}\frac{\lambda_n - re^{i\theta}}{\nu_n - re^{i\theta}}$ *збігається до* 1 *при* $r\to\infty$ *з* $\theta \neq 0, \pi$.

Доведення. Розглянемо ряд

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq 0}}^{\infty} \ln\frac{\lambda_n - re^{i\theta}}{\nu_n - re^{i\theta}} = \sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq 0}}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\tilde{\lambda}_n}{\nu_n - re^{i\theta}}\right). \tag{2.24}$$

Можна знайти достатньо велике N таке, що $|\tilde{\lambda}_n| < 1/2$, коли $|n| > N$. Також для всіх $r > R_\theta$ з $R_\theta = (1 + |p_0|)/\sin\theta$ маємо $|\nu_n - re^{i\theta}| > 1$.

Оскільки існує така стала $C < \infty$, що $|\ln(1+z)| \leqslant C|z|$ для $|z| \leqslant 1/2$, то для таких n та r виконується нерівність

$$\left|\ln\left(1+\frac{\tilde{\lambda}_n}{\nu_n - re^{i\theta}}\right)\right| \leqslant C\left|\frac{\tilde{\lambda}_n}{\nu_n - re^{i\theta}}\right|.$$

Далі зазначимо, що

$$|\nu_n - re^{i\theta}| \geqslant |\pi n - re^{i\theta}| - |p_0| \geqslant |\pi n \sin\theta| - |p_0|.$$

Але $|p_0| < \frac{1}{2}\pi N \sin\theta$ для досить великого N. Тому для всіх n з $|n| > N$

$$|\nu_n - re^{i\theta}| > \frac{|\sin\theta|}{2}|\pi n|.$$

Отже,

$$\left|\frac{\tilde{\lambda}_n}{\nu_n - re^{i\theta}}\right| < \frac{2}{\pi|\sin\theta|}\frac{|\tilde{\lambda}_n|}{|n|}.$$

Оскільки послідовності $(\tilde{\lambda}_n)$ та $(1/n)$ належать до ℓ_2, то ряд $\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{|\tilde{\lambda}_n|}{|n|}$ збігається. А отже, ряд (2.24) збігається рівномірно у $r > R_\theta$ для фіксованого θ, $\theta \neq 0, \pi$. Таким чином,

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \ln\frac{\lambda_n - re^{i\theta}}{\nu_n - re^{i\theta}} = \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \lim_{r\to\infty} \ln\frac{\lambda_n - re^{i\theta}}{\nu_n - re^{i\theta}} = 0.$$

А це означає, що добуток $\prod\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_n - re^{i\theta}}{\nu_n - re^{i\theta}}$ збігається до 1, коли $r \to \infty$. $\square$

2.4.4. Результати для крайових умов змішаного типу. Тепер розглянемо рівняння (1.1) з крайовими умовами змішаного типу (1.3). Оскільки доведення є аналогічними до використаних у випадку крайових умов Діріхле, ми лише переформулюємо результати.

Не обмежуючи загальності, припустимо, що $\mu = 0$ не є власним значенням задачі (1.1), (1.3). Розглянемо функцію

$$\psi(\mu) := u_1(1,\mu) + \frac{h_1 u_2(1,\mu)}{\mu},$$

де u_1 та u_2 — розв'язки системи (2.8), (2.9), а $h_1 := (v-r)(1)$. Функція $y(\cdot,\mu) := u_2(\cdot,\mu)$ розв'язує рівняння $\ell(y)+2\mu p y = \mu^2 y$ і задовольняє співвідношення

$$y^{[1]} = (y'-vy)+(v-r)y = \mu u_1 + (v-r)u_2;$$

зокрема, $y(0,\mu)=0$ і $y^{[1]}(1,\mu)=\mu\psi(\mu)$. Таким чином, ψ є характеристичною функцією для задачі (1.1), (1.3), тобто нулі $\psi(\mu)$ є власними значеннями такої задачі.

Використовуючи асимптотичний вигляд u_1 та u_2, отримуємо

$$\begin{aligned}\psi(\mu) = &\cos a(1,\mu) - \frac{h_1}{\mu}\sin a(1,\mu)\\ &- \int_0^1 k_{21}(1,s)\sin(\mu(1-2s))ds + \int_0^1 k_{11}(1,s)\cos(\mu(1-2s))ds\\ &+ \frac{h_1}{\mu}\left(\int_0^1 k_{11}(1,s)\sin(\mu(1-2s))ds + \int_0^1 k_{21}(1,s)\cos(\mu(1-2s))ds\right).\end{aligned}$$

Тоді з теореми 4 з [16] випливає

Теорема 2.9. *Власні значення задачі* (1.1), (1.3) *можна занумерувати відповідно до їхніх кратностей як μ_n, $n\in\mathbb{Z}$, так, що вони задовольняють асимптотики*

$$\mu_n = \pi\left(n+\frac{1}{2}\right) + p_0 + \tilde{\mu}_n \qquad (2.25)$$

з ℓ_2-послідовністю $(\tilde{\mu}_n)$ та $p_0 := \int_0^1 p(s)ds$. Зокрема, всі власні значення μ_n з досить великим $|n|$ прості.

Аналогічно до випадку з крайовими умовами Діріхле можна довести наступні результати

Теорема 2.10. *Власні функції y_n задачі* (1.1), (1.3), *що відповідають* *власним значенням* μ_n*, задовольняють асимптотику*

$$y_n(x) = \cos\left(\mu_n x - \int\limits_0^x p\right) + \tilde{y}_n(x),$$

де послідовність $(\|\tilde{y}_n(x)\|)$ *належить до* ℓ_2.

Теорема 2.11. *Нехай* μ_n, $n \in \mathbb{Z}$, *— власні значення* (1.1), (1.3)*. Тоді характеристичну функцію* $\psi(\mu)$ *можна факторизувати так:*

$$\psi(\mu) = \begin{cases} -\mathrm{V.p.}\prod\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{\mu_n - \mu}{\pi\,(n+1/2)}, & \text{якщо } p_0 \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^{l+1}(\mu_0 - \mu)\mathrm{V.p.}\prod\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \dfrac{\mu_n - \mu}{\pi n}, & \text{якщо } p_0 = \dfrac{\pi}{2} + \pi l,\ l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Факторизація з останньої теореми буде далі використана для виведення формули, що визначає нормівні множники задачі (1.1), (1.3) через два спектри рівняння (1.1) з двома типами крайових умов (див. підрозділ 3.3.2).

У цьому розділі ми дослідили властивості спектрів задач Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами з крайовими умовами Діріхле та крайовими умовами змішаного типу. Отримані результати дозволяють подати повний опис спектральних даних, що необхідний при розв'язуванні оберненої задачі відновлення енергозалежних рівнянь Штурма–Ліувілля за двома спектрами. Ці результати разом з результатами наступного розділу будуть використані при описі спектральних даних у задачі відновлення за спектром та нормівними множниками. Також описане у цьому розділі зведення рівняння (1.1) до системи Дірака є одним із ключових моментів при розв'язуванні обернених задач у розділах 4 та 5.

Результати, наведені в цьому розділі, опубліковані в працях [70, 73, 75, 77, 88]

РОЗДІЛ 3
НОРМІВНІ МНОЖНИКИ

У цьому розділі ми вводимо поняття нормівних множників для задач Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами. Ці спектральні характеристики є вагомим інструментом в оберненій спектральній теорії (див., напр., [17, 69]), а тому важливо визначити їх якнайзручніше. Для дійсних і простих власних значень таких задач введене нами означення нормівних множників є аналогічним до відповідного означення для стандартних операторів Штурма–Ліувілля. Але оскільки задачі Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами можуть мати також недійсні і/або непрості власні значення, запропоноване нами означення є загальнішим.

Як і в класичній теорії Штурма–Ліувілля, нормівні множники однозначно визначаються спектрами (1.1) з двома різними наборами крайових умов; у цьому розділі ми виведемо точну формулу такого зв'язку. Далі ми використаємо цей зв'язок, щоб отримати достатні умови простоти та дійсності власних значень розглянутих енергозалежних задач Штурма–Ліувілля. Такі умови дуже важливі у нашому дослідженні, оскільки підхід, який ми пропонуємо для вивчення обернених задач відновлення, працює найефективніше тоді, коли спектри задач (1.1) з відповідними крайовими умовами дійсні та прості. Також формула зв'язку нормівних множників і двох спектрів використовується в одному із запропонованих у цьому дослідженні методів розв'язування оберненої задачі відновлення потенціалів p та q за двома спектрами, який полягає у зведенні такої задачі до відновлення потенціалів p та q за спектром та відповідним набором нормівних множників (див. розділ 5).

3.1. Поняття нормівних множників

Для початку введемо додаткові поняття, які будуть часто використовуватися у цьому розділі.

Матрицю розміру $k \times k$ називаємо верхньою (нижньою) антитрикутною, якщо всі її елементи під (над) антидіагоналлю рівні нулю. Позначимо через $M^+[\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_k]$ (відповідно через $M^-[\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_k]$) верхні (відповідно нижні) антитрикутні матриці Ганкеля, що задані так

$$M^+[\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_k] = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_k \\ \gamma_2 & & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \gamma_k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

і

$$M^-[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k] = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \gamma_1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \gamma_2 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_k \end{pmatrix}.$$

Послідовність $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ називаємо *асоційованою* з матрицями $M^\pm[\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_k]$.

У цьому розділі ми часто працюватимемо з нескінченними блочно діагональними матрицями з верхніми (нижніми) антитрикутними блоками двох видів. Блоки першого виду — це просто верхні (нижні) антитрикутні матриці Ганкеля. Блоки другого виду мають вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

де B_1 — верхня (нижня) антитрикутна матриця Ганкеля, а B_2 — її комплексно спряжена. Позначимо діагональні блоки такої нескінченної матриці M через M_n, $n \in \mathbb{Z}$. З кожним блоком M_n розміру m асоційована числова послідовність довжини m; ці скінченні послідовності разом утворюють нескінченну послідовність $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, *асоційовану* з M.

Тепер занумеруємо власні значення λ_k, $k \in \mathbb{Z}$, операторної в'язки T так, що

(1) кожне власне значення повторюється відповідно до його кратності;

(2) дійсні частини власних значень не спадають, тобто, $\mathrm{Re}\lambda_i \leqslant \mathrm{Re}\lambda_j$ для $i < j$;

(3) модулі уявних частин власних значень з однаковими дійсними частинами не спадають, тобто, якщо $\mathrm{Re}\lambda_i = \mathrm{Re}\lambda_j$ для деяких $i < j$, то $|\mathrm{Im}\lambda_i| \leqslant |\mathrm{Im}\lambda_j|$; якщо, крім того, $|\mathrm{Im}\lambda_i| = |\mathrm{Im}\lambda_j|$, то $\mathrm{Im}\lambda_i \geqslant \mathrm{Im}\lambda_j$.

За такої нумерації, якщо деяке λ є власним значенням T кратності m, то існує $n \in \mathbb{Z}$ таке, що $\lambda = \lambda_n = \lambda_{n+1} = \cdots = \lambda_{n+m-1}$. Більше того, якщо λ недійсне, то $\overline{\lambda} = \lambda_{n+m} = \lambda_{n+m+1} = \cdots = \lambda_{n+2m-1}$.

Разом із послідовністю власних значень $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ введемо послідовність $(y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ векторів з $\mathrm{dom}\, A$ таку, що якщо $\lambda_n = \lambda_{n+1} = \cdots = \lambda_{n+m-1}$ — власне значення T кратності m, то $y_n, y_{n+1}, \ldots y_{n+m-1}$ — ланцюжок власного та приєднаних векторів T, що відповідає λ_n, визначений як описано далі. Нехай $y(\,\cdot\,,\lambda)$ — розв'язок (1.1), що задовольняє початкові умови $y(0,\lambda) = 0$ і $y^{[1]}(0,\lambda) = 1$; тоді

$$y_{n+j}(x) := \frac{1}{j!}\frac{\partial^j y(x,\lambda)}{\partial \lambda^j}\bigg|_{\lambda=\lambda_n}, \quad j = 0, 1, ..., m-1. \tag{3.2}$$

Для векторів, що відповідають комплексно спряженим власним значенням $\lambda_n = \lambda_{n+1} = \cdots = \lambda_{n+m-1} = \overline{\lambda_{n+m}} = \cdots = \overline{\lambda_{n+2m-1}}$, виконуються рівності $y_{n+m+j} = \overline{y_{n+j}}$ для $j = 0, \ldots, m-1$.

Тепер введемо означення *нормівних множників* α_n, $n \in \mathbb{Z}$, для операторної в'язки T. Для дійсного власного значення $\lambda = \lambda_n = \lambda_{n+1} = \cdots =$

λ_{n+m-1} алгебраїчної кратності m покладемо

$$\begin{aligned}\alpha_{n+j} = &\big(T'(\lambda)(\lambda y_{n+j} + y_{n+j-1}), y_{n+m-1}\big)_{L_2} + (\lambda y_{n+j-1} + y_{n+j-2}, y_{n+m-1})_{L_2} \\ &+ (\lambda y_{n+j} + y_{n+j-1}, y_{n+m-2})_{L_2}, \quad j = 0, \dots, m-1;\end{aligned} \tag{3.3}$$

у цій формулі вважаємо, що y_{n-1} та y_{n-2} рівні нулю, щоб спростити вираз. Для недійсних власних значень $\lambda = \lambda_n = \lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{n+m-1} = \overline{\lambda_{n+m}} = \dots = \overline{\lambda_{n+2m-1}}$

$$\begin{aligned}\alpha_{n+j} = &\big(T'(\lambda)(\lambda y_{n+j} + y_{n+j-1}), y_{n+2m-1}\big)_{L_2} + (\lambda y_{n+j-1} + y_{n+j-2}, y_{n+2m-1})_{L_2} \\ &+ (\lambda y_{n+j} + y_{n+j-1}, y_{n+2m-2})_{L_2}, \quad j = 0, \dots, m-1, \\ \alpha_{n+m+j} = &\overline{\alpha_{n+j}}, \quad j = 0, \dots, m-1;\end{aligned} \tag{3.4}$$

тут вважаємо, що $y_{n-1} = y_{n-2} = 0$ так само, як у (3.3).

Означення нормівних множників для операторної в'язки T описаним способом є доволі природним. По-перше, зауважимо, що для дійсних і простих власних значень так означені нормівні множники визначають тип власних значень (див. [18]), оскільки

$$\big(T'(\lambda_n) y_n, y_n\big)_{L_2} = \frac{\alpha_n}{\lambda_n}.$$

По-друге, якщо потенціал p тотожно дорівнює нулю, (1.1) є спектральним рівнянням для оператора Штурма–Ліувілля A і подане означення нормівних множників для операторної в'язки T збігається зі стандартним означенням нормівних множників для A [6]. Нагадаємо також, що функція $u(x,t) := y_n(x) e^{\lambda_n t}$ є розв'язком відповідного еволюційного рівняння $T(d/dt)u = 0$, і його *енергія* $(Au, u) + (\dot u, \dot u)$, де $\dot u$ позначає $\partial u / \partial t$, дорівнює $\lambda_n^2 \alpha_n e^{2\lambda_n t}$. Нарешті, так означені нормівні множники визначають матрицю Ґрама для лінеаризації $\mathscr{L}$, побудованої в попередньому розділі.

За теоремою 2.3, послідовність $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ є послідовністю власних значень оператора $\mathscr{L}$. Розглянемо послідовність векторів $(\mathbf{y}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ в $\mathcal{E}$ таких, що для власного значення $\lambda = \lambda_n = \lambda_{n+1} = \cdots = \lambda_{n+m-1}$ кратності m вектори $\mathbf{y}_k$, $k = n, \ldots, n+m-1$, визначені формулами $\mathbf{y}_n = (y_n, \lambda y_n)^{\mathrm{t}}$ та $\mathbf{y}_j = (y_j, \lambda y_j + y_{j-1})^{\mathrm{t}}$, $j = n+1, ..., n+m-1$. З доведення теореми 2.3 нам відомо, що $\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n+1}, \ldots, \mathbf{y}_{n+m-1}$ — ланцюжок власного та приєднаних векторів $\mathscr{L}$, що відповідає власному значенню λ, а отже, $(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ є послідовністю всіх власних та приєднаних векторів $\mathscr{L}$.

Покладемо $g_{kl} := [\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_l]$ та асоціюємо з оператором $\mathscr{L}$ матрицю Ґрама $G = (g_{kl})$. Нагадаємо, що якщо власні значення λ_k та λ_l задовольняють умову $\lambda_k \neq \overline{\lambda_l}$, то підпростори, які відповідають λ_k та λ_l ортогональні в Π. Звідси зрозуміло, що матриця Ґрама G має блочно-діагональну структуру. Для дійсного $\lambda = \lambda_n = \cdots = \lambda_{n+m-1}$ і $k, l = n, \ldots, n+m-1$ з рівності

$$[(\mathscr{L} - \lambda\mathscr{I})\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_l] = [\mathbf{y}_k, (\mathscr{L} - \lambda\mathscr{I})\mathbf{y}_l]$$

випливає, що $g_{ij} = g_{kl}$, коли $i + j = k + l$, а індекси i, j, k, l є між n та $n + m - 1$; більше того, $g_{kl} = 0$, якщо $k + l < 2n + m - 1$. Далі зауважимо, що

$$\begin{aligned} g_{n+j,n+m-1} =& [\mathbf{y}_{n+j}, \mathbf{y}_{n+m-1}] = (Ay_{n+j,1}, y_{n+m-1,1})_{L_2} + (y_{n+j,2}, y_{n+m-1,2})_{L_2} \\ =& \left(T'(\lambda)(\lambda y_{n+j,1} + y_{n+j-1,1}), y_{n+m-1,1}\right)_{L_2} \\ &+ (\lambda y_{n+j-1,1} + y_{n+j-2,1}, y_{n+m-1,1})_{L_2} \\ &+ (\lambda y_{n+j,1} + y_{n+j-1,1}, y_{n+m-2,1})_{L_2} = \alpha_{n+j}, \quad j = 0, \ldots, m-1, \end{aligned} \tag{3.5}$$

де ми вважаємо, що $y_{n-1,1} = y_{n-2,1} = 0$, щоб спростити вираз. Тому блок G_n матриці G, що відповідає власному значенню λ кратності m, є нижньою антитрикутною матрицею Ганкеля $M^{-}[\alpha_n, \ldots, \alpha_{n+m-1}]$.

Тепер нехай $\lambda = \lambda_n = ... = \lambda_{n+m-1} = \overline{\lambda_{n+m}} = ... = \overline{\lambda_{n+2m-1}}$. Кореневі підпростори власних значень λ та $\overline{\lambda}$ є нейтральні і кососпряжені. Тому блок G, що відповідає цим двом кореневим просторам, має вигляд (3.1) з матрицями B_1 та B_2 розміру $m \times m$. Зауважимо, що $\mathbf{y}_{n+m+j} = \overline{\mathbf{y}_{n+j}}$;

тому B_2 комплексно спряжений з B_1 і

$$g_{k-1,l+m} = [(\mathscr{L} - \lambda\mathscr{I})\mathbf{y}_k, \overline{\mathbf{y}_l}] = [\mathbf{y}_k, \overline{(\mathscr{L} - \lambda\mathscr{I})\mathbf{y}_l}] = g_{k,m+l-1}.$$

Використовуючи міркування подібні до тих, що у випадку дійсного λ, отримуємо, що $g_{n+j,n+2m-1} = \alpha_{n+j}$ для $j = 0, \dots, m-1$. Звідси B_1 є нижньою антитрикутною матрицею Ганкеля $M^-[\alpha_n, \dots, \alpha_{n+m-1}]$.

Отже, бачимо, що послідовність (α_k) нормівних множників в'язки T пов'язана з блочно-діагональною матрицею Ґрама системи власних та приєднаних векторів $(\mathbf{y}_k)$ оператора $\mathscr{L}$. Маючи матрицю Ґрама G, ми автоматично маємо послідовність (α_k). І навпаки, маючи послідовність нормівних множників (α_k) і послідовність власних значень (λ_k) в'язки T, ми можемо побудувати відповідну матрицю G.

Наступна лема використовується, зокрема, у підрозділі 3.4.

Лема 3.1. *Припустимо, що T має тільки дійсні і прості власні значення. Тоді всі нормівні множники T додатні тоді і лише тоді, коли оператор A додатний.*

Доведення. З (3.5), за припущення леми нормівний множник α_n в'язки T дорівнює елементу g_{nn} матриці Ґрама G лінеаризації $\mathscr{L}$. А отже, α_n є нормами відповідних власних векторів $\mathscr{L}$ в просторі Понтряґіна.

Достатність. Очевидно, якщо A додатний, то простір Π є простором Гільберта, а отже, $\mathscr{L}$ є самоспряженим оператором у гільбертовому просторі і всі нормівні множники α_n є додатними як норми власних векторів у просторі Гільберта.

Необхідність. Припустимо, що A не є додатним. Тоді Π є простором Понтряґіна зі скінченним від'ємним індексом $\kappa > 0$. За теоремою Понтряґіна (див., напр., [38]), тоді в Π існує максимальний недодатний підпростір вимірності κ, інваріантний відносно $\mathscr{L}$. І у цьому підпросторі існує власний вектор $\mathscr{L}$ з недодатним відповідним нормівним множником α_n. А це означає, що не всі нормівні множники T додатні. Ця суперечність завершує доведення. □

Для операторної в'язки T_M також можна визначити нормівні множники β_n аналогічно до (3.3) з T_M замість T та з (y_n) власними та приєднаними векторами T_M, визначеними через (3.2), де λ власне значення T_M. Нормівні множники β_n задовольняють властивості, схожі до властивостей α_n; зокрема, справедлива така

Лема 3.2. *Нехай T_M має лише дійсні та прості власні значення. Тоді всі нормівні множники T_M додатні тоді і лише тоді, коли оператор A_M додатний.*

3.2. Асимптотики нормівних множників

Використовуючи зв'язок операторної в'язки T з оператором Дірака, який був установлений у підрозділі 2.3, дослідимо асимптотики введених нормівних множників. Спочатку зауважимо, що для простих і дійсних власних значень в'язки T можна переписати означення відповідних нормівних множників, задане формулою (3.3), у більш зручному вигляді.

Означення 3.1. Для дійсного простого власного значення λ в'язки T позначимо через y відповідну власну функцію, нормовану початковими умовами $y(0) = 0$ та $y^{[1]}(0) = \lambda$. Тоді *нормівний множник*, що відповідає λ, визначається формулою

$$\alpha := 2\int_0^1 y^2(t)dt - \frac{2}{\lambda}\int_0^1 p(t)y^2(t)dt. \tag{3.6}$$

Нормівний множник для оператора Дірака $\mathscr{D}_2(P)$, який відповідає дійсному і простому власному значенню λ, визначається так

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \|u_1\|^2_{L_2} + \|u_2\|^2_{L_2},$$

де $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}}$ — власна функція оператора Дірака $\mathscr{D}_2(P)$, що відповідає λ і нормована початковими умовами $u_1(0) = 1$ і $u_2(0) = 0$. Припустимо, що $\lambda \neq 0$; тоді, за зауваженням 2.2, $y := u_2$ є власною функцією T, що відповідає власному значенню λ; також y дійснозначна і задовольняє початкові умови $y(0) = 0$ та $y^{[1]}(0) = (y' - ry)(0) = (y' - vy)(0) = \lambda u_1(0) = \lambda$. Використовуючи інтегрування частинами та рівність (2.7), отримаємо

$$\|u_2' - vu_2\|_{L_2}^2 = (Au_2, u_2)_{L_2};$$

тоді, з огляду на (2.8),

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \frac{1}{\lambda^2}(Ay, y)_{L_2} + (y, y)_{L_2} = -\frac{1}{\lambda}(By, y)_{L_2} + 2(y, y)_{L_2},$$

що збігається з (3.6). Таким чином, ми довели такий важливий результат.

Лема 3.3. *Нормівні множники, що відповідають ненульовим дійсним простим власним значенням оператора Дірака $\mathscr{D}_2(P)$ та операторної в'язки T збігаються.*

Нагадаємо, що всі, крім скінченної кількості власних значень (1.1), (1.2), дійсні та прості (див. теорему 2.4). Тому із зауваження 2.3 та леми 3.3 маємо таке:

Теорема 3.1. *Нормівні множники α_n задачі* (1.1), (1.2), *що відповідають власним значенням λ_n, задовольняють асимптотику*

$$\alpha_n = 1 + \tilde{\alpha}_n,$$

де $(\tilde{\alpha}_n) \in \ell_2$.

Використовуючи аналогічні міркування, можна довести відповідний результат для випадку крайових умов змішаного типу.

Теорема 3.2. *Нормівні множники β_n задачі* (1.1), (1.3), *що відповідають власним значенням μ_n, задовольняють асимптотику*

$$\beta_n = 1 + \tilde{\beta}_n$$

з ℓ_2-послідовністю $(\tilde{\beta}_n)$.

3.3. Визначення нормівних множників за двома спектрами

У цьому підрозділі ми виведемо формули, які визначають нормівні множники задачі (1.1), (1.2) через спектри задач (1.1), (1.2) і (1.1), (1.3) (чи, що еквівалентно, операторних в'язок T та T_M). Для цього спочатку знайдемо деякі зв'язки між нормівними множниками та характеристичними функціями відповідних задач. А тоді скористаємось факторизацією характеристичних функцій, отриманою в підрозділі 2.4, щоб знайти потрібні формули. Для нормівних множників задачі (1.1), (1.3) ми наведемо відповідні результати без доведень, оскільки для того, щоб їх отримати, досить провести міркування, аналогічні до використаних у випадку крайових умов Діріхле.

3.3.1. Деякі додаткові формули для нормівних множників. Обчислимо лишки резольвенти $(\mathscr{L} - z\mathscr{I})^{-1}$ лінеаризації $\mathscr{L}$ у власному значенні λ двома різними шляхами. Прирівнявши результати, отримаємо деякі формули для нормівних множників α_k.

Спершу зауважимо, що для достатньо великого N власні значення λ_n з $|n| > N$ прості. Тому відповідні блоки матриці G є ненульовими скалярами, що дорівнюють відповідним нормівним множникам і прямують до 1, коли $|n| \to \infty$ (див. результати підрозділу 3.2). Інші блоки G є невиродженими нижніми антитрикутними матрицями двох типів, які були описані на початку підрозділу 3.1. Таким чином, G є блочно-діагональною матрицею, у якої діагональні блоки G_n є оборотними і $\sup \|G_n^{-1}\| < \infty$. Тому G є обмежено оборотною; позначимо обернену до неї через D. Далі зауважимо, що обернена до нижньої антитрикутної матриці Ганкеля є верхньою антитрикутною матрицею Ганкеля. Отже, D, так само як G, має блочно-діагональну структуру, але з верхніми антитрикутними матрицями Ганкеля в блоках. Поставимо у відповідність D послідовність $(\delta_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ так, як пояснено на початку підрозділу 3.1.

Спочатку розглянемо дійсне власне значення $\lambda = \lambda_n = \lambda_{n+1} = \cdots = \lambda_{n+m-1}$ і зауважимо, що лишок резольвенти $\mathscr{L}$ в λ дорівнює мінус проектор Рисса на відповідний кореневий підпростір (порів., напр., [58, Гл.1]). Отже,

$$\operatorname*{res}_{z=\lambda}(\mathscr{L} - z\mathscr{I})^{-1} = -\sum_{k,l=n}^{n+m-1} d_{kl}[\cdot, \mathbf{y}_l]\mathbf{y}_k = -\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{j} \delta_{n+j}[\cdot, \mathbf{y}_{j+n-k}]\mathbf{y}_{n+k}. \quad (3.7)$$

Далі, використовуючи зображення (2.5), отримуємо

$$\begin{aligned}\operatorname*{res}_{z=\lambda}(\mathscr{L} - z\mathscr{I})^{-1} &= -\operatorname*{res}_{z=\lambda}\begin{pmatrix} z^{-1}(\widetilde{T}^{-1}(z)\widetilde{A} + I) & T^{-1}(z) \\ \widetilde{T}^{-1}(z)\widetilde{A} & zT^{-1}(z)\end{pmatrix} \\ &= -\operatorname*{res}_{z=\lambda}\begin{pmatrix} z^{-1}\widetilde{T}^{-1}(z) & T^{-1}(z) \\ \widetilde{T}^{-1}(z) & zT^{-1}(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{A} & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

За формулою Ґріна,

$$T(z)^{-1}f(x) = \frac{1}{W(z)}\left[\varphi_-(x,z)\int\limits_x^1 f(t)\varphi_+(t,z)dt + \varphi_+(x,z)\int\limits_0^x f(t)\varphi_-(t,z)dt\right],$$

де $\varphi_-(\cdot, z)$ — розв'язок рівняння $\ell(y) = (z^2 - 2zp)y$, що задовольняє початкові умови $y(0) = 0$, $y^{[1]}(0) = 1$, $\varphi_+(\cdot, z)$ — розв'язок такого ж рівняння, що задовольняє умови $y(1) = 0$, $y^{[1]}(1) = 1$, а $W(z) = \varphi_-(x,z)\varphi_+^{[1]}(x,z) - \varphi_+(x,z)\varphi_-^{[1]}(x,z)$ — вронскіан розв'язків $\varphi_-(\cdot, z)$ та $\varphi_+(\cdot, z)$. Покладемо $s(z) := \varphi_-(1,z)$ та $c(z) := \varphi_-^{[1]}(1,z)$. Оскільки вронскіан W не залежить від x, то $W(z) = \varphi_-(1,z) = s(z)$. Зауважимо далі, що для власного значення λ задачі (1.1), (1.2) функції $\varphi_+(x,\lambda)$ та $\varphi_-(x,\lambda)$ пов'язані так:

$$\varphi_+(x,\lambda) = \frac{\varphi_+^{[1]}(1,\lambda)}{\varphi_-^{[1]}(1,\lambda)}\varphi_-(x,\lambda) = \frac{1}{c(\lambda)}\varphi_-(x,\lambda).$$

Візьмемо до уваги зроблені зауваження і обчислимо

$$\operatorname*{res}_{z=\lambda} z^{-1}\widetilde{T}^{-1}(z)f(x) = \operatorname*{res}_{z=\lambda}\frac{\varphi_-(x,z)}{zs(z)c(z)}\int\limits_0^1 f(t)\varphi_-(t,z)dt$$

$$=\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{j}\eta_{n+j}(f,y_{j+n-k})_{L_2}y_{n+k}(x)$$

з

$$\eta_{n+j}=\frac{1}{(m-1-j)!}\frac{\partial^{m-1-j}}{\partial z^{m-1-j}}\left[\frac{(z-\lambda)^m}{zs(z)c(z)}\right]\bigg|_{z=\lambda} \tag{3.8}$$

для $j=0,\ldots,m-1$. Аналогічно отримуємо

$$\begin{aligned}\operatorname*{res}_{z=\lambda}\widetilde{T}^{-1}(z)f(x)&=\operatorname*{res}_{z=\lambda}\frac{z\varphi_-(x,z)}{zs(z)c(z)}\int_0^1 f(t)\varphi_-(t,z)dt\\&=\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{j}\eta_{n+j}(f,\lambda y_{j+n-k}+y_{j+n-k-1})_{L_2}y_{n+k}(x)\\&=\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{j}\eta_{n+j}(f,y_{j+n-k})_{L_2}(\lambda y_{n+k}(x)+y_{n+k-1}(x)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname*{res}_{z=\lambda}z\widetilde{T}^{-1}(z)f(x)&=\operatorname*{res}_{z=\lambda}\frac{z\varphi_-(x,z)}{zs(z)c(z)}\int_0^1 f(t)z\varphi_-(t,z)dt\\&=\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{j}\eta_{n+j}(f,\lambda y_{j+n-k}+y_{j+n-k-1})_{L_2}(\lambda y_{n+k}(x)+y_{n+k-1}(x)).\end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$-\operatorname*{res}_{z=\lambda}\begin{pmatrix} z^{-1}\widetilde{T}^{-1}(z) & T(z)^{-1}\\ \widetilde{T}^{-1}(z) & zT(z)^{-1}\end{pmatrix}=-\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{j}\eta_{n+j}(\cdot,\mathbf{y}_{j+n-k})_{L_2}\mathbf{y}_{n+k},$$

а отже,

$$\operatorname*{res}_{z=\lambda}(\mathscr{L}-z\mathscr{I})^{-1}=-\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{j}\eta_{n+j}[\cdot,\mathbf{y}_{j+n-k}]\mathbf{y}_{n+k}, \tag{3.9}$$

де η_j визначаються формулою (3.8). Враховуючи лінійну незалежність $\mathbf{y}_j$ (див. твердження 2.1), отримуємо, що

$$\delta_j=\eta_j,\ j=n,\ldots,n+m-1.$$

Подібний результат справедливий і для недійсного власного значення $\lambda=\lambda_n=\lambda_{n+1}=\ldots=\lambda_{n+m-1}=\overline{\lambda_{n+m}}=\overline{\lambda_{n+m+1}}=\ldots=\overline{\lambda_{n+2m-1}}$. А саме, з одного боку,

$$\operatorname*{res}_{z=\lambda}(\mathscr{L}-z\mathscr{I})^{-1}=-\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{j}\delta_{n+j}[\cdot,\overline{\mathbf{y}_{j+n-k}}]\mathbf{y}_{n+k},$$

де δ_j — елементи послідовності, асоційованої з $D=G^{-1}$. З іншого боку,

$$\operatorname*{res}_{z=\lambda}(\mathscr{L}-z\mathscr{I})^{-1}=-\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{j}\eta_{n+j}[\cdot,\overline{\mathbf{y}_{j+n-k}}]\mathbf{y}_{n+k},$$

де η_j, $j=n,...,n+m-1$, визначаються формулою (3.8). Прирівнявши обидва результати і врахувавши лінійну незалежність $\mathbf{y}_j$, отримуємо, що $\delta_j=\eta_j$, а отже δ_j визначаються (3.8).

Зауважимо, що функції $s(z)$ та $c(z)$ збігаються з визначеними у підрозділі 1.2 функціями $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ відповідно і є характеристичними функціями для задач (1.1), (1.2) та (1.1), (1.3). Отже, ми отримали формули, які визначають матрицю D, обернену до матриці G, через характеристичні функції задач (1.1), (1.2) та (1.1), (1.3). Очевидно, матрицю G можна легко отримати з D. А у підрозділі 3.1 було показано, що матриця G безпосередньо пов'язана з нормівними множниками в'язки T. Отже, насправді отримані у цьому підрозділі формули дозволяють визначити нормівні множники T через характеристичні функції $\varphi(z)$ та $\psi(z)$.

Для в'язки T_M і відповідної лінеаризації $\mathscr{L}_M$ можна визначити послідовності (δ_n^M) та (η_n^M) так само, як (δ_n) та (η_n) були визначені для T, та отримати аналогічні зв'язки.

3.3.2. Визначення нормівних множників за двома спектрами. За теоремами 2.8 та 2.11, функції $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ однозначно визначаються своїми нулями, тобто власними значеннями λ_n в'язки T та μ_n в'язки T_M. З цього випливає наступна теорема.

Теорема 3.3. *Спектри (λ_n) та (μ_n) операторних в'язок T та T_M однозначно визначають нормівні множники (α_n) та (β_n). А саме, елемен-*

ти послідовності (δ_n), *асоційованої з матрицею* $D = G^{-1}$, *визначаються формулою*

$$\delta_{n+j} = \frac{1}{(m-1-j)!} \frac{\partial^{m-1-j}}{\partial z^{m-1-j}} \left[\frac{(z-\lambda)^m}{z\varphi(z)\psi(z)} \right] \bigg|_{z=\lambda}, \ j = 0, \dots m-1,$$

для власного значення $\lambda = \lambda_n = \dots = \lambda_{n+m-1}$ *в'язки* T *алгебраїчної кратності* m. *Аналогічно,*

$$\delta^M_{n+j} = \frac{1}{(m-1-j)!} \frac{\partial^{m-1-j}}{\partial z^{m-1-j}} \left[\frac{(z-\mu)^m}{z\varphi(z)\psi(z)} \right] \bigg|_{z=\mu}, \ j = 0, \dots m-1,$$

для власного значення $\mu = \mu_n = \dots = \mu_{n+m-1}$ *в'язки* T_M *алгебраїчної кратності* m.

Зауважимо, що більш природно нумерувати власні значення λ_n в'язки T множиною індексів $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, зважаючи на асимптотику λ_n (див. (2.18)). Тоді з попередньої теореми та теорем 2.8, 2.11 отримуємо прямі формули, які визначають нормівні множники, що відповідають дійсним і простим власним значенням в'язок T та T_M, за спектрами цих в'язок.

Наслідок 3.1. *Припустимо, що* λ_n *— дійсне і просте власне значення* T*; тоді*

$$\alpha_n = \lambda_n \dot{\varphi}(\lambda_n)\psi(\lambda_n) = c\text{V.p.} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right) \text{V.p.} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\mu_k}\right),$$

де стала c *визначена формулою*

$$c = \begin{cases} \text{V.p.} \prod\limits_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \dfrac{\lambda_k}{\pi k} \text{V.p.} \prod\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dfrac{\mu_k}{\pi\,(k+1/2)}, & \text{якщо } p_0 \neq \dfrac{\pi l}{2}, \ l \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^l \text{V.p.} \prod\limits_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \dfrac{\lambda_k}{\pi k} \text{V.p.} \prod\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dfrac{\mu_k}{\pi\,(k+1/2)}, & \text{якщо } p_0 = \pi l, \ l \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^l \mu_0 \text{V.p.} \prod\limits_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \dfrac{\lambda_k}{\pi k} \text{V.p.} \prod\limits_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \dfrac{\mu_k}{\pi k}, & \text{якщо } p_0 = \dfrac{\pi}{2} + \pi l, \ l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Аналогічно, якщо μ_n *— дійсне і просте власне значення* T_M, *то*

$$\beta_n = \mu_n \varphi(\mu_n)\dot{\psi}(\mu_n) = c\text{V.p.} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu_n}{\lambda_k}\right) \text{V.p.} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu_n}{\mu_k}\right)$$

з такою ж сталою c, як вище.

Справді, якщо λ_n — дійсне і просте власне значення T, то $\delta_n = 1/\alpha_n$. З іншого боку, за теоремою 3.3,

$$\delta_n = \frac{1}{\lambda_n \dot{\varphi}(\lambda_n)\psi(\lambda_n)},$$

що дає формулу для α_n. Значення сталої c отримуємо з безпосереднього аналізу формул факторизації характеристичних функцій φ та ψ з теорем 2.8 та 2.11. Результат для β_n, що відповідає дійсному і простому власному значенню μ_n в'язки T_M, виводиться аналогічно.

3.4. Умови простоти і дійсності власних значень

У цьому підрозділі ми встановимо деякі умови, за яких спектри T та T_M дійсні та прості.

Кажемо, що спектри операторних в'язок T та T_M *майже чергуються*, якщо вони складаються лише з дійсних та простих власних значень, які можна занумерувати у зростаючому порядку як λ_n, $n \in \mathbb{Z}^*$, та μ_n, $n \in \mathbb{Z}$, відповідно так, що вони задовольняють умову

$$\mu_k < \lambda_k < \mu_{k+1} \text{ для кожного } k \in \mathbb{Z}^*. \tag{3.10}$$

Теорема 3.4. *Наступні твердження еквівалентні:*

(1) *спектри в'язок T та T_M майже чергуються;*

(2) *існує дійсне число μ_* таке, що оператор $T_M(\mu_*)$ від'ємний.*

Доведення. ((1) $\Rightarrow$ (2)) Спочатку додатково припустимо, що $0 \in (\mu_0, \mu_1)$ а тоді доведемо, що (2) справджується з $\mu_* = 0$. Справді,

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = -\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_k - \mu_{n+1}}{\lambda_k - \mu_n} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n,n+1}}^{\infty} \frac{\mu_k - \mu_{n+1}}{\mu_k - \mu_n}.$$

Пряма перевірка показує, що якщо виконується (1), то це відношення є додатним для всіх $n \in \mathbb{Z}$. Тому всі нормівні множники β_n мають той самий знак. Нагадаємо, що $\beta_n = [\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_n]_{\mathcal{E}_M}$, де $\mathbf{y}_n$ — власний вектор $\mathscr{L}_M$, що відповідає μ_n; тому всі за винятком щонайбільше скінченної кількості β_n повинні бути додатними. Як наслідок, всі β_n є додатними і твердження випливає з леми 3.2.

Якщо 0 не належить до (μ_0, μ_1), то беремо довільну точку μ_* з цього інтервалу і зсуваємо спектральний параметр T та T_M на μ_*. Отримуємо в'язки

$$\widehat{T}(\lambda) = T(\lambda + \mu_*) = \lambda^2 I - 2\lambda\widehat{B} - \widehat{A}, \tag{3.11}$$

$$\widehat{T}_M(\lambda) = T_M(\lambda + \mu_*) = \lambda^2 I - 2\lambda\widehat{B} - \widehat{A}_M \tag{3.12}$$

з $\widehat{B} := B - 2\mu_* I$, $\widehat{A} := -T(\mu_*)$ та $\widehat{A}_M := -T_M(\mu_*)$. Очевидно, спектри $\widehat{T}$ та $\widehat{T}_M$ майже чергуються з $0 \in (\mu_0, \mu_1)$. За першою частиною цього доведення оператор $\widehat{A}_M$ додатний. Тому оператор $T_M(\mu_*)$ з цим μ_* від'ємний.

((2) $\Rightarrow$ (1)) Нехай оператор $T_M(\mu_*)$ від'ємний. Розглянемо в'язку $\widehat{T}_M$ з (3.12), отриману з T_M за допомогою зсуву спектрального параметру на μ_*. Тоді оператор $\widehat{A}_M = -T_M(\mu_*)$ додатний і з принципу мінімаксу (див., напр., [80]) випливає, що $\widehat{A} = -T(\mu_*)$ теж додатний. За наслідком 2.1, спектри T та T_M дійсні та прості. Власні значення λ_n та μ_n можна занумерувати так, що вони задовольняють асимптотики (2.18) та (2.25) (див. [70]).

Далі визначимо нормівні множники $\widehat{\beta}_j$, $j \in \mathbb{Z}$, для $\widehat{T}_M$. За лемою 3.2, всі вони додатні, а за наслідком 3.1, визначаються формулою

$$\widehat{\beta}_n = \widehat{c} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_k - \mu_n}{\lambda_k - \mu_*} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{\mu_k - \mu_n}{\mu_k - \mu_*}.$$

де $\widehat{c}$ — деяка стала . Звідси випливає, що вираз

$$\frac{\widehat{\beta}_{n+1}}{\widehat{\beta}_n} = -\frac{\mu_{n+1} - \mu_*}{\mu_n - \mu_*} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_k - \mu_{n+1}}{\lambda_k - \mu_n} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n,n+1}}^{\infty} \frac{\mu_k - \mu_{n+1}}{\mu_k - \mu_n}$$

додатний. Тому, якщо $\mu_n < \mu_* < \mu_{n+1}$, то між μ_n та μ_{n+1} є парна кількість λ_k, а інакше між μ_n та μ_{n+1} є непарна кількість λ_k. Тоді з асимптотик (2.18) та (2.25) μ_n та λ_n випливає, що кількість елементів (λ_k) між μ_n

та μ_{n+1} не може перевищувати 1 і що між μ_0 та μ_1 немає λ_k. Отже, (λ_n) та (μ_n) майже чергуються, а $\mu_* \in (\mu_0, \mu_1)$, що завершує доведення. $\square$

З доведення першої імплікації у попередній теоремі відразу отримуємо наступні наслідки, які будуть використані при розв'язуванні оберненої спектральної задачі для в'язок T та T_M.

Наслідок 3.2. *Якщо спектри $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ в'язки T та $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ в'язки T_M майже чергуються, то для кожного числа μ_* з інтервалу (μ_0, μ_1) оператор $T_M(\mu_*)$ від'ємний.*

Наслідок 3.3. *Якщо для деякого $\mu_* \in \mathbb{R}$ оператор $T_M(\mu_*)$ від'ємний, то спектри $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ в'язки T та $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ в'язки T_M майже чергуються і $\mu_* \in (\mu_0, \mu_1)$. Більше того, для кожного μ з (μ_0, μ_1) оператор $T_M(\mu)$ від'ємний.*

У цьому розділі ми ввели поняття нормівних множників для задач Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами. Як і в класичному випадку, ці величини є важливим інструментом в обернених задачах. Зокрема, в наступному розділі ми вивчаємо задачу відновлення енергозалежних рівнянь Штурма–Ліувілля за спектром та нормівними множниками. Для повного опису спектральних даних у такій задачі ми використовуємо отримані в цьому розділі результати про властивості нормівних множників. Виведені формули зв'язку нормівних множників та двох спектрів використовуються у розділі 5 і дають можливість звести задачу відновлення за двома спектрами до відновлення рівняння (1.1) за спектром Діріхле та відповідним набором нормівних множників. Висновки, отримані в останньому підрозділі цього розділу, є одними з ключових у нашому дослідженні, оскільки визначають умови, за яких ми можемо розв'язувати обернені задачі для енергозалежних рівнянь Штурма–Ліувілля запропонованим нами методом.

Результати, наведені в цьому розділі, опубліковані в працях [70, 73]

РОЗДІЛ 4
ВІДНОВЛЕННЯ РІВНЯНЬ ШТУРМА–ЛІУВІЛЛЯ З ЕНЕРГОЗАЛЕЖНИМИ ПОТЕНЦІАЛАМИ ЗА СПЕКТРОМ ТА НОРМІВНИМИ МНОЖНИКАМИ

4.1. Постановка задачі та основні результати

У цьому розділі ми вивчаємо обернену задачу відновлення рівняння Штурма–Ліувілля з енергозалежним потенціалом за спектром Діріхле та набором нормівних множників (див. $[26, 42, 74, 79, 87]$). Зокрема, ми дамо повний опис відповідних спектральних даних, запропонуємо алгоритм відновлення і доведемо теореми існування та єдиності розв'язку такої оберненої задачі.

Для відновлення задачі (1.1), (1.2) треба визначити потенціали p та $q = r'$. Ми покажемо, що за спектром і нормівними множниками можна однозначно відновити ці потенціали. Натомість регуляризований потенціал r можна відновити лише з точністю до адитивної сталої. Причина цього досить очевидна, оскільки ні спектр, ні нормівні множники в'язки $T(p, r)$ не залежать від конкретного вибору первісної r. Зважаючи на сказане, скрізь, де буде йти мова про єдиність відновлення в'язки $T(p, r)$ у цьому розділі, будемо розуміти, що йдеться про єдиність відновлення потенціалів p та $q = r'$, а в записі $T(p, r)$ r позначає довільну первісну потенціала q.

Як було показано в прикладі 1.1, в'язка $T(p, r)$ може мати недійсні та/або непрості власні значення (тобто, алгебраїчної кратності більше, ніж 1). Але той підхід до вивчення оберненої спектральної задачі для $T(p, r)$, який ми використовуємо, безпосередньо працює лише для випадку, коли спектр $T(p,r)$ дійсний і простий. Це так, наприклад, коли виконується припущення

(AD*) Існує $\mu_* \in \mathbb{R}$ таке, що оператор $T(\mu_*)$ від'ємний.

Іншими словами, ми припускаємо, що в'язка T строго гіперболічна [18, Гл. 31].

Зауваження 4.1. У нашому дослідженні зручно припускати, що μ_* з (AD*) дорівнює нулю. З результатів розділу 2 ми знаємо, що спектри в'язок T та T_M є дискретними підмножинами $\mathbb{C}$ і складаються лише з власних значень скінченної алгебраїчної кратності [18]; див. також обґрунтування в [32] для схожої задачі. Тому, якщо μ_* не є нулем, ми можемо зсунути спектральний параметр за допомогою заміни $\lambda = \hat{\lambda} + \mu_*$; тоді спектральне рівняння (1.1) можна переписати як

$$-y'' + \hat{q}y + 2\hat{\lambda}\hat{p}y = \hat{\lambda}^2 y$$

з новими потенціалами $\hat{p} := p - \lambda_0$ та $\hat{r}' = \hat{q} := q + 2\lambda_0 p - \lambda_0^2$. Крайові умови (1.2) залишаються незмінними. Тепер, якщо λ_n — власні значення в'язки $T(p,r)$, то $\hat{\lambda}_n := \lambda_n - \mu_*$ — власні значення задачі $T(\hat{p},\hat{r})$, тоді як власні функції для відповідних власних значень є тими самими. Зокрема, в'язка $T(\hat{p},\hat{r})$ задовольняє припущення (AD*) з $\mu_* = 0$. Маючи $\hat{p}$ та $\hat{q}$, можемо знайти p та q за формулами

$$p = \hat{p} + \mu_*, \quad q = \hat{q} - 2\mu_* p - \mu_*^2. \tag{4.1}$$

З огляду на попереднє зауваження, не втрачаючи загальності, ми можемо (і будемо) припускати у цьому розділі що в (AD*) $\mu_* = 0$, тобто виконується припущення

(AD) Оператор A додатний.

Як ми знаємо з розділу 2, за цього припущення всі власні значення $T(p,r)$ дійсні і прості. Тому в цьому розділі ми можемо користуватися означенням 3.1 для нормівних множників. Нагадаємо також, що власні значення в'язки $T(p,r)$ можна занумерувати в порядку зростання як λ_n для $n \in \mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ так, що

$$\lambda_n = \pi n + p_0 + \tilde{\lambda}_n,$$

де $p_0 := \int_0^1 p(x)\,dx$ і $(\tilde{\lambda}_n)$ – послідовність з $\ell_2(\mathbb{Z}^*)$. За припущення (AD) точка $\lambda = 0$ є в резольвентній множині $T(p,r)$. Тому, оскільки оператор A має компактну резольвенту, з додатності A випливає його рівномірна додатність, тобто, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $A \geqslant \varepsilon I$.

Зауваження 4.2. Як ми знаємо з леми 3.1, за припущення (AD) всі нормівні множники операторної в'язки $T(p,r)$ додатні. Більш загально, якщо $T(p,r)$ є лише сильно гіперболічною і $T(p,r)(\mu_*) < 0$ для деякого $\mu_* \neq 0$, то всі нормівні множники, що відповідають власним значенням між 0 та μ_* (якщо такі є) є від'ємними, а решта α_n додатні. Обидва твердження випливають з рівності

$$\bigl(T'(p,r)(\lambda_n)y_n, y_n\bigr)_{L_2} = \lambda_n\alpha_n,$$

де $T'(p,r)$ позначає λ-похідну $T(p,r)$, і того факту, що $T'(p,r)(\lambda) > 0$ для $\lambda > \mu_*$, а $T'(p,r)(\lambda) < 0$ для $\lambda < \mu_*$, якщо $T(p,r)(\mu_*) < 0$, див [18].

Нагадаємо також, що за лемою 3.1, якщо A оборотний і всі α_n додатні, то A додатний.

Введемо означення спектральних даних.

Означення 4.1. Нехай λ — власне значення квадратичної операторної в'язки $T(p,r)$ і α — відповідний нормівний множник. Тоді (λ,α) називається *спектральною парою* $T(p,r)$. *Спектральними даними* $\mathbf{sd}(p,r)$ в'язки $T(p,r)$ називається множина всіх її спектральних пар

$$\mathbf{sd}(p,r) := \{(\lambda,\alpha) \mid \lambda \in \sigma(T(p,r))\}.$$

Обернена спектральна задача, яку ми вивчаємо у цьому розділі, звучить так:

(IPSNC) Маючи задані спектральні дані $\mathbf{sd}(p,r)$ в'язки $T(p,r)$, визначити потенціали p та $q = r'$.

Наша мета в цьому розділі — по-перше, дати повний опис множини спектральних даних, по-друге, знайти і обґрунтувати алгоритм відновлення потенціалів p та $q = r'$ за спектральними даними.

Зауважимо, що коли $p \equiv 0$, спектральна задача для операторної в'язки $T(0,r)$ стає спектральною задачею $Ay = \lambda^2 y$ для оператора Штурма–Ліувілля A з потенціалом q з простору Соболєва $W_2^{-1}(0,1)$. Тоді $\lambda_{-n} = -\lambda_n$, $\alpha_{-n} = \alpha_n$ і означення α_n з (3.6) узгоджується із стандартним означенням нормівного множника (див. [6]). Для оператора Штурма–Ліувілля A з дійснозначним $q \in L_1(0,1)$ і крайовими умовами третього типу було доведено у [6], що його спектр $(\lambda_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ і послідовність $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ відповідних нормівних множників однозначно визначають потенціал q; випадок, коли потенціал q є розподілом із простору $W_2^{-1}(0,1)$, з різними крайовими умовами вивчався, наприклад, у [40,44,83]. У наведених джерелах також подано алгоритми відновлення потенціала q за спектральними даними оператора A.

Операторна в'язка $T(p,r)$ містить два дійснозначні потенціали p та $q = r'$, які треба визначити в оберненій задачі; але спектральні дані в'язки $T(p,r)$ є вдвічі більшими, ніж для стандартного оператора Штурма–Ліувілля. Тому можна сподіватися, що обернена задача (IPSNC) відновлення p та $q = r'$ за спектром та нормівними множниками $T(p,r)$ коректна. Наш перший основний результат гарантує єдиність такого відновлення.

Теорема 4.1. *За припущення (AD) операторна в'язка $T(p,r)$ однозначно визначається своїми спектральними даними $\mathbf{sd}(p,r)$.*

З розділу 2 випливає (пор. також з результатом [3] для $p \in W_2^1(0,1)$ та $q \in L_2(0,1)$), що спектральні дані для досліджуваних операторних в'язок належать до множини SD, означеної далі.

Означення 4.2. Позначимо через SD сім'ю всіх множин $\{(\lambda_n, \alpha_n)\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$, що складені з пар (λ_n, α_n) дійсних чисел, які задовольняють такі властивості:

(1) λ_n відмінні від нуля, строго зростають по $n \in \mathbb{Z}^*$ і мають зображення $\lambda_n = \pi n + h + \tilde{\lambda}_n$ з деяким $h \in \mathbb{R}$ і послідовністю $(\tilde{\lambda}_n)$ з $\ell_2(\mathbb{Z}^*)$;

(2) $\alpha_n > 0$ для всіх $n \in \mathbb{Z}^*$, а числа $\tilde{\alpha}_n := \alpha_n - 1$ утворюють послідовність з $\ell_2(\mathbb{Z}^*)$.

Наш другий результат стверджує, що, навпаки, кожен елемент SD є спектральними даними для деякої операторної в'язки $T(p, r)$, що задовольняє припущення (AD), тобто, з $p \in L_{2,\mathbb{R}}(0, 1)$, $q \in W^{-1}_{2,\mathbb{R}}(0, 1)$ та $A > 0$. Зокрема, він показує, що наведені вище умови (1)–(2) дають повний опис спектральних даних для операторних в'язок $T(p, r)$, що задовольняють (AD).

Теорема 4.2. *Для кожного* **sd** $\in$ SD *існує пара потенціалів* $p, r \in L_{2,\mathbb{R}}(0, 1)$ *така, що оператор* A *з потенціалом* $q = r'$ *додатний і* **sd** *є спектральними даними для операторної в'язки* $T(p, r)$.

Доведення цієї теореми конструктивне і пропонує точний алгоритм відновлення, що визначає потенціали p та r за множиною **sd** з SD; див. підрозділ 4.6.

Наш підхід полягає у зведенні спектральної задачі для $T(p, r)$ до задачі для оператора Дірака спеціального вигляду, що діє в $L_2(0, 1)\times L_2(0, 1)$. Для цього ми використовуємо процедуру, описану в підрозділі 2.3. При відповідному унітарному перетворенні отриманий оператор Дірака набуває так званої "зсунутої" нормальної форми AKHC (за прізвищами Абловиць, Кауп, Ньювелл і Сігур) [31]. Для операторів Дірака у формі AKHC пряма та обернена спектральні задачі добре вивчені, див. [4,17,35]. Ми використаємо відомі методи, щоб спочатку відновити оператор Дірака у "зсунутій" формі АКНС із заданих даних, а тоді за допомогою побудованого в підрозділі 4.3 оператора перетворення перейдемо від цього оператора Дірака до оператора, що безпосередньо пов'язаний з деякою в'язкою $T(p,r)$. Тоді визначимо шукані потенціали p та q з потенціалу знайденого оператора Дірака, що і дає розв'язок задачі (IPSNC).

4.2. Зведення до системи Дірака

У цьому підрозділі покажемо, що за припущення (AD) ми можемо звести спектральну задачу для операторної в'язки $T(p,r)$ до задачі для оператора Дірака спеціального вигляду, використовуючи процедуру, описану в підрозділі 2.3. Почнемо з такої леми.

Лема 4.1. *За припущення (AD) рівняння $\ell(y)=0$ має дійснозначний розв'язок y, що є строго додатним на $[0,1]$.*

Доведення. Доведення складається з трьох кроків.

Крок 1. Спочатку ми покажемо, що жоден нетривіальний розв'язок рівняння $\ell(y)=0$ не має більше, ніж один нуль на $[0,1]$.

Доведення базується на тому факті, що за припущення (AD) квадратична форма $\mathfrak{a}$, що відповідає оператору A, додатна. Використовуючи інтегрування частинами, отримуємо

$$\mathfrak{a}[y] := (Ay,y)_{L_2} = \|y'\|^2 - 2\operatorname{Re}(ry',y)_{L_2}$$

для $y \in \operatorname{dom} A$. Далі (пор. з [43]) квадратична форма $\operatorname{Re}(ry',y)_{L_2}$ є обмеженою відносно

$$\tilde{\mathfrak{a}}[y] := \|y'\|^2$$

з відносною гранню 0. Оскільки $\tilde{\mathfrak{a}}$ замкнута на області

$$\operatorname{dom}\tilde{\mathfrak{a}} := \{y \in W_2^1(0,1) \mid y(0)=y(1)=0\},$$

то з теореми VI.1.33 з [58] випливає, що квадратична форма $\mathfrak{a}$ замкнута на цій же області.

Тепер припустимо супротивне, що нетривіальний розв'язок y рівняння $\ell(y) = 0$ досягає нуля у двох точках x_0 та x_1, $0 \leqslant x_0 < x_1 \leqslant 1$. Нулі y є ізольованими за лемою 2.5 з [57]; тому функція

$$z(x) := \begin{cases} y(x) & \text{для } x \in (x_0, x_1); \\ 0 & \text{для } x \notin (x_0, x_1) \end{cases}$$

належить до області визначення квадратичної форми $\mathfrak{a}$ і є нетривіальною. Скориставшись інтегруванням частинами у виразі

$$\mathfrak{a}[z] = \int_{x_0}^{x_1} |y'(x)|^2 \, dx - 2 \operatorname{Re} \int_{x_0}^{x_1} (ry'\overline{y})(x) \, dx,$$

отримуємо, що $\mathfrak{a}[z] = 0$. А це суперечить додатності $\mathfrak{a}$. Тому такий розв'язок y не може існувати, що доводить потрібне твердження для кроку 1.

<u>Крок 2.</u> Нагадаємо, що рівняння $\ell(y) = 0$ з початковими умовами $y(0) = 0$ і $y^{[1]}(0) = 1$ має єдиний розв'язок, який є дійснозначним. Позначимо такий розв'язок y_0. Згідно з кроком 1, y_0 не досягає нуля на $(0, 1]$, звідки, за лемою 2.5 з [57], $y_0 > 0$ на $(0, 1]$.

<u>Крок 3.</u> Розглянемо розв'язок y_1 рівняння $\ell(y) = 0$, що задовольняє умови $y(1) = y_0(1)$ та $y^{[1]}(1) = y_0^{[1]}(1) - 1$. Скориставшись кроком 1 і лемою 2.5 з [57], отримуємо, що $y_1 > y_0$ на $[0, 1)$; отже, розв'язок y_1 залишається додатним на всьому проміжку $[0, 1]$. Доведення завершене. $\square$

Візьмемо тепер дійснозначний розв'язок y рівняння $\ell(y) = 0$, що залишається додатним на $[0, 1]$ і покладемо $v := y'/y$. Далі використаємо процедуру зведення до системи Дірака з підрозділу 2.3 з цим v.

Зауважимо, що оскільки в цьому випадку функція v дійснозначна, то оператор Дірака $\mathscr{D}_2(P)$ самоспряжений у гільбертовому просторі $L_2(0, 1) \times$

$L_2(0,1)$. А тому він має простий дискретний спектр [17], який, як стверджує наступна лема, тісно пов'язаний зі спектром в'язки $T(p,r)$.

Лема 4.2. *Ненульовий спектр оператора Дірака $\mathscr{D}_2(P)$ та операторної в'язки $T(p,r)$ збігаються. Більше того, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}}$ є власною функцією $\mathscr{D}_2(P)$, що відповідає власному значенню $\lambda \neq 0$ тоді і лише тоді, коли u_2 є власною функцією $T(p,r)$, що відповідає λ і $u_1 := (u_2' - vu_2)/\lambda$.*

Доведення. Твердження леми випливає безпосередньо з процедури зведення спектральної задачі для операторної в'язки $T(p,r)$ до задачі для оператора Дірака (див. підрозділ 2.3) та із зауваження 2.2 □

Також з леми 3.3 випливає, що нормівні множники операторної в'язки $T(p,r)$ збігаються з нормівними множниками оператора Дірака $\mathscr{D}_2(P)$, які відповідають ненульовим власним значенням. Отже, ми можемо використати спектральні дані $\mathbf{sd}(p,r)$ операторної в'язки $T(p,r)$, щоб знайти відповідний оператор Дірака $\mathscr{D}_2(P)$. Визначивши потенціал $P = (p_{ij})_{i,j=1}^2$ оператора $\mathscr{D}_2(P)$, ми обчислюємо потенціали p та $q = r'$ операторної в'язки $T(p,r)$ як $p := p_{22}/2$ та $q := -p_{12}' + p_{12}^2$.

Проте зауважимо, що оскільки факторизація (2.7) не єдина, то оператор Дірака $\mathscr{D}_2(P)$, асоційований з $T(p,r)$, теж не єдиний. Тому спектральні дані $\mathbf{sd}(p,r)$ не можуть визначати такий оператор $\mathscr{D}_2(P)$ однозначно. Причина цієї неєдиності досить очевидна. Справді, спектральні дані в'язки $T(p,r)$ залишають нормівний множник α_0, що відповідає власному значенню $\lambda_0 := 0$ оператора $\mathscr{D}_2(P)$, невизначеним. Ця свобода у виборі α_0 і є причиною неєдиності потенціалів P операторів Дірака $\mathscr{D}_2(P)$. Проте, ми покажемо у підрозділі 4.5, що всі такі оператори Дірака визначають одну і ту ж в'язку $T(p,r)$.

4.3. Оператори перетворення

Описаний вище зв'язок між спектральними даними для операторної в'язки $T(p,r)$ та оператора Дірака $\mathscr{D}_2(P)$ наштовхує на думку, що ми можемо використати добре вивчену обернену спектральну теорію для операторів Дірака, щоб відновити $\mathscr{D}_2(P)$ із заданих спектральних даних. Як тільки такий оператор Дірака буде знайдено, можна просто визначити відповідні потенціали p та $q = r'$ в'язки $T(p,r)$.

Класична обернена спектральна теорія відновлює оператор Дірака з потенціалом у формі АКНС чи в іншій канонічній формі. Тому у нашій оберненій задачі після використання класичної процедури відновлення слід перетворити отриманий оператор Дірака у канонічній формі в оператор вигляду (2.10), залишаючи при цьому спектральні дані незмінними. Такий перехід можна здійснити за допомогою так званих операторів перетворення, про які будемо говорити далі.

Припустимо, що P та Q — матричнозначні потенціали з $L_2((0,1),\mathcal{M}_2)$ і покладемо

$$\mathcal{D}_0 := \{(u_1,u_2)^{\mathrm{t}} \in W_2^1(0,1) \times W_2^1(0,1) \mid u_2(0) = 0\}.$$

Нам потрібно побудувати *оператор перетворення* $\mathscr{X} = \mathscr{X}(P,Q)$ між операторами Дірака, дія яких визначається диференціальними виразами $\ell(P)$ та $\ell(Q)$ на множині $\mathcal{D}_0$, тобто оператор, що задовольняє співвідношення $\mathscr{X}\ell(P)\mathbf{u} = \ell(Q)\mathscr{X}\mathbf{u}$ для всіх $\mathbf{u} \in \mathcal{D}_0$. Такі оператори перетворення для P та Q з неперервними за Ліпшицем елементами були побудовані в [17, 41]; ми будемо шукати оператор перетворення $\mathscr{X}$ подібного вигляду

$$\mathscr{X}\mathbf{u}(x) = R(x)\mathbf{u}(x) + \int\limits_0^x K(x,s)\mathbf{u}(s)ds, \tag{4.2}$$

де R та K — функції зі значеннями в $\mathcal{M}_2$ однієї та двох змінних відповідно. Розглянуті нами оператори Дірака, визначені виразами $\ell(P)$ та $\ell(Q)$, діють на функціях, що задовольняють однакові початкові умови. Тому накладаємо обмеження $R(0) = I$, яке гарантує, що $\mathscr{X}$ зберігає значення функцій в $x = 0$. За такої нормалізації R задана формулами

$$R(x) = e^{\theta_1(x)} \begin{pmatrix} \cos\theta_2(x) & \sin\theta_2(x) \\ -\sin\theta_2(x) & \cos\theta_2(x) \end{pmatrix} = e^{\theta_1(x)I + \theta_2(x)J}, \tag{4.3}$$

з

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &= \frac{1}{2}\int\limits_0^x \operatorname{tr}[J(Q(s) - P(s))]\,ds, \\ \theta_2(x) &= \frac{1}{2}\int\limits_0^x \operatorname{tr}(Q(s) - P(s))ds, \end{aligned} \tag{4.4}$$

пор. з [41]. А саме, справедливий такий аналог теореми 3.1 з [41].

Теорема 4.3. *Нехай P та Q належать простору $L_2((0,1), \mathcal{M}_2)$. Тоді оператор $\mathscr{X}(P,Q)$ вигляду* (4.2) *з R, що задовольняє умову $R(0) = I$, та з сумовним ядром K є оператором перетворення для $\ell(P)$ та $\ell(Q)$ на множині $\mathcal{D}_0$ тоді і лише тоді, коли матричнозначна функція R задана формулами* (4.3)–(4.4) *і ядро $K = (K_{ij})_{i,j=1}^2$ є слабким розв'язком диференціального рівняння в частинних похідних*

$$J\partial_x K(x,y) + \partial_y K(x,y)J = K(x,y)P(y) - Q(x)K(x,y) \tag{4.5}$$

на області $\Omega \equiv \{(x,y) \mid 0 < y < x < 1\}$, який задовольняє для $0 \leqslant x \leqslant 1$ крайові умови

$$K(x,x)J - JK(x,x) = JR'(x) + Q(x)R(x) - R(x)P(x), \tag{4.6}$$

$$K_{12}(x,0) = K_{22}(x,0) = 0. \tag{4.7}$$

Доведення цієї теореми наслідує загалом доведення теореми 3.1 з [41]. Одна суттєва різниця в тому, що оскільки матричнозначні функції P та Q менш регулярні, ядро K не повинно бути диференційовним у звичайному сенсі. Диференціювання K слід розуміти у сенсі розподілів; саме тому

K може бути лише слабким розв'язком рівняння (4.5). Для повноти ми обґрунтуємо нижче кроки, що містять диференціювання у доведенні.

Доведення теореми 4.3. Спочатку зауважимо, що для інтегровного K і для $\mathbf{u} \in \mathcal{D}_0$, стандартна формула

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^x K(x,s)\mathbf{u}(s)ds = K(x,x)\mathbf{u}(x) + \int\limits_0^x \partial_x K(x,s)\mathbf{u}(s)ds$$

залишається справедливою у сенсі розподілів, тому

$$\begin{aligned}\ell(Q)\mathscr{X}\mathbf{u}(x) &= JR(x)\mathbf{u}'(x) + \{JR'(x) + Q(x)R(x)\}\mathbf{u}(x)\\ &\quad + J\frac{d}{dx}\int\limits_0^x K(x,s)\mathbf{u}(s)ds + \int\limits_0^x Q(x)K(x,s)\mathbf{u}(s)ds\\ &= JR(x)\mathbf{u}'(x) + \{JR'(x) + Q(x)R(x) + JK(x,x)\}\mathbf{u}(x)\\ &\quad + \int\limits_0^x \{J\partial_x K(x,s) + Q(x)K(x,s)\}\mathbf{u}(s)ds.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Подібно формула інтегрування частинами

$$\int\limits_0^x K(x,s)\mathbf{u}'(s)\,ds = K(x,x)\mathbf{u}(x) - K(x,0)\mathbf{u}(0) - \int\limits_0^x \partial_s K(x,s)\mathbf{u}(s)\,ds$$

залишається справедливою у сенсі розподілів і в такому ж сенсі отримуємо рівності

$$\begin{aligned}\mathscr{X}\ell(P)\mathbf{u}(x) &= R(x)J\mathbf{u}'(x) + R(x)P(x)\mathbf{u}(x)\\ &\quad + \int\limits_0^x K(x,s)\{J\mathbf{u}'(s) + P(s)\mathbf{u}(s)\}ds\\ &= R(x)J\mathbf{u}'(x) + \{R(x)P(x) + K(x,x)J\}\mathbf{u}(x)\\ &\quad - K(x,0)J\mathbf{u}(0) + \int\limits_0^x \{K(x,s)P(s) - \partial_s K(x,s)J\}\mathbf{u}(s)ds.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Якщо R задана формулою (4.3), а K задовольняє (4.7), то $JR = RJ$ і $K(x,0)J\mathbf{u}(0) = 0$ для $\mathbf{u} \in \mathcal{D}_0$; тепер використовуючи (4.5) та (4.6) у рівняннях (4.8) та (4.9), приходимо до рівності

$$\ell(Q)\mathscr{X}\mathbf{u} = \mathscr{X}\ell(P)\mathbf{u}$$

на області $\mathcal{D}_0$, що доводить достатність.

Щоб довести необхідність, прирівняємо підінтегральні вирази та коефіцієнти при $\mathbf{u}$ та $\mathbf{u}'$ у (4.8) та (4.9). З коефіцієнтів при $\mathbf{u}'$ випливає співвідношення $JR = RJ$, а тому

$$R(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ -b(x) & a(x) \end{pmatrix}.$$

Тепер прирівняємо коефіцієнти при $\mathbf{u}$ і отримаємо рівність

$$JR'(x) + Q(x)R(x) - R(x)P(x) = K(x,x)J - JK(x,x), \tag{4.10}$$

що збігається з (4.6). Використовуючи те, що $KJ - JK$ та $JKJ + K$ мають нульові сліди, з (4.10) виводимо таку систему для a та b:

$$2\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{tr} J(Q-P) & -\operatorname{tr}(Q-P) \\ \operatorname{tr}(Q-P) & \operatorname{tr} J(Q-P) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

Помножимо перший рядок на a, а другий на b і додамо. Отримаємо

$$(a^2 + b^2)' = (a^2 + b^2)\operatorname{tr} J(Q-P).$$

Тому $a^2 + b^2 = c\exp(2\theta_1)$, де θ_1 з (4.4), а c — деяка константа. Враховуючи припущення $R(0) = I$, отримуємо, що $c = 1$.

Тепер підставимо $a = \exp(\theta_1)\cos\eta$ та $b = \exp(\theta_1)\sin\eta$ в систему (4.11). Отримуємо, що $\eta = \theta_2 + c_1$ зі сталою c_1. Знов використовуючи нормалізацію $R(0) = I$, приходимо до рівності $\eta = \theta_2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Отже, матриця R справді задана виразом (4.3).

Далі прирівняємо підінтегральні вирази з (4.8) та (4.9). Отримаємо рівняння для ядра K. Нарешті, доданок $K(x,0)J\mathbf{u}(0)$ повинен дорівнювати нулю для всіх $\mathbf{u} \in \mathcal{D}_0$, звідки випливає співвідношення (4.7). Теорему доведено. $\square$

Попередня теорема зводить питання існування оператора перетворення до питання розв'язності системи (4.5)–(4.7), яке ми досліджуємо далі.

Теорема 4.4. *Припустимо, що матричнозначні функції P та Q належать до $L_2((0,1),\mathcal{M}_2)$. Тоді система* (4.5)–(4.7) *має єдиний розв'язок у сенсі розподілів; більше того, цей розв'язок належить до $L_2(\Omega,\mathcal{M}_2)$.*

Доведення. Доведення цієї теореми досить типове і використовує зведення системи (4.5)–(4.7) до еквівалентної системи інтегральних рівнянь. Ми подамо лише основну ідею, а опущені деталі можна знайти у статті [93].

Введемо чотирьохкомпонентну вектор-функцію $L = (L_1, L_2, L_3, L_4)^{\mathrm{t}}$ з

$$L_1 = K_{21} - K_{12}, \quad L_2 = K_{22} - K_{11},$$
$$L_3 = K_{11} + K_{22}, \quad L_4 = K_{12} + K_{21}.$$

У термінах цього вектора система (4.5) набуває вигляду

$$(\partial_x + E\partial_y)L(x,y) = F(x,y)L(x,y), \tag{4.12}$$

де $E = \operatorname{diag}(1,-1,1,-1)$ і $F(x,y)$ — функції, значення яких є матрицями з $\mathcal{M}_4$; елементи цих матриць є лінійними комбінаціями елементів $P(y)$ та $Q(x)$. Крайові умови (4.6) і (4.7) для K перетворюються у співвідношення

$$\begin{aligned} L_k(x,x) &= g_k(x), \quad k = 2,4,\\ L_1(x,0) &= L_4(x,0)\\ L_3(x,0) &= -L_2(x,0), \end{aligned} \tag{4.13}$$

де g_2 та g_4 є відповідно $(1,2)$- та $(1,1)$-елементами матриці $R(x)P(x) - Q(x)R(x) - JR'(x)$. За припущення теореми g_2 та g_4 належать до $L_2(0,1)$.

Позначимо через F_i, $i=\overline{1,4}$, i-ий рядок матриці F і перепишемо систему (4.12)–(4.13) як систему інтегральних рівнянь

$$L_i = \int_y^{\frac{x+y}{2}} F_i(-s+x+y,s)L(-s+x+y,s)ds + g_i\Big(\frac{x+y}{2}\Big),\ i=2,4,$$

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_0^y F_1(s+x-y,s)L(s+x-y,s)ds \\ &\quad + \int_0^{\frac{x-y}{2}} F_4(-s+x-y,s)L(-s+x-y,s)ds + g_4\left(\frac{x-y}{2}\right), \\ L_3 &= \int_0^y F_3(s+x-y,s)L(s+x-y,s)ds \\ &\quad - \int_0^{\frac{x-y}{2}} F_2(-s+x-y,s)L(-s+x-y,s)ds - g_2\left(\frac{x-y}{2}\right). \end{aligned}$$

До цієї системи можна застосувати метод послідовних наближень і, використовуючи те, що g_2 та g_4 належать до $L_2(0,1)$, можна довести існування та єдиність розв'язку L, що належить до $L_2\big(\Omega,\mathbb{C}^4\big)$. Звідси маємо також існування та єдиність слабкого розв'язку K початкової гіперболічної системи (4.5)–(4.7) такого, що K належить до $L_2(\Omega,\mathcal{M}_2)$. $\square$

Далі в цьому розділі ми будемо вважати, що матричнозначні потенціали P та Q ермітові, тобто, що $P^*(x)=P(x)$ і $Q^*(x)=Q(x)$ майже скрізь на $[0,1]$. Тоді відповідні оператори Дірака $\mathscr{D}_2(P)$ та $\mathscr{D}_2(Q)$ самоспряжені і мають прості дискретні спектри. Більше того, власні значення $\lambda_n(P)$ оператора $\mathscr{D}_2(P)$ можна занумерувати індексами $n\in\mathbb{Z}$ так, що $\lambda_n = \pi n + \frac{1}{2}\int \operatorname{tr} P + \mathrm{o}(1)$ при $|n|\to\infty$ (див. [17]); таке ж виконане для власних значень $\mathscr{D}_2(Q)$.

Так само, як і для операторної в'язки $T(p,r)$, визначимо *спектральні дані* для оператора Дірака $\mathscr{D}_2$ як множину $\{(\lambda,\alpha)\mid \lambda\in\sigma(\mathscr{D})\}$ всіх власних пар (λ, α), складених з власних значень λ та відповідних нормівних множників α. Позначимо через $\mathbf{sd}(P)$ (відповідно, через $\mathbf{sd}(Q)$) спектральні дані $\mathscr{D}_2(P)$ (відповідно, спектральні дані $\mathscr{D}_2(Q)$).

Також $\mathscr{X} = \mathscr{X}(P, Q)$ позначатиме оператор перетворення вигляду (4.2) для диференціальних виразів $\ell(P)$ та $\ell(Q)$ на області $\mathcal{D}_0$ з R, заданим в (4.3) і (4.4). Будемо писати $\mathscr{X} = \mathscr{R} + \mathscr{K}$, де $\mathscr{R}\mathbf{u}(x) := R(x)\mathbf{u}(x)$ — оператор множення на R і

$$\mathscr{K}\mathbf{u}(x) := \int\limits_0^x K(x,s)\mathbf{u}(s)\,ds$$

— відповідний інтегральний оператор. Зауважимо, що для ермітових P та Q функції $i\theta_1$ та θ_2 дійснозначні; зокрема, оператор $\mathscr{R}$ унітарний.

Перед обговоренням подальших властивостей оператора перетворення $\mathscr{X}$ доречно зробити наступне просте, але корисне зауваження.

Зауваження 4.3. Оскільки оператор перетворення $\mathscr{X}$ пов'язує диференціальні вирази Дірака $\ell(P)$ та $\ell(Q)$, очевидно, що співвідношення

$$\big(\ell(P) - \lambda\big)\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

справедливе тоді і лише тоді, коли для $\mathbf{v} := \mathscr{X}\mathbf{u}$ і $\mathbf{g} := \mathscr{X}\mathbf{f}$ виконується рівність

$$\big(\ell(Q) - \lambda\big)\mathbf{v} = \mathbf{g}.$$

Лема 4.3. *Нехай P та Q — ермітові та $\mathbf{sd}(P) = \mathbf{sd}(Q)$. Тоді інтегральний оператор $\mathscr{K}$ в операторі перетворення $\mathscr{X} = \mathscr{X}(P,Q)$ нульовий.*

Доведення. Занумеруємо власні пари в $\mathbf{sd}(P) = \mathbf{sd}(Q)$ як (λ_n, α_n) для $n \in \mathbb{Z}$. Через $\mathbf{u}_n$ позначимо власну функцію оператора $\mathscr{D}_2(P)$, що відповідає власному значенню λ_n і нормована умовою $\mathbf{u}_n(0) = (1,0)^{\mathrm{t}}$. Тоді $\mathbf{v}_n := \mathscr{X}(P,Q)\mathbf{u}_n$ — відповідна власна функція оператора $\mathscr{D}_2(Q)$, що задовольняє таку ж початкову умову.

Послідовності $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ та $(\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ утворюють ортогональні бази гільбертового простору $L_2\big((0,1),\mathbb{C}^2\big)$; більше того, $\|\mathbf{u}_n\| = \|\mathbf{v}_n\| = \sqrt{\alpha_n}$. З цього випливає, що оператор $\mathscr{X}$ унітарний, тобто

$$(\mathscr{R}+\mathscr{K})^*(\mathscr{R}+\mathscr{K})=\mathscr{I},$$

де $\mathscr{I}$ — тотожний оператор у $L_2\big((0,1),\mathbb{C}^2\big)$. Оскільки $\mathscr{R}$ унітарний, останню рівність можна переписати так:

$$(\mathscr{I}+\mathscr{R}^{-1}\mathscr{K})^*(\mathscr{I}+\mathscr{R}^{-1}\mathscr{K})=\mathscr{I}.$$

Нагадаємо, що $\mathscr{K}$ (а отже і $\mathscr{R}^{-1}\mathscr{K}$) — інтегральний оператор з нижньо-трикутним ядром, що належить до $L_2(\Omega,\mathcal{M}_2)$. Трохи модифікувавши міркування з [81, IV.1], бачимо, що $\mathscr{R}^{-1}\mathscr{K}$ — оператор Вольтера, а значить, існує обернений до нього $(\mathscr{I}+\mathscr{R}^{-1}\mathscr{K})^{-1}$, який можна задати рядом Неймана

$$(\mathscr{I}+\mathscr{R}^{-1}\mathscr{K})^{-1}=\mathscr{I}-\mathscr{R}^{-1}\mathscr{K}+(\mathscr{R}^{-1}\mathscr{K})^2+\dots=\mathscr{I}+\widetilde{\mathscr{K}},$$

де $\widetilde{\mathscr{K}}$ — інтегральний оператор з нижньо-трикутним ядром. З іншого боку, оператор $(\mathscr{R}^{-1}\mathscr{K})^*$ інтегральний з верхньо-трикутним ядром. Зі співвідношень

$$\mathscr{I}+(\mathscr{R}^{-1}\mathscr{K})^*=(\mathscr{I}+\mathscr{R}^{-1}\mathscr{K})^{-1}=\mathscr{I}+\widetilde{\mathscr{K}}$$

випливає, що $(\mathscr{R}^{-1}\mathscr{K})^*=\widetilde{\mathscr{K}}=0$. Отже, $\mathscr{K}=0$, і доведення завершене. □

Наступна теорема дає необхідні і достатні умови на оператори перетворення $\mathscr{X}(P,Q)$ для того, щоб оператори Дірака $\mathscr{D}_2(P)$ та $\mathscr{D}_2(Q)$ мали ті самі спектральні дані. Вона буде суттєво використана у процедурі відновлення далі у цьому розділі.

Теорема 4.5. *Нехай матричні потенціали P та Q ермітові. Тоді спектральні дані для операторів $\mathscr{D}_2(P)$ та $\mathscr{D}_2(Q)$ збігаються, тобто* $\mathbf{sd}(P)=\mathbf{sd}(Q)$*, тоді і лише тоді, коли оператор перетворення $\mathscr{X}(P,Q)$ для $\ell(P)$ та $\ell(Q)$ на області $\mathcal{D}_0$ містить лише унітарну частину $\mathscr{R}$ (тобто $\mathscr{K}=0$) і $\theta_2(1)=\pi n$ з деяким $n\in\mathbb{Z}$.*

Доведення. Необхідність. Якщо спектральні дані для операторів $\mathscr{D}_2(P)$ та $\mathscr{D}_2(Q)$ збігаються, то $\mathscr{K} = 0$ за лемою 4.3, а отже, $\mathscr{X}(P,Q) = \mathscr{R}$. Візьмемо довільне власне значення λ оператора $\mathscr{D}_2(P)$ і позначимо через $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}}$ відповідну власну функцію. Тоді

$$\mathbf{v}(x) := \mathscr{R}\mathbf{u} = \exp\bigl(\theta_1(x)\bigr) \begin{pmatrix} \cos\theta_2(x)u_1(x) + \sin\theta_2(x)u_2(x) \\ -\sin\theta_2(x)u_1(x) + \cos\theta_2(x)u_2(x) \end{pmatrix}$$

— власна функція для оператора $\mathscr{D}_2(Q)$, що відповідає цьому ж власному значенню λ. Тепер зауважимо, що другі компоненти $\mathbf{u}(1)$ та $\mathbf{v}(1)$ рівні нулю. Оскільки

$$\mathbf{v}(1) = \exp(\theta_1(1)) \begin{pmatrix} \cos\theta_2(1)u_1(1) \\ -\sin\theta_2(1)u_1(1) \end{pmatrix}$$

і $u_1(1) \neq 0$, то $\sin\theta_2(1) = 0$, а отже, $\theta_2(1) = \pi n$ з $n \in \mathbb{Z}$, як і стверджувалося. Це закінчує доведення необхідності.

Достатність. Припустимо, що $\mathscr{X}(P,Q) = \mathscr{R}$ і що λ — власне значення оператора $\mathscr{D}_2(P)$ з відповідною власною функцією $\mathbf{u}$. Розглянемо вектор $\mathbf{v} = \mathscr{R}\mathbf{u}$; тоді $\ell(Q)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. З припущення, що $\theta_2(1) = \pi n$ з $n \in \mathbb{Z}$, випливає, що матриця $R(1)$ є кратною одиничній I. Оскільки $R(0) = I$, то друга компонента v_2 вектора $\mathbf{v}$ занулюється в обох крайніх точках і тому $\mathbf{v} \in \operatorname{dom}\mathscr{D}_2(Q)$.

З вище сказаного випливає, що спектр $\mathscr{D}_2(P)$ міститься у спектрі $\mathscr{D}_2(Q)$. Оскільки $\mathscr{R}$ обмежено оборотний, P та Q можна поміняти ролями, звідки отримуємо, що спектри операторів збігаються. Нарешті, оскільки оператор $\mathscr{R}$ унітарний і зберігає початкові умови, нормівні множники для $\mathscr{D}_2(P)$ та $\mathscr{D}_2(Q)$ рівні, тобто, $\mathbf{sd}(P) = \mathbf{sd}(Q)$. Доведення завершено. $\square$

4.4. Відновлення в'язки: існування

У цьому підрозділі ми доводимо теорему 4.2 про існування в'язки $T(p,r)$ з потенціалами $p \in L_{2,\mathbb{R}}(0,1)$ і $q = r'$ з $r \in L_{2,\mathbb{R}}(0,1)$, для якої наперед заданий елемент **sd** з SD є спектральними даними. Єдиність відновлення доведемо в наступному підрозділі.

Ескіз доведення теореми 4.2. Спершу ми побудуємо оператор Дірака $\mathscr{D}_2(Q)$ у "зсунутій" формі АКНС, множина пар з ненульових власних значень та відповідних нормівних множників якого збігається з **sd**. Тоді використаємо оператор перетворення, щоб отримати з $\mathscr{D}_2(Q)$ інший оператор Дірака $\mathscr{D}_2(P)$ з тими ж спектральними даними та з потенціалом $P = (p_{ij})$ вигляду (2.10). Тоді покладемо

$$p := \frac{p_{22}}{2}, \quad q := -p_{12}' + p_{12}^2. \tag{4.14}$$

За результатами попереднього підрозділу операторна в'язка $T(p,r)$ з довільною первісною r потенціала q є розв'язком оберненої спектральної задачі. Більше того, оскільки $q = r'$ є потенціалом Міури [57], то оператор A є додатним, тобто, в'язка $T(p,r)$ задовольняє припущення (AD). $\square$

Далі наведемо деталі побудови потенціалу Q у "зсунутій" формі АКНС та відповідного потенціалу P вигляду (2.10).

Для початку візьмемо довільну множину $\mathbf{sd} = \{(\lambda_n, \alpha_n)\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$ з SD. Нумерація λ_n однозначно визначається умовою $\lambda_{-1} < 0$ та $\lambda_1 > 0$ та фіксує число h у асимптотичному представленні з частини (1) означення 4.2. Тоді візьмемо довільне $\alpha_0 > 0$, покладемо $\lambda_0 := 0$ і доповнимо множину **sd** елементом (λ_0, α_0). Отриману множину позначимо $\mathbf{sd}^*$.

Нагадаємо деякі факти з оберненої спектральної теорії для операторів Дірака у формі АКНС (див. [17,35]). Позначимо через $\mathcal{Q}_0$ множину функцій

Q_0, значення яких є матриці з $\mathcal{M}_2$ у нормальній формі АКНС, а саме

$$\mathcal{Q}_0 := \left\{ Q_0 = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & -q_1 \end{pmatrix} \mid q_j \in L_{2,\mathbb{R}}(0,1) \right\}. \tag{4.15}$$

Для $Q_0 \in \mathcal{Q}_0$ оператор Дірака $\mathscr{D}(Q_0)$ самоспряжений, має простий дискретний спектр і його власні значення можна занумерувати як $\lambda_n(Q_0)$, $n \in \mathbb{Z}$, так, що $\lambda_n(Q_0)$ зростають по n і $\lambda_n(Q_0) = \pi n + \tilde{\lambda}_n(Q_0)$ з $\ell_2(\mathbb{Z})$-послідовністю $(\tilde{\lambda}_n)$. Відповідні нормівні множники $\alpha_n(Q_0)$ додатні, а залишки $\tilde{\alpha}_n(Q_0) := \alpha_n(Q_0) - 1$ утворюють послідовність з $\ell_2(\mathbb{Z})$.

Навпаки, з результатів [35,84] випливає, що кожна множина $\{(\lambda_n, \alpha_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ з такими λ_n та α_n, які мають вище наведені властивості, є множиною спектральних даних для єдиного оператора Дірака $\mathscr{D}(Q_0)$ у формі АКНС з $Q_0 \in \mathcal{Q}_0$.

Множина $\mathbf{sd}^*$ (тобто множина $\mathbf{sd}$, доповнена парою (λ_0, α_0), як вище) виглядає як спектральні дані для оператора Дірака у формі АКНС, за винятком асимптотики λ_n, що є зсунутою на деяке число h; пор. з означенням множини SD. Для $h \in \mathbb{R}$ позначимо через

$$\mathcal{Q}_h := \{Q_0 + hI \mid Q_0 \in \mathcal{Q}_0\}$$

множину матричних потенціалів у формі АКНС, зсунутих на h (коротко будемо писати "h-зсунутих АКНС" потенціалів); тоді справедливе таке.

Твердження 4.1. *Для довільного* $\mathbf{sd} \in \mathrm{SD}$ *зафіксуємо* $h \in \mathbb{R}$ *у представленні (1) з означення 4.2 так, що* $\lambda_{-1} < 0$ *та* $\lambda_1 > 0$*, і позначимо через* $\mathbf{sd}^*$ *доповнення* $\mathbf{sd}$ *парою* (λ_0, α_0) *з* $\lambda_0 := 0$ *та деяким зафіксованим додатним* α_0*. Тоді існує єдиний потенціал* $Q \in \mathcal{Q}_h$ *такий, що* $\mathbf{sd}^*$ *є спектральними даними для оператора Дірака* $\mathscr{D}_2(Q)$.

Для довільного $Q \in L_2\big((0,1), \mathcal{M}_2\big)$ введемо множину потенціалів, *ізоспектральних* до заданого Q

$$\mathrm{Iso}(Q) := \{\tilde{Q} \in L_2\big((0,1), \mathcal{M}_2\big) \mid \mathbf{sd}(\tilde{Q}) = \mathbf{sd}(Q)\}$$

і позначимо через $\mathcal{P}$ множину всіх потенціалів вигляду (2.10), тобто

$$\mathcal{P} := \{P = (p_{ij})_{i,j=1}^2 \mid p_{ij} \in L_{2,\mathbb{R}}(0,1),\ p_{11} = 0,\ p_{12} = p_{21}\}.$$

Наступний результат є вирішальним у побудові в'язки $T(p,r)$ із заданими спектральними даними.

Теорема 4.6. *Припустимо, що потенціал $Q \in \mathcal{Q}_h$ такий, що $\lambda = 0$ є власним значенням оператора Дірака $\mathscr{D}_2(Q)$. Тоді існує єдиний потенціал $P \in \mathcal{P}$ такий, що* $\operatorname{Iso}(Q) \cap \mathcal{P} = \{P\}$.

Доведення. Поділимо доведення на три кроки. Спершу доведемо, що існує єдиний такий потенціал $P \in \mathcal{P}$, для якого оператор перетворення $\mathscr{X}(P,Q)$ між $\ell(P)$ та $\ell(Q)$ на $\mathcal{D}_0$ є лише оператором $\mathscr{R}$ множення на матричнозначну функцію R з (4.3)–(4.4). На другому кроці покажемо, що цей P справді ізоспектральний з Q. На третьому кроці пояснимо, чому не існує жодного іншого потенціала у множині $\operatorname{Iso}(Q) \cap \mathcal{P}$.

Крок 1. Запишемо $Q \in \mathcal{Q}_h$ як

$$Q = hI + \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & -q_1 \end{pmatrix}$$

з дійснозначними q_1 та q_2 з $L_2(0,1)$. Нехай θ — абсолютно неперервна функція, а $R = e^{\theta J}$; тоді R комутує з J і

$$R^{-1}\Big(J\frac{d}{dx} + Q\Big)R = J\frac{d}{dx} + R^{-1}JR' + R^{-1}QR.$$

Тому $\mathscr{R}\ell(P) = \ell(Q)\mathscr{R}$ для єдиного матричного потенціала P, що дорівнює

$$\begin{aligned} P &= R^{-1}JR' + R^{-1}QR \\ &= (h - \theta')I + \begin{pmatrix} q_1\cos 2\theta - q_2\sin 2\theta & q_1\sin 2\theta + q_2\cos 2\theta \\ q_1\sin 2\theta + q_2\cos 2\theta & -q_1\cos 2\theta + q_2\sin 2\theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Потенціал P, визначений у (4.16), належить до множини $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли

$$-\theta' + q_1\cos 2\theta - q_2\sin 2\theta + h = 0. \tag{4.17}$$

Це рівняння має єдиний розв'язок на $[0,1]$, що задовольняє початкову умову $\theta(0) = 0$. Назвемо цей розв'язок θ_2 і визначимо відповідний потенціал $P \in \mathcal{P}$ через (4.16) з $\theta = \theta_2$. Пряме обчислення показує, що з цими θ_2 та $\theta_1 \equiv 0$ виконуються співвідношення (4.4); зокрема, $\theta_2' = h - \frac{1}{2}p_{22}$. За теоремою 4.3, оператор $\mathscr{R}$ множення на матричнозначну функцію $R = e^{\theta_2 J}$ з (4.3) справді є оператором перетворення між $\ell(P)$ та $\ell(Q)$ на $\mathcal{D}_0$.

Крок 2. Далі стверджуємо, що $\theta_2(1) = \pi n$ з деяким $n \in \mathbb{Z}$. За побудовою, $\mathscr{R}^{-1}\ell(Q)\mathscr{R} = \ell(P)$, а тому оператор $\widetilde{\mathscr{D}}(P) := \mathscr{R}^{-1}\mathscr{D}_2(Q)\mathscr{R}$ є оператором Дірака, визначеним формулою $\widetilde{\mathscr{D}}(P)\mathbf{u} = \ell(P)\mathbf{u}$ на області, що складається з тих $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}} \in L_2\big((0,1), \mathbb{C}^2\big)$, для яких $\mathscr{R}\mathbf{u} \in \operatorname{dom} \mathscr{D}_2(Q)$. За припущенням теореми, $\lambda = 0$ є власним значенням оператора Дірака $\mathscr{D}_2(Q)$. Тому з подібності $\mathscr{D}_2(Q)$ і $\widetilde{\mathscr{D}}(P)$ випливає, що $\lambda = 0$ є в спектрі $\widetilde{\mathscr{D}}(P)$. Позначимо через $\mathbf{u}^0 = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}}$ відповідну власну функцію. Оскільки $R(0) = I$ і $\mathbf{v}^0 = (v_1, v_2)^{\mathrm{t}} := \mathscr{R}\mathbf{u}^0$ є в ядрі $\mathscr{D}_2(Q)$, то $u_2(0) = v_2(0) = 0$, а тому $u_2 \equiv 0$ за (2.8). Отже,

$$\mathbf{v}^0(1) = R(1)\mathbf{u}^0(1) = \begin{pmatrix} u_1(1)\cos\theta_2(1) \\ -u_1(1)\sin\theta_2(1) \end{pmatrix}.$$

З того, що $u_1(1) \neq 0$ і $v_2(1) = 0$, отримуємо, що $\sin\theta_2(1) = 0$, а отже, $\theta_2(1) = \pi n$ з деяким $n \in \mathbb{Z}$.

Таким чином, ми побудували потенціал $P \in \mathcal{P}$ та унітарний оператор $\mathscr{R}$ вигляду (4.3)–(4.4) з $\theta_2(1) = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, так, що $\mathscr{R}$ є оператором перетворення між $\ell(P)$ та $\ell(Q)$ на $\mathcal{D}_0$. За теоремою 4.5, тоді P належить до $\operatorname{Iso}(Q)$.

Крок 3. Тепер припустимо, що існує ще один потенціал P_1 у множині $\operatorname{Iso}(Q) \cap \mathcal{P}$. За теоремою 4.5, оператор перетворення $\mathscr{X}(P_1, Q)$ між $\ell(P_1)$ та $\ell(Q)$ дорівнює оператору $\mathscr{R}_1$ множення на матричнозначну функцію $e^{\vartheta_1(x)I + \vartheta_2(x)J}$, де ϑ_1 і ϑ_2 задані формулами (4.4) з P_1 замість P. Оскільки $\vartheta_1 \equiv 0$ для ермітових P_1 та Q з дійсними елементами, то $P_1 = P$ за Кроком 1, що завершує доведення теореми 4.6. $\square$

З теореми 4.6 випливає, що для кожного поповнення $\mathbf{sd}^*$ множини $\mathbf{sd}$

існує єдиний $P \in \mathcal{P}$ такий, що $\mathbf{sd}(P) = \mathbf{sd}^*$. Як пояснено на початку цього розділу, з оператора Дірака $\mathscr{D}_2(P)$ з кожним таким P можна отримати в'язку $T(p,r)$ зі спектральними даними $\mathbf{sd}$. Звідси отримуємо твердження теореми 4.2.

Проте, оскільки доповнення множини $\mathbf{sd}^*$ залежить від довільного вибору $\alpha_0 > 0$, то різні α_0 приводять до різних $P \in \mathcal{P}$ і, ймовірно, до різних квадратичних операторних в'язок $T(p,r)$. Це питання єдиності детально вивчено у наступному підрозділі.

4.5. Відновлення в'язки: єдиність

У цьому підрозділі ми доводимо теорему 4.1 і таким чином завершуємо вивчення оберненої спектральної задачі (IPSNC). А саме, ми покажемо, що матричні потенціали $P \in \mathcal{P}$, побудовані в попередньому підрозділі, приводять до тих самих p та $q = r'$ незалежно від вибору додатного параметра α_0.

Знову почнемо з довільного елемента $\mathbf{sd} \in \mathrm{SD}$. Покладемо $\lambda_0 := 0$, виберемо довільне додатне число α_0 і доповнимо $\mathbf{sd}$ парою (λ_0, α_0). Тоді побудуємо зсунутий АКНС потенціал $Q \in \mathcal{Q}_h$ та відповідний потенціал $P \in \mathrm{Iso}(Q) \cap \mathcal{P}$, спектральні дані якого збігаються з доповненою множиною, див. твердження 4.1 та теорему 4.6.

Тепер виберемо додатне число $\tilde{\alpha}_0$, відмінне від α_0. Доповнивши множину $\mathbf{sd}$ парою $(\lambda_0, \tilde{\alpha}_0)$, отримаємо спектральні дані для іншого оператора Дірака $\mathscr{D}_2(\tilde{Q})$ з потенціалом $\tilde{Q} \in \mathcal{Q}_h$. Тоді побудуємо відповідний потенціал $\tilde{P} \in \mathrm{Iso}(\tilde{Q}) \cap \mathcal{P}$.

Виявляється, що потенціали Q та $\tilde{Q}$ пов'язані так званими перетвореннями подвійного комутування, див. деталі у [89, Гл. 3] та [36].

Твердження 4.2. *Нехай два потенціали Q та $\tilde{Q}$ з $\mathcal{Q}_h$ такі, як описано вище, тобто такі, що спектри відповідних операторів Дірака $\mathscr{D}_2(Q)$ та $\mathscr{D}_2(\tilde{Q})$ збігаються, а нормівні множники α_n та $\tilde{\alpha}_n$ відрізняються ли-*

ше для $n = 0$. *Тоді*

$$\widetilde{Q} = Q + Q_*, \tag{4.18}$$

де

$$Q_* = c(x, \alpha_*)[\mathbf{v}(x)\mathbf{v}^{\mathrm{t}}(x)J - J\mathbf{v}(x)\mathbf{v}^{\mathrm{t}}(x)], \tag{4.19}$$

$$c(x, \alpha_*) := -\frac{\alpha_*}{1 + \alpha_* \int_0^x \mathbf{v}^{\mathrm{t}}(s)\mathbf{v}(s)ds}, \quad \alpha_* := \frac{1}{\tilde{\alpha}_0} - \frac{1}{\alpha_0}, \tag{4.20}$$

і $\mathbf{v}$ *— власна функція оператора* $\mathscr{D}_2(Q)$, *що відповідає власному значенню* $\lambda_0 = 0$.

Безпосередній аналіз (2.8)–(2.9) показує, що власна функція оператора Дірака $\mathscr{D}_2(P)$, яка відповідає власному значенню $\lambda = 0$, має вигляд $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}}$ з $u_1 = \exp(-\int v)$ та $u_2 \equiv 0$. Тепер згадаємо, у який спосіб пов'язані оператори $\mathscr{D}_2(Q)$ та $\mathscr{D}_2(P)$. Тоді можемо написати точнішу формулу для Q_*.

Справді, за теоремою 4.5, оператор перетворення $\mathscr{X}(P, Q)$ для диференціальних виразів Дірака $\ell(P)$ та $\ell(Q)$ на множині $\mathcal{D}_0$ є оператором $\mathscr{R}$ множення на матричнозначну функцію $R = e^{\theta_2 J}$, де θ_2 — розв'язок (4.17), який задовольняє умову $\theta(0) = 0$. Тому $\mathbf{v} = \mathscr{R}\mathbf{u} = e^{\theta_2 J}\mathbf{u}$; оскільки $\mathbf{u} = (u_1, 0)^{\mathrm{t}}$ та $(e^{\theta_2 J})^{\mathrm{t}} = e^{-\theta_2 J}$, легко обчислюємо, що $\mathbf{v}^{\mathrm{t}}\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathrm{t}}\mathbf{u} = u_1^2$ і

$$\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{t}}J - J\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{t}} = u_1^2 J_1,$$

де

$$J_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що матриці J та J_1 антикомутують, а тому $e^{\theta_2 J}J_1 = J_1 e^{-\theta_2 J}$; звідси

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{t}}J - J\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{t}} &= e^{\theta_2 J}[\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{t}}J - J\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{t}}]e^{-\theta_2 J} \\ &= u_1^2 e^{\theta_2 J} J_1 e^{-\theta_2 J} = u_1^2 e^{2\theta_2 J} J_1. \end{aligned}$$

Покладемо $w(x) := 1 + \alpha_* \int_0^x u_1^2(s)\,ds$; тоді $c(x,\alpha_*)u_1^2(x) = -w'(x)/w(x) = -[\log w(x)]'$, звідки отримуємо, що потенціал Q_* визначається так, як описано в наступному наслідку.

Наслідок 4.1. *Для потенціалів Q та $\tilde{Q}$ з твердження 4.2 співвідношення* (4.18) *справедливе з*

$$
\begin{aligned}
Q_*(x) &= -[\log w(x)]' e^{2\theta_2(x)J} J_1 \\
&= -[\log w(x)]' \begin{pmatrix} \sin 2\theta_2(x) & \cos 2\theta_2(x) \\ \cos 2\theta_2(x) & -\sin 2\theta_2(x) \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

де θ_2 — розв'язок (4.17)*, що задовольняє умову $\theta(0) = 0$, u_1 — перша компонента власного вектора $\mathbf{u}$ оператора $\mathscr{D}_2(P)$, що відповідає власному значенню $\lambda_0 = 0$, і*

$$
w(x) = 1 + \alpha_* \int\limits_0^x u_1^2(s)\,ds. \tag{4.22}
$$

Тепер використаємо прямі формули (4.16) та (4.17), які визначають потенціал P з Q, та аналогічні формули для $\tilde{P}$ і $\tilde{Q}$, щоб вивести ключовий результат, що пов'язує P та $\tilde{P}$.

Лема 4.4. *Для елементів p_{ij} та $\tilde{p}_{ij}$ матриць P та $\tilde{P}$, побудованих вище, справедливі такі співвідношення:*

$$
\tilde{p}_{22} = p_{22}, \qquad \tilde{p}_{12} = p_{12} - (\log w)',
$$

де функція w визначена формулою (4.22).

Доведення. Спочатку нагадаємо, що θ_2 — єдиний розв'язок рівняння (4.17)

$$
-\theta' + q_1 \cos 2\theta - q_2 \sin 2\theta + h = 0,
$$

що задовольняє початкову умову $\theta(0) = 0$; тут q_1 та q_2 — елементи AKHC складової Q_0 потенціала Q як у (4.15). Подібно, $\tilde{\theta}_2$ — єдиний розв'язок рівняння

$$
-\tilde{\theta}' + \tilde{q}_1 \cos 2\tilde{\theta} - \tilde{q}_2 \sin 2\tilde{\theta} + h = 0,
$$

що задовольняє умову $\tilde{\theta}(0) = 0$, де $\tilde{q}_1$ та $\tilde{q}_2$ мають, відповідно, аналогічне значення. З огляду на рівність (4.21) та твердження 4.2, можна переписати останнє рівняння для $\tilde{\theta}_2$ як

$$-\tilde{\theta}' + q_1 \cos 2\tilde{\theta} - q_2 \sin 2\tilde{\theta} + h + (\log w)' \sin(2\tilde{\theta} - 2\theta_2) = 0.$$

Зауважимо, що $\tilde{\theta} \equiv \theta_2$ — розв'язок цього рівняння, який задовольняє початкову умову $\tilde{\theta}(0) = 0$; тоді з єдиності розв'язку випливає, що $\tilde{\theta}_2 \equiv \theta_2$.

Потенціал $\tilde{P}$ пов'язаний з $\tilde{Q} = Q + Q_*$ формулою, аналогічною до (4.16), тобто

$$\tilde{P} = \tilde{R}^{-1} J \tilde{R}' + \tilde{R}^{-1}(Q + Q_*)\tilde{R},$$

де $\tilde{R} = e^{\tilde{\theta}_2 J} = e^{\theta_2 J} = R$. Тому

$$\begin{aligned}\tilde{P} - P = R^{-1} Q_* R &= e^{-\theta_2 J}[-(\log w)' e^{\theta_2 J} J_1 e^{-\theta_2 J}] e^{\theta_2 J} \\ &= -(\log w)' J_1.\end{aligned}$$

Як наслідок, $\tilde{p}_{22} = p_{22}$ та $\tilde{p}_{12} = p_{12} - (\log w)'$, і лему доведено. □

Наслідок 4.2. *Побудовані вище потенціали P та $\tilde{P}$ генерують одну і ту ж операторну в'язку $T(p, r)$.*

Доведення. З огляду на (4.14) та на попередню лему, залишається показати, що

$$-\tilde{p}_{12}' + \tilde{p}_{12}^2 = -p_{12}' + p_{12}^2.$$

З доведення леми 4.2 знаємо, що $u_1(x) = \exp\{\int_0^x p_{12}(s)ds\}$, а тому $u_1' = p_{12}u_1$. Далі $w' = \alpha_* u_1^2$, $w'' = 2\alpha_* u_1' u_1 = 2p_{12}w'$ і

$$(\log w)'' = \frac{w''}{w} - \left(\frac{w'}{w}\right)^2 = 2p_{12}(\log w)' - [(\log w)']^2.$$

Тоді, підставивши $\tilde{p}_{12} = p_{12} - (\log w)'$, отримуємо, що

$$\begin{aligned}-\tilde{p}_{12}' + \tilde{p}_{12}^2 &= -p_{12}' + (\log w)'' + p_{12}^2 - 2p_{12}(\log w)' + [(\log w)']^2 \\ &= -p_{12}' + p_{12}^2,\end{aligned}$$

як і стверджувалося. Доведення завершено. □

Доведення теореми 4.1. Припустимо, що існують дві різні в'язки $T = T(p, r)$ та $\widehat{T} = T(\hat{p}, \hat{r})$ такі, що $p \neq \hat{p}$ та $r' \neq \hat{r}'$, які задовольняють припущення (AD) та мають однакові спектральні дані з SD. Як пояснено в підрозділах 2.3 та 4.3, ці в'язки приводять до двох операторів Дірака $\mathscr{D}_2(P)$ та $\mathscr{D}_2(\widehat{P})$ з деякими потенціалами P та $\widehat{P}$ з $\mathcal{P}$.

Спектральні дані для $\mathscr{D}_2(P)$ та $\mathscr{D}_2(\widehat{P})$ можуть відрізнятися лише нормівними множниками, що відповідають власному значенню $\lambda = 0$; позначимо ці нормівні множники α_0 та $\hat{\alpha}_0$ відповідно.

Тепер візьмемо $\tilde{\alpha}_0 = \hat{\alpha}_0$ і побудуємо потенціал $\tilde{P} \in \mathcal{P}$ так, як описано на початку цього підрозділу. За наслідком 4.2, $\tilde{P}$ та P приводять до однієї і тієї ж в'язки T. З іншого боку, потенціали $\tilde{P}$ та $\hat{P}$ ізоспектральні і належать до $\mathcal{P}$, а отже, збігаються за теоремою 4.6. Тому T та $\widehat{T}$ так само збігаються, і доведення завершене. $\square$

4.6. Алгоритм відновлення

Доведення теореми про існування (теорема 4.2) містить прямі кроки, які разом складають алгоритм відновлення рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами за спектром та нормівними множниками. Опишемо його детально в цьому підрозділі.

Маючи довільний елемент **sd** з SD, відновлюємо квадратичну в'язку $T(p, r)$ (чи еквівалентно, енергозалежне рівняння Штурма–Ліувілля (1.1) з потенціалами $p \in L_{2,\mathbb{R}}(0, 1)$ та $q = r'$, $r \in L_{2,\mathbb{R}}(0, 1)$), спектральні дані якої збігаються з **sd**, таким чином:

1. Фіксуємо нумерацію (λ_n, α_n), $n \in \mathbb{Z}^*$, пар (λ, α) в **sd** так, що λ_n зростає, $\lambda_{-1} < 0$, $\lambda_1 > 0$, і визначаємо зсув h з асимптотичного зображення λ_n.
2. Доповнюємо множину **sd** парою (λ_0, α_0), де $\lambda_0 = 0$ і α_0 — довільне додатне число. Отриману множину позначимо $\mathbf{sd}^*$.

3. Будуємо оператор Дірака $\mathscr{D}_2(Q)$ з потенціалом Q із класу $\mathcal{Q}_h$, спектральні дані якого збігаються з отриманою множиною $\mathbf{sd}^*$ (див. твердження 4.1).
4. Знаходимо відповідний потенціал $P \in \mathcal{P} \cap \mathrm{Iso}(Q)$ за формулами (4.16)–(4.17).
5. Обчислюємо потенціали p та q, використовуючи формули (4.14).

Зауваження 4.4. Як ми вже згадували на початку цього розділу, обернену задачу (IPSNC) можна також розв'язувати за (на перший погляд) загальнішого припущення (AD*). Тоді, з огляду на зауваження 4.2, нормівні множники в'язки $T(p,r)$ не всі додатні. Серед них можуть бути кілька послідовних від'ємних нормівних множників, які відповідають власним значенням між нулем та μ_* з припущення (AD*). Тому спектральні дані в'язки $T(p,r)$ утворюють елемент множини SD^*, яка трохи відрізняється від SD. А саме, SD^* є сім'єю всіх множин $\{(\lambda_n,\alpha_n)\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$, які складаються з пар (λ_n,α_n) дійсних чисел, що задовольняють наступні умови:

(1) $\lambda_{-1} < 0 < \lambda_1$, λ_n строго зростають по $n \in \mathbb{Z}^*$ і мають зображення $\lambda_n = \pi n + h + \tilde{\lambda}_n$ з деяким $h \in \mathbb{R}$ та послідовністю $(\tilde{\lambda}_n)$ з $\ell_2(\mathbb{Z}^*)$;

(2) α_n відмінні від нуля для всіх $n \in \mathbb{Z}^*$; існує число $\mu_* \in \mathbb{R}$ таке, що нормівні множники α_j від'ємні тоді і лише тоді, коли відповідні власні значення λ_j розташовані між нулем та μ_*; числа $\tilde{\alpha}_n := \alpha_n - 1$ утворюють послідовність з $\ell_2(\mathbb{Z}^*)$.

Для розв'язування оберненої задачі відновлення потенціалів p та $q = r'$ в'язки $T(p,r)$ у такому випадку візьмемо довільний елемент $\mathbf{sd}$ з SD^*. Побудуємо послідовності $(\nu_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ та $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ з $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ та $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ за такими формулами $\nu_n := \lambda_n - \mu_*$ і $\gamma_n := \frac{\lambda_n - \mu_*}{\lambda_n}\alpha_n$. Легко перевірити, що послідовність, утворена елементами $\tilde{\gamma}_n := \gamma_n - 1$, належить до $\ell_2(\mathbb{Z}^*)$. А тому набір $\hat{\mathbf{sd}} := \{(\nu_n,\gamma_n)\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$ утворює елемент множини SD. Далі, користуючись результатами цього розділу та алгоритмом, наведеним вище, ми можемо однозначно відновити в'язку $T(\hat{p},\hat{r})$ таку, що $\hat{\mathbf{sd}}$ є її спектральними даними. Тоді обчислимо потенціали p та q з $\hat{p}$ та $\hat{q}$ за формулами (4.1). Очевидно, послідовність $(\lambda_n)_{\mathbb{Z}^*}$ є спектром в'язки $T(p,r)$ з отриманими потенціалами p та $q = r'$. З означення (3.6) бачимо, що нормівні множники в'язки $T(p,r)$ можна отримати з γ_n за формулою

$$\hat{\alpha}_n := \frac{\nu_n + \mu *}{\nu_n}\gamma_n.$$

Ці нормівні множники збігаються з вихідними α_n. А звідси $\mathbf{sd}$ є спектральними даними для побудованої в'язки $T(p,r)$. З єдиності побудови відповідних елементів на кожному кроці описаної процедури отримуємо також єдиність відновлення в'язки $T(p,r)$. Оскільки оператор $T(\hat{p},\hat{r})(0)$ від'ємний, то очевидно $T(p,r)(\mu_*)$ від'ємний, тобто відновлена в'язка $T(p,r)$ задовольняє припущення (AD*).

У цьому розділі ми детально вивчили обернену задачу відновлення рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами за спектром та нормівними множниками за умови виконання припущень (AD) чи (AD*), які гарантують, що спектр розглянутої задачі дійсний і простий. Ми отримали повний опис спектральних даних для такої задачі та довели теореми про існування та єдиність енергозалежного рівняння Штурма–Ліувілля такого, що спектр та множина нормівних множників породженої ним спектральної задачі збігаються з наперед заданими відповідними множинами. Також ми детально описали алгоритм відновлення. Для розв'язування поставленої оберненої задачі ми суттєво скористалися зв'язком розглянутої спектральної задачі з відповідною задачею для оператора Дірака та відомими результатами з оберненої спектральної теорії для таких операторів.

Наведений у цьому розділі алгоритм може бути використаний для відновлення потенціалів p та q за інших припущень на їхню гладкість. А саме, якщо p та первісна r потенціала q належать до $L_s(0,1)$ з $s \geqslant 1$, тоді відповідна множина SD спектральних даних допускає точний опис (єдина відмінність від випадку $s = 2$ у спаданні залишків $\tilde{\lambda}_n$ і $\tilde{\alpha}_n$) і кроки відновлення такі ж, як вище; пор. з характеристикою спектральних даних для відповідного класу операторів Дірака в [35]. Множина SD має схожий опис і у випадку, коли p та r належать до $W_2^s(0,1)$ з $s \geqslant 0$; пор. з результатами [30, 47] про асимптотики власних значень для операторів Штурма–Ліувілля з потенціалами у просторах Соболєва.

Описаний підхід не обмежується лише крайовими умовами Діріхле і може бути використаний для відновлення енергозалежних рівнянь Штурма–Ліувілля з досить загальними відокремленими крайовими умовами.

Також можливе використання запропонованого в цьому розділі підходу для відновлення відповідних задач за іншими множинами спектральних даних; наприклад, за двома спектрами (див. наступний розділ) чи в оберненій задачі Гохштадта–Лібермана зі змішаними даними.

Результати цього розділу використані в наступному при вивченні оберненої задачі відновлення енергозалежних задач Штурма–Ліувілля за двома спектрами. Там запропоновано два методи розв'язування. Перший з цих методів використовує такий же підхід, як у цьому розділі, що полягає у зведенні рівняння (1.1) до системи Дірака. Другий використовує можливість отримати нормівні множники з двох спектрів, а далі опирається на отримані у цьому розділі результати про відновлення за спектром та нормівними множниками.

Наведені тут матеріали опубліковані в працях [26, 42, 74, 79, 87].

РОЗДІЛ 5
ВІДНОВЛЕННЯ ЕНЕРГОЗАЛЕЖНИХ РІВНЯНЬ ШТУРМА–ЛІУВІЛЛЯ ЗА ДВОМА СПЕКТРАМИ

5.1. Постановка задачі

У цьому розділі ми розглядаємо енергозалежні рівняння Штурма–Ліувілля вигляду

$$-y'' + qy + 2\lambda py = \lambda^2 y \tag{5.1}$$

на (0,1) з двома типами крайових умов: з крайовими умовами Діріхле

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{5.2}$$

та крайовими умовами змішаного типу

$$y(0) = y^{[1]}(1) = 0. \tag{5.3}$$

Тут, як і раніше, $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральний параметр, p — дійснозначна функція з $L_2(0,1)$, q — дійснозначний розподіл з простору Соболєва $W_2^{-1}(0,1)$, тобто $q = r'$ з дійснозначним $r \in L_2(0,1)$.

Ми вивчаємо обернену задачу, яка полягає у відновленні потенціалів p та $q = r'$ енергозалежного рівняння Штурма–Ліувілля за двома спектрами (див. [27, 71, 72, 76, 78, 79, 86, 87]) і звучить так

(IPS) За заданими спектрами задач (5.1), (5.2) та (5.1), (5.3) визначити потенціали p та r.

Чи еквівалентно

(IPS) За заданими спектрами операторних в'язок $T(p,r)$ та $T_M(p,r)$ визначити потенціали p та r.

У цьому розділі подано повний опис спектрів операторних в'язок $T(p,r)$ та $T_M(p,r)$; конструктивно встановлено існування в'язок із заданими спектрами і виведено алгоритм відновлення. Зауважимо, що крайові умови (5.3) містять невідому первісну r потенціала q; тому нам треба відновити саме цю первісну r (яку називають регуляризованим потенціалом або просто потенціалом), а не лише q.

Ми опишемо два способи розв'язування задачі (IPS). Перший з них аналогічний до використаного у попередньому розділі для розв'язування оберненої задачі відновлення за спектром та нормівними множниками (IPSNC) і полягає у зведенні спектральних задач для операторних в'язок $T(p,r)$ та $T_M(p,r)$ до задач для операторів Дірака спеціального вигляду. Далі ми використовуємо у нашому аналізі добре розвинену обернену спектральну теорію для операторів Дірака. Другий спосіб полягає у зведенні задачі (IPS) до (IPSNC) і використовує результати попереднього розділу.

Як ми вже згадували, існують в'язки $T(p,r)$, що мають недійсні та/або непрості власні значення (див. приклад 1.1). За таких умов обернена задача відновлення потенціалів p та q у (5.1) є дуже складною, і досі досліджувалися лише часткові результати, що стосуються існування розв'язку. Підхід, який ми збираємось використати, дає повний розв'язок в спеціальному випадку, коли спектри $T(p,r)$ та $T_M(p,r)$ дійсні та прості. З результатів підрозділу 3.4 випливає, що це так, наприклад, тоді, коли виконується припущення

(AM*) Існує $\mu_* \in \mathbb{R}$ таке, що оператор $T_M(\mu_*)$ від'ємний.

Іншими словами, (AM*) означає, що T_M — строго гіперболічна в'язка [18, Гл. 31].

Зауваження 5.1. Тут, як і в попередньому розділі, нам зручно припускати, що μ_* є нулем. Оскільки спектри в'язок T та T_M є дискретними підмножинами $\mathbb{C}$ і складаються лише з власних значень скінченної алгебраїчної кратності, то, якщо μ_* не є нулем, ми можемо зсунути спектральний параметр через $\lambda = \hat\lambda + \mu_*$ так само, як описано у зауваженні 4.1. Тоді спектральне рівняння (5.1) можна переписати так:

$$-y'' + \hat q y + 2\hat\lambda \hat p y = \hat\lambda^2 y$$

з новими потенціалами $\hat p := p - \mu_*$ та $\hat q := q + 2\mu_* p - \mu_*^2$. Більше того, якщо виберемо первісну $\hat r := r - \int_x^1 (2\mu_* p - \mu_*^2)$ потенціала $\hat q$ так, що $(\hat r - r)(1) = 0$, та введемо відповідну квазі-похідну $y^{[1]} := y' - \hat r y$, то крайові умови (5.2) та (5.3) залишаються незмінними. Тепер, якщо λ_n (відповідно, μ_n) — власні значення в'язок $T(p,r)$ (відповідно, $T_M(p,r)$), то $\hat\lambda_n := \lambda_n - \mu_*$ (відповідно, $\hat\mu_n := \mu_n - \mu_*$) — власні значення задачі $T(\hat p, \hat r)$ (відповідно, $T_M(\hat p, \hat r)$), тоді як власні функції для відповідних власних значень є тими самими. Зокрема, в'язки $T(\hat p, \hat r)$ та $T_M(\hat p, \hat r)$ задовольняють припущення (AM*) з $\mu_* = 0$. Маючи $\hat p$, $\hat q$ та $\hat r$, ми можемо знайти p, q та r за формулами

$$p = \hat p + \mu_*, \quad q = \hat q - 2\mu_* p - \mu_*^2, \quad r = \hat r + \int_x^1 (2\mu_* \hat p + \mu_*^2). \tag{5.4}$$

З огляду на попереднє зауваження, не втрачаючи загальності, ми можемо (і будемо) припускати в цьому розділі, що в (AM*) $\mu_* = 0$, тобто виконується припущення

(AM) Оператор A_M додатний.

За припущення (AM) власні значення μ_n, $n \in \mathbb{Z}$, в'язки $T_M(p,r)$ та λ_n, $n \in \mathbb{Z}^*$, в'язки $T(p,r)$ всі дійсні та прості [18, Гл. 31]. Як ми знаємо з результатів підрозділу 2.4, їх можна занумерувати за зростанням так, що μ_n та λ_n задовольняють асимптотики

$$\mu_n = \pi\left(n - \tfrac{1}{2}\right) + p_0 + \tilde\mu_n, \quad \lambda_n = \pi n + p_0 + \tilde\lambda_n$$

з $p_0 := \int_0^1 p(x)\,dx$ та ℓ_2-послідовностями $(\tilde\mu_n), (\tilde\lambda_n)$ і майже чергуються у тому сенсі, що $\mu_k < \lambda_k < \mu_{k+1}$ коли $k \in \mathbb{Z}^*$. Отже, пара спектрів $((\lambda_n), (\mu_n))$ утворює елемент множини SD, визначеної далі.

Означення 5.1. Позначимо через SD сім'ю всіх пар $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ зростаючих послідовностей $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ та $\boldsymbol{\mu} := (\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ дійсних чисел з $\mu_0 < 0 < \mu_1$, що задовольняють такі умови:

(1) *асимптотика:* існує таке $h \in \mathbb{R}$, що

$$\lambda_n = \pi n + h + \tilde{\lambda}_n, \quad \mu_n = \pi\left(n - \tfrac{1}{2}\right) + h + \tilde{\mu}_n, \tag{5.5}$$

де $(\tilde{\lambda}_n)$ послідовність в $\ell_2(\mathbb{Z}^*)$ і $(\tilde{\mu}_n)$ з $\ell_2(\mathbb{Z})$;

(2) *майже чергування:*

$$\mu_k < \lambda_k < \mu_{k+1} \quad \text{для всіх } k \in \mathbb{Z}^*. \tag{5.6}$$

Нехай $\boldsymbol{\lambda}^*$ позначає послідовність $\boldsymbol{\lambda}$, доповнену $\lambda_0 = 0$. Тоді умова майже чергування (5.6) означає, що послідовності $\boldsymbol{\lambda}^*$ та $\boldsymbol{\mu}$ строго чергуються.

Позначимо через $\boldsymbol{\lambda}$ та $\boldsymbol{\mu}$ спектри операторних в'язок $T(p, r)$ та $T_M(p, r)$, відповідно. Тоді поставлена обернена спектральна задача полягає в тому, щоб відновити ці в'язки, маючи спектри $\boldsymbol{\lambda}$ та $\boldsymbol{\mu}$. А саме, ми хочемо відновити потенціал p та (регуляризований) потенціал r (який визначає і потенціал $q = r'$, і праву крайову умову для операторної в'язки $T_M(p, r)$ в (5.3)). Наша мета — також дати повний опис спектральних даних $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\lambda}$ та знайти алгоритм відновлення потенціалів p та r.

Легко бачити, що з $p \equiv 0$ спектральні задачі для операторних в'язок $T(0, r)$ та $T_M(0, r)$ стають спектральними задачами $Ay = \lambda^2 y$ та $A_M y = \lambda^2 y$ для звичайних операторів Штурма–Ліувілля A та A_M з потенціалом q з $W_2^{-1}(0, 1)$; див. [28, 29]. В цьому випадку частини послідовностей $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\lambda}$ є зайвими в тому сенсі, що $\mu_{1-n} = -\mu_n$ і $\lambda_{-n} = -\lambda_n$. У [46] автори довели, що так як і в регулярному випадку, коли q інтегровний, спектри $(\mu_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ оператора A_M та $(\lambda_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ оператора A однозначно визначають регуляризований потенціал r; див. [83] для альтернативного підходу. В цих статтях також запропоновано алгоритм відновлення потенціалу r за спектрами A і A_M.

У розглядуваній оберненій спектральній задачі ми хочемо визначити два дійснозначні потенціали p та r операторних в'язок $T(p,r)$ та $T_M(p,r)$. Оскільки інформація, яку несуть спектри цих в'язок, є вдвічі більшою, ніж у випадку стандартних операторів Штурма–Ліувілля, можна сподіватись, що обернена спектральна задача відновлення p та r за спектральними даними $T(p,r)$ та $T_M(p,r)$ є коректною.

Як уже згадувалось, спектри операторних в'язок $T(p,r)$ та $T_M(p,r)$ утворюють елемент SD. Наш основний результат стверджує, що, навпаки, кожен елемент з множини SD збігається зі спектральними даними для деяких операторних в'язок $T(p,r)$ та $T_M(p,r)$ і що ці операторні в'язки однозначно визначаються їхніми спектрами.

Теорема 5.1. *Нехай пара $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ послідовностей дійсних чисел є елементом множини SD. Тоді існують єдині такі $p, r \in L_{2,\mathbb{R}}(0,1)$, що $\boldsymbol{\lambda}$ і $\boldsymbol{\mu}$ є спектрами в'язок $T(p,r)$ та $T_M(p,r)$, відповідно. Більше того, операторна в'язка $T_M(p,r)$ задовольняє припущення (AM).*

У цьому розділі ми описуємо два методи доведення цієї теореми. В обох випадках доведення конструктивні і пропонують алгоритми відновлення, що визначають потенціали p та r за множинами $\boldsymbol{\lambda}$ і $\boldsymbol{\mu}$, див. підрозділи 5.4 та 5.7.

5.2. Зведення до системи Дірака. Оператори перетворення

Перший метод розв'язування (IPS) і доведення теореми 5.1 використовує зведення спектральних задач для в'язок $T(p,r)$ та $T_M(p,r)$ до спектральних задач для операторів Дірака в $L_2(0,1) \times L_2(0,1)$ спеціального вигляду з відповідними крайовими умовами. Така процедура зведення була описана в підрозділі 2.3. Використовуючи відповідне унітарне перетворення, можна звести ці оператори Дірака до операторів з потенціалами у "зсунутому" канонічному вигляді АКНС. Для операторів Дірака вигляду

АКНС пряма та обернена спектральні задачі добре вивчені, див. [4, 17, 35]. Використовуючи відомі методи, ми відновимо оператори Дірака вигляду АКНС за заданими спектрами, а тоді перетворимо їх в оператори Дірака, безпосередньо асоційовані з операторними в'язками T та T_M, зберігаючи спектри незмінними. З них отримаємо точний вигляд шуканих потенціалів p та r, див. (5.15).

Щоб можна було звести рівняння (5.1) до системи Дірака, використовуючи процедуру, описану в підрозділі 2.3, побудуємо дійсний розв'язок рівняння $\ell(y) = 0$, що є строго додатним на $[0, 1]$. Спершу зауважимо, що рівняння $\ell(y) = 0$ можна розглядати як лінійну систему першого порядку $u_1' = ru_1 + u_2$, $u_2' = -r^2 u_1 - ru_2$, де $u_1 = y$, а $u_2 = y^{[1]}$. Тому для всіх комплексних a та b воно має єдиний розв'язок, що задовольняє умови $y(1) = a$ та $y^{[1]}(1) = b$. Нехай z позначає розв'язок рівняння $\ell(y) = 0$ з умовами

$$z(1) = 1, \quad z^{[1]}(1) = 0.$$

Покажемо, що z не досягає нуля на $[0, 1]$.

Лема 5.1. *За припущення (AM) функція z строго додатна на* $[0, 1]$.

Доведення. За припущенням, оператор A_M рівномірно додатний, а отже, таким є і замикання $\mathfrak{a}$ його квадратичної форми. Для $y \in \operatorname{dom} A_M$, використовуючи інтегрування частинами, отримуємо, що

$$\mathfrak{a}[y] = (A_M y, y) = \int_0^1 |y'|^2 - 2\operatorname{Re}(ry', y).$$

Квадратична форма $\mathfrak{a}_0[y] = \int_0^1 |y'|^2$, розглянута на $\operatorname{dom} A_M$, допускає замикання, і її замикання $\tilde{\mathfrak{a}}_0$ діє за такою самою формулою на області

$$\operatorname{dom} \tilde{\mathfrak{a}}_0 := \{u \in W_2^1(0, 1) \mid u(0) = 0\}.$$

Оскільки квадратична форма $2\operatorname{Re}(ry', y)$ обмежена відносно форми $\tilde{\mathfrak{a}}_0[y]$ з відносною гранню 0 (пор. з [43]), з теореми VI.1.33 з [58] випливає, що область визначення $\mathfrak{a}_1$ збігається з $\operatorname{dom}\tilde{\mathfrak{a}}_0$, тобто

$$\operatorname{dom}\mathfrak{a}_1 = \{u \in W_2^1(0,1) \mid u(0) = 0\}.$$

Тепер припустимо, що z має нулі на $[0,1]$ і позначимо найбільший з них через x_0. Тоді функція

$$u(x) := \begin{cases} 0, & x \leqslant x_0 \\ z(x), & x > x_0 \end{cases}$$

належить до області визначення $\mathfrak{a}$ і не є тотожно рівна нулю. Інтегруючи частинами вираз для $\mathfrak{a}[u]$, бачимо, що $\mathfrak{a}[u] = 0$, що суперечить додатності A_M. Тому z не досягає нуля на $[0,1]$, звідки випливає твердження леми. $\square$

Покладемо $v := z'/z$. Тоді $q = v' + v^2$, і ми можемо використати процедуру зведення до системи Дірака, описану в 2.3, з цим v. Нагадаємо, що за цією процедурою рівняння (5.1) можна звести до спектральної задачі $\ell(P)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ для диференціального виразу Дірака $\ell(P)$, що діє в $L_2(0,1) \times L_2(0,1)$ за формулою

$$\ell(P)\mathbf{u} := J\frac{d\mathbf{u}}{dx} + P\mathbf{u},$$

де

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P := \begin{pmatrix} 0 & -v \\ -v & 2p \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}(x) = \binom{u_1}{u_2} \tag{5.7}$$

з $u_2 := y$ та $u_1 := (y' - vy)/\lambda$. Для довільного матричнозначного потенціала $Q \in L_2\big((0,1), \mathcal{M}_2\big)$ позначимо через $\mathscr{D}_j(Q)$, $j = 1, 2$, оператори Дірака, породжені виразом $\ell(Q)$ на областях визначення

$$\operatorname{dom}\mathscr{D}_j(Q) := \{\mathbf{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}} \in W_2^1(0,1) \times W_2^1(0,1) \mid u_2(0) = u_j(1) = 0\}.$$

Зауважимо також, що оскільки функція $v - r = \frac{z^{[1]}}{z}$ неперервна і z задовольняє умову $(z' - rz)(1) = 0$, то $(v - r)(1) = 0$.

Зауваження 5.2. Потенціал p операторних в'язок $T(p,r)$ та $T_M(p,r)$ пов'язаний з матричним потенціалом $P = (p_{ij})_{i,j=1}^2$ з (5.7) так $p = p_{22}/2$. Далі $q = v' + v^2 = -p_{12}' + p_{12}^2$, а з огляду на рівність $(r-v)(1) = 0$, маємо, що $r = -p_{12} - \int_x^1 p_{12}^2$.

Для нашого дослідження важливий зв'язок між спектрами операторів $\mathscr{D}_j(P)$, $j = 1,2$, та операторних в'язок $T(p,r)$ і $T_M(p,r)$, про який йдеться в наступній лемі.

Лема 5.2. *Спектри операторів Дірака $\mathscr{D}_j(P)$, $j = 1,2$, та операторних в'язок $T(p,r)$ і $T_M(p,r)$ пов'язані так:*

$$\sigma\big(\mathscr{D}_1(P)\big) = \sigma(T_M(p,r)), \tag{5.8}$$

$$\sigma\big(\mathscr{D}_2(P)\big) = \sigma(T(p,r)) \cup \{0\}. \tag{5.9}$$

Більше того, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}}$ є власною функцією $\mathscr{D}_1(P)$ ($\mathscr{D}_2(P)$, відповідно), що відповідає власному значенню $\lambda \neq 0$, тоді і лише тоді, коли u_2 є власною функцією $T_M(p,r)$ ($T(p,r)$, відповідно), що відповідає λ, і $u_1 := (u_2' - vu_2)/\lambda$.

Доведення. Співвідношення (5.9) випливає з лем 2.8 та 4.2. З огляду на рівність $(v-r)(1) = 0$, крайова умова $y^{[1]}(1) = 0$ еквівалентна до $u_1(1) = 0$. З цього факту та безпосередньо з процедури зведення спектральної задачі для операторної в'язки $T_M(p,r)$ до задачі для оператора Дірака (див. підрозділ 2.3) випливає, що спектри $\sigma\big(\mathscr{D}_1(P)\big)$ та $\sigma(T_M(p,r))$ збігаються. Останнє твердження леми можна отримати за допомогою прямої перевірки (див. зауваження 2.2). □

Нагадаємо деякі властивості спектрів операторів Дірака (див., напр., [35], [17]).

Твердження 5.1. *Нехай $Q \in L_2\big((0,1), \mathcal{M}_2\big)$ — матричнозначний потенціал, що набуває ермітових значень. Тоді оператори Дірака $\mathscr{D}_1(Q)$ та $\mathscr{D}_2(Q)$ самоспряжені і мають прості дійсні спектри. Більше того,* *власні значення $\mathscr{D}_1(Q)$ та $\mathscr{D}_2(Q)$ чергуються і їх можна занумерувати з допомогою $n \in \mathbb{Z}$ як μ_n та λ_n відповідно так, щоб вони задовольняли асимптотики* (5.5) *з* $h = \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{tr} Q$.

З огляду на лему 5.2, ми можемо спробувати використати спектри $\boldsymbol{\lambda}$ та $\boldsymbol{\mu}$ операторних в'язок $T(p,r)$ та $T_M(p,r)$, щоб знайти пов'язані з ними оператори Дірака $\mathscr{D}_1(P)$ та $\mathscr{D}_2(P)$. З потенціалу $P = (p_{ij})_{i,j=1}^2$ у виразі $\ell(P)$ обчислимо потенціали p та r операторних в'язок $T(p,r)$ та $T_M(p,r)$ як $p := p_{22}/2$ та $r := -p_{12} - \int_x^1 p_{12}^2$ (див. зауваження 5.2).

Проте, як уже згадувалось у розділі 4, користуючись класичною оберненою спектральною теорією, можна ефективно відновити оператор Дірака з потенціалом у формі АКНС або в іншій канонічній формі. Тому для того, щоб знайти оператори Дірака з потенціалами вигляду (5.7), безпосередньо пов'язані з операторними в'язками $T(p,r)$ та $T_M(p,r)$, нам треба перетворити отримані оператори Дірака в канонічній формі, зберігаючи незмінними спектральні дані. Для цього використаємо оператор перетворення $\mathscr{X} = \mathscr{X}(P,Q)$, побудований у підрозділі 4.3 у вигляді $\mathscr{X} = \mathscr{R} + \mathscr{K}$, де $\mathscr{R}\mathbf{u}(x) := R(x)\mathbf{u}(x)$ — оператор множення на R з (4.3)–(4.4) і

$$\mathscr{K}\mathbf{u}(x) := \int_0^x K(x,s)\mathbf{u}(s)\,ds$$

— відповідний інтегральний оператор. Нагадаємо, що існування оператора перетворення $\mathscr{X}(P,Q)$ гарантують теореми 4.3, 4.4.

Надалі в цьому розділі, як і в попередньому, припускаємо, що матричнозначні потенціали P та Q ермітові, тобто, що $P^*(x) = P(x)$ і $Q^*(x) = Q(x)$ майже скрізь на $[0,1]$. Тоді відповідні оператори Дірака $\mathscr{D}_j(P)$ та $\mathscr{D}_j(Q)$, $j = 1,2$, самоспряжені. Для ермітових P та Q функції $i\theta_1$ та θ_2 з (4.4) дійснозначні; зокрема, оператор $\mathscr{R}$ множення на R з (4.3) унітарний.

Позначимо через $\boldsymbol{\mu}(P)$ (відповідно, через $\boldsymbol{\mu}(Q)$) спектр $\mathscr{D}_1(P)$ (відповідно, $\mathscr{D}_1(Q)$), а через $\boldsymbol{\lambda}(P)$ (відповідно, через $\boldsymbol{\lambda}(Q)$) спектр $\mathscr{D}_2(P)$ (відповідно, $\mathscr{D}_2(Q)$).

Теорема 5.2. *Нехай матричні потенціали P та Q ермітові. Тоді спектри операторів $\mathscr{D}_j(P)$ та $\mathscr{D}_j(Q)$, $j = 1, 2$, збігаються, тобто $\boldsymbol{\mu}(P) = \boldsymbol{\mu}(Q)$ та $\boldsymbol{\lambda}(P) = \boldsymbol{\lambda}(Q)$, тоді і лише тоді, коли оператор перетворення $\mathscr{X}(P, Q)$ для $\ell(P)$ та $\ell(Q)$ на області $\mathcal{D}_0$ містить тільки унітарну частину $\mathscr{R}$ (тобто $\mathscr{K} = 0$) і $\theta_2(1) = \pi n$ з деяким $n \in \mathbb{Z}$.*

Доведення. *Достатність.* За припущенням, оператор перетворення $\mathscr{X}(P, Q)$ між $\ell(P)$ та $\ell(Q)$ містить лише оператор множення $\mathscr{R}$. Позначимо через $\widetilde{\mathscr{D}}_j(P)$, $j = 1, 2$, оператори, пов'язані з $\mathscr{D}_j(Q)$ рівністю

$$\widetilde{\mathscr{D}}_j(P) = \mathscr{R}^{-1}\mathscr{D}_j(Q)\mathscr{R}, \ j = 1, 2.$$

Тоді $\widetilde{\mathscr{D}}_j(P)$ унітарно еквівалентні з $\mathscr{D}_j(Q)$, а отже, $\sigma(\widetilde{\mathscr{D}}_j(P)) = \sigma(\mathscr{D}_j(Q))$. За зауваженням 4.3, $\widetilde{\mathscr{D}}_j(P)$ — оператори Дірака, що діють за формулою $\widetilde{\mathscr{D}}_j(P)\mathbf{u} = \ell(P)\mathbf{u}$ на областях, які складаються з тих $\mathbf{u} \in L_2((0, 1), \mathbb{C}^2)$, для яких $\mathscr{R}\mathbf{u} \in \operatorname{dom} \mathscr{D}_j(Q)$. Нагадаємо, що $R(0) = I$; також, оскільки $\theta_2(1) = \pi n$ з деяким $n \in \mathbb{Z}$, то матриця $R(1)$ кратна одиничній матриці I. Звідси випливає, що $\mathbf{u}$ з області визначення $\widetilde{\mathscr{D}}_j(P)$ задовольняють ті ж крайові умови, що й $\mathscr{R}\mathbf{u}$. Тому $\operatorname{dom} \widetilde{\mathscr{D}}_j(P) = \operatorname{dom} \mathscr{D}_j(Q) = \operatorname{dom} \mathscr{D}_j(P)$. Це означає, що $\mathscr{D}_j(P) = \widetilde{\mathscr{D}}_j(P)$, а отже, $\boldsymbol{\mu}(P) = \boldsymbol{\mu}(Q)$ і $\boldsymbol{\lambda}(P) = \boldsymbol{\lambda}(Q)$.

Необхідність. Спершу зауважимо, що оскільки спектри $\mathscr{D}_j(P)$ та $\mathscr{D}_j(Q)$, $j = 1, 2$, збігаються, то асимптотики власних значень теж збігаються, звідки випливає, що $\theta_2(1) = \pi n$ з деяким $n \in \mathbb{Z}$ (див. твердження 5.1 та (4.4)). Щоб завершити доведення, залишається показати, що $\mathscr{K} = 0$.

Нагадаємо, що нормівний множник, який відповідає власному значенню λ оператора $\mathscr{D}_2(P)$ дорівнює $\|\mathbf{u}\|^2$, де $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}}$ — власна функція $\mathscr{D}_2(P)$ для λ, нормована початковими умовами $u_1(0) = 1$ та $u_2(0) = 0$ [17]. З [35] випливає, що нормівні множники для $\mathscr{D}_2(P)$ однозначно визначаються спектрами $\boldsymbol{\lambda}(P)$ та $\boldsymbol{\mu}(P)$ (хоча в [35] розглядалися потенціали тільки у формі АКНС, такі ж аргументи працюють для всіх самоспряжених операторів Дірака). Тому з твердження теореми випливає, що множини нормівних множників для $\mathscr{D}_2(P)$ та $\mathscr{D}_2(Q)$ збігаються. За лемою 4.3, з цього випливає, що $\mathscr{K} = 0$. □

Альтернативно, щоб встановити необхідність у попередній теоремі, можна використати міркування, аналогічні до наведених у [41], де доведено подібне твердження, але за інших припущень на P та Q.

5.3. Відновлення енергозалежних рівнянь Штурма–Ліувілля за двома спектрами. I

Наша ціль у цьому підрозділі — довести теорему 5.1, тобто показати, що для заданого довільного елемента $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ з SD існують єдині p та r такі, що $\boldsymbol{\mu}$ є спектром операторної в'язки $T_M(p, r)$, а $\boldsymbol{\lambda}$ — спектром $T(p, r)$.

Зафіксуємо довільну пару $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ в SD. Надалі λ_n, $n \in \mathbb{Z}^*$, та μ_n, $n \in \mathbb{Z}$, позначатимуть, відповідно, елементи $\boldsymbol{\lambda}$ та $\boldsymbol{\mu}$. Зауважимо, що нумерація μ_n та λ_n фіксує зсув h у їхній асимптотиці (5.5). Доповнимо послідовність $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ елементом $\lambda_0 = 0$ і позначимо отриману послідовність $\boldsymbol{\lambda}^*$.

Нагадаємо деякі факти з оберненої спектральної теорії для операторів Дірака, які ми будемо використовувати у нашій процедурі відновлення, див. [4, 17, 35]. Розглянемо множину $\mathcal{Q}_0$ функцій, значення яких є матриці з $\boldsymbol{\mathcal{M}}_2$ у нормальній формі АКНС, а саме,

$$\mathcal{Q}_0 := \left\{ Q_0 = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & -q_1 \end{pmatrix} \mid q_j \in L_{2,\mathbb{R}}(0,1) \right\}. \tag{5.10}$$

Відомо, що оператори $\mathscr{D}_1(Q_0)$ та $\mathscr{D}_2(Q_0)$ з потенціалами Q_0 з $\mathcal{Q}_0$ самоспряжені і мають прості дискретні спектри. Їхні власні значення можна занумерувати у зростаючому порядку як $\lambda_n(Q_0)$ та $\mu_n(Q_0)$, $n \in \mathbb{Z}$, відповідно, так, що вони задовольняють умову чергування

$$\mu_n(Q_0) < \lambda_n(Q_0) < \mu_{n+1}(Q_0)$$

і мають асимптотику

$$\lambda_n(Q_0) = \pi n + \tilde{\lambda}_n(Q_0),$$
$$\mu_n(Q_0) = \pi\left(n - \tfrac{1}{2}\right) + \tilde{\mu}_n(Q_0)$$

з послідовностями $(\tilde{\lambda}_n(Q_0))$ та $(\tilde{\mu}_n(Q_0))$ з $\ell_2(\mathbb{Z})$.

Також відомо (див. [35]), що для двох послідовностей (μ_n) та (λ_n), які мають вище наведені властивості, існує єдиний потенціал Q_0 з $\mathcal{Q}_0$ такий, що (μ_n) є спектром оператора $\mathscr{D}_1(Q_0)$, а (λ_n) — спектром оператора $\mathscr{D}_2(Q_0)$.

Послідовності $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\lambda}^*$ відрізняються від спектрів для операторів Дірака з потенціалами нормального вигляду АКНС тільки зсувом h у їхній асимптотиці, див. (5.5). Для $h \in \mathbb{R}$ позначимо через

$$\mathcal{Q}_h := \{Q_0 + hI \mid Q_0 \in \mathcal{Q}_0\}$$

множину матричних потенціалів у формі АКНС, зсунутих на h; тоді справедливе таке.

Твердження 5.2. *Для довільної пари* $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ *з* SD *позначимо через* $\boldsymbol{\lambda}^*$ *поповнення* $\boldsymbol{\lambda}$ *елементом* $\lambda_0 = 0$. *Тоді існує єдиний потенціал* $Q \in \mathcal{Q}_h$ *такий, що* $\boldsymbol{\mu}$ *є спектром оператора* $\mathscr{D}_1(Q)$, *а* $\boldsymbol{\lambda}^*$ *— спектром оператора* $\mathscr{D}_2(Q)$.

Для довільного потенціала $P \in L_2\big((0,1), \mathcal{M}_2\big)$ введемо множину потенціалів, *ізоспектральних до* P

$$\mathrm{Iso}(P) := \{\tilde{P} \in L_2\big((0,1), \mathcal{M}_2\big) \mid \boldsymbol{\mu}(\tilde{P}) = \boldsymbol{\mu}(P),\ \boldsymbol{\lambda}(\tilde{P}) = \boldsymbol{\lambda}(P)\},$$

а через $\mathcal{P}$, як і в попередньому розділі, позначимо множину всіх потенціалів вигляду (5.7), тобто

$$\mathcal{P} := \{P = (p_{ij})_{i,j=1}^2 \mid p_{ij} \in L_{2,\mathbb{R}}(0,1),\ p_{11} = 0,\ p_{12} = p_{21}\}.$$

Тепер ми доведемо, що існує єдиний потенціал P в множині $\mathrm{Iso}(Q) \cap \mathcal{P}$. Почнемо з такої леми.

Лема 5.3. *Нехай* $Q \in \mathcal{Q}_h$, *тобто*

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 + h & q_2 \\ q_2 & -q_1 + h \end{pmatrix}.$$

Тоді існує єдиний потенціал $P \in \mathcal{P}$ *такий, що*

$$\mathscr{R}\ell(P) = \ell(Q)\mathscr{R}, \tag{5.11}$$

де $\mathscr{R}$ *— оператор множення на матричнозначну функцію* R *з* (4.3), (4.4).

Доведення. Спершу зауважимо, що матриця R, задана формулою (4.3), комутує з J, звідки

$$R^{-1}\Big(J\frac{d}{dx} + Q\Big)R = J\frac{d}{dx} + R^{-1}JR' + R^{-1}QR.$$

Отже, щоб виконувалась рівність (5.11), необхідно, щоб

$$\begin{aligned} P &= R^{-1}JR' + R^{-1}QR \\ &= (h - \theta_2')I + \theta_1' J + \begin{pmatrix} q_1\cos 2\theta_2 - q_2 \sin 2\theta_2 & q_1 \sin 2\theta_2 + q_2 \cos 2\theta_2 \\ q_1 \sin 2\theta_2 + q_2 \cos 2\theta_2 & -q_1 \cos 2\theta_2 + q_2 \sin 2\theta_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Потенціал P з (5.12) належить до $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли $\theta_1'(x)$ тотожно дорівнює нулю і виконується така рівність:

$$-\theta_2' + q_1 \cos 2\theta_2 - q_2 \sin 2\theta_2 + h = 0. \tag{5.13}$$

Очевидно, існує єдиний розв'язок цього рівняння, який задовольняє початкову умову

$$\theta_2(0) = 0. \tag{5.14}$$

Цей розв'язок θ_2 та $\theta_1 \equiv 0$ задають функцію R за формулою (4.3) та потенціал P за формулою (5.12) однозначно. Легко переконатися, що умови (4.4) при цьому виконані, тобто оператор $\mathscr{R}$ здійснює подібність (5.11).

$\square$

Наступний результат стверджує існування та єдиність потенціалу P з $\mathcal{P}$, що належить до множини $\operatorname{Iso}(Q)$.

Теорема 5.3. *Нехай $h \in \mathbb{R}$ і потенціал $Q \in \mathcal{Q}_h$ такий, що $\lambda = 0$ — власне значення оператора Дірака $\mathscr{D}_2(Q)$. Тоді існує єдиний $P \in \mathcal{P}$, який належить до множини* $\operatorname{Iso}(Q)$, *тобто такий, що* $\operatorname{Iso}(Q) \cap \mathcal{P} = \{P\}$.

Доведення. Спочатку зауважимо, що якщо $P \in \operatorname{Iso}(Q)$, то за теоремою 5.2 оператор перетворення між $\ell(P)$ та $\ell(Q)$ на $\mathcal{D}_0$ є оператором $\mathscr{R}$ множення на матричнозначну функцію R, що задана формулами (4.3), (4.4). Якщо, крім того, P має належати до $\mathcal{P}$, то за лемою 5.3 P має бути заданий формулою (5.12) з $\theta_1 \equiv 0$ і θ_2 таким, що розв'язує (5.13), (5.14). Залишається довести, що потенціал, заданий (5.12)–(5.14), справді належить до $\operatorname{Iso}(Q)$. За теоремою 5.2, для цього досить показати, що $\theta_2(1) = \pi n$ з деяким $n \in \mathbb{Z}$. Це можна зробити, використавши міркування, наведені у кроці 2 доведення теореми 4.6. $\square$

Тепер ми можемо довести головні результати підрозділу.

Доведення теореми 5.1. Існування. Маючи пару $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ з SD, поповнимо $\boldsymbol{\lambda}$ елементом $\lambda_0 := 0$. Отримаємо $\boldsymbol{\lambda}^*$. Використовуючи твердження 5.2, знайдемо такий потенціал Q в $\mathcal{Q}_h$, що $\boldsymbol{\mu}$ є спектром оператора $\mathscr{D}_1(Q)$, а $\boldsymbol{\lambda}^*$ — оператора $\mathscr{D}_2(Q)$. З теореми 5.3 знаємо, що для цього Q можемо знайти $P \in \mathcal{P}$, який належить до $\operatorname{Iso}(Q)$, тобто такий, що $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\lambda}^*$ є, відповідно, спектрами $\mathscr{D}_1(P)$ та $\mathscr{D}_2(P)$. За лемою 4.2, це означає, що $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\lambda}$ є спектрами $T_M(p, r)$ та $T(p, r)$ з

$$p = \frac{p_{22}}{2}, \quad r := -p_{12} - \int_x^1 p_{12}^2. \tag{5.15}$$

З майже чергування $\boldsymbol{\lambda}$ та $\boldsymbol{\mu}$ випливає, що оператор $T_M(p, r)(0)$ від'ємний, тобто $T_M(p, r)$ задовольняє припущення (AM) (див. наслідок 3.2).

Це завершує доведення існування.

Єдиність. Припустимо, що існує дві пари потенціалів p, r та $\hat{p}$, $\hat{r}$ таких, що $\sigma(T_M(p,r)) = \sigma(T_M(\hat{p},\hat{r})) =: \boldsymbol{\mu}$ і $\sigma(T(p,r)) = \sigma(T(\hat{p},\hat{r})) =: \boldsymbol{\lambda}$. Тоді, за наслідком 3.2, оператори $T_M(p,r)(0)$ та $T_M(\hat{p},\hat{r})(0)$ від'ємні, тобто припущення (AM) виконується для операторних в'язок $T_M(p,r)$ та $T_M(\hat{p},\hat{r})$.

В'язки $T(p,r)$, $T_M(p,r)$ та $T(\hat{p},\hat{r})$, $T_M(\hat{p},\hat{r})$ приводять до операторів Дірака з потенціалами P та $\hat{P}$ в $\mathcal{P}$, як описано в підрозділі 5.2, і до операторів Дірака з потенціалами Q та $\hat{Q}$ з $\mathcal{Q}_h$, з тим самим h, як описано на початку підрозділу. За побудовою, $\boldsymbol{\mu}(Q) = \boldsymbol{\mu}(\hat{Q}) = \boldsymbol{\mu}$ і $\boldsymbol{\lambda}(Q) = \boldsymbol{\lambda}(\hat{Q}) = \boldsymbol{\lambda} \cup \{0\}$, а тому $Q = \hat{Q}$, за твердженням 5.2. За лемою 4.2, $\boldsymbol{\mu}(P) = \boldsymbol{\mu}(\hat{P})$ і $\boldsymbol{\lambda}(P) = \boldsymbol{\lambda}(\hat{P})$, а отже, P та $\hat{P}$ належать до однієї і тієї ж ізоспектральної множини $\operatorname{Iso}(Q)$. З огляду на теорему 5.3, це означає, що $P = \hat{P}$. Таким чином, $p = \hat{p}$ і $r = \hat{r}$, що завершує доведення.

□

5.4. Алгоритм відновлення. I

Сформулюємо алгоритм відновлення в'язок $T(p,r)$ та $T_M(p,r)$ для першого з двох запропонованих в цьому дослідженні способів розв'язування оберненої задачі (IPS).

Нехай ми маємо пару послідовностей $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ з SD. Тоді процедура відновлення складається з таких кроків:

1. Доповнимо дану послідовність $\boldsymbol{\lambda}$ елементом $\lambda_0 = 0$.
2. Використаємо отримані спектральні дані для побудови операторів Дірака $\mathscr{D}_1(Q)$ та $\mathscr{D}_2(Q)$ з потенціалом Q у h-зсунутій формі AKHC.
3. Знайдемо відповідний потенціал $P \in \mathcal{P} \cap \operatorname{Iso}(Q)$, використовуючи (5.12) і (5.13).
4. Обчислимо потенціали p та r, використовуючи формули (5.15).

Загалом цей метод відновлення можна використати і для розв'язування (IPS) з припущенням (AM*). В такому випадку спектри операторних в'язок $T(p,r)$ та $T_M(p,r)$ утворюють елемент множини SD^*, яка відрізняється від SD лише тим, що для елементів λ_n послідовності $\boldsymbol{\lambda}$ не обов'язково повинна виконуватися умова $\lambda_{-1} < 0 < \lambda_1$. Тоді для відновлення потенціалів p та r за парою послідовностей $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ з SD^*, покладемо $\mu_* := (\mu_0+\mu_1)/2$ і зсунемо послідовності $\boldsymbol{\lambda}$ та $\boldsymbol{\mu}$ на μ_*. Отримаємо послідовності $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ та $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ з елементами $\hat{\lambda}_n = \lambda_n - \mu_*$, $n \in \mathbb{Z}^*$, та $\hat{\mu}_n = \mu_n - \mu_*$, $n \in \mathbb{Z}$. Зрозуміло, що тоді пара $(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ належить до множини SD. Далі використаємо описаний вище алгоритм, щоб відновити потенціали $\hat{p}$ та $\hat{r}$ такі, що $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ є спектром $T(\hat{p}, \hat{r})$, а $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ — спектром $T_M(\hat{p}, \hat{r})$. Зрозуміло, що тоді $\boldsymbol{\lambda}$ є спектром в'язки $T(p,r)$, а $\boldsymbol{\mu}$ — спектром в'язки $T_M(p,r)$ з потенціалами p та r, отриманими з $\hat{p}$ та $\hat{r}$ за формулами (5.4).

Також для розв'язування (IPS) за припущення (AM*) можна скористатися методом, описаним в [71], що аналогічний до дослідженого вище в цьому розділі.

5.5. Зв'язок між двома задачами відновлення

Тепер опишемо ще один спосіб розв'язування оберненої задачі відновлення операторних в'язок $T(p,r)$ та $T_M(p,r)$ за двома спектрами, який використовує зв'язок (IPS) із задачею відновлення $T(p,r)$ за одним спектром і множиною нормівних множників (IPSNC). За цим підходом ми спочатку за двома послідовностями $\boldsymbol{\lambda}$ та $\boldsymbol{\mu}$, які, за припущенням, є спектрами $T(p,r)$ та $T_M(p,r)$ з шуканими потенціалами p та $q = r'$, будуємо ще одну послідовність, яка, як виявляється, складається з нормівних множників для $T(p,r)$. Тоді, використовуючи результати розділу 4, відновлюємо потенціали p та q рівняння (5.1) такі, що $\boldsymbol{\lambda}$ є спектром $T(p,r)$ з цими p та q. Далі ми показуємо, що первісну r потенціала q можна вибрати єдиним чином так, щоб спектр $T_M(p,r)$ збігався із заданою послідовністю $\boldsymbol{\mu}$ (див. [72]).

Зауважимо, що ні спектр $T(p,r)$, ні множина нормівних множників не залежать від конкретного вибору первісної r потенціала q. Саме тому результати розділу 4 гарантують єдиність відновлення q, але залишають r визначеним з точністю до адитивної константи. Проте крайові умови (5.3) таки залежать від вибору r, і ми покажемо, що r визначається однозначно в оберненій задачі (IPS).

Для того, щоб дослідити зв'язок між (IPS) та (IPSNC), ми використаємо характеристичні функції φ та ψ для задач (5.1),(5.2) та (5.1),(5.3). За теоремами 2.8 та 2.11, характеристичні функції φ та ψ можна записати у факторизованій формі у термінах власних значень (λ_n) задачі (5.1),(5.2) та (μ_n) задачі (5.1),(5.3), а саме

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \mathrm{V.p.} \prod\limits_{n\in\mathbb{Z}^*} \dfrac{\lambda_n - \lambda}{\pi n}, & \text{якщо } p_0 \neq \pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^l\ \mathrm{V.p.} \prod\limits_{n\in\mathbb{Z}^*} \dfrac{\lambda_n - \lambda}{\pi n}, & \text{якщо } p_0 = \pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{5.16}$$

$$\psi(\mu) = \begin{cases} -\mathrm{V.p.} \prod\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{\mu_n - \mu}{\pi\,(n+1/2)}, & \text{якщо } p_0 \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^{l+1}(\mu_0 - \mu)\mathrm{V.p.} \prod\limits_{n\in\mathbb{Z}^*} \dfrac{\mu_n - \mu}{\pi n}, & \text{якщо } p_0 = \dfrac{\pi}{2} + \pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{5.17}$$

де $p_0 = \int_0^1 p$. Зв'язок між (IPS) та (IPSNC) задано формулами (5.16), (5.17) та наступною формулою, яка пов'язує характеристичні функції (а значить, і спектри) в'язок $T(p,r)$ та $T_M(p,r)$ та нормівні множники в'язки $T(p,r)$ (див. наслідок 3.1):

$$\alpha_n = \lambda_n \dot{\varphi}(\lambda_n)\psi(\lambda_n). \tag{5.18}$$

Далі ми доведемо таку теорему:

Теорема 5.4. *За заданою парою послідовностей* $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ *з* SD *побудуємо* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ *за формулами* (5.16), (5.17) *і* (5.18). *Тоді* α_n *додатні і послідовність* $(\alpha_n - 1)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ *належить до* $\ell_2(\mathbb{Z}^*)$.

У цьому розділі будемо позначати через $SD1$ множину, описану в означенні 4.2 з попереднього розділу. З теореми 5.4, множина пар $\{(\lambda_n, \alpha_n)\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$

із заданими числами λ_n та числами α_n, побудованими в (5.18), утворює елемент $SD1$. Тоді, за теоремами 4.1 та 4.2, існують єдині дійснозначні $p \in L_2(0,1)$ та $q \in W_2^{-1}(0,1)$ такі, що $\{(\lambda_n, \alpha_n)\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$ збігається із спектральними даними $\mathbf{sd}(p,r)$ операторної в'язки $T(p,r)$ з кожною первісною r потенціала q. Ми покажемо, що первісну r можна вибрати єдиним чином так, щоб зробити μ_n власними значеннями $T_M(p,r)$. Так ми отримаємо другий спосіб доведення теореми 5.1 та ще один алгоритм відновлення енергозалежних рівнянь Штурма–Ліувілля за двома спектрами.

Перш ніж доводити теорему 5.4, доведемо такий допоміжний результат.

Лема 5.4. *Нехай F — функція з $L_2(0,1)$. Тоді послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, елементи якої визначені формулою*

$$f_n := \int_0^1 F(t)e^{i\lambda_n(1-2t)}dt, \tag{5.19}$$

належить до $\ell_2(\mathbb{Z})$.

Доведення. Спочатку зробимо заміну змінних $u := 1-2t$ у інтегралі (5.19). Отримаємо

$$f_n := \int_{-1}^1 G(u)e^{i\omega_n u}du,$$

де $G(u) = \frac{1}{2}F(\frac{1-u}{2})e^{ihu}$ — функція з $L_2(-1,1)$ і $\omega_n = \pi n + \tilde{\lambda}_n$. Для завершення доведення досить показати, що система $e^{i\omega_n u}$ утворює базу Риса в $L_2(-1,1)$; тоді f_n є коефіцієнтами Фур'є функції G відносно системи $e^{i\omega_n u}$, а отже, утворюють послідовність з $\ell_2(\mathbb{Z})$ (див., напр., [96, Гл. 1]).

Зауважимо спершу, що система $\{e^{i\pi n u}\}$ є ортогональною базою в $L_2(-1,1)$. Можна знайти сталу $L < \pi/4$ і достатньо велике число N таке, що $|\tilde{\lambda}_n| < L$ для всіх n з $|n| > N$. Тоді з теореми Кадеця про 1/4 (див. [96, Гл. 1], [12]) випливає, що система $\{e^{i\tilde{\omega}_n u}\}$ з

$$\tilde{\omega}_n = \begin{cases} \pi n + \tilde{\lambda}_n, & |n| > N, \\ \pi n, & |n| \leqslant N \end{cases}$$

утворює базу Риса. Залишається зауважити, що послідовність (ω_n) отримана з $(\tilde{\omega}_n)$ заміною скінченної кількості елементів. З теорем 3.11 та 1.12 з [96] випливає, що система $\{e^{i\omega_n u}\}$ є базою Риса. $\square$

Доведення теореми 5.4. Нехай задано дві послідовності $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ та $\boldsymbol{\mu} := (\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ з $\mu_0 < 0 < \mu_1$, які утворюють елемент $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ множини SD. Покладемо $\lambda_0 := 0$ і позначимо через $\boldsymbol{\lambda}^*$ послідовність $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, що є доповненням послідовності $\boldsymbol{\lambda}$ елементом λ_0. Тоді $\boldsymbol{\lambda}^*$ та $\boldsymbol{\mu}$ строго чергуються. За допомогою цих послідовностей будуємо функції

$$s_1(z) := \begin{cases} z\text{V.p.}\prod\limits_{n\in\mathbb{Z}^*} \dfrac{\lambda_n - z}{\pi n}, & \text{if } h \neq \pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^l z\ \text{V.p.}\prod\limits_{n\in\mathbb{Z}^*} \dfrac{\lambda_n - z}{\pi n}, & \text{if } h = \pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{5.20}$$

$$c(z) := \begin{cases} -\text{V.p.}\prod\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{\mu_n - z}{\pi\,(n + 1/2)}, & \text{if } h \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^{l+1}(\mu_0 - z)\text{V.p.}\prod\limits_{n\in\mathbb{Z}^*} \dfrac{\mu_n - z}{\pi n}, & \text{if } h = \dfrac{\pi}{2} + \pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{5.21}$$

де h — число з асимптотики (1) в означенні 5.1.

Зауважимо, що $\boldsymbol{\lambda}^*$ є послідовністю нулів функції s_1, а $\boldsymbol{\mu}$ — послідовністю нулів c. З результатів [48] випливає, що існують функції f та g з $L_2(0,1)$ такі, що

$$s_1(z) = \sin(z - h) + \int\limits_0^1 f(t)e^{iz(1-2t)}dt$$

та

$$c(z) = \cos(z - h) + \int\limits_0^1 g(t)e^{iz(1-2t)}dt. \tag{5.22}$$

Зауважимо, що

$$\dot{s_1}(\lambda_n) = \cos(\lambda_n - h) + \int\limits_0^1 f(t)i(1-2t)e^{i\lambda_n(1-2t)}dt. \tag{5.23}$$

Далі покладемо $s(z) := s_1(z)/z$. Оскільки λ_n, $n \in \mathbb{Z}$, є нулями s_1, то

$$\dot{s}(\lambda_n) = \frac{\dot{s_1}(\lambda_n)}{\lambda_n}$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}^*$.

З леми 5.4 випливає, що

$$\begin{aligned} \dot{s_1}(\lambda_n) &= (-1)^n \cos\tilde{\lambda}_n + \int\limits_0^1 f(t)i(1-2t)e^{i\lambda_n(1-2t)}dt = (-1)^n(1+s_n), \\ c(\lambda_n) &= (-1)^n \cos\tilde{\lambda}_n + \int\limits_0^1 g(t)e^{i\lambda_n(1-2t)}dt = (-1)^n(1+c_n) \end{aligned} \tag{5.24}$$

з ℓ_2-послідовностями $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ та $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Визначимо послідовність $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ так:

$$\alpha_n := \lambda_n \dot{s}(\lambda_n)c(\lambda_n) = \dot{s_1}(\lambda_n)c(\lambda_n). \tag{5.25}$$

Тоді з (5.24) отримуємо

$$\alpha_n = (-1)^n(1+s_n)(-1)^n(1+c_n) = 1 + \tilde{\alpha}_n$$

з ℓ_2-послідовністю $(\tilde{\alpha}_n)$.

Оскільки послідовності $\boldsymbol{\lambda}^*$ та $\boldsymbol{\mu}$ чергуються, з безпосереднього аналізу означень (5.20), (5.21) та формули (5.25) випливає, що всі α_n, $n \in \mathbb{Z}^*$, одного знаку, а отже, є додатніми, що завершує доведення теореми 5.4. $\square$

З теореми 5.4 та теорем 4.1 і 4.2 випливає, що за заданою послідовністю $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ та побудованою $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ можна єдиним чином визначити потенціали p та $q = r'$ такі, що для в'язки $T(p,r)$ послідовність $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ є спектром, а $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ — відповідним набором нормівних множників.

З розділу 2 ми знаємо, що зсув h у асимптотиці (5.5) власних значень $T(p,r)$ дорівнює $p_0 = \int_0^1 p$.

5.6. Відновлення рівняння Штурма–Ліувілля з енергозалежним потенціалом за двома спектрами. II

Тепер ми покажемо, що потенціали p та q, побудовані у попередньому підрозділі, і є розв'язком (IPS). А саме, ми покажемо, що існує первісна r потенціала q така, що μ_n, $n \in \mathbb{Z}$, — це всі власні значення в'язки $T_M(p,r)$.

Для початку зауважимо, що первісна r потенціала q визначена з точністю до адитивної константи. Виберемо r у такий спосіб. Нехай $y(x,\mu_0)$ — розв'язок рівняння (5.1) з μ_0 замість λ, що задовольняє початкову умову $y(0,\mu_0) = 0$. Тоді $y(1,\mu_0)$ не дорівнює 0, оскільки μ_0 не є в спектрі $T(p,r)$. Це дозволяє нам вибрати r єдиним чином так, що $y^{[1]}(1,\mu_0) = 0$. Тоді μ_0 є власним значенням в'язки $T_M(p,r)$ з цим фіксованим r. Позначимо через ν_n, $n \in \mathbb{Z}$, власні значення $T_M(p,r)$, занумеровані у зростаючому порядку так, що $\nu_0 = \mu_0$.

Лема 5.5. *$\nu_n = \mu_n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$.*

Доведення. Нагадаємо, що власні значення ν_n в'язки $T_M(p,r)$ задовольняють асимптотику

$$\nu_n = \pi(n-1/2) + p_0 + \tilde{\nu}_n$$

з ℓ_2-послідовністю $(\tilde{\nu}_n)$ та що відповідна характеристична функція ψ задана формулою (5.17) з ν_n замість μ_n. Функцію ψ можна подати в інтегральній формі (див. [48, 70])

$$\psi(z) = \cos(z - p_0) + \int\limits_0^1 g_1(t) e^{iz(1-2t)} dt \tag{5.26}$$

з деякою $g_1 \in L_2(0,1)$. Ми хочемо показати, що ψ збігається з функцією c з (5.21). Оскільки ν_n, $n \in \mathbb{Z}$, є нулями ψ, а μ_n, $n \in \mathbb{Z}$, — нулями c, це завершить доведення.

Припустимо супротивне, що $\psi \neq c$, тобто, що функція $\hat{\psi} := \psi - c$ не дорівнює тотожно нулю. З рівності $h = p_0$ та з представлень (5.22) і (5.26) для функцій c та ψ випливає, що

$$\hat{\psi}(z) = \int_0^1 (g_1(t) - g(t))e^{iz(1-2t)}dt,$$

а отже, за уточненою лемою Рімана–Лебега [21, Лема 1.3.1],

$$\hat{\psi}(z) = o(e^{|\mathrm{Im} z|}), \quad |z| \to \infty. \tag{5.27}$$

З огляду на (5.16) та рівність $h = p_0$, функція $s(z) := s_1(z)/z$, де s_1 з (5.20), збігається з характеристичною функцією φ задачі (5.1),(5.2). Порівнявши формули (5.25) та (5.18) для нормівних множників $T(p,r)$, приходимо до висновку, що

$$\dot{s}(\lambda_n)\psi(\lambda_n) = \dot{s}(\lambda_n)c(\lambda_n), \quad n \in \mathbb{Z}^*. \tag{5.28}$$

Оскільки послідовність $\boldsymbol{\lambda}$ строго зростає, кожен нуль функції s є простим, а отже, $\dot{s}(\lambda_n) \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}^*$. Тому $c(\lambda_n) = \psi(\lambda_n)$ чи еквівалентно $\hat{\psi}(\lambda_n) = 0$ для кожного $n \in \mathbb{Z}^*$. Очевидно, $c(\mu_0) = \psi(\mu_0) = 0$, звідки $\hat{\psi}(\mu_0) = 0$. А тому $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}^*} \cup \{\mu_0\}$ є нулями функції $\hat{\psi}(z)$.

Покажемо, що $\hat{\psi}$ не має інших нулів. Позначимо через $n(t)$ кількість нулів функції $\hat{\psi}$ в крузі $|z| \leqslant t$; тоді, з огляду на (5.27), з формули Єнсена отримуємо оцінку

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t}dt \leqslant \frac{2r}{\pi} + C_1 \tag{5.29}$$

з деякою сталою $C_1 \in \mathbb{R}$. Якщо $\hat{\psi}$ має інші нулі крім $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}^*} \cup \{\mu_0\}$, то асимтотика λ_n гарантує, що існують числа $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ та досить велике $N \in \mathbb{N}$ такі, що для кожного $l \geqslant N$

$$n(\pi(l+\varepsilon)) \geqslant 2l + 2.$$

Покладемо $t_l := \pi(l + \varepsilon)$ і використаємо наближення Стірлінга ґаммафункції Ейлера. Отримаємо

$$\begin{aligned}\int\limits_{t_m}^{t_{n+1}} \frac{n(t)}{t} dt &\geqslant \sum_{l=m}^{n} (2l+2) \log \frac{t_{l+1}}{t_l} \\ &= (2n+2) \log t_{n+1} - 2 \sum_{l=m}^{n} \log t_l - 2m \log t_m \\ &\geqslant (2n+2) \log \frac{t_{n+1}}{\pi} - 2 \log \Gamma \left(\frac{t_{n+1}}{\pi} \right) + C_2 \\ &\geqslant \frac{2t_{n+1}}{\pi} + (1-2\varepsilon) \log \frac{t_{n+1}}{\pi} + C_3\end{aligned}$$

з деякими сталими C_2 та C_3. Ця оцінка суперечить (5.29), а тому показує, що $\hat{\psi}$ не має інших нулів окрім $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}^*} \cup \{\mu_0\}$.

Функція $\hat{\psi}$ є експоненційного типу меншого або рівного 1. Використовуючи це та факторизаційну теорему Адамара, отримуємо, що

$$\hat{\psi}(z) = e^{Az+B} \left(1 - \frac{z}{\mu_0}\right) \mathrm{V.p.} \prod_{n\in\mathbb{Z}^*} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) e^{\frac{z}{\lambda_n}}$$

з деякими сталими A та B. Оскільки

$$\mathrm{V.p.} \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_{-n}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2}{\lambda_n \lambda_{-n}} \cdot \frac{\lambda_n + \lambda_{-n}}{\pi^2 n^2}$$

з абсолютно збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n + \lambda_{-n}}{\pi^2 n^2}$ та рівномірно обмеженою послідовністю $\left(\frac{\pi^2 n^2}{\lambda_n \lambda_{-n}}\right)$, то ряд $\sum \frac{z}{\lambda_n}$ збіжний. Тому

$$\hat{\psi}(z) = e^{A'z+B} \left(1 - \frac{z}{\mu_0}\right) \mathrm{V.p.} \prod_{n\in\mathbb{Z}^*} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right)$$

з відповідною сталою A'.

Тепер зафіксуємо $\theta \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$ і візьмемо z вигляду $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$. За (5.27),

$$\frac{\hat{\psi}(z)}{\sin(z-h)} \to 0, \quad \rho \to \infty. \tag{5.30}$$

Нагадаємо (див., напр., [96, Гл.2]), що функцію $\sin(z-h)$ можна факторизувати так

$$\sin(z-h) = (z-h)\mathrm{V.p.}\prod_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{\pi n + h - z}{\pi n},$$

а тому

$$\frac{\hat{\psi}(z)}{\sin(z-h)} = e^{A'z+B}\frac{\mu_0 - z}{(z-h)\mu_0}\mathrm{V.p.}\prod_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{\pi n}{\lambda_n}\cdot\frac{\lambda_n - z}{\pi n + h - z}.$$

За лемою 2.9, добуток $\mathrm{V.p.}\prod_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{\pi n}{\lambda_n}$ збіжний і, за лемою 2.10, добуток $\mathrm{V.p.}\prod_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{\lambda_n - z}{\pi n+h-z}$ збігається до 1, коли $\rho\to\infty$ і $\theta\neq 0,\pi$. З огляду на (5.30), це означає, що $e^{A'z+B}$ збігається до 0, коли $\rho\to\infty$. Але це неможливо; отримана суперечність показує, що наше припущення про те, що $\hat{\psi}\not\equiv 0$, хибне. Таким чином $\hat{\psi}\equiv 0$ і $\nu_n = \mu_n$ для всіх $n\in\mathbb{Z}$. Доведення завершено. □

Доведення теореми 5.1. (Другий спосіб). Нехай ми маємо пару послідовностей $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$ з SD. За цими послідовностями будуємо функції s_1 та c за формулами (5.20) та (5.21), а тоді послідовність (α_n) за (5.25). За теоремою 5.4, множина пар $\mathbf{sd} = \{(\lambda_n,\alpha_n)\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$ із заданими λ_n та побудованими α_n належить до $SD1$. За теоремою 4.2, будуємо потенціали p та q такі, що $\boldsymbol{\lambda}$ є спектром $T(p,r)$ з побудованим p і будь-якою первісною r потенціала q. Далі фіксуємо первісну r потенціала q, як описано вище у цьому підрозділі; тоді $\boldsymbol{\mu}$ є спектром $T_M(p,r)$, за лемою 5.5. Це доводить частину про існування.

Щоб довести єдиність, припустимо, що існує дві пари потенціалів p_1, r_1 та p_2, r_2 таких, що послідовність $\boldsymbol{\lambda}$ є спектром і в'язки $T(p_1,r_1)$, і $T(p_2,r_2)$, а послідовність $\boldsymbol{\mu}$ є спектром і $T_M(p_1,r_1)$, і $T_M(p_2,r_2)$. Це означає, що нормівні множники в'язок $T(p_1,r_1)$ та $T(p_2,r_2)$ збігаються, бо вони однозначно визначаються двома спектрами $\boldsymbol{\lambda}$ та $\boldsymbol{\mu}$ (див. (5.18)). Тоді з теореми 4.1 випливає, що $p_1=p_2$ і $r_1'=r_2'$; зокрема, $r_1-r_2=H$ з деякою сталою H. Щоб закінчити доведення, достатньо показати, що $H=0$.

Зауважимо, що рівняння (5.1) для в'язок $T_M(p_1,r_1)$ та $T_M(p_2,r_2)$ однакові. А значить, обидві в'язки мають одну і ту ж власну функцію, що відповідає спільному власному значенню μ_0; позначимо її y. Тоді $(y' - r_1 y)(1) = (y' - r_2 y)(1) = 0$ або еквівалентно $Hy(1) = 0$. Але μ_0 не є в спектрі $T(p_1, r_1)$ і $T(p_2, r_2)$, звідки $y(1) \neq 0$. Тому $H = 0$ і доведення завершено. $\square$

5.7. Алгоритм відновлення. II

Тепер сформулюємо алгоритм відновлення для другого методу розв'язування (IPS).

Нехай ми маємо пару послідовностей $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ з SD. Тоді

1. Доповнимо $\boldsymbol{\lambda}$ елементом $\lambda_0 := 0$ і позначимо нову послідовність $\boldsymbol{\lambda}^*$.
2. За допомогою послідовностей $\boldsymbol{\lambda}^*$ та $\boldsymbol{\mu}$ побудуємо функції s_1 та c за формулами (5.20) і (5.21).
3. Побудуємо послідовність (α_n) за (5.25).
4. Маючи множину пар $\mathbf{sd} = \{(\lambda_n, \alpha_n)\}_{n \in \mathbb{Z}^*}$, яка, за теоремою 5.4, належить до $SD1$, побудуємо потенціали p та q, використовуючи процедуру з розділу 4.
5. Виберемо первісну $\hat{r}$ потенціала q так, щоб зробити μ_0 власним значенням $T_M(p, r)$ (див. підрозділ 5.6).

Зауважимо, що цей метод відновлення також працює за припущення (AM*). Як уже згадувалось в кінці підрозділу 5.4, за такого припущення спектри в'язок T та T_M утворюють елемент множини SD^*. У такому випадку при розв'язуванні (IPS) візьмемо довільний елемент $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ з SD^* і покладемо $\mu_* := (\mu_0 + \mu_1)/2$. Розглянемо нову пару послідовностей $(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ таку, що $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = (\hat{\lambda}_n)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ з $\hat{\lambda}_n := \lambda_n - \mu_*$ і $\hat{\boldsymbol{\mu}} := (\hat{\mu}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ з $\hat{\mu}_n := \mu_n - \mu_*$. Зрозуміло, $(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ належить до SD. Тому, користуючись описаним алгоритмом, за цими послідовностями можемо відновити операторні в'язки $T(\hat{p}, \hat{r})$ та $T_M(\hat{p}, \hat{r})$ такі, що $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ є спектром $T(\hat{p}, \hat{r})$, а $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ — спектром $T_M(\hat{p}, \hat{r})$. Далі визначимо потенціали p та r з $\hat{p}$ та $\hat{r}$, використовуючи формули (5.4).

Зрозуміло, що ці p та r і є шуканими потенціалами.

У цьому розділі ми детально дослідили обернену спектральну задачу (IPS) відновлення рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами за двома спектрами (спектром Діріхле та спектром змішаного типу). Дослідження проводили за умови виконання припущень (AM) та (AM*), які гарантують, що спектри розглянутих задач дійсні і прості. Ми подали повний опис спектральних даних для (IPS) і запропонували два методи її розв'язання. Відповідно, довели теорему про існування та єдиність розв'язку розглянутої оберненої задачі двома способами і отримали два алгоритми відновлення шуканих потенціалів. Перший із запропонованих методів аналогічний до використаного у попередньому розділі для розв'язування оберненої задачі (IPSNC) відновлення рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами за спектром та нормівними множниками і полягає у зведенні спектральних задач (5.1), (5.2) та (5.1), (5.3) до задач для операторів Дірака спеціального вигляду.

Ми дослідили зв'язок між задачами (IPS) та (IPSNC). Це дозволило нам звести задачу відновлення за двома спектрами до задачі відновлення за спектром та нормівними множниками, а тоді використати результати попереднього розділу, щоб отримати розв'язок (IPS). В цьому і полягав другий із запропонованих методів дослідження поставленої оберненої задачі.

Результати, наведені в цьому розділі, опубліковані в працях [27, 71, 72, 76, 78, 79, 86, 87]

ВИСНОВКИ

Робота присвячена вивченню прямих та обернених спектральних задач для рівнянь Штурма–Ліувілля із енергозалежними потенціалами, що є узагальненнями класичних рівнянь Штурма–Ліувілля. Досліджено випадок із слабкими припущеннями про гладкість потенціалів таких рівнянь. Хоча відповідна теорія для класичних рівнянь Штурма–Ліувілля (також і з сингулярними потенціалами) добре розвинута, досі були отримані лише часткові результати про єдиність відновлення за сильних припущень про гладкість потенціалів.

У цій роботі вперше досліджені спектральні властивості таких рівнянь та асимптотики відповідних власних значень і власних функцій. Вперше запропоновано означення нормівних множників, що є узагальненням відповідного поняття для класичного рівняння Штурма–Ліувілля і є важливим інструментом спектральної теорії.

Ще одним результатом цього дослідження є розвиток оберненої спектральної теорії для рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами. У роботі досліджені обернені задачі відновлення таких рівнянь за двома типами спектральних даних: за спектром і нормівними множниками та за двома спектрами. В кожній з цих задач подано повний опис спектральних даних. Для першої доведено теореми про існування та єдиність розв'язку та подано і обґрунтовано відповідний алгоритм відновлення потенціалів. Для другої задачі запропоновано два методи дослідження. Відповідно, двома способами доведено теорему про існування та єдиність розв'язку та описані і обґрунтовані два алгоритми відновлення.

Результати роботи є внеском в обернену спектральну теорію диференціальних рівнянь. Запропоновані методи вивчення спектральних властивостей та розв'язування обернених задач для рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами можна використати для відповідних досліджень схожих рівнянь за інших припущень про гладкість потенціалів або у випадку інших крайових умов. Хоча описані методи вивчення обернених задач ефективно працюють за припущень, які гарантують, що спектри дійсні та прості, деякий додатковий аналіз дозволить застосувати їх і у більш загальному випадку, коли спектри містять недійсні та/або кратні власні значення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. *Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой* // Наука, Москва – 1986.
2. Березанский Ю. М. *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов* // Наук. думка, Киев – 1965.
3. Гасымов М. Г., Гусейнов Г. Ш. *Определение оператора диффузии по спектральным данным* // ДАН Азерб. ССР – 1981. – Том 37, №2. – С. 19–23.
4. Гасымов М. Г., Джабиев Т. Т. *Решение обратной задачи по двум спектрам для уравнения Дирака на конечном отрезке* // ДАН Азерб. ССР – 1966. – Том 22, №7. – С. 3–6.
5. Гельфанд И. М., Виленкин И. Я. *Обобщенные функции. Вып. 4* // Физматгиз, Москва – 1961.
6. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. *Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1951. – Том 15, №4. – С. 309–360.
7. Гохберг И. П., Крейн М. Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов* // Наука, Москва – 1965.
8. Гусейнов Г. Ш. *Обратные спектральные задачи для квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля на конечном интервале* // Спектральная теория операторов и ее приложения. – 1986. – Том 7. – С. 51–101.
9. Гусейнов Г. Ш., Максудов Ф. Г. *К решению обратной задачи рассеяния для квадратичного пучка операторов Шредингера на всей оси* // Докл.АН СССР – 1986. – Том 289, №1. – С. 42–46.

10. Гусейнов Г. Ш., Максудов Ф. Г. *Об обратной задаче рассеяния для квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля на всей оси* // Спектральная теория операторов и ее приложения, Баку – 1989. – Том 9.
11. Гусейнов И. М., Набиев И. М. *Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов* // Матем. сб. – 2007. – Том 198, №11. – С. 47–66.
12. Кадец М. И. *Точное значение постоянной Палея–Винера* // Докл. АН СССР – 1964. – Том 155, №6. – С. 1253–1254.
13. Келдыш М. В. *О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов* // Успехи математических наук – 1971. – Том 26, №4. – С. 15–41.
14. Крейн М. Г. *Решение обратной задачи Штурма–Лиувилля* // ДАН СССР – 1951. – Том 76, №1. – С. 21–24.
15. Крейн М. Г. *Об одном методе эффективного решения обратной задачи* // ДАН СССР – 1954. – Том 94, №6. – С. 987–990.
16. Левин Б. Я., Островский И. В. *О малых возмущениях множества корней функций типа синуса* // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1979. – Том 43, №1. – С. 87–110.
17. Левитан Б. М., Саргсян И. С. *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака* // Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1988. – 432 с.
18. Маркус А. С. *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков* // Штиинца, Кишинев – 1986. – 260 с.
19. Марченко В. А. *Некоторые вопросы теории линейных дифференциального оператора второго порядка* // ДАН СССР – 1950. – Том 72, №3. – С. 457–460.
20. Марченко В. А. *Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. I* // Тр. ММО – 1952. – Том 1. – С. 327–420.

21. Марченко В. А. *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения* // Штиинца, Кишинев – 1977. – 331 с.
22. Михайлец В., Молибога В. *Осцилляционные свойства решений задачи Штурма–Лиувилля с сингулярным коэффициентом* // Доповіді Національної академії наук України – 2010. – Том 8. – С. 20–24.
23. Набиев И. М. *Обратная спектральная задача для оператора диффузии на отрезке* // Матем. Физ., анал., геом. – 2004. – Том 11, №3. – С. 302–313.
24. Набиев И. М. *Обратная квазипериодическая задача для оператора диффузии* // Докл. АН – 2007. – Том 415, №2. – С. 168–170.
25. Пронська Н. *Про еквівалентність спектральних задач для оператора дифузії та оператора Дірака* // International Conference on Functional analysis dedicated to the 90th anniversary of V. E. Lyantse, November 17–21, 2010, Lviv: abstracts of reports. – Lviv, 2010. – P. 132–134.
26. Пронська Н. *Про відновлення операторів Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами* // IV-та конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача, 24–27 травня 2011 р., Львів: тези доповідей. – Львів, 2011. – С. 223–224.
27. Пронська Н. І. *Про відновлення енергозалежного рівняння Штурма–Ліувілля за двома спектрами* // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу. Всеукраїнська наукова конференція, 20–26 лютого 2012 р., Ворохта: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2012. – С. 55–56.
28. Савчук А. М., Шкаликов А. А. *Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами* // Матем. заметки – 1999. – Том 66, №6. – С. 897–912.
29. Савчук А. М., Шкаликов А. А. *Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями* // Труды Московского математического общества – 2003. – Том 64. – С. 159–212.

30. Савчук А. М., Шкаликов А. А. *О собственных значениях оператора Штурма—Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева* // Матем. заметки – 2006. – Том 80, №6. – С. 864–884.

31. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C. and Segur H. *The inverse scattering transform—Fourier analysis for nonlinear problems* // Studies in Appl. Math. – 1974. – Vol. 53, №4. – P. 249–315.

32. Adamjan V., Pivovarchik V. and Tretter C. *On a class of non-self-adjoint quadratic matrix operator pencils arising in elasticity theory* // J. Operator Theory – 2002. – Vol. 47, №2. – P. 325–341.

33. Aktosun T. and Mee van der C. *Scattering and inverse scattering for the 1-D Schrödinger equation with energy-dependent potentials* // J. Math. Phys. – 1991. – Vol. 32, №10. – P. 2786–2801.

34. Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R. and Holden H. *Solvable Models in Quantum Mechanics. With an appendix by Pavel Exner. 2nd revised ed.* // Providence, RI: AMS Chelsea Publishing – 2005.

35. Albeverio S., Hryniv R. and Mykytyuk Y. *Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials* // Russ. J. Math. Phys. – 2005. – Vol. 12, №4. – P. 406–423.

36. Albeverio S., Hryniv R. and Mykytyuk Y. *Inverse spectral problems for Bessel operators* // J. Differential Equations – 2007. – Vol. 241, №1. – P. 130–159.

37. Albeverio S. and Kurasov P. *Singular Perturbations of Differential Operators. Solvable Schrödinger Type Operators.* // Cambridge: Cambridge University Press – 1999.

38. Bognar J. *Indefinite Inner Product Spaces* // Springer-Verlag – 1974. – ix+226 p.

39. Borg G. *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte* // Acta Math. – 1946. – Vol. 78. – P. 1–96.

40. Coleman C. F. and McLaughlin J. R. *Solution of the inverse spectral problem for an impedance with integrable derivative. I, II.* // Commun. Pure Appl. Math. – 1993. – Vol. 46, №2. – P. 145–212.
41. Cox S. and Knobel R. *An inverse spectral problem for a nonnormal first order differential operator* // Integral Equations Operator Theory – 1996. – Vol. 25, №2. – P. 147–162.
42. Hryniv R. and Pronska N. *Inverse spectral problems for energy-dependent Sturm–Liouville equations* // Inverse Problems – 2012. – Vol. 28, №8. – P. 085008(21pp.).
43. Hryniv R. O. and Mykytyuk Y. V. *1-D Schrödinger operators with periodic singular potentials* // Methods Funct. Anal. Topology – 2001. – Vol. 7, №4. – P. 31–42.
44. Hryniv R. O. and Mykytyuk Y. V. *Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials* // Inverse Problems – 2003. – Vol. 19, №3. – P. 665–684.
45. Hryniv R. O. and Mykytyuk Y. V. *Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials. III. Reconstruction by three spectra* // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – Vol. 284, №2. – P. 626–646.
46. Hryniv R. O. and Mykytyuk Y. V., *Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials. II. Reconstruction by two spectra* // In Functional analysis and its applications, Elsevier Sci. B. V., Amsterdam – 2004.
47. Hryniv R. O. and Mykytyuk Y. V. *Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials. IV. Potentials in the Sobolev space scale* // Proc. Edinb. Math. Soc. (2) – 2006. – Vol. 49, №2. – P. 309–329.
48. Hryniv R. O. and Mykytyuk Y. V. *On zeros of some entire functions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 2009. – Vol. 361, №4. – P. 2207–2223.

49. Hryniv R. O. and Shkalikov A. A. *Exponential Decay of Solution Energy for Equations Associated with Some Operator Models of Mechanics* // Functional Analysis and Its Applications – 2004. – Vol. 38, №3. – P. 163-172.
50. Iohvidov I. S., Kreĭn M. G. and Langer H. *Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric* // Akademie-Verlag – 1982. – 120 p.
51. Jaulent M. *On an inverse scattering problem with an energy-dependent potential* // Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.) – 1972. – Vol. 17. – P. 363–378.
52. Jaulent M. and Jean C. *The inverse s-wave scattering problem for a class of potentials depending on energy* // Comm. Math. Phys. – 1972. – Vol. 28. – P. 177–220.
53. Jaulent M. and Jean C. *The inverse problem for the one-dimensional Schrödinger equation with an energy-dependent potential. I* // Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.) – 1976. – Vol. 25, №2. – P. 105–118.
54. Jaulent M. and Jean C. *The inverse problem for the one-dimensional Schrödinger equation with an energy-dependent potential. II* // Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.) – 1976. – Vol. 25, №2. – P. 119–137.
55. Jonas P. *On the spectral theory of operators associated with perturbed Klein–Gordon and wave type equations* // J. Oper. Theory – 1993. – Vol. 29, №2. – P. 207–224.
56. Kamimura Y. *Energy dependent inverse scattering on the line* // Differential Integral Equations – 2008. – Vol. 21, №11-12. – P. 1083–1112.
57. Kappeler T., Perry P., Shubin M. and Topalov P. *The Miura map on the line* // Int. Math. Res. Not. – 2005. – Vol. 2005, №50. – P. 3091–3133.
58. Kato T. *Perturbation Theory for Linear Operators* // Springer-Verlag New York, Inc., New York – 1966. – xix+592 p.
59. Koyunbakan H. *A new inverse problem for the diffusion operator* // Appl. Math. Lett. – 2006. – Vol. 19, №10. – P. 995–999.

60. Koyunbakan H. *Inverse problem for a quadratic pencil of Sturm–Liouville operator* // J. Math. Anal. Appl. – 2011. – Vol. 378, №2. – P. 549–554.
61. Koyunbakan H. and Panakhov E. S. *Half-inverse problem for diffusion operators on the finite interval* // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – Vol. 326, №2. – P. 1024–1030.
62. Langer H. *Spectral functions of definitizable operators in Krein spaces* // In Functional analysis (Dubrovnik, 1981), Berlin: Springer-Verlag – 1982.
63. van der Mee C. and Pivovarchik V. *Inverse scattering for a Schrödinger equation with energy dependent potential* // J. Math. Phys. – 2001. – Vol. 42, №1. – P. 158–181.
64. van der Mee C. and Pivovarchik V. *Some properties of the eigenvalues of a Schrödinger equation with energy-dependent potential* // In: Proceedings of QMath-8: Mathematical Results in quantum Mechanics (Taxco, 2001); AMS Contemporary Methematics Series – 2002.
65. Nabiev A. A. *Inverse scattering problem for the Schrödinger-type equation with a polynomial energy-dependent potential* // Inverse Problems – 2006. – Vol. 22, №6. – P. 2055–2068.
66. Nabiev A. A. and Guseinov I. M. *On the Jost solutions of the Schrödinger-type equations with a polynomial energy-dependent potential* // Inverse Problems – 2006. – Vol. 22, №1. – P. 55–67.
67. Najman B. *Eigenvalues Of The Klein–Gordon Equation* // Proc. Edinb. Math. Soc. (2) – 1983. – Vol. 26. – P. 181–190.
68. Persson A. *Compact linear mappings between interpolation spaces* // Arkiv för Matematik – 1964. – Vol. 5, №13. – P. 215–219.
69. Pöschel J. and Trubowitz E. *Inverse spectral theory* // Academic Press Inc. – 1987. – x+192 p.
70. Pronska N. *Asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions of energy-dependent Sturm–Liouville equations* // Matematychni Studii – 2013. – Vol. 40, №1. – P. 38–52.

71. Pronska N. *Reconstruction of energy-dependent Sturm–Liouville equations from two spectra* // Integral Equations and Operator Theory – 2013. – Vol. 76, №3. – P. 403–419.

72. Pronska N. *Reconstruction of energy-dependent Sturm–Liouville equations from two spectra. II* // Carpathian Mathematical Publications – 2013. – Vol. 5, №2. – P. 315–325.

73. Pronska N. *Spectral properties of Sturm–Liouville equations with singular energy-dependent potentials* // Methods Funct. Anal. Topol. – 2013. – Vol. 19, №4. – P. 327–345.

74. Pronska N. *On the inverse spectral problem for Sturm–Liouville operators with energy-dependent potentials* // Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз та Застосування", 5–15 липня 2011 р., Херсон–Лазурне: тези доповідей. – Херсон, 2011. – С. 22–23.

75. Pronska N. *Spectral properties of Sturm–Liouville operators with energy-dependent potentials* // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька, 19–23 вересня 2011 р., Дрогобич: тези доповідей. – Львів, 2011. – С. 167.

76. Pronska N. *On reconstruction of Sturm–Liouville equations with energy-dependent potentials from two spectra* // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, 19–21 квітня 2012 р., Київ: матеріали конференції II. – Київ, 2012. – С. 28.

77. Pronska N. I. *On spectra of energy-dependent Sturm–Liouville operators* // Матеріали конференції молодих учених "Підстригачівські читання – 2012", 23–25 травня 2012 р., м. Львів. – Електрон. текст. дані. – Львів: Ін-тут приклад. проблем мех. і мат. ім. Я. С. Підстригача НАН України. – URL:http://iapmm.lviv.ua/chyt2012/materials/02.pdf (дата звернення: 5.12.2017).

78. Pronska N. *On reconstruction of energy-dependent Sturm–Liouville equations from two spectra* // Spectral Theory and Differential Equations.

International Conference in honor of Vladimir A. Marchenko's 90th birthday, August 20–24, 2012, Kharkiv: book of abstracts. – Kharkiv, 2012. – P. 86–87.

79. Pronska N. *Inverse spectral problems for energy-dependent Sturm–Liouville equations* // International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, September 17–21, 2012, Lviv: abstracts of reports. – Lviv, 2012. – P. 62–63.

80. Reed M. and Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics. IV. Analysis of Operators* // Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers] – 1978.

81. Riesz F. and Sz.-Nagy B. *Functional Analysis* // Dover Publications Inc. – 1990. – xii+504 p.

82. Sattinger D. H. and Szmigielski J. *Energy dependent scattering theory* // Differential Integral Equations – 1995. – Vol. 8, №5. – P. 945–959.

83. Savchuk A. M. and Shkalikov A. A. *Inverse problem for Sturm–Liouville operators with distribution potentials: reconstruction from two spectra* // Russ. J. Math. Phys. – 2005. – Vol. 12, №4. – P. 507–514.

84. Serier F. *Inverse spectral problem for singular Ablowitz–Kaup–Newell–Segur operators on* $[0,1]$ // Inverse Problems – 2006. – Vol. 22, №4. – P. 1457–1484.

85. Shkalikov A. A. *Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics: the instability index formula* // In Operator Theory: Adv. and Appl., Birkhäuser – 1996.

86. Terlych N. *On reconstruction of energy-dependent Sturm–Liouville equations* // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики", 21–25 травня 2013 р., Львів: тези доповідей. – Т. 3. – Львів, 2013. – С. 103–104.

87. Terlych N. *Reconstruction of energy-dependent Sturm–Liouville equations* // Матеріали конференції молодих учених "Підстригачівські читання –

2017", 23–25 травня 2017 р., Львів. – Електрон. текст. дані. – Львів: Інтут приклад. проблем мех. і мат. ім. Я. С. Підстригача НАН України. – URL:http://iapmm.lviv.ua/chyt2017/abstracts/Terlych.pdf (дата звернення: 5.12.2017).

88. Terlych N. *Spectral properties of Sturm–Liouville equations with singular energy-dependent potentials* // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, September 18–23, 2017, Lviv: book of abstracts. – Lviv, 2017. – P. 55–56.

89. Teschl G. *Deforming the point spectra of one-dimensional Dirac operators* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – Vol. 126, №10. – P. 2873–2881.

90. Tsutsumi M. *On the inverse scattering problem for the one-dimensional Schrödinger equation with an energy dependent potential* // J. Math. Anal. Appl. – 1981. – Vol. 83, №1. – P. 316–350.

91. Veselić K. *Energy decay of damped systems* // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. – 2004. – Vol. 84, №12. – P. 856–863.

92. Weiss G. and Tucsnak M. *How to get a conservative well-posed linear system out of thin air. I. Well-posedness and energy balance* // ESAIM Control Optim. Calc. Var. – 2003. – Vol. 9. – P. 247–274 (electronic).

93. Yamamoto M. *Inverse spectral problem for systems of ordinary differential equations of first order. I* // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. – 1988. – Vol. 35, №3. – P. 519–546.

94. Yamamoto M. *Inverse Eigenvalue Problem for a Vibration of a String with Viscous Drag* // J. Math. Anal. Appl. – 1990. – Vol. 152. – P. 20–34.

95. Yang C. F. and Guo Y. X. *Determination of a differential pencil from interior spectral data* // J. Math. Anal. Appl. – 2011. – Vol. 375, №1. – P. 284–293.

96. Young R. M. *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series* // Academic Press – 2001. – 234 p.

Додатки

Список публікацій за темою дисертації

1. Hryniv R., Pronska N. Inverse spectral problems for energy-dependent Sturm–Liouville equations // Inverse Probl. – 2012. – Vol. 28, №8. – P. 085008.
2. Pronska N. Asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions of energy-dependent Sturm–Liouville equations // Mat. Stud. – 2013. – Vol. 40, №1. – P. 38–52.
3. Pronska N. Reconstruction of energy-dependent Sturm–Liouville equations from two spectra // Integr. Equ. Oper. Theory. – 2013. – Vol. 76, №3. – P. 403–419.
4. Pronska N. Reconstruction of energy-dependent Sturm–Liouville equations from two spectra. II // Carpathian Math. Publ. – 2013. – Vol. 5, №2. – P. 315–325.
5. Pronska N. Spectral properties of Sturm–Liouville equations with singular energy-dependent potentials // Methods Funct. Anal. Topol. – 2013. – Vol. 19, №4. – P. 327–345.
6. Пронська Н. Про еквівалентність спектральних задач для оператора дифузії та оператора Дірака// International Conference on Functional analysis dedicated to the 90th anniversary of V. E. Lyantse, November 17–21, 2010, Lviv: abstracts of reports. – Lviv, 2010. – P. 132–134.
7. Пронська Н. Про відновлення операторів Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами // IV-та конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача, 24–27 травня 2011 р., Львів: тези доповідей. – Львів, 2011. – С. 223–224.

8. Pronska N. On the inverse spectral problem for Sturm–Liouville operators with energy-dependent potentials // Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз та Застосування", 5–15 липня 2011 р., Херсон–Лазурне: тези доповідей. – Херсон, 2011. – С. 22–23.
9. Pronska N. Spectral properties of Sturm–Liouville operators with energy-dependent potentials // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька, 19–23 вересня 2011 р., Дрогобич: тези доповідей. – Львів, 2011. – С. 167.
10. Пронська Н. І. Про відновлення енергозалежного рівняння Штурма–Ліувілля за двома спектрами // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу. Всеукраїнська наукова конференція, 20–26 лютого 2012 р., Ворохта: тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2012. – С. 55–56.
11. Pronska N. On reconstruction of Sturm–Liouville equations with energy-dependent potentials from two spectra // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, 19–21 квітня 2012 р., Київ: матеріали конференції II. – Київ, 2012. – С. 28.
12. Pronska N. I. On spectra of energy-dependent Sturm–Liouville operators // Матеріали конференції молодих учених "Підстригачівські читання – 2012", 23–25 травня 2012 р., м. Львів. – Електрон. текст. дані. – Львів: Ін-тут приклад. проблем мех. і мат. ім. Я. С. Підстригача НАН України. – URL:http://iapmm.lviv.ua/chyt2012/materials/02.pdf (дата звернення: 5.12.2017).
13. Pronska N. On reconstruction of energy-dependent Sturm–Liouville equations from two spectra // Spectral Theory and Differential Equations. International Conference in honor of Vladimir A. Marchenko's 90th birthday, August 20–24, 2012, Kharkiv: book of abstracts. – Kharkiv, 2012. – P. 86–87.
14. Pronska N. Inverse spectral problems for energy-dependent Sturm–Liou-

ville equations // International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, September 17–21, 2012, Lviv: abstracts of reports. – Lviv, 2012. – P. 62–63.

15. Terlych N. On reconstruction of energy-dependent Sturm–Liouville equations // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики", 21–25 травня 2013 р., Львів: тези доповідей. – Т. 3. – Львів, 2013. – С. 103–104.
16. Terlych N. Reconstruction of energy-dependent Sturm–Liouville equations // Матеріали конференції молодих учених "Підстригачівські читання – 2017", 23–25 травня 2017 р., Львів. – Електрон. текст. дані. – Львів: Ін-тут приклад. проблем мех. і мат. ім. Я. С. Підстригача НАН України. – URL:http://iapmm.lviv.ua/chyt2017/abstracts/Terlych.pdf (дата звернення: 5.12.2017).
17. Terlych N. Spectral properties of Sturm–Liouville equations with singular energy-dependent potentials // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, September 18–23, 2017, Lviv: book of abstracts. – Lviv, 2017. – P. 55–56.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Результати дисертації здобувачка доповідала на таких конференціях та семінарах:

1. Міжнародна конференція з функціонального аналізу, присвячена 90-річчю В. Е. Лянце, (м. Львів, 17–21 листопада 2010 р.).
2. IV Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача. (м. Львів, 24–27 травня 2011 р.).
3. Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз та Застосування" (м. Херсон–Лазурне, 5–15 липня 2011 р.).
4. Вступний Воркшоп до програми "Обернені задачі" (м. Кембридж,

Великобританія, 25–29 липня 2011 р., постерна доповідь).

5. Міжнародна математична конференція імені В. Я. Скоробогатька (м. Дрогобич, 19–23 вересня 2011 р.).
6. Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (смт. Ворохта, 20–26 лютого 2012 р.).
7. Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені акад. М. Кравчука (м. Київ, 19–21 квітня 2012 р.).
8. Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2012” (м. Львів, 23–25 травня 2012 р.).
9. Міжнародна конференція, присвячена 90-річчю Володимира Марченка, “Спектральна теорія і диференціальні рівняння” (м. Харків, 28–30 серпня 2012 р.).
10. Міжнародна конференція, присвячена 120-річчю Стефана Банаха, (м. Львів, 17–21 вересня 2012 р.).
11. Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики” (м. Львів, 21–25 травня 2013 р.).
12. Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2017” (м. Львів, 23–25 травня 2017 р.).
13. Міжнародна конференція, присвячена 125-річчю Стефана Банаха, (м. Львів, 18–23 вересня 2017 р.).
14. Семінар відділу функціонального аналізу Інституту прикладних проблем механіки та математики імені Я. С. Підстригача (м. Львів, 2012 р., 2013 р.).
15. Львівський міжвузівський семінар з функціонального аналізу (м. Львів, 2013 р.).
16. Семінар кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника” (м. Івано-Франківськ, 2017 р.).