Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

На правах рукопису

Тарас Олена Геннадіївна

УДК 517.98

Алгебраїчні та топологічні структури спектрів алгебр аналітичних функцій банахового простору

01.01.01 — математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
доктор фізико-математичних наук, професор
Загороднюк Андрій Васильович

Івано-Франківськ — 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$B_r(a)$ – куля радіуса r з центром в точці a

A – банахова алгебра (можливо з одиничним елементом e)

$\mathcal{A}_n(X)$ – замикання алгебри, породженої k-однорідними поліномами на X, де $k \leq n$

A_P – симетричне n-лінійне неперервне відображення асоційоване з n-однорідним поліномом

B_r – куля радіуса r з центром в точці 0, B – одинична куля з центром в точці 0

$B(x, y)$ – білінійне відображення, $x \in X$, $y \in Y$

$\beta(\mathbb{N})$ – стоун-чехівська компактифікайія на множині натуральних чисел

c_0 – банахів простір нескінченно малих послідовностей $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, тобто таких, що $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ з нормою, індукованою з ℓ_∞

$\delta_x(f), \delta_x$ – функціонал значення деякої функції f в точці $x \in X$

Δ_n – діагональне відображення з X в X^n

Δ – деяка відкрита підмножина векторного простору X

$\dim X$ – розмірність простору X

$\deg P$ – степінь полінома P

$\mathcal{H}(\Delta; Y)$ – векторний простір всіх аналітичних відображень на $\Delta \subset X$ в Y

$\mathcal{H}(\Delta) = \mathcal{H}(\Delta; \mathbb{C})$ – простір всіх комплекснозначних аналітичних відображень на $\Delta \subset X$

$H_b(X; X)$ – алгебра Фреше аналітичних функцій обмежених на обмежених підмножинах банахового простору X зі значенням в X

$H_b(X) = H_b(X;\mathbb{C})$ – алгебра Фреше комплекснозначних аналітичних функцій обмежених на обмежених підмножинах банахового простору X

$H_b^*(X)$ – векторний простір всіх лінійних функціоналів на $H_b(X)$

$H_{uc}^{\infty}(B_r)$ – банахова алгебра всіх аналітичних комплекснозначних функцій f, які є обмеженими і рівномірно неперервними на кулі B_r радіуса $r \in \mathbb{Q}$ комплексного банахового простору X

I_n – ідеал, породжений n-однорідними поліномами з $\mathcal{A}_n$

$\ker\varphi$ – ядро деякого гомоморфізма φ

$\mathcal{L}(^nX;Y)$ – простір всіх неперервних n-лінійних відображень з X в Y

$\mathcal{L}_s(^nX;Y)$ – простір всіх симетричних n-лінійних неперервних відображень з X в Y

$\mathcal{L}(X,Y)$ – простір всіх лінійних неперервних відображень з X в Y

$\mathcal{L}(X;\mathbb{C}) = X^*$ – простір всіх лінійних неперервних функціоналів на X

ℓ_1 – банахів простір всіх абсолютно збіжних послідовностей

ℓ_2 – банахів простір всіх послідовностей $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, для яких ряд $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2 < \infty$

ℓ_∞ – банахів простір обмежених послідовностей $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ з нормою $||x||_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k|$

$M(A)$ – спектр банахової алгебри A, множина ненульових неперервних лінійних мультиплікативних функціоналів банахової алгебри A, множина неперервних комплекснозначних гомоморфізмів банахової алгебри A, множина неперервних характерів банахової алгебри A

$M_b(X), M_b$ – спектр алгебри Фреше $H_b(X)$, множина ненульових неперервних лінійних мультиплікативних функціоналів алгебри Фреше $H_b(X)$, множина неперервних комплекснозначних гомоморфізмів алгебри Фреше $H_b(X)$, множина неперервних характерів алгебри Фреше $H_b(X)$

$\mathcal{P}(^nX;Y)$ – простір n-однорідних неперервних поліномів на X зі значеннями в Y

$\mathcal{P}(^nX)$ – простір n-однорідних комплекснозначних неперервних поліномів на X

$\mathcal{P}(^nX)^*$ – простір всіх лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{P}(^nX)$

$\mathcal{P}(^{\le n}X;Y)$ – простір всіх неперервних поліномів степеня меншого або рівного n на X зі значеннями в Y

$\mathcal{P}(X;Y)$ – простір всіх неперервних поліномів на X зі значеннями в Y

Q_x – оператор "мультиплікативного" зсуву на $H_b(X)$

$R(\varphi)$ – радіус-функція функціонала φ

S_n – група підстановок на множині $\{1, \cdots, n\}$

T_x – оператор "адитивного" зсуву на $H_b(X)$

$\mathcal{T}_m : H_b(X) \to H_b(\mathcal{N}_m)$ – оператор, який звужує довільну аналітичну функцію з $H_b(X)$ на базисні вектори $e_{k_1}, \cdots, e_{k_m}$.

$\mathcal{U}$ – деякий фіксований ультрафільтр на множині натуральних чисел

$X_{\mathbb{C}}$ – комплексифікація банахового простору X

X^nY^m – декартів добуток n копій простору X та m копій простору Y

$x \to \hat{x}$ – перетворення Гельфанда

$\bigotimes^n X$ – n-тий тензорний степінь простору X на себе

$\bigotimes_{s,\pi}^n X$ – симетричний проективний n-тий тензорний степінь простору X на себе

X – комплексний або дійсний банахів простір

$\mathbb{Z}_+$ – множина цілих додатніх чисел

$\mathop{\ast}\limits_{k=1}^{n} \varphi$ – "адитивна" згортка функціоналів $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$

ВСТУП

Актуальність теми: Алгебри аналітичних функцій від нескінченної кількості змінних активно почали вивчати наприкінці двадцятого століття і продовжують досліджуватися до цього часу. Фундаментальними стали роботи Р. Арона, П. Бернера, Б. Коула, Т. Гамеліна, П. Галіндо, М. Маестре, Д. Гарсіа, Дж. Мухіка, Л. Мораеса, Ш. Дініна, А. В. Загороднюка, А. М. Плічка, О. В. Лопушанського та інших. Основними об'єктами цих досліджень стали алгебри обмежених аналітичних функцій на одиничній кулі банахового простору, алгебри аналітичних функцій обмеженого типу (цілих комплекснозначних функцій, які є обмеженими на обмежених підмножинах банахового простору), алгебри обмежених аналітичних функцій, які є рівномірно неперервними на замиканні одиничної кулі банахового простору та інші. Також, актуальним стали дослідження та опис спектрів таких алгебр (множини неперервних лінійних мультиплікативних функціоналів на відповідній алгебрі). В дисертаційній роботі розглянуто алгебри так званих блочно-діагональних аналітичних функцій, досліджено деякі їх властивості, спектр. Крім того, вивчено нові алгебраїчні та топологічні структури на спектрі алгебри аналітичних функцій обмеженого типу.

У 1951 році Р. Аренс знайшов спосіб продовження операції множення банахової алгебри A у простір A^{**}, який є другим спряженим до алгебри A так, що A^{**} також є банаховою алгеброю. Отримане продовження отримало назву “продовження Аренса”. В даній дисертаційній роботі введено “мультиплікативну” згортку на просторі, спряженому до алгебри цілих аналітичних функцій обмеженого типу на A (який містить A^{**}). Дана згортка пов'язана із операцією множення банахової алгебри A і є визначеною на A^{**}, тому введену операцію вважаємо узагальненням відомого продовження Аренса. У роботі, також показано, що множина оборотніх елементів відносно "мультиплікативної" згортки елементів спектру алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на A є аналітичним многовидом відносно деякої природньої топології.

А. В. Загороднюк встановив, що спектр алгебри аналітичних функцій обмеженого типу містить щільний лінійний підпростір всіх скінчених послідовностей $(u_1, \cdots, u_k, 0, 0, \cdots)$, де кожен u_k належить певній підмножині множини лінійних функціоналів на n-однорідних неперервних поліномах, яка є банаховим простором. Використовуючи такий погляд на елементи спектру, в роботі досліджено деякі властивості "мультиплікативної" згортки, описано правило, за яким можна "мультиплікативно" згортати елементи спектру, показано, що для операцій "адитивної" і "мультиплікативної" згортки не виконується дистрибутивний закон (побудовано контрприклад).

Добуток xy двох елементів $x, y \in A$ є білінійним відображенням, визначеним на $A \times A$. Продовження цього білінінйного відображення у $A^{**} \times A^{**}$ є продовженням Аренса операції множення алгебри A у A^{**}. Таке продовження не єдине, тому ще у 1951 році було введено поняття регулярної за Аренсом алгебри: якщо ці продовження співпадають, то алгебра називається регулярною за Аренсом. Регулярність за Аренсом проективних тензорних добутків банахових алгебр і їх прямих сум досліджували Н. Арикан, І. Пим та інші. В дисертаційній роботі показано, за яких умов n-тий симетричний проективний тензорний степінь банахової алгебри A, $n \geq 1$, а, також, передспряжений простір до алгебри аналітичних функцій обмеженого типу (позначають $H_b(A)$) є нерегулярними за Аренсом. Поняття регулярності за Аренсом природнім чином можна перенести на довільний банаховий простір X: якщо кожна білінійна форма, визначена на $X \times X$ є регулярною за Аренсом (тобто, однозначно продовжується до білінійного відображення у $X^{**} \times X^{**}$), то простір називають регулярним. В роботі досліджено умови, за яких скінчена сума n-тих симетричних проективних тензорних степенів банахового простору є нерегулярними.

Наприкінці 1930-х років Гельфанд створив теорію комутативних нормованих кілець (або комплексних банахових алгебр), розвиток якої у наші дні є однією із найбільш активних областей функціонального аналізу. Дана теорія, основна ідея якої – максимальні ідеали, має величезний вплив на алгебраїчну геометрію, гармонічний аналіз та інші галузі математики. Питання про неперервність алгебраїчних операцій (додавання і множення) у топології Гельфанда, породженої алгебрами аналітичних функцій на банаховому просторі є особливо складним у випадку довільної комплексної банахової алгебри. В дисертаційній роботі досліджено неперервність алгебраїчних операцій (додавання, множення) банахової алгебри A відносно топології Гельфанда, яка породжена алгеброю аналітичних функцій обмеженого типу на A. Для цього використано підхід, запропонований П. Хаєком у 2000 році: в якості комплексного банахового простору (алгебри) розглянуто комплексифікацію дійсного банахового простору (алгебри) і показано, що, якщо на даному просторі (алгебрі) існує розділяючий поліном (для якого інфінум значень на одиничній сфері банахового простору X більший за значення в нулі), то операція додавання (множення) не є неперервною у відповідній топології Гельфанда. В роботі також отримано схожі результати для просторів (алгебр), у яких не існує розділяючого полінома.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась в рамках науково-дослідної теми "Розробка аналітичних методів у нескінченновимірному комплексному аналізі та теорії операторів" (номер державної реєстрації 0113U007828) кафедри математичного та функціонального аналізу факультету математики та інформатики ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" та за підтримки Гранта Президента України GP/F56/176 "Алгебраїчні та топологічні структури розширень напівгруп та їх зв'язок з спектрами банахових алгебр" (номер державної реєстрації 0114U007078).

Мета і задачі дослідження.

Метою даної роботи є вивчення основних властивостей, гомоморфізмів алгебр блочно-діагональних аналітичних функцій, опис спектрів (множин максимальних ідеалів) алгебр блочно-діагональних аналітичних функцій; узагальнення продовження Аренса операції множення на спектр аналітичних функцій на банаховій алгебрі та введення на ньому нової аналітичної структури; дослідження неперервності алгебраїчних операцій в топології Гельфанда, а також вивчення умов нерегулярності за Аренсом n-ого симетричного проективного тензорного степіня банахової алгебри,

$n \geq 1$, передспряженого простору до алгебри Фреше $H_b(X)$, умов нерегулярності скінченої прямої суми n-тих симетричних проективних тензорних степенів банахового простору.

Об'єктом дослідження є поліноми, аналітичні функції від нескінченої кількості змінних на банахових просторах (алгебрах), спектр алгебр аналітичних функцій на банахових просторах та його елементи (лінійні мультиплікативні функціонали), продовження Аренса операції множення алгебри A у A^{**}, операція додавання (множення) на дійсному банаховому просторі (алгебрі), а також її продовження на ширший простір.

Предметом дослідження є властивості алгебр блочно-діагональних аналітичних функцій на банахових просторах, властивості спектру, аналітична та топологічна структури на спектрі алгебр аналітичних функцій банахового простору, умови неперервності алгебраїчних операцій, умови нерегулярності за Аренсом n-го симетричного тензорного степеня банахової алгебри.

Методи досліджень. При проведенні досліджень використовувались методи нескінченновимірного комплексного аналізу, комбінаторики, теорії ультрафільтрів та розділяючих поліномів.

Наукова новизна одержаних результатів. Всі результати, отримані в дисертації, є новими. У роботі вперше:

◇ введено поняття алгебри блочно-діагональних аналітичних функцій на банаховому просторі, описано множину характерів для конкретних часткових випадків алгебр блочно-діагональних аналітичних функцій на банахових просторах ℓ_1, ℓ_2, досліджено гомоморфізми алгебри блочно-діагональних аналітичних функцій;

◇ узагальнено продовження Аренса на простір, спряжений до алгебри аналітичних функцій обмеженого типу, введено на ньому операцію "мультиплікативної" згортки і досліджено її властивості, показано, що множина оборотних відносно "мультиплікативної" згортки елементів спектру алгебри аналітичних функцій обмеженого типу є аналітичним многовидом відносно деякої природньої топології;

◇ досліджено умови нерегулярності за Аренсом n-того симетричного проективного тензорного степеня банахової алгебри, $n \geq 1$, доведено, що топологічний векторний простір, який є передспряженим до алгебри аналітичних функцій обмеженого типу, є алгеброю відносно операцій додавання і множення – "мультиплікативної" згортки, встановлено умови, за яких на ньому існує нерегулярне за Аренсом білінійне відображення, досліджено умови нерегулярності скінченої суми n-тих симетричних проективних тензорних степенів банахового простору;

◇ доведено, що операція додавання на комплексифікації дійсного банахового простору, на якому існує розділяючий поліном, не є неперервною у топології Гельфанда, яка породжена алгеброю аналітичних функцій обмеженого типу, доведено, що покоординатна операція множення на комплексифікації ℓ_{2n}, на якому існує розділяючий поліном, не є неперервною у топології Гельфанда, досліжено неперервність операцій суми і поточкового множення в банаховій алгебрі c_0 в топології Гельфанда.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані у дисертаційній роботі результати мають теоретичний характер. Вони можуть знайти застосування у дослідженнях з теорії операторів на банахових просторах, в математичній фізиці, при дослідженні геометрії банахових просторів. Ці результати можуть бути використані в наукових дослідженнях, які проводяться в ДВНЗ "Прикарпатський національний університеті імені Василя Стефаника", Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Інституті математики НАН України, Львівському національному університеті імені Івана Франка, Харківскьому національному університет, Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича тощо.

Особистий внесок здобувача.

Всі результати отримані самостійно. У спільних статтях із А. В. Загороднюком, науковому керівнику належить постановка задачі та ідея доведення теореми 5.1.4 розділу 5.

Апробація результатів дисертації.

Основні результати дисертації доповідались на:

1) Міжнародній конференції "Сучасні проблеми аналізу" присвяченій 70-річчю кафедри математичного аналізу Чернівецького університету (Чернівці, 30 вересня – 3 жовтня 2010 року);

2) Тринадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 13-15 травня 2010 року);

3) Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 19-23 вересня 2011 року);

4) Всеукраїнському науковому семінарі "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25-28 лютого 2010 року);

5) Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 23-28 лютого 2011 року);

6) Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 20-26 лютого 2012 року);

7) Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта 25 лютого – 3 березня 2013 року);

8) Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (25 лютого – 1 березня 2015 року);

9) Чотирнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 19-21 квітня 2012 року);

10) Конференції молодих учених "Підстригачівські читання – 2015" (Львів, 26-28 травня 2015 року).

11) Науковій конференції присвяченій 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге (Чернівці, 1-4 липня 2015 року);

12) II Міжнародному семінарі з аналітичних функцій (Івано-Франківськ, 1-3 червня 2015 року);

Також результати дисертаційної роботи доповідалися на семінарах кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", відділу функціонального аналізу Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України, звітних науково-практичних конференціях ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" (23-27 березня 2009 року, 23-26 березня 2010 року), VII Літній школі Алгебра, топологія і аналіз (Верховина, 5 липня - 16 липня 2010 року), Всеукраїнському математичному конгресі – 2009 (до 100-річчя від дня народження Миколи Боголюбова).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 6 наукових працях ([12], [14], [97], [98], [99], [7]) у фахових вітчизняних та зарубіжних виданнях (самостійних – 2) та у 12 матеріалах наукових математичних конференцій та семінарів. Роботи [97], [99] опубліковано у міжнародних журналах, які включені до міжнародної наукометричної бази "Scopus".

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ

Функціональнй аналіз, як розділ математики, сформувався у середині XX-го століття, поєднюючи ідеї лінійної алгебри і загальної топології для нескінченновимірних просторів. Вивчення поліноміальних та аналітичних відображеннь для випадку просторів нескінченої розмірності почалося ще у роботах М. Фреше, В. Вольтера, Р. Гато, Р. С. Мартіна, М. Цорна, С. Мазура, В. Орліча та інших. Відомо, що С. Банах планував присвятити другий том своєї монографії [28] полілінійним і поліноміальним відображенням. Основні результати цього періоду було викладено у роботі І. Хілла, Р. Філіпса [71]. У 1969 році Л. Нахбін [86] видав монографію, з якої почалося дослідження просторів поліноміальних та аналітичних відображень як найпростіших нелінійних відображень. Тут природньо виникли питання, які властивості лінійних операторів зберігають нелінійні оператори. Я. Бознаком і Я. Сісяком у [30] було доведено, що необхідною і достатньою умовою неперервності поліноміального відображення з локально опуклого простору в локально обмежений є його обмеженість на обмежених множинах. Зокрема, якщо поліноміальне відображення неперервне в одній точці, то воно буде неперервним на всьому просторі. Схожі результати для поліноміальних та полілінійних відображень між метричними просторами (не обов'язково локально опуклими) отримані А. В. Загороднюком у [2]. Також у роботі [47] показано, що необхідною і достатньою умовою неперервності поліноміального функціонала на комплексному опуклому просторі є замкнутість його ядра і доведено теорему про замкнений графік для поліноміальних функціоналів. Подібна теорема доведена у роботі [88] у випадку поліноміального відображення між сепарабельними банаховими просторами.

Інші методи для дослідження поліноміальних відображень були розроблені у працях Р. Шатена та А. Гротендіка [94], [63], [64], К. П. Гунта і Р. А. Райан [66], [92], Р. Гато [60]. Александр Гродендік у [64] розробив так звану "локальну теорію", показавши таким чином важливість тензорного добутку для вивчення банахових просторів і операторів. Він визначив принаймні 14 можливих натуральних норм на тензорному добутку банахових просторів. Через декілька років Гордон і Левіс встановили зв'язок між цими нормами, отримавши один з класичних результатів функціонального аналізу. У [44] доведено, що існує бієкція між неперервними n-однорідними поліномами і лінійними неперервними операторами на n-тому симетричному проектривному тензорному степені банахового простору. Як наслідок, підпростором простору всіх неперервних поліномів буде простір, який є спряженим до поповнення симетричного тензорного степеня банахового простору у деякій нормі (слабшій за проективну). Теорію симетричних тензорних добутків банахових просторів розглядають у [39]. Симетричні поліноми на банахових просторах з симетричним базисом розглядались в роботах [11], [20], [40].

Монографічний виклад теорії аналітичних функцій на банахових просторах можна знайти в монографіях [70], [43], [44], [82], [77]. Сучасна теорія банахових алгебр вивчає, зокрема, алгебри аналітичних функцій на підмножинах банахового простору. Простори та алгебри аналітичних функцій однієї змінної досліджувалися у [1].

В останні роки зріс інтерес до алгебр цілих аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому простору X (позначають $H_b = H_b(X)$) [66], до алгебр обмежених аналітичних функцій на одиничній кулі B банахового простору (позначають $H^\infty(B)$), до алгебр обмежених аналітичних функцій, які є рівномірно неперервними на замкненій одиничній кулі $\overline{B}$ банахового простору (позначають $H^\infty_{uc}(B)$). Клас алгебр Фреше є ширшим ніж клас банахових алгебр. Цікавим є питання вивчення спектру алгебри Фреше (простору неперервних ненульових комплекснозначних лінійних мультиплікативних функціоналів з топологією Гельфанда). Класична теорія Гельфанда для комутативних банахових алгебр викладена в [9], [57], [91].

Першими спектр алгебри аналітичних функцій почали розглядати Р. Арон, Б. Коул, Т. Гамелін, П. Галіндо, Д. Гарсія, М. Маестре, Й. Мухіка та інші у роботах [25], [26], [37], [52], [55], [59], [83]. Одним з перших важливих результатів у цьому напрямку є результат, отриманий Р. Ароном, Б. Коулом, Т. Гамеліном у [25], [26], що спектр алгебри цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі X містить другий спряжений X^{**}. Існування характеру на $H_b(X)$, який не належить до X^{**}, випливає з існування полінома, який не є слабко неперервним на обмежених множинах [27]. Цей результат був узагальнений для алгебро-значних аналітичних функцій в [59]. В роботі [27] показано, що спектр алгебри $H_b(X)$ збігається з X^{**}, якщо поліноми скінченого типу є щільними в $H_b(X)$ [25], [26].

Спектр алгебри $H^\infty(B)$ обмежених аналітичних функцій на одиничній кулі B банахового простору X досліджувався у роботі [26]. Був запропонований підхід вивчати алгебру $H_b(X)$ – комплекснозначних аналітичних функцій обмеженого типу з топологією рівномірної збіжності на обмежених підмножинах банахового простору X і її спектр $M_b(X) = M_b$ – множину ненульових неперервних лінійних мультиплікативних функціоналів на $H_b(X)$. Природним чином тут вводиться радіус-функція R на M_b і вивчаються її властивості:

$$R(\varphi) = \limsup_{n\to\infty} ||\varphi_n||^{1/n},$$

де φ_n – звуження φ на простір n-однорідних поліномів.

У роботі [26] показано, що підмножину $\{R \leq 1\}$ в $M_b(X)$ можна ототожнювати зі спектром алгебри $H^\infty_{uc}(B)$, а підмножину $\{R < 1\}$ можна ототожнювати з деякою підмножиною спектру алгебри $H^\infty(B)$ (аналогічно, як відкритий одиничний диск в комплексній площині Δ відповідає підмножині спектру алгебри $H^\infty(\Delta)$). Цей факт дає можливість, вивчаючи спектр $M_b(X)$, отримати нову інформацію про спектри алгебр $H^\infty(B)$, $H^\infty_{uc}(B)$.

Ключовим питанням у вивченні спектру алгебр аналітичних функцій є питання про продовжуваність функціоналів з підпростору на ширший простір. Класичним результатом є відома теорема Гана-Банаха [28] про продовження обмеженого лінійного функціонала, визначеного на підпросторі деякого векторного простору на весь простір. Але скалярозначні поліноміальні і полілінійні відображення (як найпростіші приклади нелінійних відображень), тим більше, у нескіченовимірному випадку не продовжуються, в загальному випадку, за теоремою Гана-Банаха на весь простір.

Інший підхід до вивчення продовжуваності аналітичних відображень на топологічному векторному просторі було розглянуто Ш. Дініном, [45] [46], П. Боландом [32] та іншими. Було встановлено умови існування аналітичного продовження, визначеного на щільному (векторному) підпросторі локально-опуклого простору, умови існування аналітичного продовження, визначеного на замкнутому підпросторі ядерного простору Фреше тощо.

У 1978 році Р. Арон і П. Бернер у роботі [23] показали, що будь-яке n-лінійне відображення на $\underbrace{X \times \cdots \times X}_{n}$ може бути продовжено до неперервного n-лінійного відображення на $\underbrace{X^{**} \times \cdots \times X^{**}}_{n}$. Оскільки будь-якому n-однорідному поліному на X відповідає єдине n-лінійне симетричне відображення на $\underbrace{X \times \cdots \times X}_{n}$ [44], то отримане продовження n-лінійного відображення задає деяке продовження n-однорідного полінома, визначеного на X у другий спряжений X^{**}. Єдиність такого продовження, яке отримало назву продовження Арона-Бернера, показано у роботах [26], [78], [79]. У 1989 році А. Давіє і Т. Гамелін в [41] запропонували інший підхід до продовження поліномів у другий спряжений простір, який, проте, є еквівалентним до підходу Арона-Бернера. В оглядових роботах І. Зальдуендо [109], [110] детально описав продовження Арона-Бернера з точки зору різних підходів. Продовження поліномів на банаховому просторі у довільний ширший банахів простір розглядається у [74]. У роботах [81], [24], [109], [39], [93], [36] також отримані певні результати з питання продовжуваності поліномів і полілінійних відображень з банахового простору на ширший простір.

Простір всіх неперервних поліномів є щільним підпростором в алгебрі аналітичних функцій обмеженого типу в топології, яка породжена зліченою системою мультиплікативних напівнорм на обмежених підмножинах банахового простору. Отже, використовуючи продовження Арона-Бернера, всі аналітичні функції обмеженого типу з $H_b(X)$ можна продовжити на $H_b(X^{**})$. Множина таких продовжень утворює замкнену підалгебру в $H_b(X^{**})$ [41], [53],[51], [53].

Застосовуючи цю ідею до симетричних тензорних добутків, А. Загороднюк у роботах [107], [106], [108] показав, що кожен елемент спектру $M_b(X)$ може бути представлений у вигляді послідовності функціоналів $(u_k)_{k=1}^{\infty}$, де кожен u_k належить до банахового простору E_k, де $E_1 = X^{**}$ і E_k збігається зі спеціальним підпростором лінійних функціоналів на k-однорідних поліномах. Іншими словами, спектр алгебри $H_b(X)$ містить щільний лінійний простір всіх скінчених послідовностей $(u_1, \cdots, u_k, 0, 0, \cdots)$. Це дозволило ввести структуру лінійного простору на множині $M_b(X)$.

Використовуючи операцію додавання на банаховому просторі X, Р. Ароном, Б. Коулом, Т. Гамеліном у [26] була введена операція "адитивної" згортки з одиницею δ_o (функціонал значення функції з $H_b(X)$ в точці 0) на просторі $H_b^*(X)$ – спряженому просторі до $H_b(X)$ (спектр такої алгебри є напівгрупою відносно "адитивної" згортки). В роботі доведено, що радіус функція "адитивної" згортки менша або рівна сумі радіус функцій кожного з функціоналів з $H_b^*(X)$, встановлено асоціативність згортки на $H_b^*(X)$ та інші властивості.

Відомою є гіпотеза Майкла [80] про те, що всі лінійні мультиплікативні функціонали довільної алгебри Фреше є неперервними. Ця гіпотеза має відношення до алгебр аналітичних функцій обмеженого типу. Так, зокрема, у [82] Ж. Мухіка показав, що відповідь на гіпотезу Майкла позитивна тоді і тільки тоді, коли всі лінійні мультиплікативні функціонали алгебри $H_b(X)$ є неперервними для деякого нескінченновимірного банахового простору X з базисом Шаудера.

У випадку банахової алгебри A, Річард Аренс у [21] визначив дві операції множення в другому спряженому просторі A^{**}. Кожна з них є продовженням початкової операції множення алгебри A. Якщо ці два продовження співпадають, то алгебру A називають регулярною за Аренсом. Для комутативних банахових алгебр у роботі С. Гуліка [65] описано необхідні і достатні умови того, щоб ці дві операції множення у A^{**} співпадали.

А. Улгер, використовуючи теорію слабкокомпактних операторів, в роботах [103], [104], [105] досліджує клас алгебр, які є нерегулярними за Аренсом. Алгебри, які є регулярними за Аренсом вивчають С. Шерман, І. Хенфілд, І. Пим та інші. У [95] показано, що C^*-алгебри є завжди регулярними за Аренсом. Фундаментальні результати були отримані І. Хенфілдом [69], І. Пимом [89], [90] використовуючи критерій Гротендіка [64], [63] для слабкої компактності.

Важливим питанням у дослідженнях, які пов‘язані із регулярними за Аренсом алгебрами, є побудова за даною алгеброю нової регулярної за Аренсом алгебри. У роботі [102] розглядається регулярність за Аренсом проективного тензорного добутку регулярних за Аренсом банахових алгебр.

Одним із ключових досліджень теорії алгебр аналітичних функцій на банахових просторах є питання існування структури аналітичного многовиду на спектрах таких алгебр, тобто існування природної топології на спектрі даної алгебри, системи карт (атласу) та множини локальних аналітичних гомоморфізмів, які перетворюють цей спектр на аналітичний многовид. Це питання активно досліджувалось у скінченовимірному випадку в роботах [25], [56].

У нескінченновимірному випадку у роботі [27] побудовано нескінченновимірну аналітичну структуру на спектрі алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на відкритих підмножинах банахового простору X. Для аналітичних відображень у довільний векторний простір отримано схожі результати у роботі [58]. У другій частині монографії П. Мазе [78] вивчаються абстрактні многовиди над локально опуклими просторами.

Існування розділяючого полінома на банаховому просторі (для якого інфінум значень на одиничній сфері більший за значення в нулі) дає важливу інформацію про структуру банахового простору X. Вперше розділяючі поліноми були досліджені Д. Курцвелем у [75], [76]. Він показав, що, якщо в дійсному просторі X існує розділяючий поліном, то кожна неперервна функція на X апроксимується аналітичними функціями рівномірно на всьому просторі. Існують простори у яких не існує розділяючих поліномів (наприклад простір c_0). Р. Девіль у роботі [42] дав характеристику простору, який допускає існування на ньому розділяючого полінома. Якщо на банаховому просторі не існує розділяючого полінома, то сучасний підхід для апроксимації неперервних функцій аналітичними був вперше запропонований М. Бойзо і П. Хайєком [31], [68].

В теорії нескінчено-вимірних аналітичних функцій цікавим є питання існування передспряженого простору до даного локально-опуклого простору. Базовим результатом є робота Ж. Мухіка і Л. Нахбіна [84]. Вони, використовуючи поняття індуктивної границі, запропонували конструктивний метод побудови передспряженого простору до $H_b(U)$, де U – відкрита підмножина банахового простору X [51].

РОЗДІЛ 2

ОСНОВНІ МЕТОДИ ТА ПОПЕРЕДНІ РЕЗУЛЬТАТИ, ЯКІ ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ У ДИСЕРТАЦІЇ

2.1. n-лінійні відображення, неперервні поліноми, проективні тензорні степені банахового простору

Нехай X, Y – комплекні банахові простори. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ позначимо $\mathcal{L}(^n X, Y)$ векторний простір всіх неперервних n-лінійних відображень $A : X \times \cdots \times X \to Y$ з нормою

$$||A|| = \sup\{||A(x_1, \cdots, x_n)|| : x_j \in X, \quad \max ||x_j|| \leq 1\}. \qquad (2.1.1)$$

Підпростір симетричних n-лінійних відображень таких, що

$$A(x_1, \cdots, x_n) = A(x_{s(1)}, \cdots, x_{s(n)}), \qquad s \in \sigma_n,$$

де σ_n – група підстановок $s : \{1, \cdots, n\} \to \{s(1), \cdots, s(n)\}$, позначимо $\mathcal{L}_s(^n X, Y)$ відповідно. Простори $\mathcal{L}(^n X, Y)$, $\mathcal{L}_s(^n X, Y)$ є банаховими відносно норми (2.1.1) на одиничній кулі в X^n. Зокрема, якщо $n = 1$, то $\mathcal{L}(X, Y)$ – простір всіх лінійних неперевних операторів, що діють з X в Y, $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ – спряжений простір до X.

Теорема 2.1.1 ([82]). *Нехай $A \in \mathcal{L}(^n X, Y)$. Тоді для будь-яких $x, y \in X$ справедлива біноміальна формула*

$$A(x + y, \cdots, x + y) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A(\underbrace{x, \cdots, x}_{n-j}, \underbrace{y, \cdots, y}_{j})$$

і поляризаційна формула

$$A(x_1, \cdots, x_n) =$$

$$\frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \quad A(\underbrace{x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots \varepsilon_n x_n, \cdots, x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots \varepsilon_n x_n}_{n}).$$

Нехай X, Y – комплексні банахові векторні простори. Для довільних $n, m \in \mathbb{N}$ позначимо декартів добуток n копій X та m копій Y через $X^n Y^m$, тобто елемент $x^n y^m = (x, \cdots, x, y, \cdots, y)$ належить до $X^n Y^m$. Відображення $\Delta_n : X \to X^n$ кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність діагональ в X^n:

$$x \mapsto (x \cdots, x).$$

Відображення P з X в Y називається *неперервним n-однорідним поліномом*, якщо

$$P(x) = (A \circ \Delta_n)(x) \quad \text{для деякого } A \in \mathcal{L}(^n X; Y).$$

Позначимо $\mathcal{P}(^n X; Y)$ – векторний простір всіх неперервних n-однорідних поліномів з нормою:

$$||P|| = \sup_{x \in B} ||P(x)||.$$

Дану норму називають *нормою рівномірної збіжності на одиничній кулі B з центром в точці 0 в X.*

Простір $\mathcal{P}(^0 X; Y)$ складається зі сталих функцій, $\mathcal{P}(^1 X; \mathbb{C})$ збігається зі спряженим простором X^*.

Теорема 2.1.2 ([82]). *Відображення $A \to A \circ \Delta_n$ є ізоморфізмом між банаховим простором $\mathcal{L}_s(^n X; Y)$ і простором n-однорідних неперервних поліномів $\mathcal{P}(^n X; Y)$.*

Наслідок 2.1.3. *Для довільного полінома $P \in \mathcal{P}({}^n X; Y)$ існує єдине n-лінійне симетричне відображення $A_P \in \mathcal{L}_s({}^n X; Y)$ таке, що звуженням його на діагональ є даний n-однорідний поліном P, тобто $P = A_P \circ \Delta_n$. Це відображення називають n-лінійним симетричним відображенням, асоційованим із даним n-однорідним поліномом.*

Позначимо $X^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ – векторний простір скінчених формальних сум вигляду:

$$\sum_{i_1, \cdots, i_n \in \mathbb{N}} \lambda_{i_1, \cdots, i_n}(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}), \qquad \lambda_{i_1, \cdots, i_n} \in \mathbb{C}, (x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}) \in X^n.$$

Позначимо через I підпростір в $X^{(n)}$, для всіх $1 \leq k \leq n$, $\lambda \in \mathbb{C}$, породжений елементами вигляду

$$(x_{i_1}, \cdots, x_{i_k} + x_{i'_k}, \cdots, x_{i_n}) - \\ (x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}, \cdots, x_{i_n}) - (x_{i_1}, \cdots, x_{i'_k}, \cdots, x_{i_n}), \\ (x_{i_1}, \cdots, \lambda x_{i_k}, \cdots, x_{i_n}) - \lambda(x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}, \cdots, x_{i_n}).$$

Фактор-простір $\bigotimes^n X := X^{(n)}/I$ називається *n-тим тензорним степенем простору X.*

На $\bigotimes^n X$ розглянемо проективну тензорну норму [63]

$$||w|| = \inf \Big\{ \sum_{i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}} ||x_{i_1}|| \cdots ||x_{i_n}|| : \\ w = \sum_{i_1, \cdots, i_n \in \mathbb{N}} (x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_n}) \in \otimes^n X \Big\},$$

де інфімум берется по всіх можливих зображеннях $w \in \bigotimes^n X$. Позначимо $\bigotimes_\pi^n X$ – поповнення $\bigotimes^n X$ за проективною тензорною нормою. Простір $\bigotimes_\pi^n X$ називається *проективним тензорним степенем простору X.*

Теорема 2.1.4 ([82]). *Простір $\mathcal{L}(^n X, Y)$ ізометрично ізоморфний до простору лінійних неперервних відображень $\mathcal{L}(\bigotimes_\pi^n X, Y)$ з проективного тензорного степеня $\bigotimes_\pi^n X$ в Y.*

Симетричний тензорний степінь $\bigotimes_s^n X$ простору X є підпростором $\bigotimes^n X$ і породжений векторами вигляду

$$x_1 \otimes_s \cdots \otimes_s x_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)},$$

де $x_i \in X$ і S_n – група підстановок на множині $\{1, \cdots, n\}$.

Кожен елемент симетричного тензорного степеня $w_n \in \bigotimes_s^n X$ простору X має зображення $w_n = \sum_i \underbrace{x_i \otimes \cdots \otimes x_i}_{n}$, $x_i \in X$ з еквівалентною нормою до проективної тензорної норми:

$$|||w_n||| := \inf \Big\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} ||x_i||^n : w_n = \sum_{i \in \mathbb{N}} (x_i \otimes \cdots \otimes x_i) \in \otimes_s^n X \Big\},$$

де інфімум береться по всіх можливих зображеннях елемента w_n. Таке зображення не є єдиним. *Симетричний проективний тензорний степінь* $\bigotimes_{s,\pi}^n X$ банахового простору X – поповнення $\bigotimes_s^n X$ за нормою $|||\cdot|||$ і є замкненим підпростором в $\bigotimes^n X$.

Позначимо $x^{\otimes n} := \underbrace{x \otimes \cdots \otimes x}_{n}$.

Теорема 2.1.5 ([44], [43]). *Простір $\mathcal{L}(\bigotimes_{s,\pi}^n X; Y)$ ізоморфний до простору $\mathcal{L}_s(^n X; Y)$.*

Теорема 2.1.6 ([77]). *Простір лінійних неперервних відображень $\mathcal{L}((\bigotimes_{s,\pi}^n X; |||\cdot|||); Y)$ з $\bigotimes_{s,\pi}^n X$ в Y ізометричний до простору n-однорідних неперервних поліномів $\mathcal{P}(^n X; Y)$ для кожного банахового простору Y.*

Якщо $Y = \mathbb{C}$, то позначимо $\mathcal{P}(^n X; \mathbb{C}) = \mathcal{P}(^n X)$ і з теореми випливає, що

$$\Big(\bigotimes_{s,\pi}^n X, |||\cdot|||\Big)^* \simeq \mathcal{P}(^n X).$$

Відображення $P : X \to Y$ називається *поліномом степеня n* (*поліноміальним відображенням*), якщо

$$P = P_0 + P_1 + \cdots P_n, \quad \text{де}$$

$$P_0 \in Y, \quad P_n \in \mathcal{P}(^n X; Y), \quad P_n \neq 0.$$

Простір всіх поліномів з X в Y позначимо $\mathcal{P}(X; Y)$, якщо $Y = \mathbb{C}$, то $\mathcal{P}(X; \mathbb{C}) = \mathcal{P}(X)$.

За побудовою простір $\mathcal{P}(X; Y)$ складається з неперервних поліномів у топології, яка породжена нормою рівномірної збіжності на одиничній кулі

$$||P|| = \sup_{x \in B} ||P(x)||. \tag{2.1.2}$$

Таким чином, $\mathcal{P}(X; Y)$ є (неповним) нормованим простором.

Використовують позначення $\mathcal{P}(^{\leq n} X; Y)$ – простір всіх неперервних поліномів степеня меншого або рівного n на X. Зокрема $\mathcal{P}(^{\leq n} X)$ ізоморфний прямій сумі просторів $(\bigotimes_{s,\pi}^k X)^*$, $0 \leq k \leq n$.

Слабкополіноміальною топологією на банаховому просторі X називається найслабша топологія, в якій всі поліноми з $\mathcal{P}(X)$ є неперервними. Іншими словами, базу слабкополіноміальної топології утворюють прообрази відкритих множин при дії поліноміального відображення P для всіх $P \in \mathcal{P}(X)$.

Нехай $P \in \mathcal{P}(^{km}X)$ для деяких натуральних чисел k, m, A_P – відповідна симетрична km-лінійна форма, яка асоційована із поліномом P. Розглянемо $A_P(x_1^m, \cdots, x_k^m)$ для деяких $x_1, \cdots, x_k \in X$. Для фіксованих

$$x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_k, \qquad 1 \leq j \leq k,$$

форма $A_P(x_1^m, \cdots, x_j^m, \cdots, x_k^m)$ є m-однорідним поліномом для $x_j \in X$, а, отже, на неї можна дивитися як на неперервний лінійний функціонал на $\bigotimes_{s,\pi}^n X$ в точці $x_j^{\otimes m}$. Оскільки це справедливо для кожного $1 \leq j \leq k$, то існує неперервне симетричне m-лінінйне відображення $A_{P_{(m)}} : (\bigotimes_{s,\pi}^m X)^m \to \mathbb{C}$ таке, що

$$A_{P_{(m)}}(x_1^{\otimes m}, \cdots, x_k^{\otimes m}) = A_P(x_1^m, \cdots, x_k^m). \tag{2.1.3}$$

Позначимо $P_{(m)}(x^{\otimes m}) := A_{P_{(m)}}(x_1^{\otimes m}, \cdots, x_k^{\otimes m})$.

Означення і деякі приклади розділяючих поліномів

Розділяючі поліноми були вперше розглянуті Й. Курцевелем у 1954 році [75] і досліджувалися в [76].

Неперервний поліном $P : X \to \mathbb{R}$ називається *розділяючим* якщо

$$\inf_{||x||=1} |P(x) - P(0)| > 0.$$

Тобто, поліном P розділяє значення в нулі $P(0) = 0$ від значення на одиничій сфері

$$\inf \Big\{ |P(x)| : ||x|| = 1 \Big\} > 0.$$

Розглянемо деякі приклади розділяючих поліномів.

Приклад 2.1.7. *Будь-який простір скінченої розмірності допускає існування розділяючого полінома.*

Приклад 2.1.8. *На нескінченновимірному гільбертовому просторі розділяючий поліном можна визначити як* $P(x) = B(x, x) = ||x||^2$, *де* $B(x, y)$ *– скалярний добуток у даному нескінченновимрному гільбертовому просторі.*

Приклад 2.1.9. *Нехай* $(T, \mathcal{A}, \mu)$ *- простір з мірою* μ, *визначеною на* σ*-алгебрі* $\mathcal{A}$ *вимірних множин з одиницею з* T. *Простір* $L_p(\mu)$ *– простір усіх вимірних функцій* $f : T \to \mathbb{K}$, *для яких існує скінчений інтеграл* $\int_T |f(t)|^p d\mu(t)$ *і нормою*

$$||f||_p = \left(\int_T |f(t)|^p d\mu(t)\right)^{1/p}.$$

Для $p = 2n$ *– ціле парне число, розділяючим* $2n$*-однорідним поліномом буде* $P(f) = ||f||^{2n} = \int_T f^{2n}(t) d\mu(t)$. *Якщо* $p \neq 2n$, *то розділяючого полінома на* $L_p(\mu)$ *не існує* [33].

Приклад 2.1.10. *На лінійному просторі* c_0 *всіх нескінченно малих скалярних послідовностей* $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$, *тобто таких, що* $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ *з нормою*

$$||x|| = \max_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$$

не існує розділяючого полінома. Це випливає з того, що будь-який поліном на c_0 *є слабко неперервним на обмежених множинах. Тому, якщо* P *– розділяючий поліном на* c_0 *такий, що* $P(0) = 0$ *і* $\{e_j\}$

– базис Шаудера такий, що $e_j = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$*, тоді*

$$\inf_{j\in\mathbb{N}} |P(e_j)| = 0$$

а це суперечить означенню розділяючого полінома [87].

Детальніше про розділяючі поліноми можна знайти у [62], [61].

2.2. Аналітичні відображення, алгебри аналітичних функцій обмеженого типу

Нехай X – комплексний банахів простір. Позначимо $B_r(a)$ – відкрита куля радіуса $r > 0$ із центром у точці $a \in X$. Нехай Δ – відкрита підмножина простору X.

Відображення $f : \Delta \to \mathbb{C}$ називається *аналітичним в точці* $a \in \Delta$, якщо існує куля $B_r(a) \subset \Delta$ і послідовність n-однорідних неперервних поліномів $P_n \in \mathcal{P}(^n X)$ таких, що ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x - a)$$

збігається до $f(x)$ рівномірно на $B_r(a)$. Цей ряд називається *рядом Тейлора* функції f в точці $a \in X$. Функція f називається *аналітичною* (*аналітичним відображенням*), якщо вона є аналітичною в кожній точці з підмножини Δ.

Лінійний простір всіх аналітичних відображень з Δ в Y позначають $\mathcal{H}(\Delta, Y)$. Якщо $Y = \mathbb{C}$, тоді $\mathcal{H}(\Delta, \mathbb{C}) = \mathcal{H}(\Delta)$. Якщо $\Delta = X$, тоді відображення $f \in \mathcal{H}(X, Y)$ називають *цілим.*

Позначимо $H_b(X)$ – простір всіх цілих комплекснозначних функцій обмеженого типу, тобто простір всіх аналітичних функцій які є обмеженими на обмежених підмножинах X з топологією, яка породжена зліченою системою напівнорм

$$||f||_r = \sup_{x \in B_r} |f(x)|, \quad f \in H_b(X), \tag{2.2.1}$$

де r – раціональні невід'ємні числа, B_r – куля з центром в 0 і радіусом r в X.

Алгеброю Фреше називають локально-опуклий метризований простір Z з топологією, яка породжена зліченою системою напівнорм q_j таких, що для довільних $x, y \in Z$

$$q_j(xy) \le q_j(x) q_j(y), \qquad j = 1, 2, \cdots .$$

Простір $H_b(X)$ з топологією, яка породжена зліченою системою напівнорм (2.2.1) є локально-опуклим метризованим простором, тобто є алгеброю Фреше [50].

Довільну аналітичну функцію $f \in H_b(X)$ можна розкласти в ряд Тейлора в точці 0: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$, де $P_n \in \mathcal{P}(^n X)$, $n \ge 0$, який збігається рівномірно в $H_b(X)$ на кожній кулі B_r скінченного радіуса в X. Отже, будь-яку аналітичну функцію з $H_b(X)$ можна наблизити поліномами з $\mathcal{P}(X)$, тобто простір поліномів $\mathcal{P}(X)$ є щільною підмножиною $H_b(X)$ [25].

Розглянемо $H_b^*(X)$ – спряжений простір до $H_b(X)$.

Позначимо φ_n – звуження функціонала φ на простір n-однорідних поліномів $\mathcal{P}(^n X)$. Тоді φ_n є лінійним обмеженим функціоналом на $\mathcal{P}(^n X)$, а, отже, неперервним. Визначимо норму лінійного неперервного функціонала φ_n на $\mathcal{P}(^n X)$:

$$||\varphi_n|| = \sup_{||P|| \le 1} \Big\{ |\varphi(P)| : P \in \mathcal{P}(^n X) \Big\}.$$

Спряжений простір до простору всіх лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{P}(^n X)$ позначимо $\mathcal{P}(^n X)^*$.

Теорема 2.2.1. [25] *Нехай $\varphi_n \in \mathcal{P}(^n X)^*$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ такі, що*

$$||\varphi_n|| \le cr^n$$

для деяких $c, r > 0$. Тоді існує єдиний функціонал $\varphi \in H_b^*(X)$ такий, що його звуження на $\mathcal{P}(^n X)$ дорівнює φ_n для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$.

Кожен функціонал $\varphi \in H_b^*(X)$ є неперервним відносно норми (2.2.1) на кулі B_r в X.

Радіус функцією $R(\varphi)$ функціонала $\varphi \in H_b^*(X)$ називається інфімум по всіх номерах $r > 0$ таких, що φ є неперервним відносно норми (2.2.1) на кулі B_r.

Теорема 2.2.2. [25]. *Радіус функція R функціонала $\varphi \in H_b^*(X)$ визначаєтъся наступним чином:*

$$R(\varphi) = \lim\sup_{n \to \infty} ||\varphi_n||^{1/n}, \tag{2.2.2}$$

де φ_n – звуження функціонала φ на $\mathcal{P}(^n X)$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$.

2.3. Банахові алгебри. Спектр банахової алгебри

Алгеброю називається векторний простір A над полем скалярів $\mathbb{K}$, в якому визначено операцію множення, що задовольняє умови:

$$x(yz) = (xy)z,$$

$$(x+y)z = xz + yz, \qquad x(y+z) = xy + xz,$$

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$$

для всіх елементів $x, y, z \in A$ і всіх скалярів α.

Алгебра A є банаховим простором відносно деякої норми, яка задовольняє мультиплікативну нерівність

$$||xy|| \leq ||x||||y|| \qquad x, y \in A,$$

(операція множення алгебри A є неперервною відносно цієї норми), а, також, містить одиничний елемент e такий, що для будь-якого $x \in A$

$$xe = ex = x, \qquad ||e|| = 1,$$

отже, A називають *банаховою алгеброю.* Якщо виконується умова $xy = yx$ для всіх елементів $x, y \in A$, то алгебру A називають *комутативною банаховою алгеброю.*

Елемент $x \in A$ є *оборотним* відносно операції множення алгебри A, якщо до нього існує *обернений* елемент в A, тобто існує такий $x^{-1} \in A$, що

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e.$$

Теорема 2.3.1 (властивості оборотніх елементів банахової алгебри). *Нехай A – банахова алгебра. Тоді*

1. *Для довільного $x \in A$, $||x|| < 1$ елемент $e - x$ є оборотним і $(e-x)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m$.*
2. *Множина всіх оборотніх елементів U є відкритою.*
3. *Відображення $x \in U \mapsto x^{-1} \in A$ є аналітичним.*

Доведення можна знайти у [82], [91].

Нехай A – банахова алгебра над полем $\mathbb{C}$ (комплексна банахова алгебра).

Спектром елемента $x \in A$ називається множина всіх $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, що елемент $x - \lambda e$ є необоротнім і позначається $\sigma(x)$. *Спектральний радіус* елемента x визначається за формулою:

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}|.$$

Теорема 2.3.2 ([91]). *Нехай $x \in A$. Тоді*

1. *Множина $\sigma(x)$ є непорожнім компактом.*
2. *$\lambda^m \in \sigma(x^m)$ для довільного $\lambda \in \sigma(x)$ і $m \in \mathbb{N}$.*
3. *Спектральний радіус дорівнює*

$$\rho(x) = \lim_{m \to \infty} ||x^m||^{1/m}.$$

Підмножина I комутативної комплексної алгебри A називається *ідеалом*, якщо I є лінійним підпростором в A і $xa \in I$ для всіх $x \in I$, $a \in A$. Якщо $I \neq A$, то ідеал I називається *власним.* Власний ідеал, який не міститься в жодному більшому власному ідеалі називається *максимальним.* З леми Цорна [111], [112] випливає, що будь-який власний ідеал міститься у деякому максимальному.

Радикалом алгебри A називають перетин всіх її максимальних ідеалів. Якщо радикал містить тільки нуль, то алгебру A називають *напівпростою.*

Теорема 2.3.3 ([91]). *Нехай A – комутативна банахова алгебра, тоді*

1. *Замикання власного ідеала є власним ідеалом.*
2. *Будь-який максимальний ідеал є замкненим.*

Нехай A – комплексна банахова алгебра (необов'язково комутативна). Лінійний мультиплікативний функціонал $h : A \to \mathbb{C}$ відмінний від нуля називають *комплексним гомоморфізмом* або *характером* алгебри A. Множину всіх таких характерів позначають $M(A)$ і називають *спектром* алгебри A.

Теорема 2.3.4 (про взаємоoднозначну відповідність між множиною максимальних ідеалів і спектром алгебри A). *Нехай A – комутативна банахова алгебра. Ядро будь-якого комплексного гомоморфізма на A є максимальним ідеалом в A і навпаки, будь-який максимальний ідеал в A є ядром деякого єдиного комплексного гомоморфізма на A.*

Доведення цього факту можна знайти, наприклад, у [16],[69],[48].

Нехай A – комутативна напівпроста банахова алгебра. Функція

$$\hat{x}(h) = h(x), \qquad h \in M(A), \quad x \in A$$

кожному елементу $x \in A$ ставить у відповідність функцію $\hat{x} : M(A) \to \mathbb{C}$. Функція $\hat{x}$ називається *перетворенням Гельфанда.*

Топологією Гельфанда на $M(A)$ називається найслабша топологія, в якій всі функції $\hat{x}$ є неперервними. Оскільки існує взаємооднозначна відповідність між максимальними ідеалами комутативної алгебри A і елементами множини $M(A)$, то множина $M(A)$, наділена топологією Гельфанда, називається *простором максимальних ідеалів* алгебри A.

Теорема 2.3.5 ([91]). *Спектр $M(A)$ з топологією Гельфанда є компактним гаусдорфовим простором.*

2.4. Напрямленості, ультрафільтри, стоун-чехівська компактифікація

Напрямленості. Непорожня частково-впорядкована множина $(\mathfrak{A}, \leq)$ називається *напрямленою множиною*, якщо

— відношення "$\leq$" є транзитивним і рефексивним;

— для будь-яких $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{A}$ існує $\alpha_3 \in \mathfrak{A}$ таке, що $\alpha_3 \geq \alpha_1$ і $\alpha_3 \geq \alpha_2$.

Нехай $\{N_x\}$ – непорожня система околів елемента x довільного простору X з відношенням порядку "$\leq$". При чому $N_1 \leq N_2$ тоді і тільки тоді, коли $N_1 \supseteq N_2$. Легко бачити, що $(N_x, \leq)$ є напрямленою множиною.

Напрямленістю в X називають функцію $f : N_x \to X$, де в якості напрямленої множини N_x можна взяти систему околів елемента x. Позначають або $(x_\alpha) \subset X$, де $\alpha \in N_x$. Напрямленість (x_α) в просторі X є *збіжною* до x, якщо для всіх $N \in \{N_x\}$ і для всіх $\alpha_0 \in N_x$

існує таке $\alpha \geq \alpha_0$, для якого $x_\alpha \in N$:

$$\lim_{\alpha} x_\alpha = x.$$

Теорема 2.4.1. [38] *Простір X є гаусдорфовим тоді і тільки тоді, коли кожна напрямленість в X є збіжною принаймні в одній точці $x \in X$.*

Нехай X^{**} – другий спряжений простір до X.

Теорема 2.4.2 (Теорема Голдстейна). [49] *Відкрита одинична куля B простору X є щільною у одиничній кулі B^{**} простору X^{**} у $*$-слабкій топології.*

Означення 2.4.3. *Напрямленість $(x_\alpha) \subset X$ є збіжною у $*$-слабкій топології до $x^{**} \in X^{**}$, якщо для будь-якої $f \in X^*$*

$$f(x_\alpha) \to \lim_{\alpha} f(x_\alpha).$$

Означення 2.4.4. *Напрямленість $(x_\alpha) \subset X$ є n-поліноміально збіжною до функціонала $\varphi \in \mathcal{P}(^n X)^*$, якщо*

$$P(x_\alpha) \to \varphi(P) = \lim_{\alpha} P(x_\alpha)$$

для всіх n-однорідних поліномів $P \in \mathcal{P}(^n X)$ для деякого $n \in \mathbb{Z}_+$.

Означення 2.4.5. *Напрямленість (x_α) є збіжною до функціонала $\varphi \in \mathcal{P}(^n X)^*$ в слабкополіноміальній топології, якщо*

$$P(x_\alpha) \to \varphi(P) = \lim_{\alpha} P(x_\alpha)$$

в n-поліноміальній топології для всіх поліномів $P \in \mathcal{P}(^n X)$ для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$.

Якщо напрямленість (x_α) є n-поліноміально збіжною для кожного n, то вона є слабкополіноміально збіжною.

Ультрафільтри. *Фільтром* на множині X називають сім'ю $\mathcal{F}$ підмножин X, яка задовольняє наступні умови:

1. $X \in \mathcal{F}$, але $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
2. Якщо $A \in \mathcal{F}$ і $A \subset B \subset X$, тоді $B \in \mathcal{F}$;
3. Перетин скінченної кількості множин $\mathcal{F}$ належить до $\mathcal{F}$.

Вперше фільтри були означені Г. Картаном у [38].

Приклад 2.4.6. *Множина всіх множин, які містять деякий окіл фіксованої точки в топологічному просторі є фільтром на цьому просторі.*

Ультрафільтром на множині X називають фільтер $\mathcal{U}$ на X, який є максимальним (тобто не міститься в ніякому іншому фільтрі).

Твердження 2.4.7. [96] *Будь-який фільтер міститься в деякому ультрафільтрі.*

Нехай $\mathcal{U}$ – ультрафільтер на множині X.

Кажемо, що послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ *збігається до точки* $x \in X$ по деякому ультрафільтру $\mathcal{U}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного околу U елемента x множина $\{x_n : x_n \in U, n \in \mathbb{N}\}$ належить до $\mathcal{U}$. Елемент x називаємо *границею по ультрафільтру* $\mathcal{U}$ і позначаємо $x = \lim_{\mathcal{U}} x_n$.

Твердження 2.4.8. [96] *Нехай X – компактний гаусдорфовий простір, $\mathcal{U}$ – ультрафільтер на X. Тоді для будь-якої послідовності*

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ *існує єдина границя по ультрафільтру* $\mathcal{U}$*:*

$$x = \lim_{\mathcal{U}} x_n, \qquad x \in X.$$

Стоун-чехівська компактифікація. Нехай S – непорожня множина. *Стоун-чехівською компактифікацією* множини S називається компактний гаусдорфорвий топологічний простір βS, який містить S і виконуються наступні умови:

1. Топологія на S, яка індукована з βS, еквівалентна вихідній топології на S;

2. Якщо $f : S \to Y$ – неперервне відображення з S в компактний гаусдорфорвий простір S, то існує єдине неперерне відображення $\widetilde{f} : \beta S \to Y$, звуження якого на S співпадає з f.

Твердження 2.4.9. [96] *Будь-які дві стоун-чехівські компактифікації топологічного простору X є гомеоморфними.*

В якості S розглянемо простір натуральний чисел $\mathbb{N}$ з дискретною топологією. Нехай $\beta\mathbb{N}$ – множина всіх ультрафільрів на $\mathbb{N}$. Кожному елементу $n \in \mathbb{N}$ поставимо у відповідність ультрафільтер $\mathcal{F}_n = \{A \subset \mathbb{N} : n \in A\}$. Очевидно, що $\mathbb{N} \subset \beta\mathbb{N}$.

На $\beta\mathbb{N}$ визначимо базу топології наступним чином:

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{U}_A : A \subseteq \mathbb{N}\},$$

де для кожної підмножин $A \subset \mathbb{N}$

$$\mathcal{U}_A = \{\mu \in \beta\mathbb{N} : A \in \mu\}.$$

Простір $\beta\mathbb{N}$ є стоун-чехівською компактифікацією [96].

2.5. Спектр алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі, продовження Арона-Бернера

Нехай $H_b(X)$ – алгебра Фреше всіх комплекснозначних аналітичних функцій обмеженого типу на підмножинах банахового простору X з топологією, яка породжена зліченою системою напівнорм (2.2.1).

Спектром алгебри $H_b(X)$ називають множину ненульових комплекснозначних гомоморфізмів на $H_b(X)$ і позначають $M_b(X) = M_b$. Очевидно, що $M_b \subset H_b^*(X)$.

Аналогічно, як у випадку банахових алгебр кожен елемент $f \in H_b(X)$ можна розглядати як функцію на спектрі $M_b(X)$, $\widehat{f}(\varphi) = \varphi(f)$. Відображення $f \mapsto \widehat{f}$ називається *перетворенням Гельфанда.* Найслабша топологія на $M_b(X)$, в якій всі функції $\widehat{f}$ є неперервними називається *топологією Гельфанда.*

Зауважимо, що для довільної точки $x \in X$ існує *функціонал значення функції в точці:*

$$\delta_x : f \mapsto f(x),$$

такий, що для всіх $f, g \in H_b(X)$ і скалярів λ_1, λ_2

$$\delta_x(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 \delta_x(f) + \lambda_2 \delta_x(g),$$

$$\delta_x(fg) = \delta_x(f)\delta_x(g).$$

Отже, δ_x – характер з $M_b(X)$.

Твердження 2.5.1. [25] *Радіус-функція функціонала значення функції $f \in H_b(X)$ в точці $x \in X$ дорівнює*

$$R(\delta_x) = \|x\|.$$

Таким чином, кожному елементу банахового простору X можна поставити у відповідність лінійний мультиплікативний функціонал $\delta_x \in M_b(X)$, тобто існує натуральне вкладення $x \mapsto \delta_x$, таке, що $X \hookrightarrow M_b(X)$.

Позначимо $\|f\|_r$ – норма функції $f \in H_b(X)$ на кулі B_r.

Твердження 2.5.2. [25] *Нехай $\varphi \in M_b(X)$. Тоді для всіх $f \in H_b(X)$*

$$|\varphi(f)| \leq ||f||_{R(\varphi)}.$$

Продовження Арона-Бернера. Важливим є питання про продовжуванність аналітичного відображення, визначеного на відкритій підмножині банахового простору X, на ширшу множину простору, який містить X (нелінійний аналог теореми Гана-Банаха).

Нехай X – комплексний банаховий простір і X^{**} другий спряжений простір до X.

Довільне неперервне n-лінійне відображення $A : X \times \cdots \times X \to \mathbb{C}$ можна продовжити до неперервного n-лінійного відображення $\widetilde{A} : X^{**} \times \cdots \times X^{**} \to \mathbb{C}$ наступним чином:

$$\widetilde{A}(x_1^{**}, \cdots, x_n^{**}) = \lim_{\alpha_1} \cdots \lim_{\alpha_n} A(x_{\alpha_1}, \cdots, x_{\alpha_n}),$$

де (x_{α_k}) – напрямленість в X, яка збігається в $*$-слабкій топології до x_k^{**} для для кожного $k = 1, \cdots n$.

Зауважимо, що у випадку, коли $*$-слабка топологія є метризованою на обмежених множинах (наприклад, якщо X^* – сепарабельний), то замість напрямленостей можна взяти послідовності.

Нехай $P \in \mathcal{P}(^nX)$ і $A_P \in \mathcal{L}_s(^nX, \mathbb{C})$ – n-лінійна симетрична форма, асоційована з поліномом P. *Продовженням Арона-Бернера* $\widetilde{P}$ *полінома* P називається:

$$\widetilde{P}(x) := \widetilde{A}_P(x, \cdots, x) \qquad x \in X^{**}.$$

ТЕОРЕМА 2.5.3. [55] *Оператор продовження* $P \mapsto \widetilde{P}$ *будь-якого* n*-однорідного полінома* $P \in \mathcal{P}(^nX)$ *на* $\mathcal{P}(^nX^{**})$ *є ізометричним і задовольняє* $||P|| = ||\widetilde{P}||$.

Нехай $f \in H_b(X)$ і $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$ – розклад в ряд Тейлора в точці $0 \in X$, який збігається рівномірно до $f(x)$ на B_r для довільного $r > 0$. Визначимо $\widetilde{f}$ – продовження аналітичної функції f на X^{**} за формулою

$$\widetilde{f}(x^{**}) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{P}_n(x^{**}), \qquad x^{**} \in X^{**}. \tag{2.5.1}$$

Ряд (2.5.1) збігається рівномірно на кожній кулі $B_r^{**} \subset X^{**}$ і функція $\widetilde{f}$ є аналітичною на B_r^{**}, $r > 0$.

ТЕОРЕМА 2.5.4. [77] *Оператор продовження* $f \mapsto \widetilde{f}$ *є топологічним гомоморфізмом між алгебрами Фреше* $H_b(X)$ *і* $H_b(X^{**})$ *і* $\|\widetilde{f}_n\| = \|f_n\|$ *для кожного* $n \in \mathbb{Z}_+$.

Функціонал значення продовження Арона-Бернера функції $\widetilde{f}$ *в точці* $x^{**} \in X^{**}$ має вигляд:

$$\delta_{x^{**}}(f) = \widetilde{f}(x^{**}), \quad f \in H_b(X), \qquad x \in X^{**}.$$

Використовуючи продовження Арона-Бернера, кожному елементу $x^{**} \in X^{**}$ поставимо у відповідність лінійний мультиплікативний функціонал $\delta_{x^{**}} \in M_b(X)$, визначений на $H_b(X^{**})$. Тобто, існує натуральне вкладення $X^{**} \hookrightarrow M_b(X)$.

Наслідок 2.5.5 ([25]). *Нехай $\varphi \in M_b(X)$ (можливо розривний). Тоді існує напрямленість $(x_\alpha) \subset X$, яка є збіжною до функціонала $\varphi \in \mathcal{P}(^nX)^*$ в слабкополіноміальній топології, така, що*

$$P(x_\alpha) \to \varphi(P) = \lim_\alpha P(x_\alpha)$$

для всіх неперервних поліномів $P \in \mathcal{P}(X)$. І навпаки, для кожної збіжної в слабкополіноміальній топології напрямленості $(x_\alpha) \subset X$ існує характер φ на $\mathcal{P}(X)$, такий, що $P(x_\alpha) \to \varphi(P)$.

Якщо A – банахова алгебра (небобов'язково комутативна), то на операцію множення в алгебрі A можна дивитись як на деяке білінійне відображення. Продовження Арона-Бернера у другий спряжений A^{**} співпадає з *продовженням Аренса* операції множення алгебри A у другий спряжений A^{**}. Детальніше про побудову продовження Аренса у [21]. Зауважимо, якщо алгебра A є комутативною, то продовження операції множення у A^{**} може виявитись некомутативним. Контрприклад втрати комутативності побудований у [109], [110].

Висновки до розділу 2

У другому розділі наведено основні означення, теореми і методи, які використовуються у дисертаційному дослідженні.

Підрозділі 2.1 присвячений n-лінійним відображенням, тензорним добуткам, поліномам. Тут, використовуючи поняття n-лінійного відображення, дано означення неперервного n-однорідного полінома на комплексному банаховому просторі X. Простір всіх неперервних n-однорідних поліномів $\mathcal{P}(^nX)$ є банаховим з нормою

$$||P|| = \sup_{x \in B} |P(x)|,$$

яку називають *нормою рівномірної збіжності на одиничній кулі* B *з центром в точці* 0. У теоремі 3.1.4 встановлено ізоморфізм між простором симетричних n-лінійних відображень і простором всіх неперервних n-однорідних поліномів. Отже, кожному n-однорідному поліному відповідає єдине симетричне n-лінійне відображення A_P, яке називають *відображенням, асоційованим із поліномом* P.

Інший зручний метод дослідження поліноміальних і аналітичних відображень – це метод із використанням симетричних проективних тензорних степенів банахового простору X. У теоремі 3.1.4 встановлено, що банахів простір $\mathcal{P}(^nX)$ ізометричний до простру всіх лінійних неперервних відображень на симетричному проективному n-му тензорному степені банахового простору X.

Банахів простір всіх неперервних поліномів у топології, яка породжена нормою рівномірної збіжності на одиничній кулі в X позначають $\mathcal{P}(X)$. *Слабкополіноміальної топологією* називають найслабшу топологію на X, в якій всі поліноми з $\mathcal{P}(X)$ є неперервними. Також у цьому підрозділі наведено означення і деякі приклади розділяючих поліномів.

Підрозділі 2.2 присвячений аналітичним відображенням. В цьому підрозділі введено важливе для дисертаційного дослідження поняття алгебри $H_b(X)$ – алгебри аналітичних функцій, які є обмеженими на обмежених підмножинах банахового простору X у топології, яка породжена зліченою системою напівнорм (2.2.1) (такі функції ще називають *аналітичними функціями обмеженого типу*).

Для лінійних неперервних відносно топології алгебри $H_b(X)$ функціоналів φ зі спряженого простору до $H_b(X)$ описано деякі їх властивості. *Радіус-функцією* $R(\varphi)$ такого лінійного функціонала φ називається інфінум по всіх номерах $r > 0$ таких, що φ є неперервним на кулі B_r радіуса r з центром в точці 0 відносно топології алгебри $H_b(X)$.

У підрозділі 2.3 наведені класичні факти з теорії банахових алгебр та комутативних банахових алгебр. Тут дано означення *спектру* (*множини характерів, ненульових неперервних комплексно-значних гомоморфізмів, лінійних мультиплікативних функціоналів*) довільної комутативної банахової алгебри. Довільний характер є неперервним на спектрі $M(A)$ банахової алгебри у *топології Гельфанда,* яка визначається як найслабша топологія, у якій всі перетворення Гельфанда $x \mapsto \hat{x}$ є неперервними, де $\hat{x}(f) = f(x)$ для $f \in A^*$, $x \in A$. Відомою є теорема, що простір максимальних ідеалів комутативної банахової алгебри A з топологією Гельфанда дорівнює спектру комутативної банахової алгебри A (теорема 2.3.4).

Підрозділ 2.4 присвячений означенням напрямленості, ультрафільтра, та стоун-чехівській компактифікації. Важливим є факт, що простір X є гаусдорфовим тоді і тільки тоді, коли кожна напрямленість в X є збіжною принаймні в одній точці $x \in X$ (теорема 2.4.1). Тут наведені означення $*$-слабко збіжної напрямленості, n-поліноміально збіжної напрямленості, слабкополіноміально збіжної напрямленості, а, також, зв'язок між ними, означення фільтра, ультрафільтра, стоун-чехівської компактифікації. Множина всіх ультрафільтрів на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ є стоу-чехівською компактифікацією $\mathbb{N}$.

У підрозділі 2.5 введено означення *спектру алгебри Фреше,* який позначають $M_b(X)$, де X – комплексний банахів простір, а, також, топологію Гельфанда на ньому. *Функціоналом значення функції* в точці $x \in X$ називають відображення: $\delta_x : f \to f(x)$, $f \in H_b(X)$. Легко бачити, що таке відображення є характером, тобто $\delta_x \in M_b(X)$.

Довільне n-лінійне відображення $A : X \times \cdots \times X \to \mathbb{C}$ можна продовжити до неперервного n-лінійного відображення $\widetilde{A} : X^{**} \times \cdots \times X^{**} \to \mathbb{C}$. Таким чином, будь-який n-однорідний поліном $P \in \mathcal{P}(^n X)$ продовжується до неперервного n-однорідного полінома $\widetilde{P}$ у $\mathcal{P}(^n X^{**})$: $\widetilde{P}(x) = \widetilde{A}_P(x, \cdots, x)$, $x \in X^{**}$. Таке продовження називається *продовженням Арона-Бернера,* є ізометричним (теорема 2.5.4) і існує натуральне вкладення $X^{**} \hookrightarrow M_b(X)$.

Наслідок 2.5.5. *Нехай $\varphi \in M_b(X)$ (можливо розривний). Тоді існує напрямленість $(x_\alpha) \subset X$, яка є збіжною до функціонала $\varphi \in \mathcal{P}(^n X)^*$ в слабкополіноміальній топології, така, що*

$$P(x_\alpha) \to \varphi(P) = \lim_\alpha P(x_\alpha)$$

для всіх неперервних поліномів $P \in \mathcal{P}(X)$. *І навпаки, для кожної збіжної в слабкополіноміальній топології напрямленості* $(x_\alpha) \subset X$ *існує характер* φ *на* $\mathcal{P}(X)$, *такий, що* $P(x_\alpha) \to \varphi(P)$.

Якщо A – банахова алгебра (необов'язково комутативна), то на операцію множення в алгебрі A можна дивитись як на деяке білінійне відображення. Продовження Арона-Бернера у другий спряжений A^{**} співпадає з *продовженням Аренса* операції множення алгебри A у другий спряжений A^{**}.

РОЗДІЛ 3
АЛГЕБРИ БЛОЧНО-ДІАГОНАЛЬНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

3.1. Блочно-діагональні аналітичні функції та їх властивості

Нехай A – деяка комутативна топологічна алгебра і $\mathcal{N}$ – деяка підмножина спектру $M(A)$. Розглядають алгебру $A(\mathcal{N})$, яка складається зі звужень елементів $\hat{a}$ на $\mathcal{N}$, $a \in A$, де $\hat{a}$ – перетворення Гельфанда елементів $a \in A$. Очевидно, що оператор, який діє як оператор звуження $T : A \to A(\mathcal{N})$ на перетворення Гельфанда: $Ta = \hat{a} \restriction \mathcal{N}$, є гомоморфізмом алгебр. У цьому контексті природнім є питання про спектр $A(\mathcal{N})$, який, очевидно містить $\mathcal{N}$, але не завжди збігається з $\mathcal{N}$. Крім того, маючи опис спектру $A(\mathcal{N})$ для різних множин $\mathcal{N}$ можна отримати нову інформаціію про спектр алгебри A. В алгебраїчній геометрії $A = \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$, а в якості $\mathcal{N}$ розглядають алгебраїчні множини – кулі скінченнопороджених поліноміальних ідеалів. Прості приклади алгебраїчних множин можна подати у вигляді об‘єднання лінійних просторів. У цьому розділі у якості $\mathcal{N}$ ми розглядаємо множини, які є об‘єднанням лінійних підпросторів банахового простору X і мають деякі властивості алгебраїчних множин.

У випадку, коли $A = H_b(X)$, де X – деякий банахів простір, елементи $x \in X$ можна ототожнювати з елементами спектру $\delta_x \in$

$M(H_b(X))$, $\delta_x(f) = f(x)$, $f \in H_b(X)$. В цьому сенсі ми вважаємо, що X є підмножиною $M(H_b(X))$.

Нехай X – комплексний банахів простір з топологічним базисом Шаудера $\{e_k\}$ [19]. Розглянемо підмножини $\mathcal{N}_m \subset X, m \geq 1$:

$$\mathcal{N}_1 = \bigcup_k \{\lambda e_k, \lambda \in \mathbb{C}\},$$

$$\mathcal{N}_2 = \bigcup_{k \neq j} (\mathbb{C}e_k + \mathbb{C}e_j) =$$

$$\bigcup_{k \neq j} \mathrm{span}(e_k, e_j),$$

$$\cdots,$$

$$\mathcal{N}_m = \bigcup_{k_1 \neq \cdots \neq k_m} (\mathbb{C}e_{k_1} + \cdots + \mathbb{C}e_{k_m}) =$$

$$\bigcup_{k_1 \neq \cdots \neq k_m} \mathrm{span}(e_{k_1}, \cdots, e_{k_m}),$$

$$\cdots.$$

Зауваження 3.1.1. *Якщо простір X є скінченновимірним, то $\mathcal{N}_m = X$, для $m = dimX$.*

Нехай $H_b(\mathcal{N}_m)$ – алгебра звужень функцій з $H_b(X)$ на $\mathcal{N}_m$, $M_b(\mathcal{N}_m)$ – її множина характерів (спектр).

Оператор звуження $\mathcal{T}_m$ на множину $\mathcal{N}_m$ є гомоморфізмом алгебр $H_b(X)$ і $H_b(\mathcal{N}_m)$.

Відомо, що ядро кожного гомоморфізма є деяким ідеалом, тому $H_b(\mathcal{N}_m)$ – фактор-простір по ядру $\ker\mathcal{T}_m$ гомоморфізма $\mathcal{T}_m$:

$$H_b(\mathcal{N}_m) = H_b(X)/\ker\mathcal{T}_m.$$

З цього, зокрема, випливає, що алгебра $H_b(\mathcal{N}_m)$ є напівпростою, оскільки $H_b(X)$ – напівпроста. На алгебрі $H_b(\mathcal{N}_m)$ ми визначаємо топологію фактор-простору, тобто локально-опуклу топологію, яка задається системою напівнорм

$$p_r(f) = \inf_{g \in \ker T_m} \sup_{||x|| \le r} |f(x) + g(x)|, \qquad r \in \mathbb{Q}. \tag{3.1.1}$$

Твердження 3.1.2. *Нехай $\varphi \in M_b(\mathcal{N}_m)$, тоді φ можна продовжити до характера $\widetilde{\varphi}$ на $H_b(X)$ за формулою: $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \mathcal{T}_m$.*

Доведення. Оскільки φ – лінійний мультиплікативний функціонал, $\mathcal{T}_m$ – гомоморфізм, то $\varphi \circ \mathcal{T}_m$ також є лінійним мультиплікативним функціоналом і $\varphi \circ \mathcal{T}_m : H_b(X) \to \mathbb{C}$, тому $\varphi \circ \mathcal{T}_m$ – характер на $H_b(X)$. Отже, $\varphi \circ \mathcal{T}_m$ є продовженням φ у $M_b(X)$, тобто $\widetilde{\varphi} := \varphi \circ \mathcal{T}_m$. $\square$

Таким чином, вивчаючи спектр алгебр $H_b(\mathcal{N}_m)$, можна спробувати узагальнити отримані результати на $H_b(X)$.

Запишемо загальний вигляд n-однорідного полінома $P \in \mathcal{P}(^n X)$ для довільного елемента $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, використовуючи базис Шаудера $\{e_k\}$:

$$P(x) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=k_{n-1}+1}^{\infty} \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_n=n, \\ n_1,\cdots,n_n \in \mathbb{Z}_+}} x_{k_1}^{n_1} \cdots x_{k_n}^{n_n} A_P(e_{k_1}^{n_1}, \cdots, e_{k_n}^{n_n}),$$

де $A_P(e_{k_1}^{n_1}, \cdots, e_{k_n}^{n_n})$ – симетрична n-лінійна форма, яка відповідає поліному P, $x_{k_i}^{n_i} = \underbrace{x_{k_i} \cdots x_{k_i}}_{n_i}$ – деякі комплексні коефіцієнти, $i = 1, \cdots, n$.

Звузимо поліном P на підмножини $\mathcal{N}_m \subset X$, $m \geq 1$:

$$P \in \mathcal{P}(^n\mathcal{N}_1):$$

$$(\mathcal{T}_1 P)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^n A_P(\underbrace{e_k, \cdots, e_k}_{n}),$$

$$P \in \mathcal{P}(^n\mathcal{N}_2):$$

$$(\mathcal{T}_2 P)(x) =$$

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=k_1+1}^{\infty} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1,n_2\in\mathbb{Z}_+}} x_{k_1}^{n_1} x_{k_2}^{n_2} A_P(\underbrace{e_{k_1}, \cdots, e_{k_1}}_{n_1}, \underbrace{e_{k_2}, \cdots, e_{k_2}}_{n_2}) =$$

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=k_1+1}^{\infty} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1,n_2\in\mathbb{Z}_+}} x_{k_1}^{n_1} x_{k_2}^{n_2} A_P(e_{k_1}^{n_1}, e_{k_2}^{n_2}),$$

$$\cdots,$$

$$P \in \mathcal{P}(^n\mathcal{N}_m):$$

$$(\mathcal{T}_m P)(x) =$$

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=k_{m-1}+1}^{\infty} \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_m=n \\ n_1,\cdots,n_m\in\mathbb{Z}_+}} x_{k_1}^{n_1} \cdots x_{k_m}^{n_m} A_P(\underbrace{e_{k_1}^{n_1}, \cdots, e_{k_m}^{n_m}}_{m}),$$

$$\cdots.$$

Тобто, від полінома $P \in \mathcal{P}(^nX)$ при звуженні на $\mathcal{N}_m$, залишається тільки його m-вимірна “діагональ”. Такі поліноми називають *блочно-діагональними* або *діагональними* у випадку $m = 1$ [41].

Означення 3.1.3. *Блочно-діагональними аналітичними функціями називаються звуження функцій з $H_b(X)$ на підмножини банахового простору $\mathcal{N}_m \subset X$, $m > 1$.*

Твердження 3.1.4. *Простір поліномів* $\mathcal{P}(^m\mathcal{N}_m)$, $\mathcal{N}_m \subset X$, $m \geq 1$ *ізоморфний до простору поліномів* $\mathcal{P}(^mX)$*:*

$$\mathcal{P}(^m\mathcal{N}_m) \cong \mathcal{P}(^mX), \tag{3.1.2}$$

тобто існує бієктивний лінійний неперевний оператор

$$\widehat{\mathcal{T}}_m : \mathcal{P}(^mX) \to \mathcal{P}(^m\mathcal{N}_m).$$

Доведення. Нехай $\widehat{\mathcal{T}}_m$ – звуження оператора $\mathcal{T}_m$ на простір $\mathcal{P}(^mX)$.

Зауважимо, що $\mathcal{T}_m$ є неперервним. Дійсно, для будь-якої напівнорми p_r простору $H_b(X)$ (див. формулу (3.1.1)), $||\mathcal{T}_m(f)||_{p_r} \leq ||f||_{p_r}$. Отже, $\mathcal{T}_m$ – обмежений, що еквівалентно неперервності для лінійних операторів на просторі Фреше. З неперервності оператора $\mathcal{T}_m$ випливає неперервність звуженого оператора $\widehat{\mathcal{T}}_m$.

Оператор $\widehat{\mathcal{T}}_m$ є ін'єктивним тоді і тільки тоді, коли ядро цього оператора $\ker\widehat{\mathcal{T}}_m$ складається тільки з $\{0\}$. Знайдемо множину поліномів, для яких $(\widehat{\mathcal{T}}_m P)(x) = 0$.

Запишемо загальний вигляд полінома степеня m, звуженого на $\mathcal{N}_m$. Для довільного $x \in \mathcal{N}_m$ існує набір базисних векторів $e_{k_1}, \cdots, e_{k_m}$ такий, що $x = x_{k_1}e_{k_1} + \cdots x_{k_m}e_{k_m}$. Тому

$$(\widehat{\mathcal{T}}_m P)(x) = P(x_{k_1}e_{k_1} + \cdots + x_{k_m}e_{k_m}) =$$

$$\textstyle\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=k_{m-1}+1}^{\infty} \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_m=n \\ n_1,\cdots,n_m\in\mathbb{Z}_+}} x_{k_1}^{n_1} \cdots x_{k_m}^{n_m} A_P(e_{k_1}^{n_1}, \cdots, e_{k_m}^{n_m}).$$

Даний вираз буде дорівнювати нулю тоді і тільки тоді, коли для всіх $k_1, \cdots, k_m$ значення $A_P(e_{k_1}^{n_1}, \cdots, e_{k_m}^{n_m})$ буде дорівнювати нулю.

Серед поліномів степеня $m \geq 1$ – це тільки нульові поліноми. Це означає, що $\ker\widehat{\mathcal{T}}_m = \{0\}$ в просторі $\mathcal{P}(^m X)$.

Оскільки $\widehat{\mathcal{T}}_m$ є оператором звуження, тому для довільного елемента з $\mathcal{P}(^m\mathcal{N}_m)$ існує прообраз у $\mathcal{P}(^m X)$. Оператор $\widehat{\mathcal{T}}_m$ є бієктивним. Отже, $\widehat{\mathcal{T}}_m$ – ізоморфізм. Це доводить ізоморфність просторів $\mathcal{P}(^m X)$ і $\mathcal{P}(^m\mathcal{N}_m)$, $\mathcal{N}_m \subset X$.

□

Зауваження 3.1.5. *Аналогічне доведення для всіх $n \leq m$ встановлює ізоморфність просторів $\mathcal{P}(^n\mathcal{N}_m)$ і $\mathcal{P}(^n X)$.*

Твердження 3.1.6. *Оператор $\widehat{\mathcal{T}}_m : \mathcal{P}(^n X) \to \mathcal{P}(^n\mathcal{N}_m)$ для $n > m \geq 1$ не є ін‘єктивним оператором.*

Доведення. Нехай $\widehat{\mathcal{T}}_m$ – звуження оператора $\mathcal{T}_m$ на простір $\mathcal{P}(^n X)$, $n > m$. З неперервності оператора $\mathcal{T}_m$ випливає неперервність звуженного оператора $\widehat{\mathcal{T}}_m$.

Якщо P – поліном степеня $n > m$, то ядро оператора $\ker\widehat{\mathcal{T}}_m$ буде містити і інші поліноми, відмінні від нульових. Всі поліноми вигляду

$$P(x) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=k_{n-1}+1}^{\infty} x_{k_1} \cdots x_{k_n} A_P(e_{k_1}, \cdots, e_{k_n}),$$

при звуженні на множину $\mathcal{N}_m$, $m < n$ будуть дорівнювати нулю.

Це означає, що оператор $\widehat{\mathcal{T}}_m : \mathcal{P}(^n X) \to \mathcal{P}(^n\mathcal{N}_m)$ не є ін'єктивним. □

Теорема 3.1.7. *Для кожного характера $\psi \in M_b(X)$ існує послідовність $\varphi_m \in H_b^*(\mathcal{N}_m)$ така, що послідовність продовжень*

$\widetilde{\varphi}_m \in H_b^*(X)$ збігається до ψ в $*$-слабкій топології простору $H_b^*(X)$. Тобто, $\widetilde{\varphi}_m(f) \to \psi(f)$ при $m \to \infty$ для кожної функції $f \in H_b(X)$.

Доведення. Нехай ψ – характер з $M_b(X)$. Позначимо ψ_m – звуження функціонала ψ на $\mathcal{P}(^{\leq m}X)$ – простір неперервних поліномів степеня $0 < k \leq m$. Оскільки простір $\mathcal{P}(^mX)$ для всіх $m \in \mathbb{N}$ ізоморфний до простору $\mathcal{P}(^m\mathcal{N}_m)$ (твердження 3.1.4), то і простір $\mathcal{P}(^{\leq m}X)$ ізоморфний до $\mathcal{P}(^{\leq m}\mathcal{N}_m)$. Отже, функціоналу $\psi_m \in \mathcal{P}(^{\leq m}X)^*$ відповідає функціонал $\varphi_m \in \mathcal{P}(^{\leq m}\mathcal{N}_m)^*$ такий, що наступна діаграма комутативна:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(^{\leq m}X) \arrow[rr, "\mathcal{T}_m"] \arrow[dr, "\psi_m"'] & & \mathcal{P}(^{\leq m}\mathcal{N}_m) \arrow[dl, "\varphi_m"] \\
& \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

Тобто $\psi_m(P) = \varphi(\mathcal{T}_m P)$, $P \in \mathcal{P}(^{\leq m}X)$.

Визначимо лінійний функціонал $\widetilde{\varphi}_m$ на просторі всіх неперервних поліномів $\mathcal{P}(X)$ наступним чином:

$$\widetilde{\varphi}_m(P) = \begin{cases} \psi_m(P), & \text{якщо } P \in \mathcal{P}(^{\leq m}X), \\ 0, & \text{якщо } P \in \mathcal{P}(X), \deg P > m. \end{cases}$$

Покажемо, що $\widetilde{\varphi}_m$ є неперервним в топології, індукованій топологією простору $H_b(X)$. Відомо, що оператор $S_m : H_b(X) \to \mathcal{P}(^{\leq m}X)$, тобто

$$S_m : f = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \to \sum_{k=0}^{m} P_k$$

є неперервним проектором [54], де $\sum_{k=0}^{\infty} P_k$ – ряд Тейлора, який збігається рівномірно до $f(x)$ в кулі B_r з центром в нулі для довільного

$r > 0$. Отже, за побудовою, $\widetilde{\varphi}_m = \psi_m \circ S_m$ – неперервний функціонал, визначений на $\mathcal{P}(X)$ такий, що

$$\widetilde{\varphi}_m(P) = \psi_m \circ S_m(P).$$

Зокрема, якщо $P \in \mathcal{P}({}^{\leq m}X)$, то $\psi_m \circ S_m = \varphi_m$. Тому, зберігаючи позначення для продовження $\widetilde{\varphi}_m$, функціонал $\widetilde{\varphi}_m$ можна продовжити за лінійністю і неперевністю на весь простір $H_b(X)$, тобто $\widetilde{\varphi}_m \in H_b^*(X)$.

Нехай $f \in H_b(X)$, тоді $S_m(f)$ – поліном степеня m, тому

$$\widetilde{\varphi}_m \circ S_m(f) = \psi_m \circ S_m(f) = \widetilde{\varphi}_m(f)|_{\mathcal{P}({}^{\leq m}X)}.$$

З неперервності функціонала $\psi \in M_b(X)$ і з факту, що $S_m(f) \to f$ при $m \to \infty$ в топології, індукованій топологією простору $H_b(X)$, перейшовши до границі, маємо

$$\widetilde{\varphi}_m(f) \to \psi(f)$$

для довільної функції $f \in H_b(X)$. $\square$

Твердження 3.1.8. *Нехай $z \in X$ і $\delta_z : f \mapsto f(z)$, $f \in H_b(X)$ є елементом спектру $M_b(\mathcal{N}_m)$, тобто існує $\varphi \in M_b(\mathcal{N}_m)$ такий, що $\varphi(T_m f) = \delta_z(f)$, $f \in H_b(X)$, тоді $z \in \mathcal{N}_m$.*

Доведення. Припустимо, що $z \notin \mathcal{N}_m$. Тоді знайдуться базисні вектори $e_{k_1}, \cdots, e_{k_{m+1}}$ такі, що координати вектора z при цих векторах $z_{k_1}, \cdots, z_{k_{m+1}}$ всі не дорівнюють нулю. Розглянемо поліном $Q \in \mathcal{P}(X)$:

$$Q(x) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_{m+1}=k_m+1}^{\infty} x_{k_1} \cdots x_{k_{m+1}}.$$

Очевидно, що $Q(z) \neq 0$ і $(\mathcal{T}_m Q)(z) = 0$. Тому $\varphi(\mathcal{T}_m Q) \neq \delta_z(Q)$. $\square$

Це твердження показує, що подібно до випадку з алгебраїчними множинами в алгебраїчній геометрії, точки за межами $\mathcal{N}_m$ не породжують характери алгебри $H_b(\mathcal{N}_m)$. Проте, як буде показано у наступному підрозділі, характери алгебри $H_b(\mathcal{N}_m)$ не вичерпуються, в загальному випадку, функціоналами значень в точках $\mathcal{N}_m$.

3.2. Опис множини характерів алгебри блочно-діагональних аналітичних функцій

Випадок простору ℓ_1

Ми хочемо дослідити спектр $M_b(\mathcal{N}_m)$, $\mathcal{N}_m \subset X$ для $X = \ell_1$ (банахів простір всіх абсолютно збіжних послідовностей), $\{e_k\}$ – базис Шаудера такий, що $e_k = (0, \cdots, 1, 0, \cdots)$.

Нехай $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in \ell_1$. Всі лінійні функціонали на ℓ_1 мають вигляд:

$$f(x) = \sum_{\substack{k=1, \\ k \in \mathbb{Z}}}^{\infty} a_k x_k, \quad g(x) = \sum_{\substack{k=1, \\ k \in \mathbb{Z}}}^{\infty} b_k x_k, \tag{3.2.1}$$

де $(a_k)_{k=1}^{\infty}, (b_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_\infty$. Звуження лінійних функціоналів f, g на $\mathcal{N}_1 \subset \ell_1$ на деякий базисний вектор e_k, $k \in \mathbb{N}$ дорівнює $a_k x_k$, $b_k x_k$ відповідно. Отже, їх добуток на деякому базисному векторі e_k, $k \in \mathbb{N}$:

$$a_k x_k \cdot b_k x_k = c_k x_k^2.$$

Оскільки $(a_k)_{k=1}^{\infty}, (b_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ (як коефіцієнти), то добуток k-тих координат $a_k \cdot b_k = c_k$, $k \geq 1$ визначить послідовність $(c_k)_{k=1}^{\infty}$, яка також буде належити до ℓ_∞. Цей факт показує, що будь-який поліном з $\mathcal{P}(\mathcal{N}_1), \mathcal{N}_1 \subset \ell_1$ можна отримати деякою алгебраїчною комбінацією лінійних функціоналів і сталих.

Розглянемо алгебру Фреше $H_b(X)$. Позначимо $\mathcal{A}_n(X)$ – замикання алгебри в $H_b(X)$, яка породжена поліномами з $\mathcal{P}(^{\leq n}X)$ в топології, яка породжена зліченою системою напівнорм (2.2.1).

Зокрема $\mathcal{A}_1(\ell_1)$ – замикання алгебри в $H_b(\ell_1)$, породженої 1-однорідними поліномами і сталими комплексними числами, тоді $\mathcal{A}_1(\mathcal{N}_1)$ – відповідне звуження $\mathcal{A}_1(\ell_1)$ на підмножину $\mathcal{N}_1$.

Теорема 3.2.1. *Множина характерів на $H_b(\mathcal{N}_1)$ гомеоморфна стоун-чехівській компактифікації $\beta\mathbb{N}$ множини натуральних чисел. Довільний характер $\varphi \in \beta\mathbb{N}$ має вигляд:*

$$\varphi(P) = \lim_{\mathcal{U}} P(e_k),$$

де $P \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_1)$, $\mathcal{U}$ - деякий фіксований ультрафільтр на $\mathbb{N}$.

Доведення. Замикання простору неперервних поліномів $\mathcal{P}(\mathcal{N}_1)$ в топології, яка породжена зліченою системою напівнорм (2.2.1) дорівнює $H_b(\mathcal{N}_1)$.

Як доведено вище, будь-який поліном з $\mathcal{P}(\mathcal{N}_1)$ можна отримати деякою алгебраїчною комбінацією лінійних функціоналів і сталих з $\mathcal{A}_1(\mathcal{N}_1)$. Отже, всі функції з алгебри $H_b(\ell_1)|_{\mathcal{N}_1} = H_b(\mathcal{N}_1)$ наближаються всеможливими алгебраїчними комбінаціями лінійних функціоналів і сталих з $\mathcal{A}_1(\mathcal{N}_1)$, тобто тотожнє відображення є ізоморфізмом між $H_b(\mathcal{N}_1)$ і $\mathcal{A}_1(\mathcal{N}_1)$ для $\mathcal{N}_1 \subset \ell_1$.

З іншого боку, для $P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k^n$ відображення

$$\mathcal{A}_1(\mathcal{N}_1) \ni P \mapsto (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_\infty \tag{3.2.2}$$

є сюр'єктивним гомоморфізмом.

Дійсно, нехай $(a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_\infty$. Покладемо $A_P(e_k) = a_k$. Тоді $P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ є 1-однорідним поліномом з $\mathcal{A}_1(\mathcal{N}_1)$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in \mathcal{N}_1$. Лінійнійсть і мультиплікативність відображення (3.2.2) є очевидною.

Нехай $\widehat{\varphi}$ – характер на ℓ_∞. Отже, за мультипілкативністю

$$\widehat{\varphi}\Big((a_k)_{k=1}^\infty \cdot (b_k)_{k=1}^\infty\Big) = \widehat{\varphi}\Big((a_k)_{k=1}^\infty\Big)\widehat{\varphi}\Big((b_k)_{k=1}^\infty\Big),$$

для будь-яких $(a_k)_{k=1}^\infty, (b_k)_{k=1}^\infty \in \ell_\infty$, де операція множення послідовностей з ℓ_∞ є покоординатною:

$$(a_k)_{k=1}^\infty \cdot (b_k)_{k=1}^\infty = (a_k \cdot b_k)_{k=1}^\infty.$$

Оскільки для кожної послідовності $(a_k)_{k=1}^\infty, (b_k)_{k=1}^\infty \in \ell_\infty$ існують прообрази $P, Q \in \mathcal{A}_1(\mathcal{N}_1)$, то $\widehat{\varphi}$ породжує деякий лінійний мультиплікативний функціонал φ на $\mathcal{A}_1(\mathcal{N}_1)$:

$$\varphi(P \cdot Q) = \varphi(P)\varphi(Q).$$

Отже, множина характерів $\mathcal{A}_1(\mathcal{N}_1)$ містить множину характерів ℓ_∞. Множина характерів на ℓ_∞ це стоун-чехівська компактифікація множини $\mathbb{N}$, тобто $M(\ell_\infty) = \beta\mathbb{N}$. Тому, множина характерів $\mathcal{A}_1(\mathcal{N}_1)$ містить $\beta\mathbb{N}$.

Оскільки (див. [96]) множина всіх ультрафільтрів на $\mathbb{N}$ є стоун-чехівською компактифікацією $\beta\mathbb{N}$, то кожному $\widehat{\varphi} \in \beta\mathbb{N}$ відповідає ультрафільтер $\mathcal{U}$ на $\mathbb{N}$ такий, що $\widehat{\varphi}((a_k)_{k=1}^\infty) = \lim_{\mathcal{U}} a_k$. Тому

$$\varphi(P) = \widehat{\varphi}\Big((a_k)_{k=1}^\infty\Big) = \lim_{\mathcal{U}} P(e_k),$$

де $P(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k x_k^n \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_1)$.

З іншого боку, оскільки відображення (3.2.2) є бієктивним на підпросторі лінійних функціоналів, то значенням характерів φ на лінійних функціоналах будуть відповідати значення $\widehat{\varphi}$ на ℓ_∞. Враховуючи, що кожен n-однорідний поліном $P \in H_b(\mathcal{N}_1)$ можна подати як добуток лініних функціоналів з $\mathcal{A}_1(\mathcal{N}_1)$:

$$P = Q_1 \cdots Q_n,$$

то для кожного характера φ алгебри $H_b(\mathcal{N}_1)$ маємо:

$$\varphi(P) = \varphi(Q_1) \cdots \varphi(Q_n) =$$

$$\lim_{\mathcal{U}} Q_1(e_k) \cdots \lim_{\mathcal{U}} Q_n(e_k) = \lim_{\mathcal{U}} Q_1 \cdots Q_n(e_k) =$$

$$\lim_{\mathcal{U}} P(e_k).$$

$\square$

Випадок $\mathcal{N}_2 \subset \ell_1$

Нехай $x \in \mathcal{N}_2 \subset \ell_1$, тобто $x = \sum_{i,j=1}^{\infty} x_i e_i + x_j e_j$, $i < j$.

Будь-який лінійний фіункціонал $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ (який є 1-однорідним поліномом), звужений на $\mathcal{N}_2 \subset \ell_1$ має вигляд:

$$(\mathcal{T}_2 f)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} a_i x_i + a_j x_j, \tag{3.2.3}$$

де $a_i = A_f(e_i)$, $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ і послідовність пар

$$(a_i, a_j)_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2, \\ i<j}} \in \ell_\infty(\mathbb{N}^2).$$

Якщо $\mathcal{A}_2(\ell_1)$ – замикання алгебри в $H_b(\ell_1)$, яка породжена k-однорідними поліномами з $\mathcal{P}(^{\leq 2}\ell_1)$ в топології, яка породжена зліченою системою напівнорм (2.2.1), то $\mathcal{A}_2(\mathcal{N}_2)$ – відповідне звуження $\mathcal{A}_2(\ell_1)$ на підмножину $\mathcal{N}_2$.

Всі n-однорідні поліноми на $\mathcal{N}_2$, $n \geq 0$ мають вигляд

$$(\mathcal{T}_2 P)(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty} x_i^n A_P(e_i^n) +$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}\sum_{\substack{m=1,\\ n,m\in\mathbb{Z}_+}}^{n} \binom{n}{m} x_i^{n-m} x_j^m A_P(e_i^{n-m}, e_j^m) +$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty} x_j^n A_P(e_j^n).$$

Легко бачити, що перебираючи всеможливі алгебраїчні комбінації поліномів з $\mathcal{A}_2(\mathcal{N}_2)$, ми вичерпаємо всі поліноми з простору $\mathcal{P}(\mathcal{N}_2)$, замикання якого дорівнює $H_b(\ell_1)|_{\mathcal{N}_2} = H_b(\mathcal{N}_2)$ у топології, яка породжена зліченою системою напівном (2.2.1). Отже, тотожнє відображення є ізоморфізмом між $H_b(\mathcal{N}_2)$ і $\mathcal{A}_2(\mathcal{N}_2)$, $\mathcal{N}_2 \subset \ell_1$.

Нехай I^1 – ідеал в $\mathcal{A}_2(\mathcal{N}_2)$, який містить поліноми $P \in \mathcal{A}_2(\mathcal{N}_2)$ такі, що $(\mathcal{T}_1 P)(x) = 0$, тобто

$$I^1 = \Big\{ P \cdot x_i^n x_j^m A_P(e_i^n, e_j^m),\ \text{де } n, m \in \mathbb{Z}_+ \text{є взаємнопростими}, \\ \big(A_P(e_i^n, e_j^m)\big)_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2\\ i<j}} \in \ell_\infty(\mathbb{N}^2) \Big\}.$$

Ідеал I^1 породжений твірними елементами $\{x_i^n x_j^m A_P(e_i^n, e_j^m)\}_{i\neq j}$ для наборів взаємнопростих $n, m \in \mathbb{Z}_+$.

Розглянемо фактор-простір $\mathcal{A}_2(\mathcal{N}_2)/I^1$ з відношенням еквівалентності "$\sim$":

$$P_1 \sim P_2,\ \text{якщо } \deg P_1|_{\mathcal{N}_1} = \deg P_2|_{\mathcal{N}_1}.$$

Розглянемо деяку алгебраїчну комбінацію n-однорідних поліномів з $\mathcal{A}_2(\mathcal{N}_1)$. Згідно з твердженням 3.1.6, всі доданки вигляду

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}\sum_{\substack{m=1\\ n,m\in\mathbb{Z}_+}}^{n} \binom{n}{m} x_i^{n-m} x_j^m A_P(e_i^{n-m}, e_j^m)$$

при звуження на $\mathcal{N}_1$ будуть дорівнювати нулю, тому в алгебраїчній комбінації ненульовими будуть тільки доданки вигляду

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^n A_P(e_i^n).$$

Така алгебраїчна комбінація для всіх $n \geq 0$ ізоморфна до $\mathcal{A}_1(\mathcal{N}_1)$ (теорема 3.2.1), тому, згідно з означенням фактор-простору, довільний поліном з $\mathcal{A}_2(\mathcal{N}_2)$ можна представити у вигляді суми елементів з класів I^1 і $\mathcal{A}_1(\mathcal{N}_1)$. Отже, спектр замикання $\mathcal{A}_2(\mathcal{N}_2)$ складається із сукупності спектрів ідеала I^1 і $\mathcal{A}_1(\mathcal{N}_1)$.

Згідно з теоремою 3.2.1, спектр замикання $\mathcal{A}_1(\mathcal{N}_1)$ гомеоморфний стоун-чехівській компактифікації $\mathbb{N}$.

Дослідимо спектр ідеала I^1, твірними елементами якого є $x_i^n x_j^m A_P(e_i^n, e_j^m)$ для фіксованих взаємопросттих n, m. Перебираючи всеможливі $i < j$, $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, множина $\{x_i^n x_j^m A_P(e_i^n, e_j^m)\}$ ізоморфна до деякої підалгебри A_{nm} в $\ell_\infty(\mathbb{N}^2)$, де $a_{ij} = A_P(e_i^n, e_j^m)$:

$$A_{nm} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ & & \cdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots \end{pmatrix}.$$

Спектр підалгебри A_{nm} для кожної пари взаємопростих n, m дорівнює деякій підмножині стоунчехівської компактифікації $\mathbb{N}^2$, тобто

$$M(A_{nm}) = \Big\{\mathcal{U} \in \beta\Big(\mathbb{N}^2 \setminus \{(n, n), n \in \mathbb{N}\}\Big)\Big\}.$$

Отримані результати сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 3.2.2. *Спектр алгебри $H_b(\mathcal{N}_2)$ гомеоморфний до об'єднання стоун-чехівскої компактифікації на $\mathbb{N}$ та спектрів сім'ї $\{A_{nm}\}$ де $n, m \in \mathbb{Z}_+$ – взамнопрості числа, тобто $M_b(\mathcal{N}_2)$ гомеоморфний до множини*

$$\beta\mathbb{N}\bigcup\beta\Big(\mathbb{N}^2 \setminus \{(n,n), n \in \mathbb{N}\}\Big). \tag{3.2.4}$$

Випадок простору ℓ_2

Нехай $X = \ell_2$ (банахів простір всіх дійсних послідовностей $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, для яких ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$), тобто $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, $\{e_k\}$ – базис Шаудера, такий що $e_k = (0, \cdots, 1, 0, \cdots), k \geq 1$.

Лінійні функціонали f, g, звужені на $\mathcal{N}_1 \subset \ell_2$ на деякий базисний вектор e_k мають вигляд $a_k x_k$, $b_k x_k$ відповідно, ряди $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ і $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 < \infty$.

Не завжди всеможливими алгебраїчними комбінаціями лінійних фукціоналів і сталих з $\mathcal{A}_1(\mathcal{N}_1)$ ми зможемо вичерпати всі поліноми степенів $n \geq 2$. Отже, не всі аналітичні функції з $H_b(\mathcal{N}_1)$ ми зможемо наблизити лінійними функціоналами на $\mathcal{N}_1$ (як у випадку простору ℓ_1). Тому $\mathcal{A}_1(\mathcal{N}_1)$ і $H_b(\mathcal{N}_1)$ не є ізоморфними.

Приклад 3.2.3. *Розглянемо 2-однорідний поліном вигляду $h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ і звузимо його на на $\mathcal{N}_1 \subset \ell_2$. Значення полінома $h(x)$ на k-му базисному векторі буде дорівнювати*

$$x_k^2.$$

Достатньо показати, що не існує таких лінійних функціоналів $f, g \in H_b(\mathcal{N}_1)$, що добуток їх k-их координат дорівнює x_k^2.

Нехай $(\mathcal{T}_1 f)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$, $(\mathcal{T}_1 g)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k$ *– шукані лінійні функціонали. Тоді звуження добутку* $(\mathcal{T}_1 f)(x)(\mathcal{T}_1 g)(x)$ *на базисний вектор* e_k *буде дорівнювати*

$$a_k x_k \cdot b_k x_k = x_k^2,$$

Але ряди $(a_k^2)_{k=1}^{\infty}$ *і* $(b_k^2)_{k=1}^{\infty}$ *за умови* $a_k \cdot b_k = 1$ *не можуть бути одночасно абсолютно збіжними, тому таких функціоналів* f, g *на* $H_b(\mathcal{N}_1)$ *не існує.*

Отже, алгебри $\mathcal{A}_1(\mathcal{N}_1)$ і $\mathcal{A}_2(\mathcal{N}_1)$ для $\mathcal{N}_1 \subset \ell_2$ не є ізоморфними. Наступне твердження є аналогом теореми 4.2.1 ([108], наслідок 2) для алгебри $H_b(\mathcal{N}_1)$.

Позначимо I_n – мінімальний замкнений ідеал, породжений n-однорідними поліномами з $\mathcal{A}_n(\mathcal{N}_1)$.

Теорема 3.2.4. *Нехай* $I_1(\mathcal{N}_1)$ *і* $I_2(\mathcal{N}_1)$ *– ідеали, породжені* 1 *і* 2-*однорідними поліномами з алгебр* $\mathcal{A}_1(\mathcal{N}_1)$ *і* $\mathcal{A}_2(\mathcal{N}_1)$ *відповідно. Тоді існує характер* $\varphi \in M_b(\mathcal{N}_1)$ *такий, що* $\varphi(I_1) = 0, \varphi(I_2) \neq 0$ *і*

$$\varphi(P) = \lim_{\mathcal{U}} A_P(e_k^n), \qquad P \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_1), \tag{3.2.5}$$

де $\mathcal{U}$ *– деякий фіксований ультрафільтер на множині натуральних чисел.*

Доведення. Нехай φ – характер, який визначається рівністю (3.2.5). Якщо P є 1-однорідним поліномом на $\mathcal{N}_1$, то

$$P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k, \text{ де } c_k = P(e_k).$$

Кожному n-однорідному поліному $P \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_1)$ відповідає послідовність $(c_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2^* = \ell_2$. Отже, ряд $\sum_k |c_k|^2$ є збіжним, тому виконується необхідна умова $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$. Отже, характер φ

$$\varphi(P) = \lim_{\mathcal{U}} P(e_k) = 0.$$

Нехай P є 2-однорідним поліномом на $\mathcal{N}_1$, таким, що $P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \in \mathcal{A}_2(\mathcal{N}_1)$, де $A_P(e_k^2) = 1$. Тоді характер

$$\varphi(P) = \lim_{\mathcal{U}} A_P(e_k^2) = \lim_{\mathcal{U}} 1 = 1 \neq 0,$$

Бачимо, що φ дорівнює нулю на всіх однорідних поліномах першого степеня з I_1 і не дорівнює нулю на поліномах з I_2. Продовжимо функціонал φ за лінійністю і мультиплікативністю на весь $H_b(\mathcal{N}_1)$. Отже, характер вигляду (3.2.5) – шуканий. $\square$

Аналогічними міркуваннями легко бачити, що поліноми вигляду

$$P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k^3, \quad \sum |c_k|^2 < \infty, \quad x \in \mathcal{N}_1 \tag{3.2.6}$$

не породжуються, в загальному випадку, алгебраїчними комбінаціями поліномів з $\mathcal{A}_2(\mathcal{N}_1)$, тому алгебри $\mathcal{A}_3(\mathcal{N}_1)$ і $\mathcal{A}_2(\mathcal{N}_1)$, $\mathcal{N}_1 \subset \ell_2$ не є ізоморфними.

Але такого характеру $\varphi \in M_b(\mathcal{N}_1)$, який розділяє ідеали I_2 та I_3 не існує, оскільки між поліномами вигляду (3.2.6), які належать до I_3 та поліномами Q з I_2 вигляду

$$Q(x) = \sqrt[3]{c_k^2} x_k^2 \tag{3.2.7}$$

існує алгебраїчна залежність:

$$P^2(x) - Q^3(x) = 0,$$

тому, якщо $\varphi(P) = 0$, то $\varphi(P^2) = \varphi(Q^3) = 0$. Це означає, що $I_2 \subset \ker\varphi$. Умови теореми 3.2.4 для I_2 та I_3 не викнуються, оскільки $\varphi(I_2) = 0, \varphi(I_3) = 0$. Отже, не існує такого φ, який розділяє ідеали I_2 та I_3.

Узагальнивши цей результат бачимо, що який би ми не взяли $P \in \mathcal{A}_m(\mathcal{N}_1)$, $m \geq 3$, його завжди можна отримати як алгебраїчну комбінацію поліномів з $\mathcal{A}_3(\mathcal{N}_1)$, тому для $m > 3$ алгебри $\mathcal{A}_m(\mathcal{N}_1)$ і $\mathcal{A}_3(\mathcal{N}_1)$ є ізоморфними. Отже, спектр $M_b(\mathcal{N}_1)$, $\mathcal{N}_1 \subset \ell_2$ гомеоморфний спектру $M(\mathcal{A}_3(\mathcal{N}_1))$.

3.3. Гомоморфізми алгебри блочно-діагональних аналітичних функцій

Нехай X – комплексний банахів простір.

Нехай $C_{\widetilde{F}} : H_b(X) \to H_b(X)$ – оператор на $H_b(X)$, який будь-якій функції $f \in H_b(X)$ ставить у відповідність композицію $f \circ \widetilde{F} \in H_b(X)$, де $\widetilde{F} : X \to X$ – деяке аналітичне відображення обмеженого типу на X:

$$(C_{\widetilde{F}}f)(x) = f \circ \widetilde{F}(x) = f(\widetilde{F}(x)).$$

Оператор $C_{\widetilde{F}}$ називається *оператором композиції.* Очевидно, що оператор композиції є гомоморфізмом відповідних алгебр. Нашим завданням, у цьому підрозділі, є побудова операторів композиції з $H_b(\mathcal{N}_m)$ в $H_b(\mathcal{N}_m)$.

Якщо F є звуженням аналітичного відображення обмеженого типу $\widetilde{F} : X \to X$ на підмножини $\mathcal{N}_m$, тобто $F : \mathcal{N}_m \to \mathcal{N}_m$, то C_F також є гомоморфізмом з $H_b(\mathcal{N}_m)$ в $H_b(\mathcal{N}_m)$.

Оскільки підмножина $\mathcal{N}_m \subset X$ не є відкритою і не є аналітичним многовидом, нам необхідно окремо дати означення аналітичного відображення з $\mathcal{N}_m$ в $\mathcal{N}_m$.

Означення 3.3.1. *Відображення $F : \mathcal{N}_m \to \mathcal{N}_m$ називається аналітичним, якщо F – неперервне і для будь-якого набору базисних векторів $\{e_{k_1}, \cdots, e_{k_m}\}$ знайдуться базисні вектори $\{e_{j_1}, \cdots, e_{j_m}\}$ такі, що звуження F на лінійний підпростір $\operatorname{span}(e_{k_1}, \cdots, e_{k_m})$ буде аналітичним відображенням з образом у $\operatorname{span}(e_{j_1}, \cdots, e_{j_m})$.*

Означення 3.3.2. *Аналітичне відображення $F : \mathcal{N}_m \to \mathcal{N}_m$ називається відображенням обмеженого типу, якщо образом обмежених підмножин $\mathcal{N}_m$ є обмежені підмножини.*

Зауважимо, що вимога неперервності є суттєвою у цьому означенні. Справді, нехай $F_0 : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_1$ визначено за формулою $F_0(x_k e_k) = k x_k e_k$. Тоді, звуження F_0 на $\operatorname{span}(e_k)$ буде аналітичним (навіть лінійним) відображенням, але F_0 є розривним в нулі, оскільки $F_0(\frac{e_k}{k}) \not\to 0$ при $k \to \infty$.

Розглянемо деякі приклади аналітичних відображень обмеженого типу з $\mathcal{N}_m$ в $\mathcal{N}_m$.

Приклад 3.3.3. *Нехай* $h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n$ *– ціла функція однієї комплексної змінної* t. *Визначимо* F :

$$F(x) = F\Big(\sum_{n=1}^{m} x_n e_n\Big) = \sum_{n=1}^{m} c_n x_n^n e_n, \qquad x \in \mathcal{N}_m.$$

Бачимо, що $F(x) : \mathcal{N}_m \to \mathcal{N}_m$. *Тоді,* F *продовжується до аналітичного відображення* $\widetilde{F}$ *на весь простір* X:

$$\widetilde{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n^n e_n, \qquad x \in X$$

і $C_{\widetilde{F}}$ *є гомоморфізмом з* $H_b(X)$ *в* $H_b(X)$. *Оскільки* $\widetilde{F}$ *залишає інваріантною* $\mathcal{N}_m$ *для кожного* $m > 0$, *то* C_F *є гомоморфізмом з* $H_b(\mathcal{N}_m)$ *в* $H_b(\mathcal{N}_m)$.

Приклад 3.3.4. *Інший приклад* $F(x_k e_k) = x_k^n e_k$, *де* $x \in X = \ell_p$, $1 \leq p \leq \infty$ *або* $X = c_0$ *є прикладом аналітичного відображення з* $\mathcal{N}_1$ *в* $\mathcal{N}_1$, *яке не є обмеженого типу. Дійсно, образом обмеженої множини* $\{2e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *при такому відображенні є необмежена множина* $\{2^k e_k\}_{k=1}^{\infty}$. *При цьому, як легко бачити,* F *є неперервним.*

Теорема 3.3.5. *Нехай* $X = \ell_1$. *Наступні умови еквівалентні:*

1. *Для будь-якої функції* $f \in H_b(\mathcal{N}_m)$ *і кожного аналітичного відображення обмеженого типу* $F : \mathcal{N}_m \to \mathcal{N}_m$, $C_F(f) \in H_b(\mathcal{N}_m)$;

2. *Кожне аналітичне відображення обмеженого типу з* $\mathcal{N}_m$ *в* $\mathcal{N}_m$ *породжує гомоморфізм* $C_F : H_b(\mathcal{N}_m) \to H_b(\mathcal{N}_m)$;

3. *Кожна функція* g, $g(0) = 0$ *на* $\mathcal{N}_m$, *яка є аналітичною на всіх підпросторах вигляду* $\operatorname{span}(e_{k_1}, \cdots, e_{k_m})$ *є обмеженою на обмежених множинах і належить до* $H_b(\mathcal{N}_m)$.

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2) оскільки C_F – гомоморфізм, то з того, що $C_F(f) \in H_b(\mathcal{N}_m)$ для всіх $f \in H_b(\mathcal{N}_m)$ випливає, що C_F – гомоморфізм з $H_b(\mathcal{N}_m)$ в себе. 2) $\Rightarrow$ 3). Нехай функція g така як у пункті 3) і не належить до $H_b(\mathcal{N}_m)$. Нехай $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ – розклад g через однорідні поліноми. Розглянемо відображення $F_g : \mathcal{N}_m \to \mathcal{N}_m$:

$$F_g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) e_n.$$

Очевидно, що F_g – аналітичне відображення обмеженого типу. Нехай f_0 – лінійний функціонал вигляду $f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Тоді $f_0 \in H_b(\mathcal{N}_m)$, але $C_f(f_0) = f_0(F_g(x)) = g(x) \notin H_b(\mathcal{N}_m)$, що суперечить тому, що $C_f : H_b(\mathcal{N}_m) \to H_b(\mathcal{N}_m)$. 3) $\Rightarrow$ 1) оскільки F – аналітичне відображення обмеженого типу, то $g = C_F(f)$ задовольняє умову 3) цієї теореми для кожної функції $f \in H_b(\mathcal{N}_m)$. Тому $C_F(f) \in H_b(\mathcal{N}_m)$. $\square$

Нехай $\Phi : H_b(\mathcal{N}_m) \to A$ – довільний A-значний гомоморфізм, де A – деяка банахова алгебра (зокрема, якщо $A = \mathbb{C}$, то Φ є комплексним гомоморфізмом на $H_b(\mathcal{N}_m)$, тобто належить до $M_b(\mathcal{N}_m)$.)

Твердження 3.3.6. *Кожен гомоморфізм Φ з $H_b(\mathcal{N}_m)$ в довільну банахову алгебру A можна продовжити до гомоморфізму з $H_b(X)$ в A за формулою: $\Phi \circ \mathcal{T}_m$, де $\mathcal{T}_m : H_b(X) \to H_b(\mathcal{N}_m)$ – оператор звуження.*

Доведення. Оператор звуження $\mathcal{T}_m : H_b(X) \to H_b(\mathcal{N}_m)$ є гомоморфізмом, отже, композиція $\Phi \circ \mathcal{T}_m : H_b(X) \to A$, яка діє в довільну банахову алгебру A, також є гомоморфізмом відповідних алгебр. $\square$

Висновки до розділу 3

Нехай A – деяка комутативна топологічна алгебра і $\mathcal{N}$ – деяка підмножина спектру $M(A)$. Розглядають алгебру $A(\mathcal{N})$, яка складається зі звужень елементів $\hat{a}$ на $\mathcal{N}$, $a \in A$, де $\hat{a}$ – перетворення Гельфанда елементів $a \in A$. Очевидно, що оператор, який діє як оператор звуження $T : A \to A(\mathcal{N})$ на перетворення Гельфанда: $Ta = \hat{a} \restriction \mathcal{N}$, є гомоморфізмом алгебр. У цьому контексті природнім є питання про спектр $A(\mathcal{N})$, який, очевидно містить $\mathcal{N}$, але не завжди збігається з $\mathcal{N}$. Крім того, маючи опис спектру $A(\mathcal{N})$ для різних множин $\mathcal{N}$ можна отримати нову інформаціію про спектр алгебри A. В алгебраїчній геометрії $A = \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$, а в якості $\mathcal{N}$ розглядають алгебраїчні множини – кулі скінченнопороджених поліноміальних ідеалів. Прості приклади алгебраїчних множин можна подати у вигляді об‘єднання лінійних просторів.

У розділі 3 у якості $\mathcal{N}$ ми розглядаємо множини $\mathcal{N}_m = \bigcup_{k_1 \neq \cdots \neq k_m} (\mathbb{C}e_{k_1} + \cdots + \mathbb{C}e_{k_m})$, $m \geq 1$, які є об‘єднанням лінійних підпросторів комплексного банахового простору X і мають деякі властивості алгебраїчних множин.

Позначимо $H_b(\mathcal{N}_m)$ – *алгебри блочно-діагональних аналітичних функцій обмеженого типу,* які є звуженнями аналітичних функцій обмеженого типу з $H_b(X)$ на $\mathcal{N}_m$, $m \geq 1$. На алгебрі $H_b(\mathcal{N}_m)$ визначено топологію фактор-простору, тобто локально-опуклу топологію, яка задається системою напівнорм

$$p_r(f) = \inf_{g \in \ker T_m} \sup_{||x|| \leq r} |f(x) + g(x)|, \qquad r \in \mathbb{Q}.$$

У підрозділі 3.1 описано алгебри блочно-діагональних аналітичних функцій, а також їх зв'язок із простором n-однорідних поліномів і алгебрами аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі X.

Якщо φ – характер на алгебрі $H_b(\mathcal{N}_m)$, то його можна продовжити до характера на всій алгебрі $H_b(X)$ (твердження 3.1.2). У твердженні 3.1.4 доведено ізоморфність просторів неперервних n-однорідних поліномів на $\mathcal{N}_m$ і на X для всіх $n \leq m$.

У теоремі 3.1.7 встановлено зв'язок між елементами спектру алгебри $H_b(\mathcal{N}_m)$ (позначаємо $M_b(\mathcal{N}_m)$) із елементами спектру $M_b(X)$ алгебри $H_b(X)$:

Теорема 3.1.7. *Для кожного характера $\psi \in M_b(X)$ існує послідовність $\varphi_m \in H_b^*(\mathcal{N}_m)$ – спряжений простір до $H_b(\mathcal{N}_m)$ така, що послідовність продовжень $\widetilde{\varphi}_m \in H_b^*(X)$ збігається до ψ в $*$-слабкій топології простору $H_b^*(X)$. Тобто, $\widetilde{\varphi}_m(f) \to \psi(f)$ при $m \to \infty$ для кожної функції $f \in H_b(X)$.*

У твердженні 3.1.8 показано, що подібно до випадку з алгебраїчними множинами в алгебраїчній геометрії, точки за межами $\mathcal{N}_m$ не породжують характери алгебри $H_b(\mathcal{N}_m)$.

У підрозділі 3.2 описано спектри деяких алгебр блочно-діагональних аналітичних функцій для банахових просторів ℓ_1, ℓ_2.

Теорема 3.2.1. *Множина характерів на $H_b(\mathcal{N}_1)$ гомеоморфна стоун-чехівській компактифікації $\beta\mathbb{N}$ множини натуральних чисел. Довільний характер $\varphi \in M_b(\mathcal{N}_1)$ має вигляд:*

$$\varphi(P) = \lim_{\mathcal{U}} P(e_k),$$

де $P \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_1)$, $\mathcal{U}$ *- деякий фіксований ультрафільтер на* $\mathbb{N}$.

Для алгебри блочно-діагональних функцій $H_b(\mathcal{N}_2)$ показано, що її спектр гомеоморфний до об'єднання стоун-чехівської компактифікації на множині натуральних чисел та спектрами сім'ї підалгебр, які містяться в стоун-чехівській компактифікації множини $\mathbb{N}^2$.

Теорема 3.2.2. *Спектр алгебри* $H_b(\mathcal{N}_2)$ *гомеоморфний до множини*

$$\beta\mathbb{N}\bigcup\beta\Big(\mathbb{N}^2 \setminus \{(n,n), n \in \mathbb{N}\}\Big).$$

Нехай $\mathcal{A}_m(\mathcal{N}_m)$ – замикання алгебри в $H_b(\mathcal{N}_m)$, яка породжена поліномами з $\mathcal{P}({}^{\le m}\mathcal{N}_m)$ у відповідній топології, I_m – мінімальний замкнений ідеал, породжений m-однорідними поліномами з $\mathcal{A}_m(\mathcal{N}_m)$, $\mathcal{N}_m \subset X$.

Досліджуючи алгебри блочно-діагональних аналітичних функцій банахового простору ℓ_2, в цьому підрозділі доведено аналог теореми 4.2.1 ([108], наслідок 2), що існує характер на алгебрі блочно-діагональних аналітичних функцій $H_b(\mathcal{N}_1)$, який розділяє ідеали I_1 і I_2 (твердження 3.2.4). Але між поліномами з I_2 та I_3 існує алгебраїчна залежність, тому характера, який розділяє ідеали I_2 та I_3 не існує. Узагальнивши цей результат бачимо, що який би ми не взяли $P \in \mathcal{A}_m(\mathcal{N}_1)$, $m \ge 3$, його завжди можна отримати як алгебраїчну комбінацію поліномів з $\mathcal{A}_3(\mathcal{N}_1)$, тому для $m > 3$ алгебри $\mathcal{A}_m(\mathcal{N}_1)$ і $\mathcal{A}_3(\mathcal{N}_1)$ є ізоморфними. Отже, спектр $M_b(\mathcal{N}_1)$, $\mathcal{N}_1 \subset \ell_2$ гомеоморфний спектру $M(\mathcal{A}_3(\mathcal{N}_1))$.

У підрозділі 3.3 розглянуто *оператор композиції* $C_{\widetilde{F}} : H_b(X) \to H_b(X)$, який будь-якій функції $f \in H_b(X)$ ставить у відповідність композицію $f \circ \widetilde{F} \in H_b(X)$, де $\widetilde{F} : X \to X$ – деяке аналітичне відображення обмеженого типу на X:

$$(C_{\widetilde{F}} f)(x) = f \circ \widetilde{F}(x) = f(\widetilde{F}(x)).$$

Оператор композиції є гомоморфізмом відповідних алгебр.

У даному підрозділі, побудовано оператори композиції з $H_b(\mathcal{N}_m)$ в $H_b(\mathcal{N}_m)$ (приклад 3.3.3, 3.3.4), дано означення аналітичного відображення обмеженого типу на $\mathcal{N}_m$ і розглянуто деякі приклади таких відображень . В теоремі 3.3.5 доведено еквівалентність деяких тверджень, пов'язаних з питанням, коли оператор композиції породжує гомоморфізм алгебр з $H_b(\mathcal{N}_m)$ в $H_b(\mathcal{N}_m)$.

Результати цього розділу були надруковані у фахових виданнях [7], [12] і у матеріалах конференцій [18], [17].

РОЗДІЛ 4
УЗАГАЛЬНЕННЯ ПРОДОВЖЕННЯ АРЕНСА НА СПЕКТР АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА БАНАХОВІЙ АЛГЕБРІ

4.1. Побудова "мультиплікативної" згортки на спектрі алгебри $H_b(A)$

Для фіксованої точки $x \in X$, де X – комплексний банахів простір розглянемо оператор зсуву T_x (вперше запропонований у [25]), визначений на $H_b(X)$ наступним чином:

$$(T_x f)(y) = f(x+y), \qquad f \in H_b(X).$$

У роботі [25] показано, що $T_x f \in H_b(X)$ і для будь-якого фіксованого $\varphi \in H_b^*(X)$ функція $x \mapsto \varphi(T_x f)$, $x \in X$ належить до $H_b(X)$.

Для фіксованих лінійних функціоналів $\varphi, \psi \in H_b^*(X)$ визначимо операцію *"адитивної" згортки* на $H_b(X)$:

$$(\varphi * \psi)(f) = \varphi(\psi(T_x f)), \qquad f \in H_b(X).$$

Зокрема, якщо φ, ψ – лінійні мультиплікативні функціонали з M_b, то за наслідком 2.5.5 існують збіжні у слабкополіноміальній топології напрямлености $(x_\alpha), (y_\beta) \in X$ такі, що

$$\varphi(P) = \lim_\alpha P(x_\alpha), \qquad \psi(P) = \lim_\beta P(y_\beta)$$

для всіх неперервних поліномів $P \in \mathcal{P}(X)$. Отже, згідно з означенням,

$$(\varphi * \psi)(P) = \lim_\alpha \lim_\beta P(x_\alpha + y_\beta)$$

і для радіус-функції "адитивної" згортки (інфінум по всіх номерах $r > 0$ таких, що $\varphi * \psi$ є неперервною відносно норми (2.2.1) на кулі B_r) справедлива нерівність:

$$R(\varphi * \psi) \leq R(\varphi) + R(\psi).$$

Зауважимо, що M_b є півгрупою відносно такої "адитивної" згортки. В загальному випадку згортка некомутативна: $\varphi*\psi \neq \psi*\varphi$ ([27], зауваження 3.5).

Нехай $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in M_b$. Позначимо

$$\varphi_1 * \cdots * \varphi_n = \mathop{\ast}_{k=1}^{n} \varphi_k.$$

"Адитивну" згортку у своїх роботах викоритовували багато авторів (див. [25], [26], [27], [108]). У цьому розділі розглядається згортка, яка пов'язана з операцією множення алгебри A. Таку згортку називаємо "мультиплікативною". Дещо інший підхід до побудови "мультиплікативної" згортки для алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу запропоновано у [40].

Алгебра $H^\infty_{uc}(B_r)$ – банахова алгебра всіх аналітичних комплекснозначних функцій f, які є обмеженими і рівномірно неперервними на кулі B_r радіуса $r \in \mathbb{Q}$ з центром в точці 0 комплексного банахового простору X з нормою:

$$||f||_r = \sup_{||x|| \leq r} |f(x)|.$$

У роботі [25] показано, що $H_b(X)$ є проективною границею банахових алгебр $H^\infty_{uc}(B_r)$. Зокрема $H_b(X) = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}} H^\infty_{uc}(B_r)$.

Теорема 4.1.1. [25] *Для кожного фіксованого* $r > 0$ *множина*

$$\{\varphi \in M_b(X) : R(\varphi) \leq r\}$$

є компактною підмножиною в $M_b(X)$ *і тотожнъо дорівнює* $M_{uc}(B_r)$ *– спектру алгебри* $H^\infty_{uc}(B_r)$.

Топологія Гельфанда на спектрі алгебри $M_{uc}(B_r) \subset M_b(X)$ індукована топологією Гельфанда на $M_b(X)$. Отже, спектр $M_b(X)$ є індуктивною границею спектрів $M_{uc}(B_r)$ для всіх раціональних $r > 0$, тобто $M_b(X) = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} M_{uc}(B_r)$ (як топологічних просторів).

Нехай A – банахова алгебра. Для фіксованих $x, y \in A$ позначимо Q_x – оператор мультиплікативного зсуву на $H_b(A)$ такий, що:

$$(Q_x f)(y) = f(xy),$$

де xy – операція множення в алгебрі A.

Твердження 4.1.2. *Функція* $Q_x f$ *належить до* $H_b(A)$ *для всіх* $x \in A$ *і* $f \in H_b(A)$.

Доведення. Нехай B_r – куля радіуса r з центром в точці 0 в A. Позначимо для фіксованого $x \in A$ множину $xB_r = \{xy, y \in B_r\} \subset A$. Очевидно, що $xB_r \subset B_{r\|x\|}$. Звідси

$$\|Q_x f\|_r = \sup_{y\in xB_r} |f(y)| \leq \sup_{y\in B_{r\|x\|}} |f(y)| = \|f\|_{r\|x\|},$$

тому,

$$\|f(x\cdot)\|_r \leq \|f\|_{r\|x\|} \tag{4.1.1}$$

$$\text{або} \quad ||Q_x f||_r \leq \|f\|_{r\|x\|}$$

Отже, $Q_x f$ є обмеженою функцією на кожній обмеженій підмножині в A для фіксованого $x \in A$. З іншого боку, $y \mapsto xy$ є лінійним відображенням, тому $Q_x f = f(x\cdot)$ – аналітична функція як композиція аналітичних відображень. Ми довели, що $Q_x f \in H_b(A)$. $\square$

Отже, Q_x для кожного $x \in A$ є неперервним оператором на $H_b(A)$. Оскільки кожна $f \in H_b(A)$ є рівномірно неперервною на обмежених підмножинах A, то елемент $Q_x f \in H_b(A)$ залежить неперервно від x в топології простору $H_b(A)$.

У наступному розділі буде показано, що відображення $x \mapsto T_x f$, $x \mapsto Q_x f$ не обов'язково є неперервнимим в слабкій топології простору X і алгебри A відповідно.

На спряженому просторі $H_b^*(A)$ оператор Q_x породжує групу оборотніх спряжених операторів Q_x^*:

$$\left(Q_x^* \psi\right)(f) = \psi\left(Q_x f\right) = \psi\left(f(x\,\cdot)\right), \tag{4.1.2}$$

для $x \in X$, $f \in H_b(A)$, $\psi \in H_b^*(A)$. Оскільки $Q_x f$ залежить неперервно від x в топології простору $H_b(A)$, то і $Q_x^* \psi$ для будь-якого фіксованого $\psi \in H_b^*(A)$ залежить неперервно від x.

Оператор Q_x є лінійним і мультиплікативним:

$$(Q_x)\Big(f(y) + g(y)\Big) = (Q_x f)(y) + (Q_x g)(y),$$
$$(Q_x)\Big(f(y)g(y)\Big) = (Q_x f)(y)(Q_x g)(y),$$

тому спряжений оператор Q_x^* відображає $M_b(A)$ в себе:

$$Q_x^*\left(M_b(A)\right) = M_b(A), \quad x \in A.$$

Твердження 4.1.3. *Нехай* $g(x) = Q_x^*\psi(f)$, *де* Q_x^* *– спряжений оператор до* $(Q_x f)(y) = f(xy)$, $\psi \in H_b^*(A)$. *Тоді* $g \in H_b(A)$.

Доведення. Функція g для будь-якого фіксованого $\psi \in H_b^*(A)$ є аналітичною на A.

Нехай $R(\psi)$ – радіус функція функціонала $\psi \in H_b^*(A)$, тоді ψ є рівномірно неперервним на кулі $B_{R(\psi)+\varepsilon} \subset H_b(A)$ відносно норми $||\cdot||_{R(\psi)+\varepsilon}$ для будь-якого $\varepsilon > 0$, тобто ψ є характером на банаховій алгебрі $H^\infty_{uc}(B_{R(\psi)+\varepsilon})$. Згідно з нервіністю (4.1.1) маємо

$$|g(x)| = |\psi(f(x\,\cdot))| \le ||\psi||_{R(\psi)+\varepsilon}||f(x\cdot)||_{R(\psi)+\varepsilon} =$$

$$\|Q_x f\|_{R(\psi)+\varepsilon} \le \|f\|_{(R(\psi)+\varepsilon)\|x\|} = \|f\|_{R(\psi)\|x\|+\varepsilon\|x\|}.$$

Нерівність $|g(x)| \le ||f||_{R(\psi)\|x\|+\varepsilon\|x\|}$ виконується для довільного ε, отже нерівність виконується і для $\varepsilon = 0$:

$$|g(x)| \le ||f||_{R(\psi)\|x\|}. \tag{4.1.3}$$

Звідси, якщо $\|x\| \le r$, $r > 0$, то

$$|g(x)| \le \|f\|_{R(\psi)r}.$$

Отже, функція g є обмеженою на кулі B_r, $r > 0$. $\square$

Означимо *"мультиплікативну" згортку* наступним чином:

$$(\varphi \star \psi)(f) := \varphi\left(\psi(f(xy))\right), \tag{4.1.4}$$

де ψ діє на $f(xy)$ як на функцію від y, а φ діє на $\psi(f(xy))$ як на функцію від x. Використовуючи оператор мультиплікативного зсуву, згортка має вигляд:

$$(\varphi \star \psi)(f) = \varphi(\psi(Q_x f)) = \varphi(g).$$

Якщо $\varphi, \psi \in A^{**}$, тобто є функціоналами значення продовження Арона-Бернера функції $f \in A^*$ в точці з A^{**}, то "мультиплікативна" згортка співпадає із продовженням Аренса операції множення алгебри A у другий спряжений A^{**}. Оскільки $A^{**} \subset H_b^*(A)$, то "мультиплікативну" згортку вважаємо *узагальненням продовження Аренса операції множення алгебри* A.

Теорема 4.1.4. *Нехай* $\varphi, \psi \in H_b^*(A)$, *тоді згортка* $\varphi \star \psi$ *належить до* $H_b^*(A)$ *і для радіус-функції "мультиплікативної" згортки справедлива нерівність:*

$$R(\varphi \star \psi) \leq R(\varphi)R(\psi).$$

Доведення. Для будь-якої функції $f \in H_{uc}^\infty(B_{R(\varphi)+\varepsilon})$ для довільного $\varepsilon > 0$

$$|\varphi(f)| \leq ||f||_{R(\varphi)+\varepsilon}.$$

Розглянемо функцію $g(x) = \psi(f(x\cdot)) = \psi(Q_x f)$. Оскільки

$$|g(x)| = |\psi(Q_x f)| \leq ||Q_x f||_{R(\psi)+\varepsilon} \leq ||f||_{(R(\psi)+\varepsilon)||x||}.$$

Отже,

$$\sup_{||x|| \leq R(\varphi)+\varepsilon} |g(x)| \leq \sup_{||x|| \leq R(\varphi)+\varepsilon} ||f||_{(R(\psi)+\varepsilon)||x||}$$

або

$$||g||_{R(\varphi)+\varepsilon} \leq ||f||_{(R(\varphi)+\varepsilon)(R(\psi)+\varepsilon)}. \tag{4.1.5}$$

З нерівності (4.1.5) випливає, що:

$$|(\varphi \star \psi)(f)| = |\varphi(g)| \leq ||g||_{R(\varphi)+\varepsilon} \leq ||f||_{(R(\varphi)+\varepsilon)(R(\psi)+\varepsilon)}.$$

Ця нерівність виконується для довільного $\varepsilon > 0$, отже, вона виконується і для $\varepsilon = 0$ і згортка

$$|(\varphi \star \psi)(f)| \leq ||f||_{R(\varphi)R(\psi)}.$$

Ми довели, що функціонал $\varphi\star\psi$ є неперервним на $H_b(A)$ відносно топології, яка породжена зліченою системою напівнорм (2.2.1) на кулі $B_{R(\varphi)R(\psi)}$. Використовуючи означення радіус-функції маємо:

$$R(\varphi \star \psi) \leq R(\varphi)R(\psi).$$

Тому згортка $\varphi \star \psi \in H_b^*(A)$. □

Оскільки $M_b(A) \subset H_b^*(A)$, то дослідимо вигляд "мультиплікативної" згортки $\varphi \star \psi$ на спектрі $M_b(A)$.

Нехай φ, ψ – довільні характери на $H_b(A)$. За наслідком 2.5.5, існують напрямленості $(x_\alpha), (y_\beta)$ в A такі, що $P(x_\alpha) \to \varphi(P)$ і $P(y_\beta) \to \psi(P)$ в слабкополіноміальній топології алгебри A. Наступне твердження автоматично випливає з означення "мультиплікативної" згортки.

Твердження 4.1.5. *Для будь-яких характерів $\varphi, \psi \in M_b(A)$ і полінома $P \in \mathcal{P}(X)$ згортка $\varphi \star \psi$ належить до $M_b(A)$ і*

$$(\varphi \star \psi)(P) = \lim_\alpha \lim_\beta P(x_\alpha y_\beta), \tag{4.1.6}$$

де $(x_\alpha), (y_\beta)$ – напрямленості з A, які є збіжними в слабкополіноміальній топології до $\varphi, \psi \in M_b(A)$ відповідно.

В загальному випадку легко бачити, що оператор "мультиплікативної" згортки $\varphi \star \psi$ не є комутативним навіть якщо алгебра A є комутативною. Зокрема, мультиплікативна згортка не комутативна для випадку $A = \ell_1$ і $\varphi, \psi \in \ell_1^{**}$ [21], [109], [110].

4.2. Властивості "мультиплікативної" згортки

Нехай A – комплексна банахова алгебра, $H_b(A)$ – алгебра Фреше аналітичних функцій обмеженого типу на A з топологією, яка породжена зліченою системою напівнорм (2.2.1).

У явному вигляді важко зобразити конкретні елементи $M_b(A)$. А.В. Загороднюк запропонував підхід, який дозволяє в деяких випадках описати спектр $M_b(A)$.

Позначимо $\mathcal{A}_n(A)$ – замикання в $H_b(A)$ алгебри, яка породжена поліномами з простору $\mathcal{P}(^{\leq n}A)$ у відповідній топології.

Нехай I_n – мінімальний замкнений ідеал, породжений n-однорідними поліномами з $\mathcal{A}_n(A)$, $n \geq 0$.

Як було визначено, кожен елемент $z \in X^{**}$ породжує функціонал значення функції в точці z, який є характером: $\delta_z \in M_b(A)$ за формулою $\delta_z(f) = \widetilde{f}(z)$.

У роботах [108], [107] показано, що, якщо $I_{k-1} \neq I_k$ для деякого $k > 1$, то існує ненульовий елемент $u_k \in (\bigotimes_{s,\pi}^k A)^{**}$ такий, що функціонал $\psi \in H_b^*(A)$ визначений на однорідних поліномах P за формулою

$$\psi(P) = \begin{cases} \widetilde{P}_{(k)}(u_k), & \text{якщо } \deg P = kn \text{ для деякого } n, \\ 0, & \text{якщо } \deg P \neq kn \text{ для деякого } n. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Функціонал ψ продовжується за лінійністю і неперервністю на весь $H_b(A)$ до деякого характера, який позначаємо $\delta^{(k)}(u_k)$. Тут $\widetilde{P}_{(k)}$

– продовження Арона-Бернера полінома $P_{(k)}$, визначеного на $\bigotimes_{s,\pi}^k A$ за формулою (2.1.3). Сформулюємо ці результати у вигляді теореми:

Теорема 4.2.1. [108] *Якщо $I_{k-1} \neq I_k$ для деякого $k > 1$, тоді існує характер $\psi \in M_b(A)$, який розділяє ідеали I_{k-1} та I_k, тобто $\psi(I_{k-1}) = 0$ і $\psi(I_k) \neq 0$.*

Таким чином, характер $\delta^{(k)}(u_k)$ задається елементом $u_k \in (\bigotimes_{s,\pi}^k A)^{**} = \mathcal{P}(^k A)^*$, який є біортогональним до всіх поліномів з $\mathcal{P}(^k A)$, що належать I_{k-1}. Біортогональність ми розуміємо в тому сенсі, що $I_{k-1} \subset \ker u_k$, $u_k \in \mathcal{P}(^k A)^*$. Тому можна сказати, що $u_k \in \mathcal{P}(^k A)^* \cap I_{k-1}^\perp$ і характер $\delta^{(k)}(u_k)$ можна розглядати як аналог функціоналу значення функції в точці але вже на просторі $\mathcal{P}(^k A)^* \cap I_{k-1}^\perp$. У [108] цей результат сформульовано у вигляді теореми:

Теорема 4.2.2 ([108]). *Існують послідовності спряжених банахових просторів $(E_n)_{n=1}^\infty$ і відображень $\delta^{(n)} : E_n \to M_b$ такі що $E_1 = A^{**}$, $E_n = \mathcal{P}(^n A)^* \bigcap I_{n-1}^\perp$, $\delta^{(1)} = \delta$ і довільний комплексний гомоморфізм $\varphi \in M_b$ має зображення:*

$$\varphi(P) = \mathop{\Huge\ast}_{n=1}^{\infty} \delta^{(n)}(u_n)(P) \tag{4.2.2}$$

для деякої послідовності $u_n \in E_n$, $n = 1, 2, \cdots$, $I_{n-1}^\perp$ – біортогональне доповнення до ідеалу I_{n-1}.

В цій теоремі під згорткою ми розуміємо "адитивну" згортку характерів, визначену в розділі 4.1. Зауважемо, що оскільки формула (4.2.2) визначена на поліномах і, згідно з означенням, якщо

$\deg P < k$, то $\delta^{(k)}(u_k)(P) = 0$, тому $\mathop{\ast}\limits_{k=1}^{\infty} \delta^{(k)}(u_k)(P) = \mathop{\ast}\limits_{k=1}^{\deg P} \delta^{(k)}(u_k)(P)$. Тому це не призводить до проблем зі збіжністю нескінченої згортки.

Згідно з теоремою 4.2.2, функціонал φ має зображення у вигляді послідовності функціоналів $u_n \in E_n$:

$$\varphi = (u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots).$$

Зауваження 4.2.3. *Якщо* $\varphi \in M_b(A)$ *– лінійний функціонал значення деякої функції у точці* $u \in A^{**}$, $u \neq 0$ *(тобто* $\varphi = \delta_u$*), то елемент* φ *буде мати зображення*

$$(\delta_u, 0, \cdots, 0, \cdots) = (u_1, 0, \cdots, 0, \cdots), \qquad u_1 \in A^{**}.$$

Використаємо такий підхід для вивчення властивостей "мультиплікативної" згортки.

Нехай функціонали $\varphi, \psi \in M_b(A)$ мають зображення $(u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots)$, $(v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots)$ відповідно. Оскільки "мультиплікативна" згортка $\varphi \star \psi$ є $M_b(A)$, то і $\varphi \star \psi$ також має зображення

$$(w_1, w_2, \cdots, w_n, \cdots), \qquad w_n \in E_n.$$

Твердження 4.2.4. *Нехай* $\varphi, \psi \in M_b(A)$ *є функціоналами значення функції* $f \in H_b(A)$ *в точках* $u, v \in A^{**}$. *Тоді згортка* $\varphi \star \psi$ *матиме вигляд*

$$(\delta_u \star \delta_v)(f) = \delta_{uv}(f).$$

Доведення. Для будь-якої функції $f \in H_b(A)$ маємо:

$$\Big(\delta_u \star \delta_v\Big)(f) = \Big(\delta_u\Big(\delta_v(f(x \cdot y))\Big)\Big)$$
$$\delta_u\Big(\widetilde{f}(x \cdot v)\Big) = \widetilde{f}\Big(u \cdot v\Big) = \delta_{u \cdot v}(f).$$

$\square$

Згідно із цим твердженням, якщо $\varphi = (u, 0, \cdots)$, $\psi = (v, 0, \cdots)$, то $\varphi\star\psi = (u\cdot v, 0, \cdots)$, де для $u, v \in A^{**}$ добуток $u\cdot v$ є продовженням Аренса операції множення алгебри A у другий спряжений A^{**}.

Твердження 4.2.5. *Нехай $\varphi, \psi \in M_b(A)$ і $\varphi = \delta_a$, ψ має зображення $(0, \cdots, 0, v_n, 0, \cdots)$, $n > 1$. Тоді згортка $\varphi \star \psi$ матиме зображення $(0, \cdots, 0, w_n, w_{n+1} \cdots)$.*

Доведення. Зафіксуємо $a \in A^{**}$. Для всіх $y \in A^{**}$ лінійний мультиплікативний оператор зсуву має вигляд:

$$(Q_a f)(y) = \widetilde{f}(ay),$$

де $\widetilde{f}$ – продовження Арона-Бернера функції $f \in H_b(A)$ у $H_b(A^{**})$. Тоді спряжений оператор для всіх $\psi \in M_b(A)$:

$$(Q_a^*\psi)(f) = \psi(Q_a f) = \psi(\widetilde{f}(ay)),$$

де, згідно із теоремою 4.2.2, $\psi(P) = 0$, якщо $\deg P < n$.

Запишемо згортку $\varphi\star\psi$ для k-однорідних поліномів $P \in \mathcal{P}(^k A)$, $k < n$ в термінах оператора $Q_a^*\psi$:

$$(Q_a^*\psi)(P) = \psi(\widetilde{P}(ay)) = \delta_a\Big(\psi(P(xy))\Big) = \delta_a \star \psi(P).$$

Бачимо, що згортка $\varphi \star \psi$, де $\varphi = \delta_a$ дорівнює дії оператора $Q_a^*\psi$ на поліномах P. Дія оператора не змінює степінь полінома P, тому, якщо $\deg P = k < n$, то і $\deg(Q_a P) = k < n$. Це означає, що, згортка $(\delta_a\star\psi)(P) = 0$ для всіх P таких, що $\deg P < n$. Отже, $\varphi\star\psi$, де $\varphi = \delta_a$ має зображення $(0, \cdots, 0, w_n, w_{n+1}, \cdots)$. $\square$

Наслідок 4.2.6. *Якщо $\varphi, \psi \in M_b(A)$ є функціоналами значення полінома в точках $a, b \in A^{**}$ відповідно, то згортка $\varphi \star \psi$ дорівнює композиції операторів $Q_a^*(Q_b^*\delta_e)$, де e – одиниця в алгебрі A.*

Оскільки кожному поліному $P_{(n)} \in \mathcal{P}({}^m\bigotimes_{s,\pi}^n A)$ можна поставити у відповідність mn-однорідний поліном $P_{mn} \in \mathcal{P}({}^{mn}A)$, $m \in \mathbb{N}$ за формулою (2.1.3) і це відображення продовжується за лінійністю і неперервністю до неперервного гомоморфізма з $H_b(\bigotimes_{s,\pi}^n A)$ в $H_b(A)$ (це випливає з наслідку 2.1.6 у [77]). Тому кожному характеру $\psi \in M_b(A)$ відповідає характер $\widehat{\psi} \in M_b(\bigotimes_{s,\pi}^n A)$. Тобто, якщо $\mathfrak{F} : H_b(\bigotimes_{s,\pi}^n A) \to H_b(A)$ – неперервний гомоморфізм і $\psi : H_b(A) \to \mathbb{C}$ – характер, то $\widehat{\psi} = \psi \circ \mathfrak{F}$.

Для довільного $n \in \mathbb{N}$ позначимо $J(n)$ – множину всіх дільників числа n.

Теорема 4.2.7. *Нехай $\psi \in M_b(A)$ має зображення $(v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots)$. Тоді $\widehat{\psi} \in M_b\left(\bigotimes_{s,\pi}^n A\right)$ буде мати зображення $(w_1, w_2, \cdots, w_m, \cdots)$, таке, що $\widehat{\psi} = \widehat{\mathop{\ast}\limits_{j \in J(mn)} \delta^{(j)}}(v_j)$. При цьому*

$$\delta^{(m)}(w_m) = \widehat{\delta^{(mn)}(v_{mn})} \text{ для } m > 1,$$

$$\delta^{(1)}(w_1) = \mathop{\ast}\limits_{j \in J(n)} \delta^{(j)}(v_j) \text{ для } m = 1.$$

Доведення. Нехай $\widehat{\psi} \in M_b(\bigotimes_{s,\pi}^n A)$ і $\widehat{\psi}$ має зображення $(w_1, w_2, \cdots, w_m, \cdots)$. Нехай $P_{(n)} \in \mathcal{P}({}^m\bigotimes_{s,\pi}^n A)$ і P_{mn} – mn-однорідний поліном на A, який відповідає $P_{(n)}$ за формулою (2.1.3).

Тоді

$$\widehat{\psi}(P_{(n)}) = \psi(\mathfrak{F}(P_{(n)})) = \psi(P_{mn}) =$$
$$\mathop{\ast}_{j=1}^{\infty} \delta^{(j)}(v_j)(P_{mn}) = \mathop{\ast}_{j\in J(mn)} \delta^{(j)}(v_j)(P_{mn}).$$

Справді, остання рівність випливає з того факту, що якщо j не є дільником mn, то за формулою (4.2.1)

$$\delta^{(j)}(v_j)(P_{mn}) = 0.$$

Враховуючи, що $\delta^{(m)}(w_m)$ тотожньо дорівнює нулю на поліномах степеня меншого за m в $\mathcal{P}({}^m\bigotimes_{s,\pi}^n A)$, то у зображенні

$$\delta^{(m)}(w_m) = \mathop{\ast}_{j\in J(mn)} \widehat{\delta^{(j)}(v_j)}$$

присутні тільки ті функціонали $\delta^{(j)}(v_j)$, для яких j ділить mn і є більшим за $(m-1)n$. Але це можливо тільки тоді, коли $\delta^{(m)}(w_m) = \widehat{\delta^{(mn)}(v_{mn})}$ для $m > 1$ і $\delta^{(1)}(w_1) = \mathop{\ast}_{j\in J(n)} \delta^{(j)}(v_j)$.

$\square$

Теорема 4.2.8. *Нехай $\varphi, \psi \in M_b(A)$. Тоді $\widehat{\varphi \star \psi} = \widehat{\varphi} \star \widehat{\psi}$.*

Доведення. Якщо $(x_\alpha)_{\alpha\in(\mathfrak{A},\le)}, (y_\beta)_{\beta\in(\mathfrak{A},\le)} \subset A$ – збіжні у слабкополіноміальній топології напрямленості, то $(u_\alpha) = (x_\alpha^{\otimes n}), (v_\beta) = (y_\beta^{\otimes n})$ є збіжними у слабкій топології простору $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ напрямленості.

Нехай $P_{mn} \in \mathcal{P}({}^{mn}A)$, $m, n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$(\varphi \star \psi)(P_{mn}) = \lim_\alpha \lim_\beta P_{mn}(x_\alpha y_\beta).$$

Нехай $P_{(n)} \in \mathcal{P}({}^m\bigotimes_{s,\pi}^n A)$ і P_{mn} – mn-однорідний поліном на A, який відповідає $P_{(n)}$ за формулою (2.1.3). Тоді

$$\widehat{(\varphi \star \psi)}(P_{mn}) = \lim_\alpha \lim_\beta P_m(\underbrace{x_\alpha y_\beta \otimes \cdots \otimes x_\alpha y_\beta}_{n}) =$$
$$\lim_\alpha \lim_\beta P_{(n)}(u_\alpha v_\beta) = \widehat{\varphi} \star \widehat{\psi}(P_{(n)}).$$

$\square$

Теорема 4.2.9. *Нехай* $\varphi = (0, \cdots, u_k, 0, \cdots)$, $u_k \neq 0$, $\psi = (0, \cdots, v_n, 0, \cdots)$, $v_n \neq 0$ *– відповідні зображення характерів з* $M_b(A)$. *Тоді згортка* $\varphi \star \psi$ *має зображення* $(0, \cdots, 0, w_{\max\{k,n\}}, 0, \cdots, w_{kn}, 0, \cdots)$.

Доведення. Якщо $\varphi, \psi \in M_b(A)$, то "мультиплікативна" згортка $\varphi \star \psi \in M_b(A)$ має зображення $(w_1, \cdots, w_m, \cdots)$.

Нехай m – найменше спільне кратне чисел k, n.

Розглянемо алгебру $\bigotimes_{s,\pi}^m A$. Згідно з теоремою 4.2.7, функціонали $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \in M_b(\bigotimes_{s,\pi}^m A)$ мають зображення $(\widehat{u_1}, 0, \cdots), (\widehat{v_1}, 0, \cdots)$ відповідно.

Із зображення видно, що $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}$ – функціонали значення функції в точці з $(\bigotimes_{s,\pi}^m A)^{**}$. Згідно з твердженням 4.2.4, операція згортки "$\star$" зводиться до "мультипілкативного" множення елементів $\widehat{u}_1, \widehat{v}_1$, тобто $\widehat{\varphi} \star \widehat{\psi} = \widehat{\varphi \star \psi}$ матиме зображення $(\widehat{w}_1, 0, \cdots)$.

Оскільки $\widehat{w}_1 = \mathop{\ast}\limits_{k \in J(m \cdot 1)} \widehat{\delta^{(k)}}(w_k) \neq 0$, то знайдуться $k_i \in J(m) = \{1, \cdots, \min\{k,n\}, \cdots, \max\{k,n\}, kn\}$, що $\delta^{(k_i)}(w_{k_i})(P_{k_i}) \neq 0$. Отже, згортка $\varphi \star \psi$ матиме зображення

$$(w_1, \cdots, w_{\min\{k,n\}}, 0, \cdots,$$

$$w_{\max\{k,n\}}, \quad 0, \cdots, w_{kn}, 0, 0, \cdots).$$

Із зображення функціоналів φ, ψ легко бачити, що для $i \in \{1, \min\{k,n\}\}$ елементи $w_i = 0$. Дійсно, за умовою $\varphi(P_{\min\{k,n\}}) \equiv 0$ або $\psi(P_{\min\{k,n\}}) \equiv 0$. Отже, якщо $\psi(P_{\min\{k,n\}}) = 0$, то згортка $\varphi\Big(\psi(P_{\min\{k,n\}})\Big) = \varphi(0) = 0$. Або, якщо $\varphi(P_{\min\{k,n\}}) \equiv 0$, то $\psi(P_{\min\{k,n\}}) = 0$. Отже, і згортка $\varphi \star \psi(P_{\min\{k,n\}}) = \varphi\Big(\psi(P_{\min\{k,n\}})\Big) = 0$, тому $w_{\min\{k,n\}} = 0$. Аналогічно $\varphi(P_1) = 0$ і $\psi(P_1) = 0$, тому $(\varphi \star \psi)(P_1) = 0$ для всіх $P_1 \in \mathcal{P}(^1 A)$.

Отже, $\varphi \star \psi$ має зображення

$$(0, \cdots, 0, w_{\max\{k,n\}}, 0, \cdots, w_{kn}, 0, \cdots).$$

$\square$

Для операцій "$*$" і "$\star$" не виконується дистрибутивний закон, тобто, взагалі кажучи,

$$\varphi \star (\psi * \theta) \neq (\varphi \star \psi) * (\varphi \star \theta). \tag{4.2.3}$$

Тому результат теореми 4.2.9 не можна продовжити на загальний випадок.

Теорема 4.2.10. *Припустимо, що в $H_b(A)$ існує n-однорідний поліном $P \in \mathcal{A}_n(A)$, $P \notin \mathcal{A}_{n-1}(A)$. Тоді для операцій "$\star$" та "$\ast$" в $M_b(A)$ не виконується дистрибутивний закон (4.2.3).*

Доведення. Згідно з теоремою 4.2.1 існує $\varphi \in M_b(A)$, який розділяє ідеали I_{k-1} та I_k, тобто $\varphi(P_k) \neq 0$ для деякого полінома $P_k \in \mathcal{P}(^kA)$ і $\varphi(Q) = 0$ для всіх поліномів $Q \in I_{k-1} \subset \mathcal{A}_{k-1}(A)$.

Нехай (z_α) – напрямленість в A, яка є збіжною в слабкополіноміальній топології до $\varphi \in M_b(A)$. Нехай e – одиниця алгебри A. Тоді для полінома $P_k \in \mathcal{P}(^kA)$:

$$\varphi \star (\delta_e \ast \delta_e)(P_k) = \lim_\alpha P_k(z_\alpha(e+e)) =$$
$$= \lim_\alpha 2^k P(z_\alpha) = 2^k \varphi(P), \quad k > 0.$$

З іншого боку:

$$(\varphi \star \delta_e) \ast (\varphi \star \delta_e)(P) = \lim_\alpha P(z_\alpha e + z_\alpha e) =$$
$$\lim_\alpha P(2z_\alpha) = 2 \lim_\alpha P(z_\alpha) = 2\varphi(P).$$

Бачимо, якщо $k > 1$, то правило дистрибутивноісті (4.2.3) не виконується. $\square$

4.3. Аналітичні структури на спектрі алгебри $H_b(A)$

Нехай A^{-1} – група оборотних відносно операції множення елементів в A, $G_b(A)$ – група елементів з $M_b(A)$, які є оборотними відносно "мультиплікативної" згортки "$\star$" з одиницею $\delta_e \in M_b(A)$, де $\delta_e(f) = f(e)$. Очевидно, що відображення $a \mapsto \delta_a$ є натуральним вкладенням $A^{-1} \hookrightarrow G_b(A)$. Більше того, якщо a є оборотним в A^{**}, то $G_b(A)$ містить характери вигляду $\delta_a(f) = \widetilde{f}(a)$.

Розглянемо множину $\mathcal{M} = \{\delta_a \star \varphi \colon a \in A^{**}, \varphi \in G_b(A)\}$. Якщо $a = e$, тоді $\delta_e \star \varphi = \varphi$ тому $G_b(A) \subset \mathcal{M}$.

Для фіксованого $\varphi \in G_b(A)$ позначимо відображення

$$\Psi_\varphi(a) = \delta_a \star \varphi, \qquad a \in A.$$

Нехай X_φ – образ відображення Ψ_φ. Очевидно, що $\bigcup_{\varphi \in G_b(A)} X_\varphi = \mathcal{M}$.

Твердження 4.3.1. *Відображення Ψ_φ для кожного фіксованого $\varphi \in G_b(A)$ є бієктивним.*

Доведення. Дійсно, якщо $a \neq b \in A$, то $\varphi(f(ay)) \neq \varphi(f(by))$, тобто

$$(\delta_a \star \varphi)(f) \neq (\delta_b \star \varphi)(f)$$

для будь-якої $f \in H_b(A)$. Отже, відображення Ψ_φ для кожного фіксованого $\varphi \in G_b(A)$ є ін'єктивним:

$$\Psi_\varphi(a) \neq \Psi_\varphi(b).$$

Для кожного $\delta_a \star \varphi \in X_\varphi$ існує прообраз, який належить до A, тому Ψ_φ є сюр'єктивним. $\square$

Для будь-якого $\varphi \in G_b(A)$ відображення Ψ_φ є лінійним:

$$\Psi_\varphi(a) + \Psi_\varphi(b) = \Psi_\varphi(a + b),$$

тому X_φ має природню лінійну структуру. Визначимо норму на X_φ:

$$||\Psi_\varphi(a)|| = ||a||.$$

Отже, $\Psi_\varphi : A \to X_\varphi$ є топологічним ізоморфізмом банахових просторів.

Теорема 4.3.2. *Для довільного* $\varphi \in G_b(A)$ *існує вкладення* $\Psi_\varphi : A \to \mathcal{M}$, *таке, що* $\bigcup_{\varphi\in G_b(A)} X_\varphi = \mathcal{M}$, *де* $X_\varphi = \Psi_\varphi(A)$ *– образ відображення* Ψ_φ.

Доведення. Як було зауважено вище, Ψ_φ є топологічним ізоморфізмом банахових просторів, $X_\varphi \subset \mathcal{M}$ для кожного фіксованого $\varphi \in G_b(A)$. Тому Ψ_φ є шуканим вкладенням. $\square$

Покажемо, що $\{\Psi_\varphi^{-1}, \varphi \in G_b(A)\}$ є локальним аналітичним гомоморфізмом на $G_b(A)$, тобто відображення

$$\Psi_{\varphi_2}^{-1} \circ \Psi_{\varphi_1} : \Psi_{\varphi_1}^{-1}(X_{\varphi_1} \cap X_{\varphi_2}) \to \Psi_{\varphi_2}^{-1}(X_{\varphi_1} \cap X_{\varphi_2})$$

є аналітичним.

Нехай $\varphi_1, \varphi_2 \in G_b(A)$. Якщо $\psi \in X_{\varphi_1} \bigcap X_{\varphi_2}$, тоді $\psi = \delta_a \star \varphi_1 = \delta_b \star \varphi_2$ для деяких $a, b \in A$. Тому $\delta_b = \delta_a \star \varphi_1 \star \varphi_2^{-1}$. Для кожного фіксованого $\varphi_1, \varphi_2 \in G_b(A)$ відображення

$$a \mapsto \delta_a \star \varphi_1 \star \varphi_2^{-1} = \delta_b \mapsto b$$

є аналітичним відображенням A на себе.

Нехай X_φ – образ відображення Ψ_φ, де $a \in A^{-1}$. Тоді відображення $\Psi_{\varphi_2}^{-1} \circ \Psi_{\varphi_1}$ є визначеним на відкритій підмножині $X_{\varphi_1} \cap X_{\varphi_2} \subset A$. Розглянемо

$$\delta_a \star \varphi_1 \star \varphi_2^{-1} = \delta_b = \delta_e \star \delta_b = \delta_a \star \delta_{a^{-1}b},$$

Отже, відображення $\varphi_1 \star \varphi_2^{-1} = \delta_{a^{-1}b}$. Тому для будь-якого $x \in X_{\varphi_1} \cap X_{\varphi_2}$ аналітичне відображення $\Psi_{\varphi_2}^{-1} \circ \Psi_{\varphi_1}$ має вигляд

$$\Psi_{\varphi_2}^{-1} \circ \Psi_{\varphi_1}(x) = xa^{-1}b$$

для фіксованих $a, b \in A^{-1}$.

Отже $G_b(A)$ аналітичний многовид з атласом $\{X_\varphi\}$ і локальним гомоморфізмом $\{\Psi_\varphi^{-1}\}, \varphi \in G_b(A)$.

Висновки до розділу 4

Нехай A – комплексна банахова алгебра. Відомо, що операцію множення алгебри A можна продовжити у другий спряжений простір A^{**} так, що A^{**} також буде банаховою алгеброю. Таке продовження називається продовження Аренса операції множення алгебри A у другий спряжений A^{**}.

Нехай $H_b(A)$ – алгебра аналітичних функцій, які є обмеженими на обмежених підмножинах в A зі зліченою системою напівнорм

$$||f||_r = \sup_{||x|| \leq r} |f(x)|, \quad r \in \mathbb{Q}.$$

Розділі 4 присвячений дослідженню *"мультиплікативної" згортки* у просторі лінійних функціоналів на алгебрі Фреше $H_b(A)$, яка пов'язана із операцією множення банахової алгебри A. Оскільки $A^{**} \subset H_b^*(A)$, то дану "мультиплікативну" згортку вважаємо *узагальненням продовження Аренса* операції множення банахової алгебри A.

У підрозділі 4.1 побудовано оператор "мультиплікативного" зсуву, який пов'язаний із операцією множення банахової алгебри A. Використовуючи цей оператор, у просторі $H_b^*(A)$ – спряженому просторі до алгебри аналітичних функцій обмеженого типу $H_b(A)$, побудовано операцію "мультиплікативної" згортки "$\star$": для будь-яких лінійних функціоналів $\varphi, \psi \in H_b^*(A)$ і аналітичної функції $f \in H_b(A)$ маємо

$$(\varphi \star \psi)(f) = \varphi\Big(\psi(f(xy))\Big),$$

де ψ діє на $f(xy)$ як на функцію від y, а φ діє на $\psi(f(xy))$ як на функцію від x. Коректність означення такої "мультиплікативної" згортки доведено у твердженнях 4.1.2, 4.1.3. У теоремі 4.1.4 встановлено оцінку радіус-функції "мультиплікативної" згортки, отже, операція "$\star$" є неперервною відносно топології, яка породжена зліченою системою напівнорм алгебри $H_b(A)$.

Спектр $M_b(A)$ алгебри $H_b(A)$ (множина ненульових неперервних у топології Гельфанда лінійних мультиплікативних функціоналів, множина характерів) є підмножиною $H_b^*(A)$. У твердженні 4.1.5 встановлено вигляд "мультиплікативної" згортки, якщо φ, ψ є характерами: відомо, що існують напрямленості $(x_\alpha), (y_\beta)$, збіжні до φ, ψ відповідно у слабкополіноміальній топології алгебри A такі, що

$$(\varphi \star \psi)(P) = \lim_{\alpha,\beta} P(x_\alpha y_\beta).$$

Дана "мультиплікативна" згортка $\varphi\star\psi$ залежить від порядку взяття границі по напрямленості, отже, в загальному випадку не є комутативною.

У явному вигляді важко зобразити конкретні елементи $M_b(A)$. Для дослідження властивостей "мультиплікативної" згортки використано підхід, запропонований А.В. Загороднюком, який дозволяє в деяких випадках описати спектр $M_b(A)$: кожен елемент спектру $M_b(X)$ може бути представлений у вигляді послідовності функціоналів $(u_k)_{k=1}^{\infty}$, де кожен u_k належить до банахового простору E_k, де $E_1 = X^{**}$ і E_k збігається зі спеціальним підпростором лінійних функціоналів на k-однорідних поліномах. Іншими словами, спектр алгебри $H_b(X)$ містить щільний лінійний простір всіх скінчених послідовностей $(u_1, \cdots, u_k, 0, 0, \cdots)$.

Використовуючи такий погляд на елементи спектру, у підрозділі 4.2 досліджені деякі властивості "мультиплікативної" згортки.

У теоремі 4.2.4 доведено, що "мультиплікативна" згортка функціоналів значення функції в точках $u, v \in A^{**}$ дорівнює $(u \cdot v, 0, \cdots)$, де $u \cdot v$ – продовження Аренса операції множення алгебри A у другий спряжений A^{**}. У теоремі 4.2.5 розглядається випадок, коли φ – функціонал значення функції в точці, а ψ має зображення $(0, \cdots, 0, v_n, 0, \cdots)$, тоді "мультиплікативна" згортка $\varphi \star \psi$ має зображення $(0, \cdots, 0, w_n, w_{n+1}, \cdots)$.

Відомо, що кожному характеру на $\widehat{\psi} \in M_b(\bigotimes_{s,\pi}^n A)$ відповідає характер $\psi \in M_b(A)$. Одним з основних результатів підрозділу 4.2 є теорема 4.2.7, в якій отримано зображення довільного характера $\widehat{\psi}$ на n-му симетричному проективному тензорному степені банахової алгебри A.

У теоремі 4.2.9 встановлено правило "мультиплікативної" згортки для характерів φ, ψ, які мають зображення $(0, \cdots, u_k, 0, \cdots)$, $(0, \cdots, v_n, 0, \cdots)$, $u_k \neq 0$, $v_n \neq 0$ відповідно:

Теорема 4.2.9. Нехай $\varphi = (0, \cdots, u_k, 0, \cdots)$, $u_k \neq 0$, $\psi = (0, \cdots, v_n, 0, \cdots)$, $v_n \neq 0$ – відповідні зображення характерів з $M_b(A)$. Тоді згортка $\varphi \star \psi$ має зображення $(0, \cdots, 0, w_{\max\{k,n\}}, 0, \cdots, w_{kn}, 0, \cdots)$.

Згортку, визначену у $H_b^*(X)$, яка пов'язана з операцію додавання довільного банахового простору X називають *"адитивною"*. У теоремі 4.2.10 побудований приклад, який показує, що для характерів $\varphi, \psi \in M_b(A)$ відносно "адитивної" і "мультиплікативної" згортки не виконується дистрибутивний закон. Це означає, що спектр алгебри $H_b(A)$ не є кільцем відносно цих операцій.

У підрозділі 4.3 розглянуто підгрупу $G_b(A)$ спектру $M_b(A)$ характерів, які є оборотними відносно операції "мультиплікативної" згортки. У теоремі 4.3.2 доведено, що група $G_b(A)$ є аналітичний многовидом з атласом карт і локальним гомоморфізмом, тобто на $G_b(A)$ визначено структуру аналітичного многовиду.

Результати цього розділу опубліковано у фахових виданнях [97], [14] і у матеріалах конференцій [16], [15], [5], [6], [13], [8].

РОЗДІЛ 5
НЕПЕРЕРВНІСТЬ АЛГЕБРАЇЧНИХ ОПЕРАЦІЙ В ТОПОЛОГІЇ ГЕЛЬФАНДА

5.1. Випадок симетричного проективного тензорного добутку

Нехай A – комплексна банахова алгебра, $H_b(A)$ – алгебра Фреше аналітичних функцій обмеженого типу зі зліченою системою напівнорм (2.2.1).

Р. Аренсом у [21] показано, що, в загальному випадку, існує більше ніж одне продовження операції множення алгебри A у другий спряжений A^{**}. Якщо таке продовження єдине, то алгебру A називають *регулярною за Аренсом* [34], [48].

ОЗНАЧЕННЯ 5.1.1. *Білінійне відображення* $B(x, y) : A \times A \to A$ *називається регулярним за Аренсом, якщо*

$$\lim_{\alpha} \lim_{\beta} B(x_\alpha, y_\beta) = \lim_{\beta} \lim_{\alpha} B(x_\alpha, y_\beta), \tag{5.1.1}$$

де $(x_\alpha), (y_\beta)$ *– напрямленості з алгебри* A*, збіжні у* $*$*-слабкій топології простору* A^{**}*.*

Іншими словами, білінійне відображення є регулярним за Аренсом, якщо його продовження Арона-Бернера у $A^{**} \times A^{**}$ не залежть від порядку взяття границі по напрямленостях, тобто є єдиним.

Зокрема, якщо білінійне відображення є асоційованим з операцією множення в A, тобто $B(x, y) = xy$, то регулярність за Аренсом відображення B означає регулярність за Аренсом алгебри A і відповідне продовження $\widetilde{B} : A^{**} \times A^{**} \to A^{**}$ є продовженням Аренса операції множення алгебри A у другий спряжений A^{**} [21].

Якщо алгебра A є комутативною, то відображення $B(x, y)$, яке асоційоване з операцією множення, є симетричним, але його продовження у A^{**} може бути не єдиним, а, отже, нерегулярним за Аренсом. У роботі [109] показано, що продовження комутативної операції множення у ℓ_1^{**} є некомутативним, а, отже, алгебра ℓ_1 не є регулярною за Аренсом.

Регулярними за Аренсом є всі рефлексивні простори (наприклад, нормовані простори скінченої розмірності або гільбертові простори).

В [22] показано, що пряма сума комплексних банахових алгебр A_i, $i = 1, \cdots, n$:

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i\right) = \{x = (x_i) : x_i \in A_i \text{ для всіх } i = 1, \cdots, n,$$

$$||x|| = \sum_{i=1}^{n} ||x_i|| < \infty\}$$

є регулярною за Аренсом тоді і тільки тоді коли кожна A_i є регулярною за Аренсом. Прямий добуток

$$\prod_{i=1}^{n} \left(A_i\right) = \{x = (x_i) : x_i \in A_i \text{ для всіх } i = 1, \cdots, n,$$

$$||x|| = \sup_{i=1,\cdots,n} ||x_i|| < \infty\}$$

не обов'язково буде регулярним за Аренсом навіть якщо кожна алгебра A_i має скінчену розмірність [89].

На проективному тензорному добутку $\bigotimes_\pi^n A$ визначено множення, таке, що $\bigotimes_\pi^n A$ є банаховою алгеброю: для елементів вигляду $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in \bigotimes_\pi^n A$ операція множення має вигляд:

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \cdot y_1 \otimes \cdots \otimes y_n = x_1 y_1 \otimes \cdots \otimes x_n y_n.$$

Нехай $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ – симетричний проективний тензорний степінь n копій банахової алгебри A. Відомо, що операцію множення, визначену на A, можна продовжити до операції на $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ так, що $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ буде банаховою алгеброю за формулою

$$x_1 \otimes_s \cdots \otimes_s x_n \cdot y_1 \otimes_s \cdots \otimes_s y_n = \\ = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_1 y_{\sigma(1)} \otimes_s \cdots \otimes_s \quad x_n y_{\sigma(n)},$$

де S_n – група підстановок на множині $\{1, 2, \cdots, n\}$ [82]. Регулярність за Аренсом такої алгебри розглядалась у статті [102]. Зокрема в [27] показано, що повний проективний n-тий тензорний степінь ℓ_n не є симетрично регулярним. Симетричний проективний тензорний степінь $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ є замкненим підпростором у $\bigotimes_\pi^n A$, а, отже, є банаховою алгеброю.

У цьому розділі розглядається регулярність за Аренсом симетричного проективного тензорного степіня банахової алгебри A.

Теорема 5.1.2. *Нехай (x_α), $(y_\beta) \subset A$ є n-поліноміально збіжні напрямленості такі, що для деякого полінома $P \in \mathcal{P}(^n A)$*

$$\lim_\alpha \lim_\beta P(x_\alpha y_\beta) \neq \lim_\beta \lim_\alpha P(x_\alpha y_\beta). \tag{5.1.2}$$

Тоді $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ не є регулярним за Аренсом.

Доведення. Оскільки $\mathcal{P}({}^nA) \cong \left(\bigotimes_{s,\pi}^n A\right)^*$, то напрямлености $(u_\alpha), (v_\beta) \subset \bigotimes_{s,\pi}^n A$, де

$$u_\alpha = x_\alpha \otimes \cdots \otimes x_\alpha,$$

$$v_\beta = y_\beta \otimes \cdots \otimes y_\beta$$

є збіжними у 1-поліноміальній (тобто у слабкій) топології простору $\bigotimes_{s,\pi} A$. Отже, для кожного лінійного функціонала $f_P \in \left(\bigotimes_{s,\pi}^n A\right)^*$, що відповідає поліному P існують границі $\lim_\alpha f_P(u_\alpha)$ і $\lim_\beta f_P(v_\beta)$.

Нехай $P \in \mathcal{P}({}^nA)$ такий, що

$$\lim_\alpha \lim_\beta P(x_\alpha y_\beta) \neq \lim_\beta \lim_\alpha P(x_\alpha y_\beta),$$

тоді, існує лінійний функціонал f_P на $\bigotimes_{s,\pi}^n A$, який відповідає поліному P такий, що

$$\lim_\alpha \lim_\beta f_P(u_\alpha \cdot v_\beta) \neq \lim_\beta \lim_\alpha f_P(u_\alpha \cdot v_\beta).$$

В якості $B(u_\alpha, v_\beta)$ візьмемо $f_P(u_\alpha \cdot v_\beta)$. Тоді

$$\lim_\alpha \lim_\beta B(u_\alpha, v_\beta) \neq \lim_\beta \lim_\alpha B(u_\alpha, v_\beta).$$

B – шукане білінійне відображення на $\bigotimes_{s,\pi}^n A$, яке не є регулярним за Аренсом. □

Поняття регулярності за Аренсом природньо переноситься на довільний банахів простір X .

Означення 5.1.3. *Банахів простір X називаєтьcя (симетрично) регулярним, якщо кожна (симетрична) білінійна форма $B(x, y) : X \times X \to \mathbb{C}$ є регулярною за Аренсом.*

Зрозуміло, що кожен регулярний банахів простір є симетрично регулярним. Навпаки, в загальному випадку, не так. Простір J^*, де J – відомий простір Джеймса є прикладом симетрично регулярного простору, який не є регулярним [27].

Розглянемо питання регулярності скінченої суми симетричних проективних тензорних степенів банахового простору X:

$$\sum^n X := \mathbb{C} \oplus X \oplus \bigotimes_{s,\pi}^{2} X \oplus \cdots \oplus \bigotimes_{s,\pi}^{n} X.$$

Очевидно, що простір $\sum^n X$ є банаховим.

Теорема 5.1.4. *Нехай (x_α) і (y_β) є n-поліноміально збіжними напрямленостями такими, що для деякого полінома $P \in \mathcal{P}(^nX)$ маємо*

$$\lim_{\alpha,\beta} P(x_\alpha + y_\beta) \neq \lim_{\beta,\alpha} P(x_\alpha + y_\beta).$$

Тоді банахів простір $\sum^n X$ не є симетрично регулярним.

Доведення. Нехай A_P є симетричне n-лінійне відображення асоційоване з P і f_P – лінійний функціонал на $\bigotimes_{s,\pi}^n A$, який відповідає P. Отже, $P(x) = A_P(x, \cdots, x) = f_P(x \otimes \cdots \otimes x)$. Означимо білінійне відображення B_P на $\sum^n X$ наступним чином: кожен елемент $w, u \in \sum^n X$ може бути представлений у вигляді

$$w = w_0 + w_1 + \cdots + w_n,$$

де $w_0 \in \mathbb{C}$, $w_1 = x_1 \in X$, $w_k = \sum_{j=1}^\infty x_{kj}^{\otimes k} = \sum_{j=1}^\infty x_{kj} \otimes \cdots \otimes x_{kj}$,

$$u = u_0 + u_1 + \cdots + u_n,$$

де $u_0 \in \mathbb{C}$, $u_1 = y_1 \in X$, $y_k = \sum_{j=1}^\infty y_{kj}^{\otimes k} = \sum_{j=1}^\infty y_{kj} \otimes \cdots \otimes y_{kj}$.

Покладемо

$$B_P(w,u) := f_P(w_0 \otimes_s u_n + \cdots + \binom{n}{k} w_k \otimes_s u_{n-k} + \cdots + w_n \otimes_s u_0) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_P(w_k \otimes_s u_{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_P\Big(\sum_{j=1}^{\infty} x_{k,j}^{\otimes k} \otimes_s \sum_{i=1}^{\infty} y_{n-k,i}^{\otimes(n-k)}\Big) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{j,i=1}^{\infty} A_P\Big(x_{k,j}, \cdots, x_{k,j}, y_{n-k,i}, \cdots, y_{n-k,i}\Big).$$

Побудоване B_P є неперервним симетричним білінійним відображенням на $\sum^n X$. Справді, для будь-яких $w, w' \in \sum^n X$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$B_P(w + \lambda w', u) = f_P\Big((w_0 + \lambda w_0')u_n + \cdots + (w_n + \lambda w_n')u_0\Big) =$$

$$f_P(w_0 u_n + \cdots + w_n u_0) + \lambda f_P(w_0' u_n + \cdots + w_n' u_0),$$

і для будь-яких $u, u' \in \sum^n X$:

$$B_P(w, u + \lambda u') = f_P\Big(w_0(u_n + \lambda u_n') + \cdots + w_n(u_0 + \lambda u_0')\Big) =$$

$$f_P(w_0 u_n + \cdots + w_n u_0) + \lambda f_P(w_0 u_n' + \cdots + w_n u_0').$$

Крім того,

$$P(x+y) = \sum_{k=0}^{n} A_P(\underbrace{x, \cdots, x}_{k}, \underbrace{y, \cdots, y}_{n-k}) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_P\Big(x^{\otimes k} \otimes_s y^{\otimes(n-k)}\Big) =$$

$$B_P(1 + x + \cdots x^{\otimes n}, 1 + y + \cdots y^{\otimes n})$$

Нехай ν є “канонічним” відображенням $\nu(x) = 1 + x + \cdots + x^{\otimes n}$, напрямленості (x_α) і (y_β) є n-поліноміально збіжними. Тоді $\nu(x_\alpha)$ і

$\nu(y_\alpha)$ є $*$-слабко збіжними у топології простору $(\sum^n X)^{**}$. Звідси

$$\lim_{\alpha,\beta} B_P(\nu(x_\alpha), \nu(y_\beta)) \neq \lim_{\beta,\alpha} B_P(\nu(x_\alpha), \nu(y_\beta)),$$

тобто B_P не є регулярною. Тому простір $\sum^n X$ не є симетрично регулярним. $\square$

Регулярність за Аренсом алгебр ℓ_1, ℓ_n

Нехай $\{e_n\}$ – базис Шаудера в ℓ_1, такий, що $e_n = (0, \cdots, 1, 0, \cdots)$.

Банахів простір ℓ_1 з операцією множення

$$xy = \sum_{j=1}^{\infty} (xy)_j e_j, \text{ де } (xy)_j = \sum_{i=0}^{j} x_i y_{j-i}, x_0 = 1, y_0 = 1$$

для будь-яких $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$, $y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j e_j \in \ell_1$ є банаховою алгеброю.

Визначимо підпростір $F \subset \ell_1^* = \ell_\infty$ наступним чином:

$$F = \{f = (f_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty, \text{для яких існують границі}$$
$$\varphi_+(f) = \lim_{n\to+\infty} f_n, \quad \varphi_-(f) = \lim_{n\to-\infty} f_n\}.$$

Використовуючи продовження Гана-Банаха, продовжимо функціонали φ_+, φ_- до елементів $\widetilde{\varphi}_+, \widetilde{\varphi}_- \in \ell_1^{**}$ відповідно. У роботі [109] (приклад 1.1) доведено, що для елемента $f = (\cdots, -1, -1, 0, 1, 1, \cdots) \in \ell_\infty$ добуток функціоналів $\widetilde{\varphi}_+, \widetilde{\varphi}_-$ не є комутативним:

$$(\widetilde{\varphi}_+ \widetilde{\varphi}_-)(f) \neq (\widetilde{\varphi}_- \widetilde{\varphi}_+)(f). \tag{5.1.3}$$

Якщо $(x_\alpha), (y_\beta)$ – напрямленості, збіжні у $*$-слабкій топології до $\widetilde{\varphi}_-, \widetilde{\varphi}_+ \in \ell_1^{**}$ відповідно, то нерівність (5.1.3) матиме вигляд:

$$(\widetilde{\varphi}_-\widetilde{\varphi}_+)(f) = \lim_\alpha \lim_\beta f(x_\alpha y_\beta) = \lim_\alpha \lim_\beta B(x_\alpha, y_\beta) \neq$$
$$\lim_\beta \lim_\alpha B(x_\alpha, y_\beta) = \lim_\beta \lim_\alpha f(x_\alpha y_\beta) = (\widetilde{\varphi}_+\widetilde{\varphi}_-)(f).$$

Бачимо, що на ℓ_1 існує білінійне відображення B, яке не є регулярним за Аренсом. Отже ℓ_1 – не є регулярним за Аренсом.

У розділі 4 введено операцію мультиплікативної згортки "$\star$" на $H_b^*(A)$, де A – довільна комплексна банахова алгебра і показано, що для $f \in A^*$ "мультиплікативна" згортка співпадає із продовження Аренса операції множення. Тому з нерівності (5.1.3) випливає, що

$$\psi \star \theta \neq \theta \star \psi$$

для деяких $\psi, \theta \in A^{**}$. Тобто з нерегулярності алгебри ℓ_1 випливає некомутативність операції "$\star$".

Означення 5.1.5. *Для елемента* $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$ *в* ℓ_1 *носієм* x *називають підмножину*

$$\operatorname{supp} x = \{m \in \mathbb{N} : x_m \neq 0\}.$$

Твердження 5.1.6. *Існує симетричне білінійне відображення* $B : \ell_1 \times \ell_1 \to \mathbb{C}$ *і напрямленості* $(x_\alpha) \subset \ell_1$, $(y_\beta) \subset \ell_1$, *які є збіжними у* $*$*-слабкій топології простору* ℓ_1^{**} *такі, що* $||x_\alpha|| = ||y_\beta|| = 1$ *і*

1. $\lim_\alpha \lim_\beta B(x_\alpha, y_\beta) \neq \lim_\beta \lim_\alpha B(x_\alpha, y_\beta)$,
2. $\operatorname{supp} x_\alpha \cap \operatorname{supp} y_\beta = \emptyset$ *для всіх* $\alpha, \beta \in (\mathfrak{A}, \leq)$.

Доведення. Побудуємо відображення, яке задовольняє умови 1 і 2.

Виберемо напрямлености $(x_\alpha), (y_\beta)$, збіжні у $*$-слабкій топології простору ℓ_1^{**} до $\widetilde{\varphi}_+, \widetilde{\varphi}_-$ відповідно так, щоб $||x_\alpha|| = 1$, $\alpha > 0$ і $||y_\beta|| = 1$, $\beta < 0$ (це можливо зробити за теоремою Голдстейна). Тоді, існує функція $f \in A^*$ така, що нерівність (5.1.3) матиме вигляд:

$$\lim_\alpha \lim_\beta f(x_\alpha y_\beta) \neq \lim_\beta \lim_\alpha f(x_\alpha y_\beta).$$

Покладемо $B(x, y) = f(xy)$ – шукане симетричне білінійне відображення, яке задовольняє умови $1, 2$. □

Теорема 5.1.7. *Існує $2n$-однорідний неперервний поліном P на ℓ_n, $n \geq 1$ такий, що*

$$\lim_{\alpha,\beta} P(z_\alpha + r_\beta) \neq \lim_{\beta,\alpha} P(z_\alpha + r_\beta),$$

де $(z_\alpha)_{\alpha \in (\mathfrak{A}, \leq)}, (r_\beta)_{\beta \in (\mathfrak{A}, \leq)}$ – напряленості, збіжні у n-поліноміальній топології простору ℓ_n.

Доведення. Нехай $e_k = (0, \cdots, \underbrace{1}_{k}, 0, \cdots)$ і $\{e_k\}$ – базис Шаудера банахової алгебри ℓ_n – алгебра збіжних послідовностей $(x_k)_{k=1}^\infty$, $n \geq 1$ з покоординатною операцією множення таких, що для $x = \sum_{k=1}^\infty x_k e_k$ ряд $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^n < \infty$ і норма елемента $||x||_{\ell_n} = (\sum_{k=1}^\infty |x_k|^n)^{1/n}$.

Нехай (x_α), (y_β) – $*$-слабко збіжні у топології простору ℓ_1^{**} напрямлености з неперетинними носіями визначені як у твердженні

5.1.6.

$$x_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\alpha,k} e_k, \qquad ||x_\alpha||_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{\alpha,k}| = 1,$$

$$y_\beta = \sum_{k=1}^{\infty} y_{\beta,k} e_k, \qquad ||y_\beta||_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{\infty} |y_{\beta,k}| = 1.$$

Розглянемо напрямленості $(z_\alpha), (r_\beta)$:

$$z_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[n]{x_{\alpha,k}} e_k \qquad r_\beta = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[n]{y_{\beta,k}} e_k,$$

де $\sqrt[n]{x_{\alpha,k}}$ – один з коренів комплексного числа $x_{\alpha,k}$. Оскільки їх норми $||z_\alpha||_{\ell_n}$, $||r_\beta||_{\ell_n}$ обчислюються відповідно:

$$||z_\alpha||_{\ell_n}^n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{x_{\alpha,k}}\right)^n = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{\alpha,k}| = ||x_\alpha||_{\ell_1} = 1,$$

$$||r_\beta||_{\ell_n}^n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{y_{\beta,k}}\right)^n = \sum_{k=1}^{\infty} |y_{\beta,k}| = ||y_\beta||_{\ell_1} = 1,$$

то напрямленості $(z_\alpha), (r_\beta) \subset \ell_n$.

Отже, $(z_\alpha), (r_\beta)$ є обмеженими, тому містять n-поліноміально збіжні піднапрямленості, які позначатимемо символами $(z'_{\alpha,k}) \subset (z^n_{\alpha,k})$, $(r'_{\beta,k}) \subset (r^n_{\beta,k})$. Крім того,

$$z'_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} z^n_{\alpha,k} e_k, \quad r'_\beta = \sum_{k=1}^{\infty} r^n_{\beta,k} e_k.$$

Нехай B – білінійне відображення алгебри ℓ_1, визначене у твердженні 5.1.6. Якщо $z \in \ell_n$, то білінійне відображення

$$B\left(\sum_{k=1}^{\infty} z_k^n e_k, \sum_{k=1}^{\infty} z_k^n e_k\right)$$

визначено коректно і є $2n$-однорідним поліномом $P(z)$.

Напрямленості (z'_α), $(r'_\beta) \subset \ell_n$, які побудовані вище, також мають неперетинний носій, тому

$$P(z_\alpha + r_\beta) = B\left(\sum_{n=1}^{\infty}(z_{\alpha,n} + r_{\beta,n})^n e_n, \sum_{n=1}^{\infty}(z_{\alpha,n} + r_{\beta,n})^n e_n\right) =$$

$$B\left(\sum_{n=1}^{\infty} z_{\alpha,n}^n e_n + \sum_{n=1}^{\infty} r_{\beta,n}^n e_n, \sum_{n=1}^{\infty} z_{\alpha,n}^n e_n + \sum_{n=1}^{\infty} r_{\beta,n}^n e_n\right) =$$

$$B(x_\alpha + y_\beta, x_\alpha + y_\beta) = B(x_\alpha, x_\alpha) + 2B(x_\alpha, y_\beta) + B(y_\beta, y_\beta).$$

Отже,

$$\lim_\alpha \lim_\beta P(z_\alpha + r_\beta) = \lim_\alpha B(x_\alpha, x_\alpha) + \lim_\beta B(y_\beta, y_\beta) +$$

$$2\lim_\alpha \lim_\beta B(x_\alpha, y_\beta) \neq \lim_\alpha B(x_\alpha, x_\alpha) + \lim_\beta B(y_\beta, y_\beta) +$$

$$2\lim_\beta \lim_\alpha B(x_\alpha, y_\beta) = \lim_\beta \lim_\alpha P(z_\alpha + r_\beta).$$

□

Наслідок 5.1.8. *Банахів простір* $\sum^{2n} \ell_n$, $n \geq 1$ *не є симетрично регулярним.*

Регулярністть за Аренсом передспряженого простору до $H_b(A)$

Багато праць було присвячено питанню існування передспряженого простору до локально-опуклого простору і вивченню його властивостей [35], [73].

Нагадаємо, що множина U називається збалансованою, якщо для всіх скалярів $|\alpha| \leq 1$ множина $\alpha U \subset U$. Підмножина S називається U-обмеженою, якщо відстань від будь-якої точки S до межі U є додатньою.

У роботі [52] описаний спосіб побудови передспряженого простору до $H_b(U)$ – простору всіх аналітичних функцій, визначених на збалансованій відкритій підмножині U локально-опуклого простору E, які є обмеженими на U-обмежених підмножинах з топологією, яка породжена зліченою системою напівнорми (2.2.1).

Дослідимо питання регулярності за Аренсом передспряженого простору до алгебри $H_b(A)$, використовуючи операцію "мультиплікативної" згортки "$\star$".

Нехай A – комплексна банахова алгебра. У розділі 4 введено операцію множення "$\star$" на просторі $H_b^*(A)$ і досліджено деякі її властивості, зокрема, якщо δ_x, δ_y – функціонали значення функції $f \in H_b(A)$ в точках $x, y \in A$, то $(\delta_x \star \delta_y)(f) = \delta_{xy}(f)$.

Нехай B_r куля радіуса $r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ з центром в точці 0 в A.

Якщо $P \in \mathcal{P}(^n A)$, то визначимо $||P||_r := \sup_{x \in B_r} |P(x)|$.

Для лінійного функціонала $\varphi_n \in \mathcal{P}(^n A)^*$ визначимо норму

$$||\varphi_n||_r := \sup_{||P||_r \leq 1} \{|\varphi(P)| : P \in \mathcal{P}(^n A)\}. \tag{5.1.4}$$

Означення 5.1.9. *Для будь-якого дійсного числа* $0 < r_k < 1$ *і для будь-якої кулі* B_m *з центром в точці* 0 *позначимо множину*

$$S_{r_k}(B_m) := \{\varphi := (\varphi_n)_{n=0}^{\infty} \in \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(^n A)^* :$$
$$\text{існує } C > 0, \text{ таке, що } \quad ||\varphi_n||_m \leq C r_k^n, n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

У роботі [52] доведено, що множина $S_{r_k}(B_m)$ є банаховим простором відносно норми:

$$||(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}||_{m,r_k} := \sup\{r_k^{-n}||\varphi_n||_m : n \in \mathbb{N}\}.$$

Позначимо підмножину функціоналів значення функції $f \in H_b(A)$ в точках $x \in B_m$ через

$$D(B_m) := \{\delta_x \in H_b^*(A), \text{ якщо } x \in B_m\}.$$

Нехай $\{r_k\}_{m\in\mathbb{N}}$, $0 < r_k < 1$ – зростаюча послідовність скалярів така, що $\lim_{k\to\infty} r_k = 1$ і $(1/r_k)B_{m_i} \subset B_{m_j}$ при $m_i < m_j$.

Відомо, що, δ_x належить одиничній кулі банахового простору $S_{r_k}(B_{m_j})$, тобто підмножина $D(B_{m_i})$ міститься в одиничній кулі банахового простору $S_{r_k}(B_{m_j})$ [52] і

$$\sup_{x\in S_{r_k}} |P(x)| = ||\delta_x|_{\mathcal{P}(^n A)}||_{S_{r_k}} \leq r_k^n. \tag{5.1.5}$$

Визначимо E_{m_i} як замкнений векторний підпростір у банаховому просторі $S_{r_k}(B_{m_j})$, який породжений $D(B_{m_i})$. Таким чином, елементи E_{m_i} належать до замикання лінійної оболонки $\sum_{k=1}^n \lambda_k \delta_{x_k}$, $x_k \in B_{m_i}$, $\lambda_k \in \mathbb{C}$. Отже, E_{m_i} є банаховим підпростором.

Означення 5.1.10. *Нехай* $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ *– напрямлена відносно вкладення сім'я підпросторів банахового простору* X *така, що*

$X_\alpha \neq X_\beta$ для $\alpha \neq \beta$ і $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, де A – напрямлена множина відносно $\alpha \leq \beta$, якщо $X_\alpha \subseteq X_\beta$. На кожному X_α норма $||\cdot||_\alpha$ така, що для $\alpha \leq \beta$ топологія, індукована $||\cdot||_\beta$ на X_α є сильнішою, ніж топологія індукована $||\cdot||_\alpha$. Тоді X з топологією індуктивної границі називається індуктивною границею банахових просторів $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$.

Топологією індуктивної границі називають найсильнішу локально-опуклу топологію, в якій всі відображення $X_\alpha \hookrightarrow X$ є неперервними.

Якщо $B_{m_i} \subset B_{m_j}$, $m_i < m_j$, то для функціоналів виокнується нерівність

$$||\varphi||_{B_{m_i}} \leq ||\varphi||_{B_{m_j}},$$

отже, відображення $S_{r_k}(B_{m_j}) \to S_{r_k}(B_{m_i})$ є канонічним вкладенням. Тому, вкладення $E_{m_i} \hookrightarrow E_{m_j}$ є неперервним.

Побудуємо індуктивну границю для сім'ї банахових просторів $\{E_m : m \in \mathbb{Q}\}$:

$$B_b(A) := \varinjlim_{m} E_m.$$

Твердження 5.1.11. [52] *Індуктивна границя $B_b(A)$ алгебраїчно ізоморфіна до $H_b^*(A)$ і ізоморфізм $\Psi : B_b(A) \to H_b^*(A)$ визначається наступним чином:*

$$\Psi\Big((\varphi_n)_{n=1}^\infty(f)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(P_n),$$

де $f = \sum_{n=1}^\infty P_n$ – розклад в ряд Тейлора функції $f \in H_b(A)$ в точці $x \in A$.

Покажемо, що $B_b(A)$ є алгеброю відносно операцій додавання

$$(\varphi+\psi)(f)=\varphi(f)+\psi(f)$$

і множення – "мультиплікативної" згортки:

$$(\varphi\star\psi)(f)=\varphi\Big(\psi(f(xy))\Big).$$

Твердження 5.1.12. *Топологічний векторний простір $B_b(A)$ є алгеброю відносно операцій "$\star$" і "$+$".*

Доведення. За побудовою, кожен E_{m_i} є замкненим лінійним підпростором банахового прсотору $S_{r_k}(B_{m_j})$, $m_i < m_j$, який породжений функціоналами значення функцій $f \in H_b(A)$ в точках з B_{m_i}. Тобто, якщо $\varphi, \psi \in E_{m_i}$, то для деякого $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\delta_{x_k}, \qquad \psi=\sum_{k=1}^{n}\mu_k\delta_{y_k}.$$

В роботі [52] показано, що сума є неперервною в E_{m_i}:

$$\varphi+\psi=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\delta_{x_k}+\sum_{k=1}^{m}\mu_k\delta_{y_k},$$

а неперервність добутку в E_{m_i}:

$$\varphi\star\psi=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\delta_{x_k}\star\sum_{k=1}^{n}\mu_k\delta_{y_k}$$

випливає з формули (5.1.5). Отже, ці операції продовжуються до замикання лінійної оболонки множини $D(B_{m_i})$.

Оскільки топологічний векторний простір $B_b(A)$ за означенням – це індуктивна границя E_m, то сума "$+$" і добуток "$\star$" є неперервними у $B_b(A)$.

Отже, $B_b(A)$ – алгебра. $\square$

Теорема 5.1.13. *Нехай $(x_\alpha), (y_\beta)$ є n-поліноміально збіжні напрямленості такі, що для довільного $P \in \mathcal{P}(^n A)$ виконується*

$$\lim_{\alpha,\beta} P(x_\alpha y_\beta) \neq \lim_{\beta,\alpha} P(x_\alpha y_\beta), \tag{5.1.6}$$

тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ алгебра $B_b(A)$ не є регулярною за Аренсом, тобто існує білінійне відображення, яке не є регулярним за Аренсом.

Доведення. Нехай $(x_\alpha), (y_\beta)$ – обмежені n-поліноміально збіжні напрямленості в A^{**} такі, що

$$\lim_{\alpha,\beta} P(x_\alpha y_\beta) \neq \lim_{\beta,\alpha} P(x_\alpha y_\beta)$$

для деякого $P \in \mathcal{P}(^n A)$. Отже, згідно з теоремою 5.1.2, банахова алгебра $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ є нерегулярною за Аренсом і $B(u, v)$ – білінійне відображення, яке не є регулярним за Аренсом.

Це означає, що на $\left(\bigotimes_{s,\pi}^n A\right)^{**}$ існує білінійне відображення $\widetilde{B}(\varphi, \psi)$, для якого

$$\widetilde{B}(\varphi, \psi) = \lim_{\alpha} \lim_{\beta} B(u_\alpha, v_\beta) \neq$$
$$\lim_{\beta} \lim_{\alpha} B(u_\alpha, v_\beta) = \widetilde{B}(\psi, \varphi),$$

напрямленості (u_α), (v_β) збіжні у $*$-слабкій топології до φ, ψ відповідно. Для функціоналів $\varphi, \psi \in \left(\bigotimes_{s,\pi}^n A\right)^{**}$, який ізоморфний до $\mathcal{P}(^n A)^*$ білінійне відображення $\widetilde{B}$ є некомутативним, а, отже, і нерегулярним за Аренсом. Оскільки $\mathcal{P}(^n A)^*$ є доповнювальним підпростором в $H_b^*(A)$, то ми можемо продовжити $\widetilde{B}(\varphi, \psi)$ до неперервного білінійного відображення на $H_b^*(A) = B_b(A)^{**}$. Нехай $\overline{B}$ – продовження відображення $\widetilde{B}$, яке є нерегулярним за Аренсом. Отже, алгебра $B_b(A)$ – не є регулярною за Аренсом.

$\square$

Наступний наслідок є узагальненням теореми 5.1.2.

Наслідок 5.1.14. *Якщо* $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ *не є регулярним за Аренсом, то і простір, передспряжений до* $H_b(A)$, *не є регулярним за Аренсом.*

5.2. Неперервність алгебраїчних операцій в топології Гельфанда, яка породжена алгеброю аналітичних функцій на комплексному банаховому просторі

Нехай X – дійсний банахів простір, X^* – спряжений простір до X, B – одинична куля з центром в точці 0. Розглянемо комплексифікацію $X_{\mathbb{C}}$ дійсного банахового простору, тобто комплексний лінійний простір $\{x+iy:(x,y)\in X\times X\}$ з нормою

$$\|x+iy\|_{\mathbb{C}}=\sup_{x^*\in B\subset X^*}\sqrt{x^*(x)^2+x^*(y)^2}$$

для всіх $x+iy\in X_{\mathbb{C}}$. Комплексифікація $X_{\mathbb{C}}$ ізоморфна до прямої суми $X\oplus X$ ([85], [68]).

Нехай P – n-однорідний поліном на X, A_P – відповідне n-лінійне відображення, асоційоване з поліномом P. Визначимо комплексний поліном $P_{\mathbb{C}}$ на $X_{\mathbb{C}}$ наступним чином:

$$P_{\mathbb{C}}(x+iy)=A_P(x+iy,\cdots,x+iy)$$

для всіх $x+iy\in X_{\mathbb{C}}$. В роботі [31] доведено, що

$$||P_{\mathbb{C}}||\leq\frac{2^kk^k}{k!}||P||,\qquad k\in\mathbb{N},$$

тобто поліном $P_{\mathbb{C}}$ – неперервний на $X_{\mathbb{C}}$.

Якщо $h=\sum_{k=0}^{\infty}P_k$ – розклад в ряд Тейлора аналітичної функції h в деякій точці $x\in X$, то $h_{\mathbb{C}}=\sum_{k=0}^{\infty}P_{k_{\mathbb{C}}}$ – аналітична функція в точці $x+i0\in X_{\mathbb{C}}$ така, що $h_{\mathbb{C}}=h$ для всіх $x\in X$ [31].

Для довільного комплексного банахового простору $\mathbb{Z}$ позначимо $H_b(\mathbb{Z})$ – алгебра Фреше всіх аналітичних функцій обмеженого типу на $\mathbb{Z}$, $M_b(\mathbb{Z})$ – спектр $H_b(\mathbb{Z})$.

Відомо, що $\mathbb{Z} \hookrightarrow M_b(\mathbb{Z})$, тому топологію Гельфанда на $M_b(\mathbb{Z})$, обмежену на $\mathbb{Z}$ називають *H_b-топологією банахового простору $\mathbb{Z}$.*

Нехай X – дійсний банахів простір, $\mathcal{P}(X)$ – простір всіх неперервних поліномів на X. Неперервний поліном $P : X \to \mathbb{R}$ називається *розділяючим* якщо

$$\inf_{||x||=1} |P(x) - P(0)| > 0.$$

Якщо на X існує розділяючий поліном, то слабкополіноміальна топологія (найслабша топологія, в якій всі поліноми на X є неперервними) збігається з нормованою топологією на X, а, отже, і із H_b-топологією банахового простору X. Наприклад, у гільбертовому просторі $\ell_{2k}, k \in \mathbb{N}$ добуток норм є поліномом. Отже, збіжність у H_b-топології банахового простору ℓ_{2k} рівносильна збіжності за нормою і збіжності у слабкополіноміальній топології.

В роботі [10] показано, що на комплексному банаховому просторі $\mathbb{Z}$ не існує розділяючого полінома.

Теорема 5.2.1. *Якщо на банаховому просторі X існує розділяючий поліном P і $\dim X = \infty$, тоді операція суми є розривною на $X_{\mathbb{C}}$ у H_b-топології.*

Доведення. Нехай P – розділяючий поліном на дійсному банаховому просторі X, тоді $P_{\mathbb{C}}$ – його продовження на комплексифікацію $X_{\mathbb{C}}$.

Згідно з [41], в $X_{\mathbb{C}}$ існує напрямленість (x_α), яка є H_b-збіжною до 0 така, що $||x_\alpha|| = 1$. Тоді і напрямленість $(\overline{x_\alpha})$ є збіжною до 0 в H_b-топології, де $\overline{x}_\alpha$ – комплексноспряжений елемент до x_α. Сума елементів $x_\alpha + \overline{x}_\alpha$ і їх різниця $\frac{1}{i}(x_\alpha - \overline{x}_\alpha)$ належать до X. Позначимо

$$\mathrm{Re} x_\alpha = \frac{x_\alpha + \overline{x}_\alpha}{2}, \quad \mathrm{Im} x_\alpha = \frac{x_\alpha - \overline{x}_\alpha}{2i}.$$

Покажемо, що $P(x_\alpha + \overline{x_\alpha}) \not\to 0$ при $x_\alpha + \overline{x_\alpha} \to 0$ в H_b-топології банахового простору X.

Припустимо, що $\|\mathrm{Re} x_{\alpha_\beta}\| \to 0$ на деякій піднапрямленості $(x_{\alpha_\beta}) \subset (x_\alpha)$. Тоді

$$P_{\mathbb{C}}\left(\mathrm{Re} x_{\alpha_\beta} + i\mathrm{Im} x_{\alpha_\beta}\right) \to P_{\mathbb{C}}\left(i\mathrm{Im} x_{\alpha_\beta}\right) = P\left(\mathrm{Im} x_{\alpha_\beta}\right).$$

Оскільки P – розділяючий поліном, то, якщо $P(\mathrm{Im} x_{\alpha_\beta}) \to 0$ тоді $\|\mathrm{Im} x_{\alpha_\beta}\| \to 0$, тобто $\|x_{\alpha_\beta}\| \to 0$, де $x_{\alpha_\beta} = \mathrm{Re} x_{\alpha_\beta} + i\mathrm{Im} x_{\alpha_\beta}$. Отримали суперечність. Це неможливо, оскільки напрямленість (x_α) така, що $||x_\alpha|| = 1$.

Нехай $\|\mathrm{Re} x_{\alpha_\beta}\| > 0$. Тоді

$$P(\mathrm{Re} x_{\alpha_\beta}) = P\left(\frac{x_{\alpha_\beta} + \overline{x}_{\alpha_\beta}}{2}\right) \not\to 0$$

при $(x_{\alpha_\beta} + \overline{x}_{\alpha_\beta}) \to 0$ в H_b-топології.

Це значає, що операція суми є розривною в H_b-топології простору $X_{\mathbb{C}}$. Аналогічний результат отримаємо, якщо припустимо, що $\|\mathrm{Im} x_{\alpha_\beta}\| \to 0$. $\square$

Нехай ℓ_{2n} – банахова алгебра з поточковою операцією множення:

$$(x_k)_{k=1}^{\infty} \cdot (y_k)_{k=1}^{\infty} = (x_k y_k)_{k=1}^{\infty}.$$

Теорема 5.2.2. *Операція множення в комплексній банаховій алгебрі $\ell_{2n_{\mathbb{C}}}$ не є неперевною в H_b-топології.*

Доведення. Розглянемо для $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{2n_{\mathbb{C}}}$ поліном вигляду:

$$P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{2n}.$$

Тоді для (x_α) – напрямленосі в $\ell_{2n_{\mathbb{C}}}$ такої, що $||x_\alpha|| = 1$ і $x_\alpha \to 0$ в H_b-топології маємо:

$$P_{\mathbb{C}}(x_\alpha \overline{x}_\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{\alpha k} \overline{x}_{\alpha k})^{2n} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{\alpha k}|^{4n} = ||x_\alpha||^{4n} \not\to 0.$$

□

Розглянемо простір c_0 – сепарабельний банахів простір всіх дійсних послідовностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ таких, що $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ з нормою $||(x_n)_{n=1}^{\infty}|| = \sup\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\}$. Відомо, що в одиничній кулі спряженого простору c_0^* існує нормована послідовність, яка є $*$-слабко збіжною до нуля, тому H_b-топологія простору c_0 збігається з слабкою топологією на обмежених підмножинах c_0. Отже, будь-який поліном на c_0 є слабко неперервним на обмежених підмножинах c_0, тобто $P(0) = 0$ і $\inf_{j\in\mathbb{N}} |P(e_j)| = 0$, де $\{e_j\}$ – базис Шаудера такий, що $(e_j) = (0, \cdots, 1, 0, \cdots)$, тому на c_0 розділяючого полінома не існує [87], [31].

Для дослідження банахових просторів, які є ізоморфними до c_0 або містять ізоморфний замкнений підпростір до c_0 вченими М. Буасо і П. Хаєком у [31] було запропоновано розглядати розділяючі r-рівномірно аналітичні функції.

Означення 5.2.3. *Аналітична функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається r-рівномірно аналітичною, $r > 0$, якщо для кожного $x \in X$ вона є обмеженою на кулі $B_r(x)$ радіуса r з центром в точці x.*

Означення 5.2.4. *Аналітична функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається розділяючою, якщо для деякого дійсного числа $\alpha > 0$*

$$\emptyset \neq \{x \in X : f(x) < \alpha\} \subset B,$$

де B – одинична куля з центром в точці 0.

Відомим фактом з теорії розділяючих поліномів є наступне твердження:

Твердження 5.2.5 ([31]). *Якщо на X існує розділяючи поліном $P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$, де P_k – k-однорідний поліном, $k = 1, \cdots, n$, то існує додатній $2n!$-однорідний поліном, який є рівномірно аналітичною розділяючою функцією:*

$$d := P_1^{2(n!)} + P_2^{2\frac{(n!)}{2}} + \cdots + P_n^{2\frac{(n!)}{n}}.$$

У [67] запропоновано наступну аналітичну функція на c_0:

$$d\Big((x_n)_{n=1}^{\infty}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{2n}, \qquad \text{для всіх } (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0.$$

Легко бачити, що радіус збіжності функції d в будь-якій точці $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ дорівнює 1 а також:

$$0 \in \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0 : d((x_n)_{n=1}^{\infty}) < 1\} \subseteq B.$$

Інші приклади аналітичних функцій наведені, наприклад, у [31].

Для довільного комплексного банахового простору $\mathbb{Z}$ позначимо $H_u^r(\mathbb{Z})$ – алгебра всіх r-рівномірно аналітичних функцій на $\mathbb{Z}$.

Розглянемо наступну 1-рівномірно аналітичну функцію для всіх $x \in c_0$, яка належить до $H_u^1(c_0)$:

$$d(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{2(2n-1)}.$$

Позначимо A_0 – мінімальна алгебра Фреше яка містить функції з $H_b(c_0)$ і $d(x)$. Очевидно, що $H_b(c_0) \subset A_0$. Топологію Гельфанда на спектрі мінімальної алгебри Фреше A_0, яка містить функції з $H_b(c_0)$ і $d(x)$, обмежену на c_0 називатимемо A_0-*топологією*. Очевидно, що A_0-топологія банахового простору c_0 є сильнішою, ніж H_b-топологія банахового простору c_0.

Якщо функція f є 1-рівномірно аналітичною на B – одиничній кулі з центром в точці 0, то f є обмеженою на обмежених підмножинах c_0, а, отже $H_b(c_0) \subset H_u^1(c_0)$. Топологія Гельфанда спектру алгебри $H_u^1(c_0)$, обмежена на c_0 є сильнішою за A_0- і H_b-топологію банахового простору c_0.

Розглянемо послідовність $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$, таку, що

$$x_n = e_{2n-1} + ie_{2n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

де $\{e_n\}$ – базис Шаудера в c_0. Тоді $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ є збіжною до 0 у слабкій топології простору c_0 і $d(x) = 0$. Отже $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ є збіжною до 0 у A_0-топології банахового простору c_0. З іншого боку

$$d(x + \overline{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} (2e_{2n-1})^{2(2n-1)} = 2^{4(2n-1)-2} \not\to 0.$$

Доведено наступну теорему.

Теорема 5.2.6. *Операція суми в банаховому просторі c_0 є розривною в A_0-топології.*

Аналогічний результат можна отримати, якщо розглянути на c_0 поточкову операцію множення. Тоді c_0 – банахова алгебра.

Нехай функція $d(x)$, послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ і алгебра A_0 визначені вище. Тоді

$$d(x\overline{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} e_{2n-1}^{4(2n-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} e_{2n}^{4(2n-1)} = 2 \not\to 0.$$

Доведено наступну теорему.

Теорема 5.2.7. *Поточкова операція множення в банаховій алгебрі c_0 є розривною в A_0-топології.*

Наслідок 5.2.8. *Оператори $T_x f = f(x+y)$, $Q_x f = f(xy)$ (визначені у розділі 4) не є неперервними в слабкій топології банахового простору c_0.*

Доведення. Відомо, що H_b-топологія банахового простору c_0 збігається із слабкою топологією на обмежених підмножинах в c_0. Як було доведено вище, операції суми і добутку не є неперервними в A_0-топології банахової алгебри c_0. Отже, для всіх $f \in H_b(c_0)$, оператори T_x, Q_x не є неперервними в слабкій топології простору c_0. $\square$

Висновки до розділу 5

Розділ 5 складається із двох підрозділів.

Підрозділ 5.1 присвячений дослідженню регулярності за Аренсом симетричного проективного тензорного степіня комплексної банахової алгебри A.

Якщо будь-яке білінійне відображення, визначене на $A \times A$, яке є асоційованим із операцією множення у алгебрі A, є регулярним за Аренсом (означення 5.1.1), то алгебру A називають *регулярною за Аренсом.* На симетричному проективному тензорному степені $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ банахової алгебри A існує натуральне множення таке, що $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ також є банаховою алгеброю. У теоремі 5.1.2 встановлено умови, при яких $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ не є регулярним за Аренсом: якщо для (x_α), $(y_\beta) \subset A$ є n-поліноміально збіжних напрямленостей і для деякого полінома $P \in \mathcal{P}(^n A)$ маємо

$$\lim_\alpha \lim_\beta P(x_\alpha y_\beta) \neq \lim_\beta \lim_\alpha P(x_\alpha y_\beta),$$

то $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ не є регулярним за Аренсом.

Поняття регулярності за Аренсом природньо переноситься на довільний банахів простір X: якщо кожна (симетрична) білінійна форма на $X \times X$ є регулярною за Аренсом, то банахів простір X називають *(симетрично) регулярним* (означення 5.1.3). У теоремі 5.1.4 встановлено умови, при яких банахів простір $\sum^n X$ – скінчена сума симетричних проективних тензорних степенів банахового простору X:

$$\sum^n X := \mathbb{C} + X + \bigotimes_{s,\pi}^2 X + \cdots + \bigotimes_{s,\pi}^n X$$

не є симетрично регулярним. Для доведення нерегулярності такого простору в теоремі 5.1.4 побудовано симетричне білінійне відображення на $\sum^n X$, яке не є симетрично регулярним за Аресом.

Відомо, що банахова алгебра ℓ_1 не є регулярною за Аренсом. У твердженні 5.1.6 побудовано симетричне білінійне відображення на $\ell_1 \times \ell_1$, яке не є регулярним за Аренсом. Використовуючи це білінійне відображення, в теоремі 5.1.7 побудовано $2n$-однорідний неперервний поліном P на ℓ_n, $n \geq 1$ такий, що

$$\lim_{\alpha} \lim_{\beta} P(z_\alpha + r_\beta) \neq \lim_{\beta} \lim_{\alpha} P(z_\alpha + r_\beta),$$

де $(z_\alpha)_{\alpha \in (\mathfrak{A}, \leq)}, (r_\beta)_{\beta \in (\mathfrak{A}, \leq)}$ – напряленості, збіжні у n-поліноміальній топології простору ℓ_n. Отже, існує симетричне білінійне відображення на $\sum^{2n} \ell_n$, $n \in \mathbb{N}$, яке є нерегулярним за Аресом і банахів простір $\sum^{2n} \ell_n$, $n \in \mathbb{N}$ не є симетрично регулярним.

В цьому підрозділі також розглядається питання регулярності за Аренсом передспряженого простору до алгебри $H_b(A)$ аналітичних функцій обмеженого типу на комплексній банаховій алгебрі A. Використовуючи описаний у роботі [52] підхід до побудови топологічного векторного простору $B_b(A)$, який є передспряженим до $H_b(A)$, в твердженні 5.1.12 доведено, що $B_b(A)$ є алгеброю відносно операцій суми "+" і добутку – "мультиплікативної" згортки "$\star$", яка введена в розділі 4 (твердження 5.1.12). В теоремі 5.1.13 описано умову, за якої $B_b(A)$ не є регулярним за Аренсом:

Теорема 5.1.13. *Нехай $(x_\alpha), (y_\beta)$ є n-поліноміально збіжні напрямленості такі, що для довільного $P \in \mathcal{P}(^n A)$ виконується*

$$\lim_{\alpha,\beta} P(x_\alpha y_\beta) \neq \lim_{\beta,\alpha} P(x_\alpha y_\beta),$$

тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ алгебра $B_b(A)$ не є регулярною за Аренсом, тобто існує білінійне відображення, яке не є регулярним за Аренсом.

Наступний наслідок є узагальненням теореми 5.1.2:

Наслідок 5.1.14. *Якщо* $\bigotimes_{s,\pi}^{n} A$ *не є регулярним за Аренсом, то і простір, передспряжений до* $H_b(A)$*, не є регулярним за Аренсом.*

Підрозділ 5.2 присвячений дослідженню неперервності алгебрічних операції в топології Гельфанда, яка породжена алгеброю аналітичних функцій на комплексному банаховому просторі. Відповідь на ці питання пов'язана із існуванням розділяючого полінома на дійсному банаховому просторі а також розділяючої аналітичної функції на банаховому просторі, який містить замкнений підпростір, ізоморфний до c_0.

Відомо, що на комплексному банаховому просторі не існує роздідяючого полінома, тому розглядаємо $X_{\mathbb{C}}$ – комплексифікацію дійсного банахового простору X, яка також є банаховим простором.

Під H_b-топологією банахового простору $X_{\mathbb{C}}$ називаємо топологію Гельфанда на спектрі алгебри $H_b(X_{\mathbb{C}})$, обмежену на $X_{\mathbb{C}}$. Якщо на X існує розділяючи поліном, то слабкополіноміальна топологія банахового простору $X_{\mathbb{C}}$ збігається із топологією, породженою нормою, а, отже, і з H_b-топологією.

Теорема 5.2.1. *Якщо на нескінченовимірному банаховому просторі* X *існує розділяючий поліном, тоді операція суми є розривною на* $X_{\mathbb{C}}$ *у* H_b*-топології простору* $X_{\mathbb{C}}$*.*

Теорема 5.2.2. *Покоординатна операція множення в комплексній банаховій алгебрі* $\ell_{2n\mathbb{C}}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *не є неперервною в* H_b*-топології алгебри* $\ell_{2n\mathbb{C}}$*.*

Існують банахові простори, на яких H_b-топологія збігається із слабкою топологією на обмежених підмножинах (наприклад, банахові простори, які містять замкнений підпростір, ізоморфний до c_0). В такому випадку розділяючого полінома не існує. Для дослідження таких просторів вченими М. Буазо і П. Хаєком було запропоновано розглядати розділяючі r-рівномірно аналітичні функції (аналітична функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається *r-рівномірно аналітичною і розділяючою*, $r > 0$, якщо для кожного $x \in X$ вона є обмеженою на кулі $B_r(x)$ радіуса r з центром в точці x і, якщо для деякого дійсного числа $\alpha > 0$

$$\emptyset \notin \{x \in X : f(x) < \alpha\} \subset B,$$

де B – одинична куля з центром в точці 0).

Нехай A_0 –мінімальна алгебра Фреше, яка містить функції з $H_b(c_0)$ і розділяючу аналітичну функцію $d(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{2(2n-1)}$, визначену на c_0 для $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Топологія Гельфанда на спектрі алгебри A_0, обмежену ан c_0 називається *A_0-топологією*, яка, очевидно, є сильнішою ніж H_b-топологія банахового простору c_0.

Теорема 5.2.6. *Операція суми в банаховому просторі c_0 є розривною в A_0-топології.*

Теорема 5.2.7. *Поточкова операція множення в банаховій алгебрі c_0 є розривною в A_0-топології.*

Результати цього розділу були опубліковані у фахових виданнях [98], [99] і у матеріалах конференцій [4], [101], [3], [100].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена алгебрам аналітичних функцій на банахових просторах (зокрема, алгебрам аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі) та дослідженню їх спектрів (множини ненульових неперервних комплекснозначних гомоморфізмів відповідних алгерб). В роботі узагальненно відоме продовження Аренса операції множення довільної банахової алгебри на простір, спряжений до алгебри аналітичних функцій обмеженого типу і досліджено пов'язане з ним питання нерегулярності за Аренсом певних класів алгебр аналітичних функцій на банахових просторах. Також розглядаються "простіші" аналоги алгебр аналітичних фуннкцій обмеженого типу на банахових просторах – алгебри блочно-діагональних аналітичних функцій. Для конкретних часткових випадків банахових просторів отримано явний опис множини максимальних ідеалів таких алгебр. Разом з тим розглядається неперервність алгебраїчних операцій (додавання і множення) у топології Гельфанда, яка породжена алгеброю аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі.

Одержано такі результати:

• описано властивості алгебр блочно-діагональних аналітичних функцій $H_b(\mathcal{N}_m)$, $m \geq 1$ на підмножинах $\mathcal{N}_m$ комплексного банахового простору X, встановлено зв'язок між елементами спектру алгебри блочно-діагональних аналітичних функцій та елементами спектру алгебри $H_b(X)$ – алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на X, для конкретних часткових випадків описано спектри алгебр блочно-діагональних функцій на банахових простpах ℓ_1, ℓ_2, досліджено гомоморфізми алгебр блочно-діагональних аналітичних функцій;

• побудовано "мультиплікативну" згортку на просторі всіх лінійних неперервних функціоналів алгебри $H_b(A)$. Ця згортка є узагальненням відомого продовження Аренса операції множення комплексної банахової алгебри A у другий спряжений простір A^{**}, доведено коректність означення та неперервність такої операції;

• встановлено правило, за яким виконується операція "мультиплікативної" згортки для конкретних лінійних мультиплікативних функціоналів, показано, що для "адитивної" та "мультиплікативної" згортки, в загальному випадку, не виконується дистрибутивний закон;

• показано, що множина оборотних відносно "мультиплікативної" згортки елементів спектру алгебри аналітичних функцій обмеженого типу є аналітичним многовидом відносно деякої природньої топології;

• встановлено умови нерегулярності за Аренсом n-того симетричного проективного тензорного степеня довільної банахової алгебри, умови існування нерегуляного за Аренсом білінійного відображення на передспряженому просторі до алгебри аналітичних функцій обмеженого типу, умови, за яких скінчена сума n-тих симетричних проективних тензорних степенів банахового простору, зокрема для випадку банахового простору ℓ_n, є нерегулярною;

• показано, що, якщо на дійсному банаховому просторі X (алгебри $\ell_{2n}, n \geq 1$) існує розділяючий поліном, то операція суми (покоординатного множення) не є неперервною в комплексифікації $X_{\mathbb{C}}(\ell_{2n\mathbb{C}})$ у топології Гельфанда, яка породжена відповідною алгеброю аналітичних функцій обмеженого типу, доведено, що операція суми і добутку є розривною у c_0 у топології Гельфанда, яка породжена мінімальною алгеброю, що містить всі аналітичні функції з $H_b(c_0)$ і розділяючу аналітичну функцію $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{2(2n-1)}$.

Результати дисертаційної роботи носять теоретичний характер і можуть бути використані в дослідженнях з функціонального аналізу, алгебри, топології та інших.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций / К. Гофман – М.: Издательство иностранной литературы, 1963. – 312 с.

2. Загороднюк А.В., Про неперервність і обмеженість поліноміальних операторів на псевдонормованих просторах / А. В.Загороднюк // Доповіді Національної академії наук України. – 1996. – 12. – с. 30-34.

3. Загороднюк А. В., Неперервність алгебраїчних операцій в топології Гельфанда, яка породжена алгеброю аналітичних функцій на банахових просторах / А. В. Загороднюк, О. Г. Тарас // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2015", 26-28 травня 2015 року, Львів: тези доп. - Львів, 2015.

4. Загороднюк А. В., Неперервність алгебраїчних операцій в топології Гельфанда, яка породжена алгеброю аналітичних функцій на банахових просторах / А. В. Загороднюк, О. Г. Тарас // Наукова конференція присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге, 1-4 липня 2015 року, Чернівці: тези доп. - Чернівці, 2015. – С. 40-41.

5. Загороднюк А. В., Оператор мультиплікативної згортки в просторі аналітичних функцій на банаховій алгебрі / А. В. Загороднюк, О. Г. Тарас // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 23-28 лютого 2011 року, Ворохта: тези доп. - Ворохта, 2011. – С. 42-43.

6. Загороднюк А. В., Оператор мультиплікативної згортки в просторі аналітичних функцій на банаховій алгебрі / А. В. Загороднюк, О. Г. Тарас // Міжнародна математична конференція імені В. Я. Скоробогатька , 19-23 вересня 2011 року, Дрогобич: тези доп. - Дрогобич, 2011. – С. 75.

7. Загороднюк А. В., Оператор мультиплікативної згортки в просторі аналітичних функцій на банаховій алгебрі / А. В. Загороднюк, О.Г.Тарас // Буковинський математичний журнал. – 2014. – 2 (2-3). – с. 90-93.

8. Загороднюк А. В., Про узагальнення продовження Аренса операції добутку у банахових алгебрах / А. В. Загороднюк, О. Г. Тарас // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 25 лютого – 3 березня 2013 року, Ворохта: тези доп. - Ворохта, 2013. – С. 50.

9. Колмогоров А. Н., Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – Москва: Наука, 1989. – 624 с.

10. Митрофанов М.А., Аппроксимация непрерывных функций на комплексных банаховых пространствах / М. А. Митрофанов // Математические заметки. – 2009. – 86 (4). – с. 557-570.

11. Немировский А. С., О полиномиальной апроксимации функций на гильбертовом пространстве / А. С. Немировский, С. М. Семенов // Математичиский зборник. – 1973. – Т.92, №2. – С. 257–281.

12. Тарас О.Г, Алгебри блочно-діагональних аналітичних функцій на банахових простора / О. Г. Тарас //Карпатські математичні публікації. – 2012. – 4 (2). – с. 340-346.

13. Тарас О. Г., Узагальнення продовження Аренса на спектр аналітичних функцій на банаховій алгебрі / О. Г. Тарас // Міжнародній конференції «Сучасні проблеми аналізу» присвяченій 70-річчю кафедри математичного аналізу Чернівецького університету, 30 вересня - 3 жовтня 2010 року., Чернівці: тези доп. - Чернівці, 2010. – С. 141.

14. Тарас О.Г., Узагальнення продовження Аренса на спектр аналітичних функцій на банаховій алгебрі /О. Г. Тарас

// Прикладні проблеми механіки і математики. – 2010. – 8. – с. 78-83.

15. Тарас О. Г., Узагальнення продовження Аренса для алгебр аналітичних функцій на банаховому просторі / О. Г. Тарас // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 25-28 березня 2010 року, Ворохта: тези доп. - Ворохта, 2010. – С. 45.

16. Тарас О. Г., Узагальнення продовження Аренса для алгебр аналітичних функцій на банаховому просторі / О. Г. Тарас // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 13-15 травня 2010 року, Київ: тези доп. - Київ, 2010. – С. 261.

17. Тарас О. Г., Явний опис характерів алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на ℓ_p / О. Г. Тарас // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 20-26 лютого 2012 року, Ворохта: тези доп. - Ворохта, 2012. – С. 59.

18. Тарас О. Г., Явний опис характерів алгебри аналітичних функцій обмеженого типу ℓ_p / О. Г. Тарас // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 19-21 квітня 2012 року, Київ: тези доп. - Київ, 2012. – С. 238.

19. Хелемский А., Лекции по функциональному анализу / А. Хелемский. – М.: МЦНМО, 2004. – 552 с.

20. Alencar R., Algebra of symmetric holomorphic functions on ℓ_p / R. Alencar, R. Aron, P. Galindo, A. Zagorodnyuk // Bull. Lond. Math. Soc. – 2003. – V.35. – P. 55–64.

21. Arens R., The adjoint of a bilinear operation /R. Arens // Proc. Amer. Math. Soc. – 1951. – V.2. – P. 839-848.

22. Arikan N., ArensRegularity and Reflexivity /N. Arikan // Quart J. Math. Oxford Ser. – 1981. – V.32. – P. 383-388.

23. Aron R., A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings / R. Aron, P. Berner // Bull. Soc. Math. France. – 1978. – 106. – p. 3-24.

24. Aron R.M., Unique Hahn-Banach Theorem for Analytic Mappings / R. M. Aron, C. Boyd, Y. S. Choi // Bull. Soc. Math. France/ – 1978. – 106. –p. 3-24.

25. Aron R.M., Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space / R.M. Aron, B. J. Cole, T. W. Gamelin // J. Reine Angew. Math. – 1991. – 415. – p. 51-93.

26. Aron R.M, Weak-star continuous analytic funtions / R. Aron, B. Cole, T.Gamelin // Can. J. Math. – 1995. – 47. – p. 673-683.

27. Aron R.M., Regularity and algebras of analytic functions in infinite dimensions / R.M. Aron, P. Galindo, D. Garcia, M. Maestre //Proc. Amer. Math. Soc. – 1996. – 348. – p. 543–559.

28. Banach S., Theorie def operations lineaires / S. Banach // Monografie Mathematyczne, Warszawa. – 1932.

29. Banach S., Über homogene polynome in (L^2) / S. Banach // Studia Math. – 1938. – V. 7. – P. 36–44.

30. Bochnak J., Analytic functions in topological vector spaces / J. Bochnak, J. Siciak // Studia Math.– 1971. – 39. – p. 77-112.

31. Boiso M.C., Analytic Approximations of Uniformly Continuous Functions in Real Banach Spaces / M. C. Boiso, P. Hajek // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2001. – 256. p. 80-98.

32. Boland P., Holomorphic functions on nuclear spaces / P. Boland // Trans. Amer. math. Soc., – 1975. – 209. – p. 275-281.

33. Bonic R., Smooth functions on Banach manifolds / R. Bonic, L. Frampton // J. Math. Mech., – 1996. – 15. – p. 877-898.

34. Boutgain F.F., New Banach Space Properties of Certain Spaces of Analytic Functions / F. F. Boutgain // Proc. Internat. Congr. Math. – 1983. – p. 945-951.

35. Brown L., Uniqueness of preduals of certain Banach spaces/ B. Leon, I. Takashi // Israel Journal of Mathematics. – 1976. – 24 (3). – p. 234-243

36. Carando D., Extendible polynomials on Banach spaces / Carando D. // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – 223. – p. 359-372.

37. Carne T. K., A uniform algebra of analytic functions on a Banach space / T. K. Carne, B. Cole, T. W. Gamelin // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – V. 314. – P. 639–659

38. Cartan. H., Theorie des filtres / H. Cartan // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1937. – 205. – p. 595-598.

39. Castillo J., Extension of bilinear forms from subspaces of L_1-spaces / J. Castillo, G. Gonzales, J. Jaramillo // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2002. – 27 (1). – p. 91–96.

40. Chernega I., A multiplicative convolution on the spectra of algebras of symmetric analytic functions /I. Chernega, P. Galindo , A. Zagorodnyuk // Revista Matematica Complutense. – 2013. – 27 (2). – p. 575-585.

41. Davie A.M., A theorem on polynomial-star aproximation / A. M. Davie, T. W. Gamelin // Proc. Amer. Math. Soc. – 1989. – 106. – p.351-356.

42. Deville R., Geometrical implications of the existence of very smooth bump functions in Banach spaces / R. Deville // Israel J. Math. – 1989. – 67. – p. 1-22.

43. Dineen S., Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces / S. Dineen. – N.Y.: Springer Monographs in Mathematics, 1999. – 543 p.

44. Dineen S., Complex Analysis in Locally Convex Spaces / S. Dineen. – N.H.: Mathematics Studies, 1981. – 506 p.

45. Dineen S., Holomorphy complete locally convex topologycal vector spaces / S. Dineen // "Séminaire Pierre Lelong: analyse". – 1971/72. – 332. – p. 77-111.

46. Dineen S., Holomorphy types on a Banach spaces / S. Dineen // Studia Math. – 1977. – 34. – p. 241-288.

47. Druzkowski L.M., Two criteria for continuity of polyunomials and C-holomorphic mappings in infinite dimensions / L. M. Druzkowski // Univ. Iagel. Acta. Math. – 1984. – 24. – p. 135-138.

48. Duncan J., The second dual of a Banach Algebra / J. Duncan , S. A. B. Hosseinium // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.A. – 1979. – 84. – p. 309-325.

49. Dunford N., Linear operators, Part I / N. Dunford, J. Schwartz. – New-York: Wiley. – 1964.

50. Fréchet M., Une definition fontionelle des polinômes / M. Fréchet // Nouv. Ann. Math. – 1909. – 9. – p. 145-162.

51. Galindo P., Entire functions of bounded type on Fresher spaces / P. Galindo, D. Garcia, M. Maestre // Math. Nachr. – 1986. – 161. – p. 25-40.

52. Galindo P., Holomorphic mappings of bounded type / P. Galindo, D. Garcia, M. Maestre // J. Math. Anal. Appl. – 1992. – V.166. – P. 236–246.

53. Galindo P., Extension of multilinear mappings on Banach spaces / P. Galindo, D. Garcia, M. Maestre, J. Mujica // Studia. Math. – 1994. – 108. – p. 55-76.

54. Galindo P., R-Shauder decomposition. Some applications / P. Galindo, M. Maestre, D. Rueda // Extracta Mathematicae – 1997. – 12 (3). – p. 309-313.

55. Gamelin T. W., Analytic functions on Banach spaces / T. Gamelin // Kluwer Acad. Publ., NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. – 1994. – 439. – p. 187-233.

56. Gamelin T. W., Analytic functions on Banach spaces in Complex Potential Theory / Gamelin T. W. // Ed. Gauthier and Sabidussi, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam. – 1994. – p. 187-223.

57. Gamelin T.W., Uniform algebras / T. W. Gamelin – Chelsea, New York, second ed., 1984. – 257 p.

58. Garsía D., The spectrum of analytic mappings of bounded type / D. Garsía, M. L. Lourenço, M. Maestro, L. A. Moraes // Jour. Math. Anal. Appl. – 2000. – 254. – p. 447-470.

59. Garsía D., The spectra of some algebras of analytic mappings / D. Garsía, M. L. Lourenco, L. A. Moraes, O. W. Paques // Indag. Mathem. – 1999. – 10. – p. 393-406.

60. Gâteaux R., Fonctionnelles d'une infinité des variables indépendantes / R. Gâteaux // Bull. Soc. Math. Frane. – 1919. – V. 47. – P. 70—96.

61. Gonzalez M., Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces / M. Gonzalez, R. Gonzalo, J. Jaramillo // Jour. London Math. Soc. – 1999. – 59. – p. 681-697.

62. Gonzalo R., Separating polynomials on Banach spaces / R. Gonzalo, J. A. Jaramillo // Extra Mathenaticae. – 1997. – 12 (2). – p. 145-164.

63. Grothendieck A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires / A. Grothendieck // Seminaire Bourbaki. – 1951-1954. – 2.– p. 193-200.

64. Grothendieck A., Resume de la therie metrique des produits tensoriels topologiques / A. Grothendieck // Bol. Soc. Math. Sao Paulo. – 1953. – 8. – p. 1-79.

65. Gulick S.L., Commutativity and ideals in the biduals of topologycal algebras / S. L. Gulick // Pacific J. Math. – 1966. – 18 (1). – p. 121-137.

66. Gupta C.P., On the Malgarange theorem for nuclearly entire functions of bounded type on a Banach space / C. P. Gupta. – Rio de Janeiro: Notas de Matematica, 1968. – 37 p.

67. Hajek P., Polynomial algebras on classical Banach spaces / P. Hajek // Israel J. Math. – 1998. – 106. – p. 209-220.

68. Hajek P., Smooth analysis in Banach spaces / P. Hajek, M. Johanis. – Czech Republic: De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 2014. – 497 p.

69. Hennefeld I.O., A note on the Arens products / I. O. Hennefeld // Pacific J. Math. – 1968. – 26. – p. 115-119.

70. Hervé M., Analyticity in Infinite Dimensional Spaces / M. Hervé. // Berlin, New York: de Gruyter Stud. in Math., Walter de Gruyter. – 1989. – 10. – p. 206.

71. Hille E., Functional analysis and semigroups / E. Hille, R. S. Philips. // Coloq. Publ., Amer. Math. Soc., – 1957. – 31. – p. 808.

72. Isidro J. M., On the distinquished character of the function spaces of holomorphic mappings of bounded type / J. M. Isidro // J. Func. Anal. – 1980. – 38 (2). – p. 139-145.

73. Kajser S., A note of dual Banach space / S. Kajser // Math. Scand. – 1977. – 41. – p. 325-330.

74. Kirwan P., Extendibility of homogeneous polynomials on Banach spaces / P. Kirwan, R. A. Ryan // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – 126. – p. 1023-1029.

75. Kurzweil J., On approximation in Real Banach Spaces / J. Kurzweil // Studia Math. – 1954. – 14. – p. 214-231.

76. Kurzweil J., On approximation in Real Banach Spaces by analytic operations / J. Kurzweil // Studia Math. – 1957. – 16. –p. 124-129.

77. Lopushansky O., Infinite Dimensional Holomorphy Spectra and Hilvertian Sttuctures / O. Lopushansky , A. Zagorodnyuk. – Krakow: AGH University Press, 2013. – 142 p.

78. Mazet P., Analytic Sets in Locally Convex Spaces / P. Mazet. – N.H.: Mathematics Studies, 1984. – 274 p.

79. Mazet P., A Hahn-Banach theorem for quadratic forms / P. Mazet // Math. Proc. Royal Irish AScad. – 2000. – 100A. – p. 177-182.

80. Michael E., Locally multiplicatively convex topological algebras / E. Michael. – The Amer. Math. Soc., 1952. – 82 p.

81. Moraes L. A., Extension of holomorphic mapping from E to E'' / L.A. Moraes // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – 118. – p. 455-461.

82. Mujica J., Complex Analysis in Banach Spaces / J. Mujica. – N.H.: Math studies, 1986. – 433 p.

83. Mujica J., Ideals of holomorphic functions on Tsirelson's space / J. Mujica // Archiv der Mathematik – 2001. – V. 76. – P. 292–298.

84. Mujica J., Linearization of holomorphick mappings on loccaly convex spaces / J. Mujica, L. Nachbin // J. Math Pures Appl. – 1992. – 71. p. 543-560.

85. Munoz G.A., Complexifications of real Banach spaces, polynomials and multilinear maps / G. A. Munoz, Y. Sarantopoulos, A. Tonge // Studia Mathematica. – 1999. – 134 (1).

86. Nachbin L., Topology on spaces of holomorphic mappings / L. Nachbin. – Springer, 1969. – 66 p.

87. Pelczynsi A., A property of multilinear operations / A. Pelczynsi // Studia Math. – 1957. – 16. – p. 173-182.

88. Plichko A., On automatic continuity and three problems of "The Scottish Book" concerning the boundedness of polynomial functionals / A. Plichko, A. Zagorodnyuk // J. Math. Anal. and Appl. – 1998. – 220. – p. 477-494.

89. Pym I.S., Remarks on the Second Duals of Banach Algebras / I. S. Pym // J.Nigerian Math. Soc. – 1983. – 2. – p. 31-33.

90. Pym I. S., The convolution of functional on spaces of bounded functions / I. S. Pym // Proc. London Math. Soc. – 1965. – 15 (3). – p. 84-104.

91. Rudin W., Functional Analysis / W. Rudin. – N.Y.: McGraw-Hill Science/Engineering/MathNew, 1991. – 424 p.

92. Ryan R.A., Application of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy / R. A. Ryan // Ph.D. thesis, Trinity College Dublin, 1980.

93. Sanchez C.F., Extension of multilinear operators on Banach spaces / C. F. Sanchez , R. Garcia ,I. Villanueva // Extracta Math. – 2000. – 15. – p. 291-334.

94. Shatten R., A theory of cross products / R. Shatten. – Princeton University Press, 1950. – 26 p.

95. Sherman S., The second adjoint of a C^*-algebra / S. Sherman // Proceedings. – 1950. – 1. – p. 470.

96. Stone M.H., The theory of representations for Boolean algebras / M. H. Stone // Trans. Amer. Math. Soc. – 1936. – 40. – p. 37-111.

97. Taras O., A generalization of the Arens extension for Banach algebras / O. Taras, A. Zagorodnyuk // Indagationes Mathematicae. – 2015. – 26 (2). – p. 324-328.

98. Taras O., Note on Arens regularity of symmetric tensor products / O. Taras, A. Zagorodnyuk // Carpathian Math. Publ. – 2014. – 6 (2). – p. 372-376.

99. Taras O., On Continuity of Algebraic Operations in the Gelfand Topologies Generated by Algebras of Analytic Functions on Banach Spaces / O. Taras, A. Zagorodnyuk // International Journal of Mathematical Analysis. – 2015. – 9 (22). – p. 1073-1076.

100. Taras O., Note on Arens regularity of symmetric tensor products / O. Taras, A. Zagorodnyuk // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 25 лютого - 1 березня 2015 року, Ворохта: тези доп. - Ворохта, 2015. – С.78-79.

101. Taras O., Symmetric regularity of projective tensor product of Banach spaces / O. Taras, A. Zagorodnyuk // II International Seminar on Analytic Functions, 1-3 july 2015, Ivano-Frankivsk: тези доп. - Івано-Франківськ, 2015. – С. 17.

102. Ulger A., Arens regularity of the algebra $A\widehat{\otimes}B$ / A. Ulger// Trans. Amer. Math. Soc. – 1988. – 305(2). – p. 623-639.

103. Ulger A., Arens regularity of weakly sequentially complete banach algebras / A. Ulger //Proc.Math. Soc. – 1999. – 127 (11). – p. 3221-3227.

104. Ulger A., Some stability properies of Arens regular bilinear operators / A. Ulger // Proc. of the Edinburgh Math. Soc. – 1991. – 34. – p. 443-454.

105. Ulger A., Weakly compact bilinear froms and Arend regularity / A. Ulger // Proc.Amer.Math. Soc. – 1987. – 101. – p. 697-704.

106. Zagorodnyuk A., Multiplicative polynomial operators on topological algebras / A. Zagorodnyuk // Contemporary Math. – 1999. – 232. – p. 357-361.

107. Zagorodnyuk A., Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces / A. Zagorodnyuk // Contemporary Math. – 2007. – 435. – p. 381-394.

108. Zagorodnyuk A., Spectra of Algebras of Entire Functions on Banach Spaces / A. Zagorodnyuk // Proc. Amer. Math. Soc. – 2006. – 134. – p. 2559-2569.

109. Zalduendo I., A canonical Extension for Analytic Functions on Banach Spaces / I. Zalduendo // Trans. Amer. Math. Soc. – 1990. – 320. – p. 747-763.

110. Zalduendo I., Extending polynomials on Banach spaces—a survey / I. Zalduendo // Revista de la Union Matematica Argentina. – 2005. – 46 (2). – p. 45-72.

111. Zorn M. A., Characterization of analytic functions in Banach spaces / M. A. Zorn // Annals of Math. J. – 1945. – 46. – p. 585-593.

112. Zorn M. A., Gateux differentiability and essential boundedness / M. A. Zorn // DukeMath. J. – 1945. – 12. p. 579-583.