

Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

На правах рукопису

Лукашенко Марія Петрівна

УДК 512.552.34+554

ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ В КІЛЬЦЯХ ТА НАПІВПЕРВИННІСТЬ

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Науковий керівник
Артемович Орест Дем'янович
доктор фізико-математичних
наук, професор

Івано-Франківськ – 2015

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень	4
Вступ	6
РОЗДІЛ 1. Початковий розділ	14
1.1. Огляд відомих результатів, що стосуються тематики	14
1.2. Необхідні означення і факти	18
1.3. Основні результати дисертаційної роботи	29
1.4. Кільця з нільпотетними диференціюваннями індексів ≤ 2	36
1.5. Диференціювання як гомоморфізми або антигомоморфізми в диференційно напівпервинних кільцях	43
Висновки до розділу 1	49
РОЗДІЛ 2. Жорсткі диференціювання	51
2.1. Властивості жорстких диференціювань	51
2.2. Константи в локальних кільцях	58
2.3. Артїнові d -жорсткі кільця	64
Висновки до розділу 2	69
РОЗДІЛ 3. Диференціювання із регулярними значен- нями в кільці	71
3.1. Диференціювання з регулярними значеннями ...	73
3.2. Кільця, що мають φ -диференціювання з регуляр-	

ними значеннями	78
Висновки до розділу 3	81
РОЗДІЛ 4. Структури Лі та Жордана диференційно напівпервинних кілець	83
4.1. Диференційні аналоги результатів Херстейна	84
4.2. Жорданова структура	94
4.3. Структура Лі	99
Висновки до розділу 4	102
Висновки	105
Список використаних джерел	109

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- p — просте число,
- $C(R)$ — комутаторний ідеал кільця R ,
- $\mathbb{P}(R)$ — первинний радикал кільця R ,
- id_R — тотожне відображення кільця R в себе,
- $\text{char } R$ — характеристика кільця R ,
- $Z(R)$ — центр асоціативного кільця R ,
- $\text{Aut } R$ — група автоморфізмів кільця R ,
- $\text{End } R$ — група ендоморфізмів кільця R ,
- $\text{Im } \varphi$ — образ гомоморфізму φ ,
- $\text{Ker } \varphi$ — ядро гомоморфізму φ ,
- $\text{Der } R$ — множина диференціювань кільця R ,
- $\partial_x : R \rightarrow R$ — внутрішнє диференціювання, породжене елементом $x \in R$, яке діє за правилом $\partial_x(r) = xr - rx = [x, r]$ для кожного $r \in R$,
- Δ — довільна непорожня підмножина із $\text{Der } R$,
- $J(R)$ — радикал Джекобсона кільця R ,
- $N(R)$ — множина усіх нільпотентних елементів кільця R ,
- $U(R)$ — група оборотних елементів кільця R ,
- $F(R)$ — періодична частина кільця R ,
- $F_p(R)$ — p -компонента періодичної частини кільця R ,

- $\exp F_2(R)$ — експонента 2-компоненти $F_2(R)$ кільця R ,
- $[-, -]$ — множення Лі,
- $(-, -)$ — множення Жордана,
- $R^L = (R, +, [-, -])$ — кільце Лі, асоційоване з асоціативним кільцем R ,
- $R^J = (R, +, (-, -))$ — жорданове кільце, асоційоване з асоціативним кільцем R ,
- $[A, B]$ — адитивна підгрупа в R , породжена усіма комутаторами вигляду $[a, b]$, де $a \in A$ та $b \in B$,
- (A, B) — адитивна підгрупа в R , породжена усіма комутаторами вигляду $(a, b) = ab + ba$, де $a \in A$ та $b \in B$,
- $\text{ann}_l I = \{a \in R \mid aI = 0\}$ — лівий анулятор I в R ,
- $\text{ann}_r I = \{a \in R \mid Ia = 0\}$ — правий анулятор I в R ,
- $\text{ann } I = (\text{ann}_r I) \cap (\text{ann}_l I)$,
- $C_R(I) = \{a \in R \mid ai = ia \text{ для усіх } i \in I\}$ — централізатор I в R ,
- $d^0 = \text{id}_R$ — одиничний ендоморфізм в кільці R для $d \in \Delta$,
- $R^{lJ} = (R, +, \langle -, - \rangle)$ — ліве жорданове кільце, асоційоване з асоціативним кільцем R ,
- $\text{IDer } R$ — множина внутрішніх диференціювань кільця R .

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена дослідженню властивостей і будови асоціативних кілець, інспірованих їх диференціюваннями, та асоційованих з ними лієвських та жорданових кілець.

Поняття диференціювання в кільці достатньо давнє, воно відіграє важливу роль в об'єднанні аналізу, алгебричної геометрії та алгебри. Натхненником його введення в алгебрі ще в XIX столітті був Р. Дедекінд, але тільки Е. Штейніц в 1910 році формально означив поняття диференціювання в полі раціональних функцій. А. Вейль застосував диференціювання в 1949 році у важливому для сучасної алгебричної геометрії дослідженні будови трансцендентних розширень полів. Незаперечний також вплив О. Оре, який винайшов конструкцію некомутативного кільця поліномів диференційного типу. Н. Джекобсон [68] першим показав, що диференціювання асоціативного кільця R складають кільце $\text{Lid Der } R$, в якому внутрішні диференціювання утворюють ідеал $\text{IDer } R$. Також теорія поля включає диференціювання у свій перелік інструментів.

В 40-вих роках минулого століття започатковано перенесення досягнень теорії Галуа алгебричних рівнянь до теорії звичайних лінійних диференційних рівнянь та теорії різницевих рівнянь. Так зародилася теорія Пікара-Вессіо (the Picard-Vessiot theory). Здобутки в цьому напрямку підсумовано в опублікованих в 50-тих роках монографіях Дж. Рітта [100] та Е. Колчина [76] (остання перевидана в 1973 році), що започаткували виникнення нового розділу — диференційної алгебри. Цікава монографія І. Капланського [75] підсилила інтерес до нового

напрямку. Але справжній бум в цьому напрямку почався тільки після публікації Е. Познера [96], в якій встановлено:

- (перша теорема Познера) якщо характеристика первинного кільця R відмінна від 2 та композиція $d\delta \in \text{Der } R$, де d, δ — диференціювання кільця R , то диференціювання $d = 0$ або $\delta = 0$ нульове;
- (друга теорема Познера) якщо d — диференціювання первинного кільця R , причому елемент $xd(x) - d(x)x \in Z(R)$ центральний для кожного $x \in R$, то $d = 0$ або кільце R комутативне.

Ці теореми стали першими в низці відкритих пізніше так званих теорем комутативності. Вони активізували вивчення кілець із різноманітними обмеженнями на диференціювання (наприклад, Д. Берген, А. Джіамбруно, Л. Чаріні, Ч. Ланскі, І. Херстейн та інші вивчали кільця з диференціюванням, всі ненульові значення якого оборотні, та кільця, диференціювання яких мають нільпотентні значення). Також багатьма іншими дослідниками вивчалися впливи на будову кільця інших обмежень, пов'язаних з диференціюваннями та напівпервинністю. Один із розділів нашої роботи присвячено вивченню кілець, що мають диференціювання з регулярними значеннями.

Властивості диференціювань в некомутативних кільцях R з одиничним елементом 1 переплітаються з властивостями груп зворотних елементів $U(R)$ цих кілець. Це пояснюється тим, що такі кільця R мають нетривіальні підкільця Лі внутрішніх диференціювань $\text{IDer } R$, властивості яких взаємопов'язані з властивостями груп зворотних елементів $U(R)$; але ці

зв'язки залишаються на даний час мало дослідженими. В роботі встановлено умови, за яких $IDer R$ — просте (відповідно первинне, напівпервинне, примарне) кільце Лі.

Починаючи з 1989 року активно досліджуються диференціювання, що діють як гомоморфізми або антигомоморфізми на кільцях або на їх ненульових ідеалах (відповідно ідеалах Лі, ідеалах Жордана). Першими в цій царині були Х. Белл та Л. Каппе [26]. За ними вийшли і продовжують виходити в світ публікації, присвячені розширенням їх результатів на різні узагальнення диференціювань. Дисертація також містить дослідження в цьому напрямку.

В алгебрі віддавна розглядаються різні аспекти жорсткості. В теорії кілець різноманітні види жорсткості (пов'язані з диференціюваннями або ендоморфізмами) вивчали В.Д. Бурков, Д. Жордан, Я. Кремпа, К. Мексон, Л. Маклін, А. Новіцкі, О.Д. Артемович та ін. В дисертації вводиться поняття жосткого диференціювання та досліджується, як його наявність впливає на будову кільця.

Останнім часом А.П. Петравчук, В.В. Бавула, Є.О. Македонський та ін. активно вивчають нільпотентні та розв'язні алгебри Лі диференціювань поліноміальних кілець.

У даній дисертаційній роботі досліджуються властивості асоціативних кілець з різними властивостями диференціювань, пов'язаних з диференційною напівпервинністю. Вивчаються також взаємозв'язки властивостей диференційно простих (відповідно диференційно первинних, диференційно напівпервинних) асоціативних кілець R з властивостями їх асоційованих кілець Жордана R^J , лівих кілець Жордана R^{lJ} , кілець Лі R^L . При цьо-

му використано модифіковані нами методи, закладені в працях Х. Белла, Д. Бергена, Н. Джекобсона, А. Джіамбруно, Ч. Ланські, Я. Кремпи, І. Херстейна, О.Д. Артемовича та ін.

Як впливає з викладеного вище, кільця з диференціюваннями та їх зв'язки з напівпервинністю перебували і перебувають в центрі активної уваги дослідників із різних країн, а тому дослідження їх були і залишаються актуальними.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі алгебри та геометрії ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника". Тематика дисертаційної роботи пов'язана із дослідженнями кафедри алгебри та геометрії і проводилася за одним із основних напрямків наукових досліджень кафедри "Диференціювання кілець та майже-кілець".

Мета і завдання дослідження. *Метою дисертації* є вивчення властивостей і будови асоціативних кілець та асоційованих з ними лієвських та жорданових кілець, що визначаються їх диференціюваннями.

Об'єкт дослідження — асоціативні кільця R та асоційовані з ними лієвські R^L та жорданові R^J кільця.

Предмет дослідження — характеристика кілець та опис їх будови, що індукується властивостями їх диференціювань.

Задачі дослідження:

- встановити будову класичного кільця дробів комутативного кільця з одиницею, кожне ненульове диференціювання якого регулярне;

- дослідити класичне праве кільце дробів правого кільця Голді, що має нетотожний автоморфізм φ , для якого кожне ненульове значення $x - \varphi(x)$ регулярне;
- встановити властивості кільця із "великими" системами нільпотентних диференціювань;
- вивчити властивості диференціювань, які діють як гомоморфізми або антигомоморфізми на диференційно напівпервинних кільцях;
- дослідити кільця із жорсткими диференціюваннями;
- знайти взаємозв'язки між диференційною простотою (відповідно диференційною первинністю, диференційною напівпервинністю) кільця R та асоційованих з ними лівських R^L та жорданових R^J кільця.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач використовуються класичні і сучасні методи теорії асоціативних кільця і теорії неасоціативних кільця.

Наукова новизна отриманих результатів. Усі результати, що виносяться на захист, нові. У роботі вперше:

- охарактеризовано будову класичного кільця дробів комутативного кільця із одиницею, кожне ненульове диференціювання якого регулярне;
- охарактеризовано будову класичного правого кільця дробів правого кільця Голді R , що має нетотожний автоморфізм φ , для якого всі ненульові значення $x - \varphi(x)$, де $x \in R$, регулярні;

- досліджено властивості асоціативних кілець, всі диференціювання яких нільпотентні індексів ≤ 2 ;
- досліджено диференціювання, які діють як гомоморфізми або антигомоморфізми на диференційно напівпервинних кільцях;
- вивчено властивості кілець із жорсткими диференціюваннями і, зокрема, описано комутативні артінові кільця із жорсткими диференціюваннями;
- охарактеризовано лієвську будову R^L диференційно напівпервинних кілець R ;
- охарактеризовано жорданову будову R^J диференційно напівпервинних кілець R ;
- встановлено взаємозв'язки між диференційною простотою (відповідно диференційною первинністю та диференційною напівпервинністю) кілець R , R^L та R^J .

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Її результати та методи можуть бути використаними в теорії кілець (асоціативних та неасоціативних), в подальших дослідженнях диференційних кілець та полів, а також у суміжних галузях математики.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що наведено в дисертації, отримано авторкою самостійно. У спільній статті [3] та тезах [7,9,10] науковому керівникові належить постановка задач та загальне керівництво роботою. Із спільної статті [5] в дисертацію включено (окрім розділу 2 статті) тільки ті результати, що належать авторці.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації апробовано на:

- 1) V Всеукраїнській науковій конференції "Нелінійні проблеми аналізу" (Микуличин, 19-21 вересня 2013);
- 2) 9 Міжнародній алгебричній конференції в Україні (Львів, 8-13 липня 2013);
- 3) IX Літній школі "Алгебра, топологія і аналіз" (Поляниця, 7-18 липня 2014);
- 4) Міжнародній алгебричній конференції, присвяченій 100 роковині Л.А. Калужніна (Київ, 7-12 липня 2014);
- 5) 16-тій Міжнародній науковій конференції імені Михайла Кравчука (Київ, 14-15 травня 2015)
- 6) конференції молодих учених "Підстригачівські читання – 2015" (Львів, 26-28 травня 2015);
- 7) X Міжнародній алгебричній конференції в Україні (Одеса, 20-27 серпня 2015);
- 8) звітних науково-практичних конференціях ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" (Івано-Франківськ, 2013–2015);
- 9) семінарах кафедри алгебри та геометрії ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника".

Публікації. Матеріали дисертаційної роботи викладені у 12 публікаціях, у тому числі 5 статей [1-5] у наукових фахових виданнях із переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки

України (з них 1 [5] — у науковому фаховому виданні, що включене до міжнародної наукометричної бази даних "Scopus") та апробовано на 7 міжнародних і всеукраїнських наукових конференціях [6-12].

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається із переліку умовних позначень, вступу, 4-ох розділів, висновків та списку використаних джерел, що налічує 109 найменувань. Загальний обсяг дисертації — 108 сторінок, обсяг списку використаних джерел — 14 сторінок.

Авторка висловлює щире подяку науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору О.Д. Артемовичу за постановку задач і допомогу в роботі над дисертацією.

РОЗДІЛ 1

ПОЧАТКОВИЙ РОЗДІЛ

В цьому розділі наведено огляд літератури та фактів, які мають безпосереднє відношення до отриманих у дисертації результатів, а також основні означення та факти, що використовуватимуться надалі, та огляд основних результатів роботи. Окрім того, цей розділ містить результати авторки про кільця з нільпотентними диференціюваннями індексів ≤ 2 та результати дослідження диференційно напівпервинних кілець з диференціюванням, що діє як гомоморфізми або антигомоморфізми на самому кільці або на його ненульовому ідеалі.

1.1. Огляд відомих результатів, що стосуються тематики

Одним із перших результатів, що започаткував вивчення диференціювань з нільпотентними значеннями, належить І. Херстейну [64]. Він довів, що якщо R — первинне кільце і d — його внутрішнє диференціювання, що задовольняє умову $d(x)^n = 0$ для усіх $x \in R$ та n — фіксоване ціле число, то $d = 0$. Цей результат було розширено на випадок напівпервинних кілець в [53]. Л. Чаріні та Д. Джіамбруно [41] вивчали ситуацію, коли $d(x)^{n(x)} = 0$ для усіх $x \in U$, де U — ідеал Лі в R . Спершу вони довели, що $d(U) = 0$, коли R — первинне кільце характеристики ≤ 2 та R не містить жодного правого ніль-ідеала. Згодом вони отримали такий же результат для фіксованого $n(x) = n$ та вільного від 2-скруту напівпервинного кільця R . Та у 1990

році Ч. Ланскі [80] обійшов обмеження, що стосувалися індексів нільпотентності та характеристики. Він довів, що якщо кільце R не містить жодного правого ніль-ідеала, U — його ідеал Лі, та диференціювання d кільця R таке, що $d(u)$ — нільпотентний елемент для кожного $u \in U$, то $d = 0$. Різними авторами також отримано багато інших результатів. В цьому напрямку в роботі вивчаються властивості кілець, всі диференціювання яких нільпотентні індексів ≤ 2 .

Один з розділів роботи присвячено вивченню кілець, що мають диференціювання з регулярними значеннями. Дещо раніше різними авторами опубліковано низку результатів про кільця R з одиницею, що мають диференціювання, кожне ненульове значення якого оборотне в кільці R . Так, Д. Берген, І. Херстейн та Ч. Ланскі [32] довели, що якщо кільце R має таке ненульове диференціюванням d , що $d(x) = 0$ або $d(x)$ оборотний для будь-якого $x \in R$, то R — тіло, або R — кільце матриць $M_2(T)$ степеня 2 над тілом T , або $R = T[X]/(X^2)$ — фактор-кільце кільця многочленів $T[X]$ від одної комутуючої змінної X над тілом T характеристики 2, причому $d(T) = 0$ та $d(X) = aX + 1$ для деякого $a \in Z(T)$. Трохи пізніше Д. Берген та Л. Чаріні [29] перенесли цей результат на випадок, коли розглядаються елементи x із ідеала Лі. Результати цих робіт узагальнювались в роботах [77], [54], [42] та [67] (див. також [81]). Д. Берген [28] дослідив напівпервинні кільця R , які мають таке ненульове диференціювання d , що $d(x)$ нільпотентний або оборотний для усіх $x \in R$. Недавно І. Кайгородов та Ю. Попов [74] досліджували альтернативні алгебри з диференціюванням, що приймає оборотні значення. Зазначимо також, що якщо φ — автомор-

фізм кільця R , то $1 - \varphi$ — це його φ -диференціювання (в сенсі [23, § 1.1]). Д. Берген та І. Херстейн [30] охарактеризували кільця R , в яких для кожного $x \in R$ виконується $x = \varphi(x)$ або $x - \varphi(x)$ оборотний в R . Нами також отримано розширення в цьому напрямку.

Починаючи з 1989 року активно досліджується ще одна тематика. А саме, вивчаються диференціювання, які діють як гомоморфізми або антигомоморфізми на кільці або на його ненульовому ідеалі (відповідно ідеалі Лі, ідеалі Жордана). Першопрохідниками у цій царині були Х. Белл та Л. Каппе [26]. Вони довели, що якщо d — диференціювання кільця R , яке діє як ендоморфізм або антиендоморфізм в кільці R , то $d = 0$ тривіальне. М. Єнігул та Н. Аргач [108], М. Ашраф, Н. Рехман та М. Квадрі [17] розширили цей результат для (σ, τ) -диференціювань в первинному кільці. А. Асма та К. Діпак [18], А. Асма, Н. Рехман та А. Шакір [20] отримали схожий результат для узагальнених (σ, τ) -диференціювань, що діють як гомоморфізм або антигомоморфізм на ненульовому ідеалі Лі U первинного кільця характеристики $\neq 2$. Останнім часом А. Асма та К. Діпак [19], Н. Рехман та М. Раза [98, 99], Б. Дхара [48], Ю. Вонг та Х. Ю [107] і Г. Скудо [102] розширили ці результати для узагальненого диференціювання, що діє на ідеалі (відповідно ідеалі Лі) первинного та напівпервинного кілець. В підрозділі 1.3 роботи отримано розширення деяких із наведених результатів на випадок, коли кільце R диференційно первинне (відповідно диференційно напівпервинне).

Ще у 1979 році К. Мексон заявив про проблему дослідження жорстких кілець, тобто кілець із тривіальними ендоморфізмами.

морфізмами. Різні аспекти жорсткості диференціювань вивчались вітчизняними та зарубіжними дослідниками. Так, В. Бхат [35] означив поняття d -жорсткого кільця (пов'язаного з поліноміальними кільцями) та встановив зв'язок між d -жорстким кільцем та 2-первинним кільцем. Він також знайшов зв'язок між первинним радикалом d -жорсткого кільця R та первинним радикалом скрученого поліноміального кільця $R[x, s, d]$. Д. Жордан в одній із своїх робіт показав, що якщо в кільці R нульової характеристики існує такий центральний елемент z , що $\delta(z)$ — регулярний елемент, то диференціювання жорстке. Пізніше А. Новіцкі в [92] охарактеризував жорсткі диференціювання комутативної області цілісності, а В.Д. Бурков [40] дещо узагальнив цей результат. Також О.Д. Артемович [14] вивчав жорсткі кільця скінченного рангу та диференційно тривіальні кільця скінченного рангу.

Цікаву властивість виявили І. Херстейн та А. Джіамбруно [53], а саме, якщо R — напівпервинне кільце та d — таке його диференціювання, що $d(x)^n = 0$, де $n \geq 1$ фіксоване ціле, то $d = 0$. Схожі результати було отримано в роботах [36] та [82]. Дослідники з'ясували, коли для напівпервинного кільця R з умови $ad(R)^n = 0$, де n — фіксоване ціле число, $a \in R$, $d \in \text{Der } R$, випливає, що $ad(R) = 0$.

Диференційно прості кільця ввів до розгляду Е. Познер [97]. Диференційно напівпервинні кільця чи ненайперше зустрічаються у Дж. Фішера [51]; їх вивчали також А. Новіцкі [93], В. Бурков [39], К. Жордан і Д. Жордан [72], Ю. Хірано і Х. Томінага [66], А. Тшепізур [103] та ін.

Взаємозв'язки між властивостями асоціативного кільця

R , кільця Лі R^L та жорданового кільця R^J вивчались І. Херстейном та його студентами (див. [58, 59, 62] та бібліографію в монографіях [60] і [38]).

Останнім часом також активно вивчаються нільпотентні і розв'язні алгебри Лі диференціювань поліноміальних кілець (див. [95, 16, 85, 22] та ін.).

1.2. Необхідні означення і факти

Нехай надалі R — асоціативне кільце із одиницею 1. Відображення $d : R \rightarrow R$ називається *диференціюванням* кільця R , якщо

$$d(a + b) = d(a) + d(b) \text{ та } d(ab) = d(a)b + ad(b)$$

для будь-яких $a, b \in R$. Множину всіх диференціювань кільця R будемо позначати символом

$$\text{Der } R.$$

Зрозуміло, що нульове відображення

$$0 : R \ni r \mapsto 0 \in R$$

— диференціювання, тобто $0 \in \text{Der } R$. Якщо $\text{Der } R = \{0\}$, то кільце R будемо називати *диференційно тривіальним* [14]. Множина $\text{Der } R$ — кільце Лі стосовно операцій поточкового додавання ”+” та поточкового множення Лі ” $[-, -]$ ”, визначених за такими правилами:

$$\forall d, \delta \in \text{Der } R \forall x \in R : (d + \delta)(x) = d(x) + \delta(x),$$

та

$$\forall d, \delta \in \text{Der } R \forall x \in R : [d, \delta](x) = d(\delta(x)) - \delta(d(x)),$$

тобто виконуються наступні властивості:

(1) (адитивність стосовно першої компоненти)

$$\forall d, \delta, \mu \in \text{Der } R : [d + \delta, \mu] = [d, \mu] + [\delta, \mu],$$

(2) (адитивність стосовно другої компоненти)

$$\forall d, \delta, \mu \in \text{Der } R : [d, \delta + \mu] = [d, \delta] + [d, \mu],$$

(3) (антисиметричність)

$$\forall d \in \text{Der } R : [d, d] = 0 \quad (\Rightarrow [d, \delta] = -[\delta, d]),$$

(4) (тотожність Якобі)

$$\forall d, \delta, \mu \in \text{Der } R : [d, [\delta, \mu]] + [\delta, [\mu, d]] + [\mu, [d, \delta]] = 0.$$

Якщо $a \in R$, то правило

$$\partial_a : R \ni x \mapsto ax - xa = [a, x] \in R$$

визначає диференціювання кільця R , яке прийнято називати *внутрішнім диференціюванням R , породженим елементом a* .

Символом

$$\text{IDer } R$$

позначатимемо множину всіх внутрішніх диференціювань кільця R . Послідовні комутатори визначаються за формулами:

$$[x, y]_1 = [x, y] = xy - yx$$

та

$$[x, y]_k = [[x, y]_{k-1}, y]$$

для додатних цілих чисел $k \geq 2$ та $x, y \in R$. Кільце R називається C -кільцем, якщо воно задовольняє наступну умову:

(C) для даних $x, y \in R$ існують такі додатні цілі числа $m = m(x, y) \geq 1$, $n = n(x, y) \geq 1$ та $k = k(x, y) \geq 1$, що $[x^m, y^n]_k = 0$.

Твердження 1.1 ([43], Теорема 3). *Нехай R — C -кільце, $N_r(R)$ — сума його всіх правих ніль-ідеалів. Якщо $N_r(R) = 0$, то R комутативне.*

Всюди далі Δ — довільна непорожня підмножина із $\text{Der } R$ (зокрема, $\Delta = \{0\}$) та $\delta \in \text{Der } R$. Підмножина K кільця R називається Δ -стабільною (або Δ -замкненою), якщо $d(a) \in K$ для усіх $d \in \Delta$ та $a \in K$. Ідеал I кільця Лі (Жордана чи асоціативного) A називається Δ -ідеалом, якщо $I \in \Delta$ -стабільним. Кільце Лі (Жордана чи асоціативне) A називається:

- *простим* (відповідно Δ -простим), якщо $A^2 \neq 0$ і воно не містить двосторонніх ідеалів (відповідно Δ -ідеалів), відмінних від 0 та A ,
- *первинним* (відповідно Δ -первинним), якщо для будь-яких двосторонніх ідеалів (відповідно Δ -ідеалів) K, S кільця A із умови $KS = 0$ випливає, що $K = 0$ або $S = 0$ (якщо $\Delta = \{\delta\}$ та $A \in \Delta$ -первинним, то кажемо, що A — δ -первинне кільце),
- *напівпервинним* (відповідно Δ -напівпервинним), якщо для будь-якого двостороннього ідеала (відповідно Δ -ідеала) K кільця A із умови $K^2 = 0$ випливає, що $K = 0$,
- *примарним*, якщо для будь-яких двосторонніх ідеалів K, S кільця A із умови $KS = 0$ випливає, що $K = 0$ або $S = 0$

нільпотентний ідеал.

Кожне некомутативне Δ -просте кільце Δ -первинне та кожне Δ -первинне кільце Δ -напівпервинне.

Кажуть, що кільце R вільне від \mathbb{Z} -скруту, якщо для кожного елемента $r \in R$ та будь-якого цілого числа n умова $nr = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли $r = 0$. Якщо імплікація

$$2r = 0 \Rightarrow r = 0$$

вірна для будь-якого елемента $r \in R$, то R називається вільним від 2-скруту. Нехай

$$F_p(R) = \{a \in R \mid a \text{ має адитивний порядок } p^k \\ \text{для деякого невід'ємного цілого числа } k = k(a)\}$$

— p -частина кільця R , де p — просте число. Тоді $F_p(R)$ — Δ -ідеал кільця R . Якщо R є Δ -напівпервинним, то

$$pF_p(R) = 0.$$

Зокрема, в Δ -первинному кільці R виконується умова $F_p(R) = 0$ (таким чином, його характеристика $\text{char } R = 0$) або $F_p(R) = R$ (і тому $\text{char } R = p$). Очевидно, що адитивна група R^+ Δ -первинного кільця R вільна від скруту тоді і тільки тоді, коли $\text{char } R = 0$.

Введемо наступне позначення:

$$d^0 = \text{id}_R$$

— одиничний автоморфізм кільця R для $d \in \Delta$. Нагадаємо деякі властивості Δ -напівпервинних та Δ -первинних кілець, що використовуються надалі.

Лема 1.1. *Наступні умови рівносильні:*

(1) R — Δ -напівпервинне кільце,

(2) для будь-яких Δ -ідеалів A, B кільця R імплікація

$$AB = 0 \Rightarrow A \cap B = 0$$

вірна,

(3) якщо $a \in R$ — такий елемент, що

$$aR\delta_1^{m_1} \dots \delta_k^{m_k}(a) = 0$$

для будь-яких цілих чисел $k \geq 1$, $m_i \geq 0$ та диференціювань $\delta_i \in \Delta$ ($i = 1, \dots, k$), то $a = 0$.

Доведення. Доводиться за допомогою простої модифікації твердження 2 із [79, §3.2]. □

Лема 1.2. Наступні умови рівносильні:

(1) R — Δ -первинне кільце,

(2) лівий анулятор $\text{ann}_l I$ лівого Δ -ідеала I кільця R нульовий,

(3) правий анулятор $\text{ann}_r I$ правого Δ -ідеала I кільця R нульовий,

(4) якщо $a, b \in R$ — такі елементи, що

$$aR\delta_1^{m_1} \dots \delta_k^{m_k}(b) = 0$$

для будь-яких цілих чисел $k \geq 1$, $m_j \geq 0$ та диференціювань $\delta_j \in \Delta$ ($j = 1, \dots, k$), то $a = 0$ або $b = 0$.

Доведення. Доводиться подібно як лема 2.1.1 із [61]. □

Нижче наводимо відомі факти, на які посилаємося в дисертаційній роботі.

Твердження 1.2 ([56], Теорема). *Нехай R — кільце з одиницею 1, $U(R)$ — його група одиниць. Тоді для кожного $n \geq 1$ маємо*

$$\gamma_n(U(R)) \leq 1 + L_n(R),$$

де $\gamma_n(U(R))$ — n -ний член нижнього центрального ряду групи $U(R)$, а $L_n(R)$ — ідеал Лі, породжений всіма комутаторами Лі вигляду $[r_1, \dots, r_n]$, де $r_i \in R$ ($i = 1, \dots, n$), $[r_1] = r_1$, $[r_1, r_2] = r_1r_2 - r_2r_1$ та $[r_1, \dots, r_{n-1}, r_n] = [[r_1, \dots, r_{n-1}], r_n]$.

Твердження 1.3 ([53], Теорема 1). *Якщо R — напівпервинне кільце і d — таке його диференціювання, що*

$$d(x)^n = 0$$

для всіх $x \in R$, де $n \geq 1$ — фіксоване ціле число, то $d = 0$.

Твердження 1.4 ([26], Лема 1). *Нехай*

$$H(R) = \{a \in R \mid \partial_a \text{ — ендоморфізм кільця } R\}$$

та

$$H^*(R) = \{a \in R \mid \partial_a \text{ — антиендоморфізм кільця } R\}.$$

Тоді

$$H(R) = H^*(R) = C_R(R^2),$$

де $C_R(R^2) = \{a \in R \mid [xy, a] = 0 \text{ для всіх } x, y \in R\}$.

Твердження 1.5 ([26], Теорема 2). *Нехай R — напівпервинне кільце. Якщо d — диференціювання кільця R , яке є ендоморфізмом або антиендоморфізмом, то $d = 0$.*

Твердження 1.6 ([26], Лема 2). (а) Нехай U — підкільце кільця R , d — диференціювання кільця R , що діє як гомоморфізм на U . Тоді

$$d(x)x(y - d(y)) = 0 \text{ для всіх } x, y \in U.$$

(б) Нехай V — правий ідеал кільця R , d — диференціювання кільця R , що діє як антигомоморфізм на V . Тоді

$$d(x)y[r, d(x)] = 0 \text{ для всіх } x, y \in V \text{ та } r \in R.$$

Твердження 1.7 ([60], Лема 1.1). Нехай R — кільце та U — його ненульовий правий ідеал. Якщо $a^n = 0$ для всіх $a \in U$, де n — фіксоване ціле число, то R має ненульовий нільпотентний ідеал.

Твердження 1.8 ([26], Теорема 3). Нехай R — первинне кільце, U — його ненульовий правий ідеал. Якщо d — диференціювання кільця R , що діє як гомоморфізм або антигомоморфізм на U , то $d = 0$.

Твердження 1.9 ([82], Наслідок, р.1688). Нехай R — напівпервинне кільце із диференціюванням d та $a \in R$. Якщо $ad(x)^n = 0$ для усіх $x \in R$, де n — фіксоване ціле число, то $ad(R) = 0$.

Твердження 1.10 ([14], Твердження 1.2). Нехай R — комутативна область цілісності характеристики 0. Тоді R — диференційно тривіальне кільце в тому і тільки тому випадку, коли його поле дробів $Q(R)$ — алгебричне розширення поля P , P — просте підполе в $Q(R)$.

Твердження 1.11 ([14], Твердження 1.3). Нехай R — комутативна область цілісності простої характеристики p . Тоді

R — диференційно тривіальне кільце в тому і тільки тому випадку, коли $R = R^p$, де $R^p = \{x^p \mid x \in R\}$.

Нагадаємо, що в комутативному локальному кільці R можна ввести топологію наступним чином. Розглядаючи ідеали

$$J(R), J(R)^2, \dots, J(R)^n, \dots$$

як околи нуля, отримуємо $J(R)$ -адичну топологію на кільці R . Якщо для будь-якого додатнього цілого числа m маємо

$$a_k - a_l \in J(R)^m,$$

де цілі числа k, l достатньо великі, то послідовність $\{a_n\}$ називається *регулярною*. Комутативне локальне кільце R називається *повним*, якщо кожна регулярна послідовність із R має границю в R . Кожне комутативне артінове кільце повне. Крім того, *v -кільце* — це нерозгалужена повна регулярна локальна нетерова область цілісності розмірності один, характеристика якої відрізняється від характеристики її поля лишків [47, р.88].

Зауваження 1.1. Якщо поле лишків W/pW v -кільця W має ненульове диференціювання d , то за твердженням 2 із [57] існує таке ненульове диференціювання $D : W \rightarrow W$, що

$$D(a + pW) = d(a) + pW$$

для кожного $a \in W$ та $D(W) \not\subseteq pW$. Як наслідок,

$$D(p^{k-1}W) \not\subseteq p^k W$$

для кожного додатнього цілого числа k .

За лемою 13 із [47] для кожного поля P простої характеристики $p > 0$ існує таке v -кільце R , поле лишків якого

ізоморфне P . Якщо локальне кільце R містить підполе F , що відображається за модулем максимального ідеала $J(R)$ на поле лишків $R/J(R)$, то F називається *полем коефіцієнтів* кільця R .

Твердження 1.12 ([47], Теорема 9). *Якщо R — повне локальне кільце, що має таку ж характеристику як і його поле лишків $R/J(R)$, то R містить поле коефіцієнтів.*

Твердження 1.13 ([47], Теорема 11). *Якщо R — повне локальне кільце з полем лишків $R/J(R)$, що має просту характеристику $p > 0$, то R містить таке підкільце V , що V — гомоморфний образ деякого v -кільця, яке має поле лишків ізоморфне $R/J(R)$, причому $R = V + J(R)$ та $J(R) \cap V = J(V)$.*

Всюди в роботі *первинний радикал* $\mathbb{P}(R)$ кільця R — це перетин всіх його первинних ідеалів. Як відомо (див. [79]), $\mathbb{P}(R)$ — ніль-ідеал в R).

Твердження 1.14 ([55], Твердження 13). *Нехай R — кільце, $\mathbb{P}(R)$ — його первинний радикал та $\delta \in \text{Der } R$. Якщо або R , або $R/\mathbb{P}(R)$ вільне від \mathbb{Z} -скруту, то усі мінімальні первинні ідеали кільця R — δ -ідеали та $\mathbb{P}(R)$ також δ -ідеал.*

Твердження 1.15 ([25], Теорема 8.16). *Нехай R — асоціативне кільце, в якому або адитивна група R^+ без скруту, або індекси нільпотентних елементів обмежені числом n , а порядки періодичних елементів із R^+ більші, ніж n . Тоді усі мінімальні первинні ідеали інваріантні стосовно диференціювань кільця R .*

Твердження 1.16 ([104], Наслідки 2 і 5). *Нехай δ — диференціювання кільця R . Тоді δ єдиним чином продовжується до диференціювання його класичного кільця дробів $Q(R)$.*

Кільце R називається *правим кільцем Голді*, якщо воно не містить нескінченних прямих сум правих ідеалів і задовольняє умову обриву зростаючих ланцюгів правих ануляторів.

Твердження 1.17 ([32], Теорема 1). *Нехай R — кільце з одиницею та $d \neq 0$ — диференціювання в R таке, що для кожного $x \in R$ або $d(x) = 0$, або $d(x)$ оборотний в R . Тоді R — кільце одного із типів:*

- (1) D — тіло,
- (2) D_2 — кільце матриць степеня 2,
- (3) $D[x]/(x^2)$, де $\text{char } D = 2$, $d(D) = 0$ та $d(x) = 1 + ax$ для деякого a із центра $Z(D)$ тіла D .

Твердження 1.18 ([61], Теорема 7.2.1-7.2.2). *Нехай R — напівпервинне праве кільце Голді. Тоді:*

- (1) R має праве кільце дробів $Q = Q(R)$;
- (2) кільце Q напівпросто і задовольняє умову мінімальності для правих ідеалів.

Твердження 1.19 ([61], Теорема 7.2.3). *Якщо S — напівпросто артінове кільце і R — лівий порядок в S , то R — напівпервинне кільце Голді. Крім того, якщо S — просте кільце, то кільце R первинне.*

Твердження 1.20 ([30], Теорема). *Нехай R — кільце з одиницею та $\varphi \neq 1$ — автоморфізм в R такий, що для кожного*

$x \in R$ або $x = \varphi(x)$, або $x - \varphi(x)$ оборотний в R . Тоді R — кільце одного із типів:

- (1) D — тіло,
- (2) $D \oplus D$ — кільцева пряма сума,
- (3) $M_2(D)$ — кільце матриць степеня 2 над тілом D .

Твердження 1.21 ([58], Лема 3). Нехай R — асоціативне кільце, U — його ідеал Лі та

$$T(U) = \{t \in R \mid [t, R] \subseteq U\}.$$

Тоді $T(U)$ — ідеал Лі та асоціативне підкільце в R . Крім того, $U \subseteq T(U)$.

Твердження 1.22 ([97], Теорема 2). Нехай R — первинне кільце, а d — таке його диференціювання, що

$$ad(a) - d(a)a \in Z(R).$$

Якщо $d \neq 0$, то R комутативне.

Твердження 1.23 ([93], Лема 1.1). Нехай I — ідеал кільця R та $d \in \text{Der } R$. Тоді:

- (a) $I_n = \{r \in R \mid d^n(r) \in I \text{ для } \forall n=0,1,2,\dots\}$ — найбільший d -ідеал, що міститься в I ,
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} d^n(I)$ — найменший d -ідеал, що містить I ,
- (c) якщо R нетерове, то існує таке ціле число k , що

$$\sum_{n=0}^{\infty} d^n(I) = \sum_{n=0}^{k+1} d^n(I)$$

— d -ідеал кільця R .

Твердження 1.24 ([79], §3.2, Твердження 2). *В напівпервинному кільці R первинний радикал $\mathbb{P}(R) = 0$ нульовий.*

Кільце $(A, +, \cdot)$ називається *кільцем Жордана*, якщо виконуються такі умови:

a) $(A, +)$ — абелева група,

b) [комутативність]

$$\forall_{x,y \in A} : x \cdot y = y \cdot x,$$

c)

$$\forall_{x,y,z \in A} : ((x \cdot x) \cdot y) \cdot x = (x \cdot x) \cdot (y \cdot x),$$

d) [дистрибутивність]

$$\forall_{x,y,z \in A} : x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \text{ та } (x+y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z).$$

Твердження 1.25 ([58], Лема 1). *Нехай U — ідеал Жордана асоціативного кільця R . Якщо $a, b \in U$, то для будь-якого $x \in R$ маємо*

$$(ab + ba)x - x(ab + ba) \in U.$$

1.3. Основні результати дисертаційної роботи

Перший розділ допоміжний; він містить перелік результатів та означень, що використовуються в роботі. У підрозділі 1.4 досліджуються кільця, всі диференціювання яких нільпотентні індексів ≤ 2 (твердження 1.26). Як наслідок встановлено, що в напівпервинному кільці R всі диференціювання (відповідно

внутрішні диференціювання) кільця R нільпотентні тоді і тільки тоді, коли R диференційно тривіальне (відповідно комутативне) (твердження 1.27).

Х. Белл та Л. Каппе [26] встановили, що якщо d – диференціювання кільця R , що діє як ендоморфізм або антиендоморфізм на кільці R , то $d = 0$ нульове. Отримано таке твердження, що розширює теорему 3 із [53] на диференційний випадок.

Твердження 1.28. *Нехай R – кільце та $d \in \text{Der } R$. Якщо R – d -напівпервинне кільце та*

$$(d(x))^n = 0$$

для будь-якого $x \in R$, де $n \geq 1$ – фіксоване ціле число, то $d = 0$.

У підрозділі 1.4 нами доведено наступні дві теореми.

Теорема 1.1. *Нехай R – кільце та $d \in \text{Der } R$. Якщо R – d -напівпервинне кільце та d – його гомоморфізм (відповідно антигомоморфізм), то $d = 0$.*

Теорема 1.2. *Нехай R – кільце, $d \in \text{Der } R$ та U – ненульовий правий d -ідеал в R . Тоді виконується наступне:*

- (1) *якщо R – d -напівпервинне кільце та d діє як гомоморфізм на U , то $d = 0$,*
- (2) *якщо R – d -первинне кільце та d діє як антигомоморфізм на U , то $d = 0$.*

Як відомо, клас диференційно напівпервинних кілець значно ширший від класу напівпервинних кілець. Тому отримані вище результати розширюють результати із [26] та інших.

Розділ 2 присвячено жорстким диференціюванням. В алгебрі досліджувались різні аспекти жорсткості. Я. Кремпа ввів

поняття σ -жорсткого кільця [78], а саме: R — σ -жорстке кільце для деякого кільцевого ендоморфізма $\sigma \in \text{End } R$, якщо $a\sigma(a) \neq 0$ для будь-якого ненульового елемента $a \in R$. Опираючись на це означення та з огляду на твердження 2.1 (доведене в роботі), введено таке

Означення 2.1. R — d -жорстке кільце (або диференціювання d жорстке), де $d \in \text{Der } R$, якщо для будь-якого $a \in R$ виконується $d(a) = 0$ або $ad(a) \neq 0$.

Очевидно, що нульове диференціювання 0 кільця R жорстке. Також кожне диференціювання області цілісності жорстке.

М. Брешар [36], Т. Лі та Д. Лін [82] дослідили, коли для напівпервинного кільця R з умови $ad(R)^n = 0$, де n — фіксоване ціле число, $a \in R$, $d \in \text{Der } R$, впливає, що $ad(R) = 0$. За твердженням 2.1 та результатами з [82, р.1688] і [53] ми отримали такий

Наслідок 2.1. Нехай R — напівпервинне кільце з диференціюванням d та $a \in R$. Якщо $ad(R)^n = 0$, де n — фіксоване ціле число, то $d = 0$.

Цей наслідок розширює деякі результати з [64] та [53].

Д. Андерсон та П. Лівінгстон [13] (див. також С. Мюлей [91]) продемонстрували, що в скінченному комутативному кільці R (що не є полем) будь-який автоморфізм f такий, що $f(x) = x$ для усіх дільників нуля $x \in R$, є одиничним автоморфізмом. Оскільки кожне комутативне скінченне кільце — скінченна кільцева пряма сума локальних кілець, то очевидним є факт, що доведення потребує тільки той випадок, коли кільце локальне. З огляду на це, П. Шарма [101] довів, що якщо R — скінченне комутативне локальне кільце, що не є полем, тоді для

кожного $f \in \text{Aut } R$, де $f(x) = x$ для усіх $x \in J(R)$, $f = \text{id}_R$ тоді і тільки тоді, коли поле лишків $R/J(R)$ диференційно тривіальне. Ми розширили цей результат (що необхідний для доведення теореми 2.2) у такому вигляді

Теорема 2.1. *Нехай R — локальне кільце з ненульовим лівим T -нільпотентним радикалом Джексона $J(R)$. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

- (1) *для кожного диференціювання $d \in \text{Der } R$ такого, що $d(J(R)) = 0$, випливає, що $d = 0$,*
- (2) *фактор-кільце $R/J(R)$ — диференційно тривіальне поле,*
- (3) *кожен автоморфізм $f \in \text{Aut } R$ такий, що $f(x) = x$ для будь-якого $x \in J(R)$, тривіальний, тобто $f = \text{id}_R$.*

Комутативні артінові кільця з жорсткими диференціюваннями описує така

Теорема 2.2. *Нехай R — комутативне артінове кільце. Тоді виконується одна із властивостей:*

- (1) *R має нежорстке диференціювання,*
- (2) *$R = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$ — кільцева пряма сума кілець R_1, \dots, R_n , кожне з яких є полем або диференційно тривіальним v -кільцем.*

Активно досліджуються властивості кілець, що мають диференціювання, значення яких задовольняють певним властивостям. Так, Дж. Берген, І. Херстейн та Ч. Ланські [32] дослідили структуру кілець R із одиницею 1, які мають таке диференціювання d , що $d(x) = 0$ або $d(x)$ — оборотний елемент для всіх $x \in R$. Будемо говорити, що асоціативне кільце R задовольняє

умову (*), якщо знайдеться таке ненульове диференціювання $d : R \rightarrow R$, що для будь-якого елемента $x \in R$ маємо $d(x) = 0$ або $d(x)$ — регулярний елемент в кільці R . У підрозділі 3.1 доведена така

Теорема 3.1. *Нехай R — комутативне кільце. Тоді R має ненульове диференціювання d , що задовольняє умову (*), в тому і тільки в тому випадку, коли класичне кільце дробів $Q(R)$ — поле або $Q(R) = T[X]/(X^2)$, де характеристика $\text{char } T = 2$, $d(T) = 0$ та $d(X) = 1 + aX$ для деякого $a \in Z(T)$.*

Ця теорема у комутативному випадку розширює теорему із праці [32].

Будемо говорити, що автоморфізм φ кільця R задовольняє умову (**), якщо для φ -диференціювання $1 - \varphi$ справджується властивість (*). Нами отримано таке узагальнення теореми із [30].

Теорема 3.2. *Нехай R — праве кільце Голді. Якщо R має неодиначний автоморфізм φ такий, що $x - \varphi(x)$ нульовий або регулярний для кожного $x \in R$, тоді R — напівпервинне кільце з класичним правим кільцем дробів Q одного із типів:*

- (1) Q — тіло,
- (2) $Q = T \oplus T$ — кільцева пряма сума, де T — тіло,
- (3) $Q = M_2(T)$ — кільце матриць степеня 2 над тілом T .

Розділ 4 (основний розділ роботи) присвячено взаємозв'язкам між властивостями асоціативного диференційно напівпервинного кільця R та властивостями асоційованих із ним кільця Лі R^L та кільця Жордана R^J (див. [60] і [38]).

Теорема 4.2. *Для вільного від 2-скруту кільця R виконуються наступні твердження:*

- (1) R — Δ -просте кільце тоді і тільки тоді, коли R^J — Δ -просте жорданове кільце,
- (2) R — Δ -первинне кільце тоді і тільки тоді, коли R^J — Δ -первинне жорданове кільце,
- (3) R — Δ -напівпервинне кільце тоді і тільки тоді, коли R^J — Δ -напівпервинне жорданове кільце.

Нами отримано такі (основні) результати роботи.

Твердження 4.2. *Для вільного від 2-скруту кільця R вірні такі твердження:*

- (1) R — Δ -просте кільце тоді і тільки тоді, коли R^{lJ} — Δ -просте кільце Жордана,
- (2) R — Δ -первинне кільце тоді і тільки тоді, коли R^{lJ} — Δ -первинне кільце Жордана,
- (3) R — Δ -напівпервинне кільце тоді і тільки тоді, коли R^{lJ} — Δ -напівпервинне кільце Жордана.

Візьмемо диференціювання $d \in \Delta$. Оскільки комутаторний ідеал $C(R)$ та $\text{ann } C(R)$ — Δ -ідеали, то правило

$$\bar{d} : R / \text{ann } C(R) \ni r + \text{ann } C(R) \mapsto d(r) + \text{ann } C(R) \in R / \text{ann } C(R)$$

визначає диференціювання \bar{d} фактор-кільця $R / \text{ann } C(R)$. Тоді маємо вкладення

$$\bar{\Delta} = \{\bar{d} \mid d \in \Delta\} \subseteq \text{Der}(R / \text{ann } C(R)).$$

Оскільки $d(Z(R)) \subseteq Z(R)$, то правило

$$\hat{d} : R^L/Z(R) \ni r + Z(R) \mapsto d(r) + Z(R) \in R^L/Z(R)$$

визначає диференціювання \hat{d} фактор-кільця Лі $R^L/Z(R)$. Тоді

$$\hat{\Delta} = \{\hat{d} \mid d \in \Delta\} \subseteq \text{Der}(R^L/Z(R)).$$

З того, що $Z(R)$ — ненульовий ідеал Лі асоціативного кільця R з одиницею, отримуємо, що кільце Лі R^L не є Δ -простим. Наш наступний результат викладено у такій теоремі.

Теорема 4.3. *Нехай R вільне від 2-скруту кільце. Тоді вірні такі твердження:*

- (1) *якщо $R^L/Z(R)$ — $\hat{\Delta}$ -просте кільце Лі, то R некомутативне та $R/\text{ann } C(R)$ — $\overline{\Delta}$ -просте кільце,*
- (2) *якщо R — Δ -просте кільце, то $R^L/Z(R)$ — $\hat{\Delta}$ -просте кільце Лі або R комутативне,*
- (3) *якщо $R^L/Z(R)$ — $\hat{\Delta}$ -напівпервинне кільце Лі, то R некомутативне та фактор-кільце $R/\text{ann } C(R)$ — $\overline{\Delta}$ -напівпервинне кільце,*
- (4) *якщо R — Δ -напівпервинне кільце, то $R^L/Z(R)$ — $\hat{\Delta}$ -напівпервинне кільце Лі або R комутативне,*
- (5) *якщо $R^L/Z(R)$ — $\hat{\Delta}$ -первинне кільце Лі, то R некомутативне та $R/\text{ann } C(R)$ — $\overline{\Delta}$ -первинне кільце,*
- (6) *якщо R — Δ -первинне кільце, то $R^L/Z(R)$ — $\hat{\Delta}$ -первинне кільце Лі або R комутативне.*

1.4. Кільця з нільпотетними диференціюваннями індексів ≤ 2

Нехай m — додатне ціле число. Диференціювання $d \in \text{Der } R$ називається *нільпотентним* (індекса нільпотентності m), якщо

$$d^m = 0 \text{ та } d^{m-1} \neq 0.$$

В 1957 році Е. Познер [96] довів, що для первинного кільця R характеристики $\neq 2$ і його диференціювань $d, \delta \in \text{Der } R$ вірна імплікація

$$d\delta = 0 \Rightarrow d = 0 \text{ або } \delta = 0.$$

Результати цієї роботи інспірували, зокрема, дослідження (в основному, напівпервинних) кілець, що мають нільпотентні диференціювання (див., наприклад, [44], [45], [46], [52] та ін.).

Приклад 1.1. Розглянемо фактор-кільце

$$R = \mathbb{Q}[x]/(x^3) = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}b + \mathbb{Q}b^2,$$

де $b^3 = 0$. Якщо $d \in \text{Der } R$ — таке, що $d(b) = b^2$, то для будь-яких коефіцієнтів $p, q, r \in \mathbb{Q}$ маємо

$$\begin{aligned} d(p + qb + rb^2) &= qd(b) + rd(b^2) = qb^2, \\ d^2(p + qb + rb^2) &= d(qb^2) = qd(b^2) = 0, \end{aligned}$$

тобто $d^2 = 0$.

Приклад 1.2. Нехай

$$R = M_4(\mathbb{R})$$

— кільце матриць степеня 4 над полем дійсних чисел \mathbb{R} ,

$$I = \{(x_{ij}) \in \mathbb{R} \mid x_{ij} = 0 \text{ для всіх } i \neq 1\}$$

— його правий ідеал. Якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

та $d = \partial_A \in \text{IDer } R$, то

$$d^7 = 0 \text{ та } d^6 \neq 0.$$

Окрім того, $d(I) \subseteq I$, $d^4(I) = 0$ та $d^3(I) \neq 0$.

Спершу опишемо властивості кільця, всі диференціювання якого нільпотентні індексів ≤ 2 .

Лема 1.3. Нехай R — кільце, $d \in \text{Der } R$. Якщо $d^2 = 0$, то

$$2d(x)d(y) = 0.$$

для будь-яких елементів $x, y \in R$.

Доведення. Справді, для довільних елементів $x, y \in R$ встановлюємо

$$\begin{aligned} 0 &= d^2(xy) = d(d(x)y + xd(y)) = \\ &= d^2(x)y + d(x)d(y) + d(x)d(y) + xd^2(y) = \\ &= 2d(x)d(y). \end{aligned}$$

□

Лема 1.4. Нехай R — кільце, всі диференціювання якого нільпотентні індексів ≤ 2 , $d, \delta \in \text{Der } R$ та $a \in R$. Тоді справджуються такі властивості:

(i) $d\delta = -\delta d$,

- (ii) якщо $2[R, R] = 0$, то $d(R) \subseteq Z(R)$,
- (iii) $[a, d(a)] = 0$,
- (iv) $d(e) = 0$ для будь-якого ідемпотента $e \in R$ (а тому кожен ідемпотент центральний в R),
- (v) кожен R -підмодуль A із $\text{Der } R$ — ідеал кільця $\text{Li Der } R$,
- (vi) $\delta(Z(R))d(R) = 0$,
- (vii) $3[R, d(R)] = 0$, $[R, d(R)]^2 = 0$ та $3d([R, R]) = 0$,
- (viii) $[d(R), d(R)] = 0$,
- (ix) якщо R — комутативне кільце, то $(ad(a))^2 = 0$.

Доведення. Нехай всюди нижче $x, a \in R$.

(i) Переконаємося, що

$$\begin{aligned} 0 &= (d + \delta)^2(x) = (d + \delta)(d(x) + \delta(x)) = \\ &= d^2(x) + (d\delta)(x) + (\delta d)(x) + \delta^2(x) = (d\delta)(x) + (\delta d)(x), \end{aligned}$$

тобто $d\delta = -\delta d$.

(ii) Із рівностей

$$\begin{aligned} [x, d(a)] &= xd(a) - d(a)x = \partial_x(d(a)) = \\ &= -d(\partial_x(a)) = -d(xa - ax) = \\ &= -d(x)a - xd(a) + d(a)x + ad(x) \end{aligned}$$

випливає, що

$$2[x, d(a)] = 2(xd(a) - d(a)x) = ad(x) - d(x)a. \quad (1.1)$$

Якщо $2[R, R] = 0$, то $d(x) \in Z(R)$.

(iii) Покладаючи в (1.1) $x = a$, отримуємо, що

$$[a, d(a)] = 0.$$

(iv) Оскільки

$$d(e) = d(e^2) = d(e)e + ed(e),$$

то $ed(e)e = 0$. Застосовуючи (iii), робимо висновок, що $d(e) = 0$.

(v) Нехай $\theta \in A$. Позаяк $[\theta, \delta] = 2\theta\delta$, то

$$[\theta, \delta](R) \subseteq 2\theta(\delta(R)) \subseteq 2\theta(R) \subseteq \theta(R),$$

тобто

$$[\theta, \delta] \subseteq R\theta \subseteq A.$$

(vi) Нехай $c \in Z(R)$. Тоді композиція

$$d(c\delta) = -(c\delta)d$$

кососиметрична, а отже, для будь-якого елемента $x \in R$ маємо

$$d(c)\delta(x) + c(d\delta)(x) = -c(\delta d)(x) = c(d\delta)(x).$$

Як наслідок,

$$d(c)\delta(x) = 0.$$

(vii) З огляду на властивість (ii) знаходимо, що

$$\begin{aligned} -d(x)a - xd(a) + d(a)x + ad(x) &= -d(xa - ax) = \\ &= -(d\partial_x)(a) = (\partial_x d)(a) = xd(a) - d(a)x, \end{aligned}$$

а тому

$$2(xd(a) - d(a)x) = ad(x) - d(x)a. \quad (1.2)$$

Подібним чином до (1.1) отримуємо

$$xd(a) - d(a)x = 2(ad(x) - d(x)a). \quad (1.3)$$

Тоді з (1.2) та (1.3) випливає, що

$$3[a, d(x)] = 0. \quad (1.4)$$

Сумуючи (1.2) та (1.3) отримуємо, що

$$3[x, d(a)] = 3[a, d(x)],$$

а звідси $3d([x, a]) = 0$. За лемою 1.3 маємо

$$2[R, d(R)]^2 = 0,$$

звідки на основі (1.4) отримуємо ствердження.

(viii) Справді,

$$\begin{aligned} 0 &= -(d^2\partial_x)(a) = d(\partial_x(d(a))) = \\ &= d(xd(a) - d(a)x) = \\ &= d(x)d(a) + xd^2(a) - d^2(a)x - d(a)d(x) = [d(x), d(a)]. \end{aligned}$$

(ix) Якщо R — комутативне кільце, то $ad \in \text{Der } R$ і залишається застосувати властивість (vi). □

Нами встановлено такі результати.

Твердження 1.26. *Нехай R — кільце вільне від 2-скруту, всі диференціювання якого нільпотентні індексів нільпотентності ≤ 2 . Тоді:*

(i) *всі його нільпотентні елементи містяться в радикалі Джекобсона $J(R)$,*

(ii) *якщо $J(R) = 0$, то R диференційно тривіальне.*

Доведення. (i) Нехай $x \in R$ та $x^2 = 0$. Тоді для будь-якого елемента $a \in R$ маємо

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x^2(a) = \partial_x(xa - ax) = \\ &= x(xa - ax) - (xa - ax)x = \\ &= x^2a - xax - xax + ax^2 = -2xax. \end{aligned} \tag{1.5}$$

З огляду на те, що R вільне від 2-скруту, отримуємо, що $xaxt = 0$ для будь-якого $t \in R$, а тому

$$(xR)^2 = 0.$$

Це означає, що

$$x \in xR \subseteq J(R).$$

(ii) Випливає з огляду на лему 1.3.

□

Твердження 1.27. *Нехай R — напівпервинне кільце. Якщо всі диференціювання (відповідно внутрішні диференціювання) кільця R нільпотентні, то R диференційно тривіальне (відповідно комутативне).*

Доведення. Оскільки будь-яке внутрішнє диференціювання кільця R нільпотентне, то для кожного $x \in R$ знайдеться таке додатне ціле число $n = n(x)$, що

$$\partial_x^n(a) = 0$$

для всіх $a \in R$, тобто

$$[\cdots, \underbrace{[[a, x], x] \cdots, x}_n] = 0$$

За твердженням 1.1 кільце R комутативне. Тоді з огляду на лему 1.4 (ix) маємо

$$a\delta(a) = 0$$

для всіх $a \in R$, що неможливо. Отже, R — диференційно тривіальне кільце. □

Наслідок 1.1. *Нехай R — кільце, всі диференціювання якого нільпотентні індексів нільпотентності ≤ 2 , та $d, \delta \in \text{Der } R$. Тоді справджуються такі властивості:*

(i) *якщо R вільне від 2-скруту, то композиція $d\delta \in \text{Der } R$,*

(ii) *якщо R вільне від 3-скруту, то*

$$d(R) \subseteq Z(R), d([R, R]) = 0$$

та група одиниць $U(R)$ нільпотентна ступеня ≤ 2 .

Доведення. (i) Оскільки

$$d\delta + \delta d = d^2 + d\delta + \delta d + \delta^2 = (d + \delta)^2 = 0 \in \text{Der } R$$

та $d\delta - \delta d = [d, \delta] \in \text{Der } R$, то $2d\delta \in \text{Der } R$, а тому $d\delta$ — диференціювання.

(ii) Випливає з леми 1.4 (vii) та твердження 1.2. □

Наслідок 1.2. *Якщо R — кільце, всі внутрішні диференціювання якого нільпотентні, то*

$$C(R) \subseteq \mathbb{F}(R) \cap J(R).$$

Доведення. Якщо $x \in R$ та P — первинний ідеал в R , то

$$\partial_{\bar{x}}^n = \bar{0}$$

для $\bar{x} = x + P \in R/P$ та деякого додатнього цілого числа n . За твердженням 1.1 фактор-кільце R/P комутативне, а тому $C(R) \subseteq \mathbb{F}(R)$. □

Наслідок 1.3. *Якщо R — регулярне кільце з нільпотентними диференціюваннями (відповідно нільпотентними внутрішніми диференціюваннями), то R диференційно тривіальне (відповідно комутативне).*

Доведення. За наслідком 1.2 маємо

$$C(R) \subseteq J(R)$$

— ніль-ідеал в R . Оскільки радикал Джекобсона не містить нетривіальних ідемпотентів, то $J(R) = 0$. Тоді R — комутативне кільце. Решта випливає з огляду на наслідок 1.1. \square

1.5. Диференціювання як гомоморфізми або антигомоморфізми в диференційно напівпервинних кільцях

Х. Белл та Л. Каппе [26] встановили, що якщо d — диференціювання первинного кільця R , що діє як ендоморфізм або антиендоморфізм на кільці R , то $d = 0$ нульове. М. Єнігуль та Н. Аргач [108], М. Ашраф, Н. Рехман та М. Квадрі [17] дещо розширили цей результат на випадок (σ, τ) -диференціювань в первинному кільці. А. Асма та К. Діпак [18], А. Асма, Н. Рехман та А. Шакір [20] встановили подібний результат для (σ, τ) -диференціювань, які діють як гомоморфізми або антигомоморфізми на ненульовому ідеалі L і U первинного кільця характеристики $\neq 2$. Останнім часом А. Асма та К. Діпак [19], Н. Рехман та М. Раза [98, 99], Б. Дхара [48], Ю. Вонг та Х. Ю [107], а також Г. Скудо [102] розширили відомі раніше результати на випадок узагальнених диференціювань, що діють як ендоморфізм або антиендоморфізм на ідеалі (відповідно ідеалі L) в первинних та напівпервинних кільцях. Нами вивчаються диференційно напівпервинні кільця з диференціюванням, що діє як ендоморфізм або антиендоморфізм на ненульовому правому диференційному ідеалі. Почнемо з такого твердження, що

розширює теорему 3 з [53] на диференційний випадок.

Твердження 1.28. *Нехай R — кільце та $d \in \text{Der } R$. Якщо R — d -напівпервинне кільце та*

$$(d(x))^n = 0$$

для будь-якого $x \in R$, де $n \geq 1$ — фіксоване ціле число, то $d = 0$.

Доведення. Припустимо, що P — первинний ідеал в R , $a \in P$ та $x \in R$. Оскільки

$$0 = (d(ax))^n = (d(a)x)^n \text{ mod } P,$$

то отримаємо

$$(\overline{d(a)x})^n = \bar{0}$$

у фактор кільці $\bar{R} = R/P$. Звідси робимо висновок, що первинне кільце \bar{R} має нільпотентний ідеал

$$\overline{d(a)} \cdot \bar{R}.$$

І як наслідок,

$$d(a) \in P \text{ та } d(P) \subseteq P.$$

Правило

$$\bar{d} : \bar{R} \ni x + P \rightarrow d(x) + P \in \bar{R}$$

визначає диференціювання \bar{d} фактор-кільця \bar{R} таке, що

$$(\bar{d}(\bar{x}))^n = \bar{0}.$$

Тоді за твердженням 1.3 робимо висновок, що $\bar{d} = \bar{0}$. Отже, $d(R) \subseteq P$. Звідси випливає, що $d(R) \subseteq \mathbb{P}(R)$. Оскільки

$$d(\mathbb{P}(R)) \subseteq \mathbb{P}(R)$$

та R — d -напівпервинне кільце, отримуємо, що $d = 0$. \square

Наслідок 1.4. Нехай R — Δ -напівпервинне кільце, де $\Delta \subseteq \text{Der } R$. Якщо будь-яке внутрішнє диференціювання кільця R є його кільцевим ендоморфізмом, то R комутативне.

Доведення. Візьмемо $a, x, y \in R$. Оскільки $\partial_b \in \text{End } R$ для будь-яких

$$b \in \{\delta_1^{m_1} \dots \delta_k^{m_k}(a) \mid \delta_i \in \Delta, k \geq 1$$

$$\text{та } m_i \geq 0 \text{ цілі числа } (i = 1, \dots, k)\},$$

то $a \in C_R(R^2)$ за твердженням 1.4, де $R^2 = \{ab \mid a, b \in R\}$. Тоді

$$[x, b][y, b] = xbx b - xb^2x - bxyb - bxb y =$$

$$0 = [xy, b] = xyb - bxy$$

та

$$[x, b]y[x, b] = [x, b](yxb - ybx) = [x, b]([yx, b] - [y, b]x) = 0.$$

З огляду на Δ -первинність кільця R робимо висновок, що $[x, b] = 0$ для будь-якого $x \in R$. Отже, $a \in Z(R)$. \square

Теорема 1.1. Нехай R — кільце та $d \in \text{Der } R$. Якщо R d -напівпервинне та d — гомоморфізм (відповідно антигомоморфізм) кільця R , тоді $d = 0$.

Доведення. 1) Припустимо, що d — ендоморфізм кільця R . Згідно твердження 1.6 маємо, що

$$d(x)x(y - d(y)) = 0 \tag{1.6}$$

для будь-яких $x, y \in R$. Замінімо y на yt для будь-якого $t \in R$ та отримаємо, що

$$d(x)x(y - d(y))t - d(x)xyd(t) = 0.$$

Звідси з огляду на (1.6) випливає, що

$$d(x)xRd(R) = 0. \quad (1.7)$$

З тих же міркувань, підставляючи y^2 замість y в (1.6), отримуємо

$$xd(y)y + xyd(y) + d(x)y^2 = d(x)d(y)y + d(x)yd(y).$$

Перепишемо (1.6) у вигляді

$$(d(x) - x)yd(y) = 0. \quad (1.8)$$

Замінімо x на rx в (1.8), де $r \in R$, маємо наступне

$$(d(r)x + rd(x) - rx)yd(y) = 0$$

або, що еквівалентно,

$$d(r)xyd(y) = 0. \quad (1.9)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} &= d(x)^5 = (d(x^2))^2d(x) = (d(x)x + xd(x))^2d(x) = \\ &= (xd(x)d(x)x)d(x) = 0, \end{aligned}$$

то, з огляду на (1.7) та (1.9), за твердженням 1.28 робимо висновок, що $d = 0$.

2) Тепер припустимо, що d — антигомоморфізм кільця R .

З тих же міркувань, що й у доведенні твердження 1.5,

$$[r, d(x)]R[r, d(x)] = 0$$

для будь-яких $x, r \in R$. Тоді

$$I = \sum_{x,r \in R} R[r, d(x)]R$$

— ніль-ідеал. Якщо $a, b \in R$, то

$$\begin{aligned} d(a[r, d(x)]b) &= \\ &= d(a)[r, d(x)]b + a[r, d(x)]d(b) + \\ &+ a[d(r), d(x)]b + a[r, d^2(x)]b \in I. \end{aligned}$$

Отже, I — d -ідеал. Тоді $I = 0$ та $d(R) \subseteq Z(R)$. Таким чином, $d \in \text{End } R$. Решта випливає із частини 1). □

Теорема 1.2. *Нехай R — кільце, $d \in \text{Der } R$ та U — ненульовий правий d -ідеал в R . Тоді виконується наступне:*

- (1) *якщо R — d -напівпервинне кільце та d діє як гомоморфізм на U , то $d = 0$,*
- (2) *якщо R — d -первинне кільце та d діє як антигомоморфізм на U , то $d = 0$.*

Доведення. 1) Припустимо, що d діє як гомоморфізм на U . Згідно твердження 1.6 отримуємо умову (1.6) для будь-яких $x, y \in U$. Замінімо x на vx в (1.6), де $v \in U$; одержуємо

$$v(xd(y) + d(x)y) + d(v)xy = d(v)xd(y) + vd(x)d(y).$$

Оскільки $d(xy) = d(x)d(y)$, то звідси випливає, що

$$vd(x)d(y) + d(v)xy = d(v)xd(y) + vd(x)d(y),$$

а тоді

$$d(v)x(y - d(y)) = 0. \tag{1.10}$$

Підставляючи yr замість y в (1.10), маємо

$$d(v)xyr - d(v)xd(y)r - d(v)xyd(r) = 0$$

або, що еквівалентно,

$$d(v)xyd(r) = 0. \quad (1.11)$$

Замінюючи r на rs в (1.11), де $s \in R$, одержуємо

$$d(v)xyRd(R) = 0$$

і, таким чином, $(d(v)xyR)^2 = 0$. А це означає, що

$$I = \sum_{x,v \in U} d(v)xU$$

— ніль-ідеал. Оскільки I — d -ідеал, то отримуємо, що $I = 0$. Тоді $d(x)xy = 0$ і, зокрема, $d(x)xd(y) = 0$. Так, як і в доведенні твердження 1.8 (див. рівності (10) та (11) в праці [26]), одержуємо

$$x^2d(y) = 0.$$

Замінюючи y на yt для будь-якого $t \in R$, маємо

$$0 = x^2d(yt) = x^2d(y)t + x^2yd(t) = x^2yd(t).$$

Отже,

$$x^2yRd^k(R) = 0$$

для будь-якого цілого $k \geq 0$. Тоді $x^2y = 0$. І, як наслідок,

$$x^3 = 0$$

для будь-якого $x \in U$. Згідно леми 2.1 отримуємо суперечність. Отже, $d = 0$.

2) Тепер припустимо, що d діє на U як антигомоморфізм. З тих же міркувань, що й у доведенні твердження 1.8, можемо показати, що

$$xR[r, d(y)] = 0$$

для будь-яких $x, y \in U$ та $r \in R$. Тоді

$$xRd^k([r, d(y)]) = 0$$

для будь-якого цілого $k \geq 0$. З того, що U ненульовий, отримуємо, що $[r, d(y)] = 0$. Це означає, що $d(U) \subseteq Z(R)$ та d діє на U як гомоморфізм. Решта доведення випливає з частини 1).

□

Висновки до розділу 1

В підрозділі 1.1 та 1.2 подано основні означення та факти, що використовуються у наступних розділах. Підрозділ 1.3 містить огляд основних результатів дисертації.

В підрозділі 1.4 досліджено деякі властивості кілець, всі диференціювання яких нільпотентні індексів ≤ 2 . Встановлено, що в напівпервинному кільці всі диференціювання (відповідно внутрішні диференціювання) нільпотентні тоді і тільки тоді, коли воно диференційно тривіальне (відповідно комутативне). Радикал Джекобсона кільця з нільпотентними диференціюваннями індексів ≤ 2 містить всі нільпотентні елементи цього кільця.

В підрозділі 1.5 досліджено властивості диференціювань в диференційно напівпервинних кільцях, що діють як гомоморфізми чи антигомоморфізми. Зокрема, доведено такі результати:

- розширено теорему 3 із [53] на диференційний випадок (твердження 1.28);
- якщо d — гомоморфізм (відповідно антигомоморфізм) d -напівпервинного кільця R , тоді $d = 0$ (теорема 1.1);

- якщо U — ненульовий правий d -ідеал в R , то:
 - (1) якщо R — d -напівпервинне кільце та d діє як гомоморфізм на U , то $d = 0$,
 - (2) якщо R — d -первинне кільце та d діє як антигомоморфізм на U , то $d = 0$ (теорема 1.2).

Результати розділу опубліковано в [1, 4, 8, 12].

РОЗДІЛ 2

ЖОРСТКІ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

В алгебрі досліджувались різні аспекти жорсткості. Так, П.Вольпенка, Ф.Пултр та З.Хердлін [105] встановили існування жорстких бінарних відношень на будь-якій множині. До робіт, в яких досліджувались певні види жорсткості, можна віднести публікації Г. Бергмана та І. Ізаакса [34], В. Длаба та Б. Неймана [49], Л. Мексона [86], К. Макліна [88], О.Д. Артемовича [15] та інших.

Я. Кремпа ввів поняття σ -жорсткого кільця [78], а саме: R — σ -жорстке кільце для деякого кільцевого ендоморфізма $\sigma \in \text{End } R$, якщо $a\sigma(a) \neq 0$ для будь-якого ненульового елемента $a \in R$. Опираючись на це означення та з огляду на твердження 2.1 (див. нижче), введемо таке

Означення 2.1. *Кільце R — d -жорстке кільце (або диференціювання d є жорстким), де $d \in \text{Der } R$, якщо для будь-якого $a \in R$ виконується $d(a) = 0$ або $ad(a) \neq 0$.*

2.1. Властивості жорстких диференціювань

Зрозуміло, що нульове диференціювання 0 кільця R жорстке. Також кожне диференціювання області цілісності жорстке. Для доведення наступного твердження встановимо декілька необхідних лем.

Лема 2.1. *Нехай R — кільце. Тоді справджуються наступні властивості:*

- (1) якщо $a\partial_x(a) = 0$ та $x\partial_a(x) = 0$ для деяких елементів $a, x \in R$, то $\partial_x(a)^2 = 0$,
- (2) якщо $a\partial_x(a) = 0$ для будь-яких $a, x \in R$, то $C(R) \subseteq N(R)$,
- (3) $d(C(R)) \subseteq C(R)$ для кожного $d \in \text{Der } R$.

Доведення. (1) Із рівностей

$$0 = a\partial_x(a) = a(xa - ax) \quad 0 = x\partial_a(x) = x(ax - xa)$$

випливає, що $axa = a^2x$ та $xax = x^2a$. Звідси отримуємо, що

$$\partial_x(a)^2 = (xa - ax)(xa - ax) = xa xa - xa^2x - ax^2a + axax = 0.$$

(2) Приймаючи до уваги доведене в (1), бачимо, що

$$\partial_x(a)^2 = 0,$$

а отже, $C(R) \subseteq N(R)$.

(3) Оскільки

$$d(r[a, x]t) = d(r)[a, x]t + r[d(a), x]t + r[a, d(x)]t + r[a, x]d(t)$$

для будь-яких $a, x, r, t \in R$, то отримуємо, що $d(C(R)) \subseteq C(R)$. □

Лема 2.2. Нехай d — таке ненульове диференціювання кільця R , що $ad(a) = 0$ для будь-якого елемента $a \in R$. Тоді:

- (1) R — некомутативне кільце,
- (2) $d(U(R)) = 0$ (зокрема, $d(J(R)) = 0$).
- (3) якщо I — ідеал комутативного кільця R , то $d(R) \subseteq I$.

Доведення. (1) Справді, якщо R комутативне, то

$$0 = (a + b)d(a + b) = ad(b) + bd(a) = d(ab)$$

для будь-яких $a, b \in R$, а тому $d(R^2) = 0$. Проте звідси випливає, що $d = 0$. Отримали суперечність.

(2) Нехай $u \in U(R)$. Тоді $ud(u) = 0$ та $u \in \text{Ker } d$. Оскільки

$$1 + J(R) \subseteq U(R),$$

то бачимо, що $d(J(R)) = 0$.

(3) Нехай $a, b \in R$. Так як $ad(a) \in I$ для будь-якого елемента $a \in R$ та

$$d(ab) = (a + b)d(a + b) - ad(a) - bd(b),$$

то отримуємо, що $d(R) \subseteq I$. □

Ми довели таке

Твердження 2.1. *Нехай R — кільце. Тоді виконуються наступні властивості:*

- (1) *якщо d — ненульове диференціювання комутативного кільця R , то $ad(a) \neq 0$ для деякого $a \in R$,*
- (2) *існує елемент $a \in R$ та ненульове диференціювання $d \in \text{Der } R$ такі, що $ad(a) \neq 0$.*

Доведення. (1) Випливає із леми 2.2(1).

(2) Доведемо від супротивного. Припустимо, що $ad(a) = 0$ для будь-яких $a \in R$ та $d \in \text{Der } R$. Згідно леми 4.2(2) та леми 2.2(2) маємо $C(R) \subseteq Z(R)$. Нехай \bar{R} означає $R/C(R)$ та для $a \in R$ символом \bar{a} позначимо суміжний клас $a + C(R)$. Тоді правило

$$D(\bar{a}) = d(a) + C(R)$$

визначає таке диференціювання D фактор-кільця \bar{R} , що

$$\bar{a}D(\bar{a}) = \bar{0}.$$

Згідно (1) $D = \bar{0}$, а тому $d(a) \in Z(R)$. Отже,

$$0 = (a + b)d(a + b) = d(ab),$$

і, як наслідок, $d(R^2) = 0$. Таким чином, отримуємо бажане, а саме $d = 0$. \square

І. Херстейн [64] довів, що для внутрішнього диференціювання $d \in \text{IDeg } R$ первинного кільця R із умови $d(x)^n = 0$ для всіх елементів $x \in R$ та фіксованого додатнього цілого числа n випливає, що $d = 0$ нульове. Пізніше І. Херстейн та А. Джамбруно [53] поширили цей результат на напівпервинні кільця, а Л. Чаріні та А. Джамбруно [41] досліджували подібну проблему у випадку, коли $x \in U$, де U — ідеал Лі первинного кільця R , яку пізніше дещо узагальнив Ч. Ланскі [80]. М. Брешар [37] розширив результат із [53], встановивши для напівпервинного кільця R без $(n - 1)!$ -скруту із таким диференціюванням d , що умова $ad(x)^n = 0$ для всіх $x \in R$ та фіксованого додатнього цілого числа n імплікує, що $ad(R) = 0$. Т.К. Лі та Д.С. Лін [82] зняли умову про відсутність $(n - 1)!$ -скруту.

За твердженням 2.1 та твердженнями 1.9 і 1.3 отримуємо такий

Наслідок 2.1. *Нехай R — напівпервинне кільце з диференціюванням d та $a \in R$. Якщо $ad(R)^n = 0$, де n — фіксоване ціле число, то $d = 0$.*

Цей наслідок розширює деякі результати з [64] та [53].

Тепер дослідимо деякі властивості жорстких диференціювань.

Лема 2.3. *Нехай R — редуковане кільце, $a \in R$ та $d \in \text{Der } R$. Тоді:*

(1) $ad(a) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $d(a)a = 0$,

(2) d — жорстке диференціювання.

Доведення. (1) Очевидно.

(2) Від супротивного. Припустимо, що існує таке $a \in R$, що $d(a) \neq 0$ та $ad(a) = 0$. Тоді за властивістю (1) отримуємо, що $d(a)a = 0$. Більше того,

$$0 = d(ad(a)) = d(a)d(a) + ad^2(a).$$

А звідси, домножуючи зліва на $d(a)$, одержуємо, що

$$0 = (d(a))^3 + d(a)ad^2(a) = (d(a))^3.$$

Таким чином, $d(a) = 0$, а це веде до суперечності. \square

Лема 2.4. *Якщо усі диференціювання кільця R є жорсткими і експонента $\text{exp } F_2(R)$ скінченна, то в фактор-кільці $R/F_2(R)$ усі диференціювання також жорсткі.*

Доведення. Доведемо від супротивного. Якщо

$$\delta : R/F_2(R) \ni r + F_2(R) \mapsto t_r + F_2(R) \in R/F_2(R) \quad (2.1)$$

— таке диференціювання, що

$$t_u \notin F_2(R) \text{ та } ut_u \in F_2(R)$$

для деякого $u \in R$, то правило

$$d : R \ni r \mapsto 2^s t_r \in R,$$

де експонента $\exp F_2(R) = 2^s$ та t_r — такі як і в (3.1), є диференціюванням, що не є жорстким. \square

Лема 2.5. *Нехай R — вільне від 2-скруту кільце та $d \in \text{Der } R$. Якщо R — d -жорстке та $\partial_{d(a)}$ -жорстке кільце для будь-якого $a \in N(R)$, то $d(N(R)) = 0$.*

Доведення. Доведемо за індукцією за індексом нільпотентності n ніль-елементів кільця R . Нехай $a \in N(R)$ та $a^2 = 0$. Домножуючи зліва на a рівність

$$0 = d(a^2) = ad(a) + d(a)a,$$

отримуємо, що $ad(a)a = 0$. Оскільки $\partial_{d(a)}$ жорстке та

$$a\partial_{d(a)}(a) = ad(a)a - a^2d(a) = 0,$$

робимо висновок, що $\partial_{d(a)}(a) = 0$, тобто $ad(a) = d(a)a$. Отже,

$$0 = d(a^2) = 2ad(a).$$

З огляду на жорсткість d та умову $F_2(R) = 0$ маємо $d(a) = 0$.

Тепер припустимо, що $a \in N(R)$ та $a^3 = 0$. Тоді $(a^2)^2 = 0$ та, застосовуючи отримане вище, $d(a^2) = 0$. Оскільки

$$0 = d(a^3) = d(a)a^2 + ad(a^2) = d(a)a^2 \text{ та}$$

$$0 = d(a^3) = d(a^2)a + a^2d(a) = a^2d(a),$$

то застосовуючи ті ж міркування, що й у випадку $n = 2$, бачимо, що твердження виконується.

Припустимо, що твердження виконується для усіх додатних цілих чисел $k < n$, тобто якщо $b^k = 0$ (де $b \in N(R)$), то $d(b) = 0$. Візьмемо $a \in N(R)$ та $a^n = 0$. Тоді існують додатні

цілі числа k_1, k_2 такі, що $k_1, k_2 < n$, але $2k_1 > n$ та $3k_2 > n$. Крім того,

$$(a^2)^{k_1} = 0 \text{ та } (a^3)^{k_2} = 0.$$

Згідно припущення, маємо $d(a^2) = d(a^3) = 0$. Таким чином, бажаний результат випливає із застосування тих же міркувань, що і вище.

□

Наступним встановленим нами результатом є таке

Твердження 2.2. *Нехай R — вільне від 2-скруту напівпервинне кільце. Тоді усі диференціювання з R жорсткі в тому і тільки тому випадку, коли R редуковане (тобто без ненульових нільпотентних елементів).*

Доведення. (\Leftarrow) Випливає з леми 2.3.

(\Rightarrow) Згідно леми 2.5 маємо $N(R) \subseteq Z(R)$, а отже,

$$N(R) = 0.$$

□

Наслідок 2.2. *Якщо диференціювання d вільного від 2-скруту комутативного кільця R жорстке, то $d(N(R)) = 0$ та $N(R)d(R) = 0$.*

Доведення. Справді, якщо $a \in R$ та $b \in N(R)$, то $ab \in N(R)$, а тому за лемою 2.5

$$0 = d(ab) = d(a)b.$$

□

Зауваження 2.1. *Умова $F_2(R) = 0$ має важливе значення у наслідку 2.2.*

Дійсно, фактор-кільце $R = \mathbb{Z}_2[X]/(X^2 + 1)$ кільця поліномів $\mathbb{Z}_2[X]$ за ідеалом $(X^2 + 1)$ містить елементи $0, 1, x, x + 1$, де

$$x(x + 1) = x + 1.$$

Відображення $d : R \rightarrow R$ таке, що $d(0) = d(1) = 0$ та $d(x) = d(x + 1) = 1$, є диференціюванням кільця R . Але тоді R — d -жорстке кільце, в якому $(x + 1)^2 = 0$ та $d(x + 1) \neq 0$.

Наслідок 2.3. *Якщо d — жорстке диференціювання кільця R , то $d(\text{ann}_l d(R)) = 0$.*

Доведення. Оскільки

$$\text{ann}_l d(R) \cdot d(\text{ann}_l d(R)) = 0,$$

то отримуємо, що $d(\text{ann}_l d(R)) = 0$. □

2.2. Константи в локальних кільцях

Д. Андерсон та П. Лівінгстон [13] (див. також С. Мюлей [91]) продемонстрували, що в скінченному комутативному кільці R (що не є полем) будь-який автоморфізм f такий, що $f(x) = x$ для усіх дільників нуля $x \in R$, є одиничним автоморфізмом. Оскільки кожне комутативне скінченне кільце — скінченна кільцева пряма сума локальних кілець, то очевидним є факт, що доведення потребує тільки той випадок, коли кільце локальне. З огляду на це, П. Шарма [101] довів, що якщо R — скінченне комутативне локальне кільце, що не є полем, тоді для кожного $f \in \text{Aut } R$, де $f(x) = x$ для усіх $x \in J(R)$, $f = \text{id}_R$

тоді і тільки тоді, коли поле лишків $R/J(R)$ диференційно тривіальне. Ми розширили цей результат (див. твердження 2.1).

Для його доведення потребуємо низку таких допоміжних тверджень.

Лема 2.6. *Нехай R — кільце з ідеалом I та $d \in \text{Der } R$. Якщо $d(I) = 0$, то $d(R) \subseteq \text{ann } I$.*

Доведення. Справді, для кожного $r \in R$, $j \in I$ зауважуємо, що

$$0 = d(jr) = jd(r) \text{ та } 0 = d(rj) = d(r)j.$$

□

Наслідок 2.4. *Нехай R — кільце з ідеалом I , $d \in \text{Der } R$, $f \in \text{Aut } R$ та $\text{ann } I \subseteq I$. Тоді вірні такі властивості:*

(i) *якщо $d(I) = 0$, то $d^2(R) = 0$ та $(d(R))^2 = 0$,*

(ii) *якщо $f(x) = x$ для кожного $x \in I$, то $f - \text{id}_R \in \text{Der } R$.*

Доведення. (i) Згідно леми 2.6 отримуємо, що $d(R) \subseteq \text{ann } I$, а отже,

$$d^2(R) \subseteq d(\text{ann } I) \subseteq d(I) = 0$$

та

$$(d(R))^2 \subseteq (\text{ann } I)I = 0.$$

(ii) Нехай $x \in I$ та $a, b, r \in R$. Тоді $xr, rx \in I$,

$$xf(r) = f(x)f(r) = f(xr) = xr,$$

$$f(r)x = f(r)f(x) = f(rx) = rx,$$

а отже,

$$x(f(r) - r) = 0 = (f(r) - r)x.$$

Таким чином, $f(r) - r \in \text{ann } I$. З огляду на це, бачимо, що

$$\begin{aligned} (f - \text{id}_R)(a + b) &= f(a + b) - \text{id}_R(a + b) = \\ &= (f(a) - \text{id}_R(a)) + (f(b) - \text{id}_R(b)) = \\ &= (f - \text{id}_R)(a) + (f - \text{id}_R)(b) \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} (f - \text{id}_R)(a)b + a(f - \text{id}_R)(b) &= f(a)b - ab + af(b) - ab = \\ &= f(a)f(b) + (f(a) - a)(b - f(b)) - ab = f(ab) - ab = \\ &= (f - \text{id}_R)(ab). \end{aligned}$$

А це означає, що $f - \text{id}_R \in \text{Der } R$. □

Нагадаємо, що кільце R *локальне*, якщо воно містить такий двобічний ідеал I , що фактор-кільце R/I — тіло.

Наслідок 2.5. *Нехай R — локальне кільце, що не є полем, I — його ідеал та $0 \neq d \in \text{Der } R$. Якщо лівий анулятор*

$$\text{ann}_l I = \{a \in R \mid aI = 0\}$$

(відповідно правий анулятор

$$\text{ann}_r I = \{a \in R \mid Ia = 0\})$$

нульовий, то $d(I) \neq 0$.

Доведення. Якщо $d(I) = 0$, тоді за лемою 2.6

$$d(R) \subseteq \text{ann } I \subseteq \text{ann}_l I = 0,$$

а це означає, що $d = 0$, суперечність. □

Лема 2.7. *Нехай R — кільце, I — такий його ідеал, що $\text{ann } I \subseteq I$. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

- (i) *для кожного $f \in \text{Aut } R$ такого, що $f(x) = x$ для всіх $x \in I$, випливає, що $f = \text{id}_R$,*

(ii) кожне диференціювання $d \in \text{Der } R$ нульове, тобто образ $d(I) = 0$.

Доведення. (i) \Rightarrow (ii) Вважаємо, що $d \in \text{Der } R$ та $d(I) = 0$. Тоді для всіх $a, b \in R$ знаходимо, що

$$\begin{aligned} (d + \text{id}_R)(a + b) &= d(a + b) + \text{id}_R(a + b) = \\ &= (d(a) + \text{id}_R(a)) + (d(b) + \text{id}_R(b)) = \\ &= (d + \text{id}_R)(a) + (d + \text{id}_R)(b) \end{aligned}$$

та з огляду на наслідок 2.4

$$\begin{aligned} (d + \text{id}_R)(a) \cdot (d + \text{id}_R)(b) &= (d(a) + a)(d(b) + b) = \\ &= d(a)d(b) + d(a)b + ad(b) + ab = \\ &= d(a)b + ad(b) + ab = (d + \text{id}_R)(ab) \text{ та } (d + \text{id}_R)(1) = 1. \end{aligned}$$

Так, $d + \text{id}_R$ — кільце ендоморфізмів кільця R . Більше того,

$$(d + \text{id}_R)(\text{id}_R - d) = \text{id}_R = (\text{id}_R - d)(d + \text{id}_R),$$

а отже, $d + \text{id}_R \in \text{Aut } R$. Оскільки

$$(d + \text{id}_R)(x) = d(x) + x = x = \text{id}_R(x)$$

для кожного $x \in I$, то робимо висновок, що $d = 0$.

(ii) \Rightarrow (i) Нехай $f \in \text{Aut } R$ та $f(x) = x$ для всіх $x \in I$. Тоді з огляду на наслідок 2.4 маємо, що $f - \text{id}_R \in \text{Der } R$. Позаяк $(f - \text{id}_R)(I) = 0$, то робимо висновок, що $f = \text{id}_R$. \square

Лема 2.8. *Нехай R — локальне кільце, $d \in \text{Der } R$. Тоді виконуються наступні властивості:*

(1) якщо $d(J(R)) = 0$, то $d = 0_R$ або $\text{ann } J(R) \neq 0$,

(2) якщо $\text{ann } J(R) = 0$, то $d = 0_R$ або $d(J(R)) \neq 0$.

Лема 2.9. *Нехай R — кільце і I — такий ненульовий ідеал, що для диференціювання $d \in \text{Der } R$ із умови $d(I) = 0$, випливає, що $d = 0$. Тоді*

$$\text{ann } I \subseteq C_R(I) \subseteq Z(R),$$

де централізатор

$$C_R(I) = \{z \in R \mid zj = jz \text{ для усіх } j \in I\}.$$

Доведення. Очевидно, що $\text{ann } I \subseteq C_R(I)$. Якщо $a \in C_R(I)$, то $\partial_a(I) = 0$, і тому $\partial_a(R) = 0$. Отже, $a \in Z(R)$. □

Наслідок 2.6. *Нехай R — кільце і I — ненульовий ідеал, для якого виконується умова $\text{ann } I \subseteq I$. Якщо $I \subseteq Z(R)$, то R/I комутативне.*

Доведення. Для кожного елемента $x \in R$ маємо, що $\partial_x(I) = 0$, і тоді за лемою 2.6 робимо висновок, що

$$\partial_x(R) \subseteq \text{ann } I \subseteq I.$$

Це показує, що R/I комутативне. □

Нагадаємо, що двобічний ідеал I називається T -нільпотентним зліва, якщо для будь-якої послідовності елементів a_1, a_2, \dots із I знайдеться таке додатне ціле число n , що

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 = 0.$$

Теорема 2.1. *Нехай R — локальне кільце з ненульовим T -нільпотентним зліва радикалом Джекобсона $J(R)$. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

- (1) *для кожного диференціювання $d \in \text{Der } R$ такого, що $d(J(R)) = 0$, випливає, що $d = 0$,*

- (2) фактор-кільце $R/J(R)$ — диференційно тривіальне поле,
 (3) кожен автоморфізм $f \in \text{Aut } R$ такий, що $f(x) = x$ для
 будь-якого $x \in J(R)$, тривіальний, тобто $f = \text{id}_R$.

Доведення. (1) \Rightarrow (2) Оскільки R локальне, то $\text{ann } J(R) \subseteq J(R)$. Вважаємо, що $\theta : R/J(R) \rightarrow R/J(R)$ — ненульове диференціювання та для кожного елемента $t \in R$ існує такий елемент $w_t \in R$, що

$$\theta(t + J(R)) = w_t + J(R),$$

де $w_{t_0} \notin J(R)$ для деякого елемента $t_0 \in R$. Кожен T -нільпотентний зліва ідеал $J(R)$ має ненульовий анулятор. Якщо $0 \neq u \in \text{ann } J(R)$, то правило

$$\mu_u(t) = uw_t \quad (t \in R)$$

визначає ненульове диференціювання μ_u в R для деякого $u \in R$. Справді, якщо $uw_t = 0$ ($t \in R$) для всіх $u \in \text{ann } J(R)$, то $w_{t_0} \in J(R)$, отримали суперечність. Таким чином, μ_u ненульове. Оскільки $\mu_u(J(R)) = 0$, то робимо висновок, що $\mu_u(R) = 0$, а це веде до суперечності. Отже, фактор-кільце $R/J(R)$ диференційно тривіальне.

(2) \Rightarrow (1) Припустимо, що $R/J(R)$ диференційно тривіальне кільце. Тоді кожне внутрішнє диференціювання фактор-кільця \bar{R} нульове, а тому \bar{R} комутативне. І як наслідок,

$$R/J(R) = F$$

— диференційно тривіальне поле. Припустимо, що d — таке ненульове диференціювання кільця R , що $d(J(R)) = 0$. Тоді правило

$$D : \bar{R} \ni \bar{r} \mapsto d(r) \in A \cap J(R) \quad (r \in R)$$

визначає ненульове відображення D . Оскільки $A \cap J(R)$ — лівий F -лінійний простір, то існує таке поле $F = F_{i_0}$ ($1 \leq i_0 \leq n$), що відображення

$$\theta : F \ni \bar{a} \mapsto d(a) \in A \cap J(R)$$

ненульове. Якщо $\text{char } F = p$ — просте число, тоді за твердженням 1.11 маємо, що

$$\bar{a} = \bar{b}^p$$

для деякого $\bar{b} \in F$. Отже,

$$\theta(\bar{a}) = \theta(\bar{b}^p) = p\bar{b}^{p-1}d(b) = 0.$$

Припустимо, що $\text{char } F = 0$. Згідно твердження 1.10 поле F алгебричне над полем раціональних чисел \mathbb{Q} , і тому для кожного $\bar{a} \in F$ існує його мінімальний поліном

$$m_{\bar{a}} = X^n + c_1X^{n-1} + \dots + c_{n-1}X + c_n \in \mathbb{Q}[X].$$

Тоді

$$0 = \theta(m_{\bar{a}}(\bar{a})) = (n\bar{a}^{n-1} + (n-1)c_1\bar{a}^{n-2} + \dots + c_{n-1}\bar{1})d(a)$$

і, як наслідок, $d(a) = 0$. Отже, θ нульове і ми отримали суперечність.

Приймаючи до уваги лему 2.7, отримуємо, що умови (1) та (3) еквівалентні.

□

2.3. Артїнові d -жорсткі кільця

Нагадаємо, що кільце R називається *артїновим зліва*, якщо для будь-якого спадного ланцюга

$$R = R_0 \geq R_1 \geq \dots R_m \geq$$

його лівих ідеалів $R = R_0, R_1, \dots, R_m, \dots$ знайдеться такий індекс n , що

$$R_n = R_{n+1} = \dots$$

(тобто будь-який спадний ланцюг лівих ідеалів кільця R за скінченне число кроків обривається).

Нижче вивчаємо структуру комутативного артінового кільця з жорсткими диференціюваннями.

Лема 2.10. *Нехай R — локальне ліве артінове кільце. Якщо в R усі диференціювання жорсткі, то в фактор-кільці $R/\text{ann } J(R)$ також.*

Доведення. Від супротивного припустимо, що

$$\mu : R/\text{ann } J(R) \ni r + \text{ann } J(R) \mapsto v_r + \text{ann } J(R) \in R/\text{ann } J(R) \quad (2.2)$$

— таке диференціювання, що $v_u \notin \text{ann } J(R)$ та $uv_u \in \text{ann } J(R)$ для деякого елемента $0 \neq u \in R$. Тоді правило

$$\delta : R \ni r \mapsto j_0 v_r \quad (r \in R),$$

де $j_0 v_u \neq 0$ та v_r як і у (2.2), визначає диференціювання δ в R , що не є жорстким. \square

Якщо характеристика p^n ($n \geq 2$) кільця R — степінь простого числа p , то розглянемо

$$\Omega_k = \Omega_k(R) = \{x \in R \mid p^k x = 0\} \quad (1 \leq k \leq n).$$

Очевидно, що Ω_k — ідеал кільця R .

Зауваження 2.2. *Нехай R — локальне кільце та $d \in \text{Der } R$. Якщо $J(R) = 0$ або $d(J(R)) = 0$, то диференціювання d жорстке.*

Як відомо, $R = J(R) \cup U(R)$. Якщо $u \in U(R)$ (відповідно $j \in J(R)$), то $d(u) = 0$ або $ud(u) \neq 0$ (відповідно $d(j) = 0$). Отже, R — d -жорстке кільце.

Лема 2.11. *Нехай R — локальне ліве артінове кільце. Якщо в R усі диференціювання жорсткі та $J(R)^2 = 0$, тоді виконуються одна із наступних властивостей:*

- (1) R — комутативне кільце,
- (2) $d(J(R)) = 0$ та $d(R)J(R) = 0$ для будь-якого $d \in \text{Der } R$,
- (3) $C(R) = R$ та $J(R) \cap Z(R) = 0$.

Якщо R вільне від 2-скруту, то R — тіло або $C(R) \neq R$.

Доведення. Припустимо, що кільце R некомутативне (тобто комутаторний ідеал $C(R) \neq 0$) та $d \in \text{Der } R$. Тоді

$$d(C(R)) \subseteq C(R).$$

Якщо $0 \neq c \in J(R) \cap Z(R)$, то $cd \in \text{Der } R$ та

$$J(R) \cdot cd(J(R)) = 0,$$

а отже, $cd(J(R)) = 0$. Звідси випливає, що $d(J(R)) \subseteq J(R)$. Оскільки $J(R)d(J(R)) = 0$, то робимо висновок, що $d(J(R)) = 0$. Тоді

$$0 = d(RJ(R)) = d(R)J(R).$$

Вважаємо, що $J(R) \cap Z(R) = 0$. Якщо $C(R) \subseteq J(R)$, то

$$C(R)d(C(R)) = 0,$$

і, як наслідок,

$$C(R) \subseteq Z(R) \cap J(R),$$

а це суперечить припущенню. Отже, $C(R) \not\subseteq J(R)$ та

$$C(R) = R.$$

□

В наступній теоремі охарактеризовано комутативні артінові кільця з жорсткими диференціюваннями.

Теорема 2.2. *Нехай R — комутативне артінове кільце. Тоді виконується одне із тверджень:*

- (1) R має нежорстке диференціювання,
- (2) $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$ — кільцева пряма сума кілець R_1, \dots, R_n , кожне з яких є полем або диференційно тривіальним v -кільцем.

Доведення. Згідно леми 2.10 вважаємо, що $J(R)^2 = 0$. Таким чином, маємо два випадки.

1) Нехай характеристика $\text{char}(R) = \text{char}(R/J(R))$. За твердженням 1.12 кільце

$$R = J(R) + T$$

— пряма сума груп, де T — підполе в R . Тому для кожного елемента $r \in R$ існують такі єдині елементи $j \in J(R)$ та $t \in T$, що

$$r = j + t. \tag{2.3}$$

Правило

$$\delta(r) = j \quad (r \in R),$$

де j — таке, як і у (2.3), визначає диференціювання δ кільця R , що не є жорстким. Отже, $J(R) = 0$.

2) Нехай тепер $\text{char}(R) = p^2$. За твердженням 1.13 кільце

$$R = J(R) + C$$

— сума груп, де C — таке кільце коефіцієнтів, що $C \cong W/p^2W$ для деякого v -кільця W та $J(R) \cap C = pC$. Очевидно, що $\Omega_1 \leq J(R)$. Якщо

$$\mu : R/\Omega_1 \ni r + \Omega_1 \mapsto a_r + \Omega_1 \in R/\Omega_1 \quad (2.4)$$

— нежорстке диференціювання, то існує елемент $v \in R$ такий, що $a_v \notin \Omega_1$ та $va_v \in \Omega_1$. Тоді правило

$$\delta(r) = pa_r \quad (r \in R),$$

де a_r — таке, як і у (2.4), визначає ненульове диференціювання δ кільця R , де $\delta(v) \neq 0$ та

$$v\delta(v) = vra_v = 0.$$

Отримали суперечність. Отже, у фактор-кільці $\bar{R} = R/\Omega_1$ усі диференціювання жорсткі. З частини 1) випливає, що \bar{R} — поле та $J(R) = \Omega_1$. Оскільки $\Omega_1 d(\Omega_1) = 0$ для усіх $d \in \text{Der } R$, то бачимо, що $d(J(R)) = d(\Omega_1) = 0$. Очевидно, що $J(R) = J_1 \oplus pC$ — пряма сума груп, де $J_1 \leq J(R)$ — деяка підгрупа. Тоді

$$J_1 C = J_1 \oplus (pC \cap J_1 C)$$

теж пряма сума груп. Якщо

$$0 \neq pc_0 \in J_1 C \cap pC$$

для деякого $c_0 \in C$, то $c_0 \in U(R)$ та $Cc_0 = C$. Тоді $pc_0 \in J_1 Cc_0$ та

$$pc_0 = j_1 c_1 c_0$$

для деякого $j_1 \in J_1$ та $c_1 \in C$. Звідси отримуємо, що

$$(p - j_1 c_1) c_0 = 0,$$

а отже, $j_1 = p c_1^{-1} \in J_1 \cap pC = 0$, суперечність. Це дає, що $J = J_1 C \oplus pC$ та

$$R = J_1 C \oplus C$$

— пряма сума груп. Тому для кожного елемента $r \in R$ існують єдині елементи $j \in J_1 C$ та $c \in C$ такі, що

$$r = j + c. \quad (2.5)$$

Правило

$$\gamma(r) = j \quad (r \in R),$$

де j — таке, як і у (2.5), визначає ненульове диференціювання кільця R , де $\gamma(J(R)) \neq 0$, суперечність. Таким чином, $R = C$. Якщо поле лишків C/pC має ненульове диференціювання d , то в силу зауваження 1.1 кільце C має ненульове диференціювання D таке, що

$$D(C) \not\subseteq pC,$$

суперечність. Отже, C/pC (та за твердженням 2.1 і кільце R) диференційно тривіальне.

□

Висновки до розділу 2

В даному розділі роботи введено означення жорсткого диференціювання кільця та досліджено його властивості.

В підрозділі 2.1 розглянуто кільця R із властивістю

$$ad(a) \neq 0$$

для ненульових $a \in R$. Доведено, що для вільного від 2-скруту напівпервинного кільця R усі диференціювання жорсткі тоді і тільки тоді, коли R редуковане (твердження 2.2).

В підрозділі 2.2 розширено результат із [101] на випадок нескінченних кілець (теорема 2.1).

В підрозділі 2.3 доведено, що комутативне артінове кільце R або має нежорстке диференціювання, або $R = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$ — пряма сума кілець R_1, \dots, R_n , кожне з яких є полем або диференціально тривіальним v -кільцем (теорема 2.2).

Результати цього розділу містяться в в [3, 10].

РОЗДІЛ 3

ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ІЗ РЕГУЛЯРНИМИ ЗНАЧЕННЯМИ В КІЛЬЦІ

Активно досліджуються властивості кілець, що мають диференціювання, значення яких задовольняють певним властивостям. Так, Дж. Берген, І. Херстейн та Ч. Ланські [32] дослідили структуру кілець R із одиницею 1, які мають таке диференціювання d , що $d(x) = 0$ або $d(x)$ – оборотний елемент для всіх $x \in R$. Зокрема, вони встановили, що R – це тіло, або кільце квадратних матриць $M_2(D)$ степеня 2 над тілом D , або $R \cong D[x]/(x^2)$, де D – тіло характеристики 2, $d(D) = 0$ та $d(x) = ax + 1$, де $a \in Z(D)$. Дж. Берген і Л. Чаріні [29] розширили цей результат на випадок, коли $d(x) = 0$ або $d(x)$ – оборотний елемент для всіх елементів x із нецентрального ідеала Лі U кільця R . Т.К. Лі [81] розглянув більш загальний випадок, коли значення

$$d(f(x_1, \dots, x_n))$$

дорівнює 0 або є оборотним для всіх елементів $x_1, \dots, x_n \in R$, де $f(x_1, \dots, x_n)$ – мультілінійний поліном, що приймає нецентральне значення. Б. Фельзензвальб та Ч. Ланські [50] досліджували кільця R , що не містять ненульових одnobічних нільідеалів з таким диференціюванням d , значення якого $d(x)$ нільпотентні для всіх x з певного ненульового ідеала кільця R . Л. Чаріні та А. Джамбруно [41] розширили цей результат на випадок, коли значення x пробігають ідеал Лі із R та характеристика кільця R відмінна від 2, а Т.К. Вонг [106] переніс його

на випадок мультілінійного полінома із нецентральним значенням. Пізніше Дж. Берген [28] довів, що кільце R без ненульових односторонніх ніль-ідеалів і з таким ненульовим диференціюванням d , що $d(x)$ оборотний або нільпотентний для всіх $x \in R$ – це тіло або кільце квадратних матриць $M_2(D)$ порядку 2 над тілом D . Т.К. Лі та Т.Л. Вонг [83] узагальнили цей результат на випадок мультілінійних поліномів. В цьому напрямку досліджувалась також низка інших проблем. Наприклад, І.Херстейн [65] вивчав первинні кільця R із таким ненульовим диференціюванням d , що $d(x)^n \in Z(R)$ для всіх $x \in R$, де n – фіксоване додатне ціле число. Х. Коматсу та А. Накаїма [77], Й. Лін та Ц. Лю [84] досліджували будову кілець з подібними властивостями для узагальненого диференціювання.

Як відомо, елемент $x \in R$ називається *правим регулярним* (відповідно *лівим регулярним*) в кільці R , якщо для будь-якого $r \in R$ справджується імплікація

$$xr = 0 \Rightarrow r = 0 \quad (\text{відповідно } rx = 0 \Rightarrow r = 0).$$

Якщо елемент $x \in R$ одночасно лівий і правий регулярний в R , то він називається *регулярним*.

Нагадаємо, що в книзі Н. Джекобсона [69] адитивне відображення $\delta : R \rightarrow R$ називається (θ, φ) -диференціюванням, якщо

$$\delta(xy) = \delta(x)\theta(y) + \varphi(x)\delta(y)$$

для всіх $x, y \in R$, де θ, φ – кільцеві ендоморфізми. Якщо $\theta = \text{id}_R$, а φ – ендоморфізм кільця R , то δ називається φ -диференціюванням.

Надалі будемо говорити, що асоціативне кільце R

- задовольняє умову (*), якщо знайдеться таке ненульове диференціювання $d : R \rightarrow R$, що $d(x) = 0$ або $d(x)$ — регулярний елемент в кільці R для будь-якого елемента $x \in R$,
- задовольняє умову (**), якщо якщо знайдеться такий нетотожний автоморфізм $\varphi : R \rightarrow R$, що для φ -диференціювання $1 - \varphi$ справджується властивість (*).

Як встановлено в теоремі із [30], для автоморфізма $\Phi : Q \rightarrow Q$, що є розширенням $\varphi : R \rightarrow R$, який задовольняє властивість (**), справджується таке:

- (i) автоморфізм Φ не є внутрішній тоді і тільки тоді, коли T має такий невнутрішній автоморфізм ψ , що $\psi^2(x) = u^{-1}xu$ для будь-якого $x \in T$, де $\psi(u) = u$ та $u \neq y\psi(u)$ для кожного $y \in T$,
- (ii) автоморфізм Φ внутрішній тоді і тільки тоді, коли T не містить жодного квадратичного розширення свого центра $Z(T)$.

3.1. Диференціювання з регулярними значеннями

Лема 3.1. *Нехай кільце R задовольняє умову (*) та $x \in R$. Якщо $d(x) = 0$, то $x = 0$ або x — регулярний елемент в R .*

Доведення. Припустимо, що $x \neq 0$. Позаяк $d \neq 0$, то $d(y) \neq 0$ для певного елемента $y \in R$. За умовою (*) відомо, що $d(y)$ — регулярний елемент. Тому

$$d(xy) = xd(y) \neq 0 \text{ та } d(yx) = d(y)x \neq 0,$$

а значить, $xd(y)$ та $d(y)x$ — регулярні елементи. Якщо $b \in R$ та $bx = 0$ (відповідно $xb = 0$), то

$$b(xd(y)) = (bx)d(y) = 0 \quad (\text{відповідно } (d(y)x)b = d(y)(xb) = 0).$$

На основі отриманого вище $b = 0$, а тому x регулярний в R .

□

Лема 3.2. *Нехай d — ненульове диференціювання кільця R , що задовольняє умову (*). Якщо L — ненульовий лівий ідеал кільця R , то його образ $d(L) \neq 0$ ненульовий.*

Доведення. Якщо $L = R$, то твердження вірне. Тому надалі $L \neq R$ — власний лівий ідеал. Припустимо протилежне, тобто

$$d(L) = 0.$$

Якщо $0 \neq a \in L$, то за лемою 3.1 робимо висновок, що a — регулярний елемент в R . Оскільки $ra \in L$ для будь-якого $r \in R$, то

$$0 = d(ra) = d(r)a.$$

Внаслідок регулярності елемента $a \in R$ отримуємо, що $d(r) = 0$, тобто $d = 0$. Отримана суперечність показує, що $d(L) \neq 0$.

□

Лема 3.3. *Якщо R задовольняє умову (*), то $\text{char } R = p$ для деякого простого числа p або $F(R) = 0$ (а тому адитивна група R^+ вільна від скруту).*

Доведення. Припустимо, що $F(R) \neq 0$. Тоді адитивна група $F(R)^+$ має ненульову p -компоненту $F_p(R)$ для деякого простого числа p . Нехай $x \in F(R)$ — елемент порядку p^k . Припустимо, що $k \geq 2$. Тоді

$$p^k d(x) = d(p^k x) = 0,$$

а отже,

$$(pd(x))^k = 0.$$

Якщо $pd(x) \neq 0$, то $pd(x) = d(px)$ — дільник нуля в R , а це суперечить умові (*). Отже, $d(px) = pd(x) = 0$ та за лемою 3.1 маємо px — регулярний елемент (що суперечить припущенню) або $px = 0$. Отже, $k = 1$.

Якщо припустити, що p -компонента $F_p(R) \neq F(R)$, то знайдеться таке просте число q , що $q \neq p$ та $F_q(R) \neq 0$. Тоді за лемою 3.2 маємо $d(F_q(R)) \neq 0$ та $d(F_p(R)) \neq 0$ і, як наслідок,

$$d(F_q(R))d(F_p(R)) = 0,$$

а це веде до суперечності з умовою (*). Отже, $F(R) = F_p(R)$.

Припустимо, що $F_p(R) \neq R$. Тоді $pR \neq 0$ та $F_p(R) \cdot pR = 0$, а це з огляду на умову (*) та лему 3.2 веде до суперечності. Таким чином, $F_p(R) = R$.

□

Кільце, яке не має ненульових нільпотентних елементів, прийнято називати *редукованим*.

Наслідок 3.1. *Нехай d — ненульове диференціювання кільця R , яке задовольняє умову (*), та $e = e^2 \in R$. Якщо R редуковане (відповідно комутативне), то ідемпотент $e \in \{0, 1\}$ тривіальний.*

Доведення. Зрозуміло, що кільце R завжди містить два тривіальні ідемпотенти 0, 1. Припустимо протилежне, тобто що знайдеться ідемпотент $e \notin \{0, 1\}$. Тоді

$$e(1 - e) = 0 = (1 - e)e,$$

а тому e — дільник нуля. Оскільки

$$d(e) = d(e^2) = d(e)e + ed(e)$$

та

$$d(e)e = d(e)e + ed(e)e,$$

то

$$ed(e)e = 0 \text{ та } (d(e)e)^2 = 0.$$

Якщо R редуковане (відповідно комутативне), то $ed(e) = 0 = d(e)e$. За лемою 3.1 маємо $d(e) \neq 0$ та згідно умови (*) елемент $d(e)$ регулярний. Як наслідок, $e = 0$ всупереч зробленому припущенню. □

Лема 3.4. *Якщо кільце R задовольняє умову (*), то*

(i) $\mathbb{P}(R)^2 = 0$,

(ii) *якщо адитивна група R^+ без скруту (відповідно $\text{char } R > 2$), то $\mathbb{P}(R) = 0$ (тобто кільце R напівпервинне).*

Доведення. (i) Припустимо, що $\mathbb{P}(R)^2 \neq 0$. Оскільки

$$0 \neq d(\mathbb{P}(R)^2) \subseteq \mathbb{P}(R),$$

то з огляду на лему 3.2 і умову (*) дістаємо суперечність.

(ii) За твердженням 1.14 (відповідно за твердженням 1.15) маємо $d(\mathbb{P}(R)) \subseteq \mathbb{P}(R)$. Тоді внаслідок умови (*) та леми 3.1 отримуємо, що $\mathbb{P}(R) = 0$. □

Лема 3.5. *Напівпервинне кільце R з умовою (*) первинне.*

Доведення. Припустимо, що A, B — такі ненульові ідеали кільця R , що $AB = 0$. Тоді $BA = 0$ та знайдуться такі ненульові елементи $a \in A$ та $b \in B$, що $ab = 0 = ba$, $d(b) \neq 0$ згідно леми 3.2 та

$$B \ni d(a)b = -ad(b) \in A, \quad B \ni d(b)a = -bd(a) \in A.$$

Оскільки $A \cap B = 0$, то

$$ad(b) = 0 = d(b)a,$$

а це веде до суперечності з огляду на умову (*). Отже, R — первинне кільце. □

Наслідок 3.2. *Нехай R — комутативне кільце з умовою (*). Якщо його періодична частина $F(R) = 0$ нульова (відповідно R з характеристикою $n > 0$ та найбільший спільний дільник $\text{НСД}(n, 2) = 1$ одиничний), то воно редуковане (а тому первинне).*

Доведення. Нехай $x^2 = 0$ для деякого елемента $x \in R$. Тоді

$$0 = d(x^2) = 2xd(x),$$

а звідси отримуємо, що $xd(x) = 0$. Внаслідок умови (*) маємо $d(x) = 0$. З леми 3.1 випливає, що $x = 0$ або x — регулярний елемент в кільці R . Отже, кільце R редуковане. □

Зазначимо, що в комутативному кільці R для множини всіх регулярних елементів S існує кільце дробів $Q(R) = RS^{-1}$ (див. [21]).

Нижче доведено таке

Теорема 3.1. *Нехай R — комутативне кільце. Тоді R має ненульове диференціювання d , що задовольняє умову (*), в тому і тільки в тому випадку, коли класичне кільце дробів $Q(R)$ — поле або $Q(R) = T[X]/(X^2)$, де $d(T) = 0$, характеристика $\text{char } T = 2$ та $d(X) = 1 + aX$ для деякого $a \in Z(T)$.*

Доведення. Якщо кільце R первинне (а отже, область цілісності), то $Q(R)$ — поле. Таким чином, вважаємо, що R не є областю цілісності. За лемою 3.4 маємо $\mathbb{P}(R)^2 = 0$ та $\text{char } R = 2$. Нехай d — ненульове диференціювання кільця R , що задовольняє умову (*). Тоді можемо продовжити d до диференціювання D над $Q(R)$ (див. твердження 1.16). Отже, за твердженням 1.17 маємо $Q(R) \cong T[X]/(X^2)$, де характеристика $\text{char } T = 2$, $d(T) = 0$ та $d(X) = 1 + aX$ для деякого $a \in Z(T)$.

□

3.2. Кільця, що мають φ -диференціювання з регулярними значеннями

Лема 3.6. *Нехай R — кільце з неединичним автоморфізмом φ , що задовольняє умову (**). Якщо $\varphi(x) = x$ для деякого $x \in R$, то $x = 0$ або x регулярний в кільці R .*

Доведення. Оскільки $\varphi(r) - r \neq 0$ для деякого $r \in R$, то

$$x(\varphi(r) - r) = \varphi(xr) - xr \neq 0,$$

а значить, елемент x регулярний.

□

Наслідок 3.3. *Нехай R — кільце з неединичним автоморфізмом φ , що задовольняє умову (**). Тоді:*

(a) $\mathbb{P}(R) = 0$ (а тоді R напівпервинне),

(b) адитивна група R^+ без скруту або $pR = 0$ для деякого простого числа p .

Доведення. (a) Якщо $0 \neq x \in \mathbb{P}(R)$, то за лемою 3.6 та умовою (**) маємо, що

$$0 \neq \varphi(x) - x \in \mathbb{P}(R)$$

— регулярний елемент в R . Отримали суперечність.

(b) Припустимо, що існує ненульовий елемент $0 \neq x \in F_p(R)$ порядку p^k в адитивній групі R^+ , де k — деяке додатне ціле число. Тоді $x - \varphi(x) \in F_p$ та

$$(p^k \cdot 1)(x - \varphi(x)) = 0.$$

На основі леми 3.6 та умови (**) отримуємо, що $k = 1$, а отже, $pR = 0$.

□

Якщо R — напівпервинне праве кільце Голді, то існує його класичне праве кільце дробів $Q = Q(R)$ (див. твердження 1.18 та 1.19). Тоді кожен регулярний елемент з R оборотний в Q .

Нами отримано розширення теореми із [30].

Теорема 3.2. *Нехай R — праве кільце Голді. Якщо R має такий неединичний автоморфізм φ , що $x - \varphi(x)$ нульовий або регулярний для кожного $x \in R$, тоді R — напівпервинне кільце з класичним правим кільцем дробів Q одного із типів:*

(1) Q — тіло,

(2) $Q = T \oplus T$ — кільцева пряма сума, де T — тіло,

(3) $Q = M_2(T)$ — кільце матриць степеня 2 над тілом T .

Доведення. Нехай $\varphi \in \text{Aut } R$ задовольняє (**), а $\Phi \in \text{Aut } Q$ — його продовження на класичне праве кільце дробів Q кільця R . Попередньо встановимо деякі властивості.

(1°) Якщо I — власний лівий ідеал в Q , то $I \cap \Phi(I) = 0$.

Справді, нехай I ненульовий. Від супротивного припустимо, що знайдеться

$$0 \neq q \in I \cap \Phi(I).$$

Вважаємо без обмеження загальності, що $q \in R$. Оскільки $q = \Phi(y)$ для певного $y \in I$ та

$$y = \Phi^{-1}(q) = \varphi^{-1}(q) \in R,$$

то $y - \varphi(y) \in I \cap R$ — лівий регулярний елемент в R . Як наслідок, $y \in U(Q)$ та $I = Q$. Отримали суперечність.

(2°) Кожен лівий ідеал із Q є мінімальним в Q . Дійсно, для ненульового власного лівого ідеала $I \leq Q$ сума $M = I + \Phi(I)$ також лівий ідеал в Q та

$$0 \neq \Phi(I) \leq M + \Phi(M).$$

Внаслідок цього $M = Q$ та $Q = I \oplus \Phi(I)$ — пряма сума ідеалів.

Якщо S — ненульовий лівий ідеал кільця Q та $S \leq I$, то з тих же міркувань отримуємо, що

$$Q = S \oplus \Phi(S)$$

— пряма сума ідеалів. Тому для кожного $0 \neq l \in I$ маємо розклад

$$l = n + \Phi(m)$$

для певних елементів $n, m \in S$, а звідси

$$\Phi(m) = l - n \in I \cap \Phi(I).$$

Тому $m = 0, l = n \in S$ та $I = S$ — мінімальний лівий ідеал в кільці Q .

(3°) Якщо кільце Q не є простим, то $Q = I_1 \oplus I_2$ — пряма сума ідеалів I_1, I_2 таких, що $I_2 = \Phi(I_1)$ — тіло. Якщо I — ненульовий власний ідеал із Q , то за встановленим в (2°) робимо висновок, що

$$Q = I \oplus \Phi(I)$$

— пряма сума ідеалів, причому I — мінімальний лівий ідеал в Q . Тому $I \cong \Phi(I)$ — тіло.

(4°) Якщо Q — просте кільце, то Q — тіло або $Q = M_2(T)$ — кільце матриць степеня 2 над тілом T . Якщо припустити, що Q не є тілом, то з огляду на (2°) Q — просте артінове кільце. Звідси легко випливає, що $Q = M_2(T)$ над тілом T .

Решта випливає із твердження 1.20.

□

Висновки до розділу 3

В даному розділі роботи досліджується будова кілець, що мають диференціювання (відповідно неединичний автоморфізм) з регулярними значеннями (див. означення умов (*) та (**)).

В підрозділі 3.1:

- встановлено деякі елементарні властивості диференціювань з регулярними значеннями (тобто з умовою (*));
- охарактеризовано будову комутативних кілець R , що мають

ненульове диференціювання d , яке задовольняє умову (*) (теорема 3.1).

В підрозділі 3.2:

- досліджено деякі елементарні властивості кілець, що мають φ -диференціювання з регулярними значеннями (тобто з умовою (**));
- описано будову правих кілець Голді R , що мають неединичний автоморфізм φ , який задовольняє умову (**). (теорема 3.2).

Результати цього розділу містяться в [2, 6, 7, 11].

РОЗДІЛ 4

СТРУКТУРИ ЛІ ТА ЖОРДАНА ДИФЕРЕНЦІЙНО НАПІВПЕРВИННИХ КІЛЕЦЬ

Нехай надалі R — асоціативне кільце з одиницею 1 (з операціями додавання "+" та множення "."), $\text{Der } R$ — множина усіх диференціювань в R . На множині R визначимо дві операції:

- множення Лі "[-, -]"

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

та

- множення Жордана "(-, -)"

$$(a, b) = a \cdot b + b \cdot a$$

для будь-яких $a, b \in R$. Тоді

$$R^L = (R, +, [-, -])$$

— кільце Лі та

$$R^J = (R, +, (-, -))$$

— жорданове кільце (див. [70] та [71]), асоційовані з асоціативним кільцем R . Пригадаємо, що адитивна підгрупа A кільця R називається:

- *ідеалом Лі* кільця R , якщо

$$[a, r] \in A,$$

- *ідеалом Жордана* кільця R , якщо

$$(a, r) \in A$$

для усіх $a \in A$ та $r \in R$. Очевидно, що A — ідеал Лі (відповідно Жордана) кільця R тоді і тільки тоді, коли A^L (відповідно A^J) — ідеал кільця R^L (відповідно R^J).

Приклад 4.1. *Кожен ідеал асоціативного кільця R є його ідеалом Лі. Навпаки невірно. Наприклад,*

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

— кільце із

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

ідеалом Лі, що не ідеалом в кільці R .

Взаємозв'язки між властивостями асоціативного кільця R , кільця Лі R^L та жорданового кільця R^J вивчалися І. Херстейном та його студентами (див. [58, 59, 62] та бібліографію в монографіях [60] і [38]). Він, зокрема, отримав для кільця R характеристики відмінної від 2, що з простоти R випливає простота жорданового кільця R^J [58, Теорема 1]. К. Маккрімон [90, Теорема 4] довів, що R — проста алгебра тоді і тільки тоді, коли R^J — проста жорданова алгебра. Наш результат в цьому напрямку — це теорема 4.3.

4.1. Диференційні аналоги результатів Херстейна

Для доведення теореми 4.3 нам необхідні наведені нижче результати. Домовимось, що всюди в цьому підрозділі $k \geq 1$ та $m_i \geq 0$ — цілі числа ($i = 1, \dots, k$).

Лема 4.1. *Нехай R — Δ -напівпервинне кільце, A та B — його Δ -ідеали. Тоді виконуються такі властивості:*

- (i) якщо $AB = 0$, то $BA = 0$,
- (ii) $\text{ann}_l A = \text{ann}_r A$,
- (iii) $A \cap \text{ann}_r A = 0$.

Доведення. (i) Справді, BA — Δ -ідеал та $(BA)^2 = 0$ і тому $BA = 0$.

(ii) Позначимо $(\text{ann}_r A)A$ символом X . Оскільки X — Δ -ідеал та $X^2 = 0$, то робимо висновок, що $X = 0$. Це означає, що

$$\text{ann}_r A \subseteq \text{ann}_l A.$$

Зворотнє включення доводимо аналогічно.

(iii) Оскільки $A \cap \text{ann}_r A$ — нільпотентний Δ -ідеал, то отримуємо бажане.

□

Надалі нехай

$$X_a = \{[\delta_1^{m_1} \dots \delta_k^{m_k}(a), x] \mid x \in R, \delta_i \in \Delta, m_i \geq 0 \text{ та } k \geq 1 \text{ — цілі числа } (i = 1, \dots, k)\}.$$

Очевидно, що $[a, x] \in X_a$.

Лема 4.2. *Нехай R — Δ -напівпервинне кільце та $a \in R$. Тоді вірні наступні властивості:*

(i) якщо

$$a[\delta_1^{m_1} \dots \delta_k^{m_k}(a), R] = 0$$

для будь-яких цілих чисел $k \geq 1$, $m_i \geq 0$ та диференціювань $\delta_i \in \Delta$ ($i = 1, \dots, k$), то $a \in Z(R)$,

- (ii) якщо I — правий Δ -ідеал кільця R , то $Z(I) \subseteq Z(R)$,
- (iii) якщо I — комутативний правий Δ -ідеал кільця R та I ненульовий, то $I \subseteq Z(R)$. Більше того, якщо R — Δ -первинне кільце, то воно комутативне.

Доведення. (i) Нехай $x, y \in R$ та $d, \delta \in \Delta$. Оскільки

$$[b, xy] = [b, x]y + x[b, y] \quad (4.1)$$

для будь-яких $b \in X_a$ та $a[b, xy] = 0$, то робимо висновок, що $ax[b, y] = 0$. Звідси отримуємо, що $aux[b, y] = 0$ та $yax[b, y] = 0$ та, як наслідок,

$$(R[a, y]R)^2 = 0. \quad (4.2)$$

Крім того,

$$0 = d(a[b, x]) = d(a)[b, x].$$

Домножуючи (4.1) на $d(a)$ зліва, отримуємо

$$d(a)x[b, y] = 0.$$

Більше того,

$$0 = \delta(ax[d(b), y]) = \delta(a)x[d(b), y]$$

та, міркуючи подібним чином, одержуємо

$$\delta_1^{m_1} \dots \delta_k^{m_k}(a)x[\delta_1^{m_1} \dots \delta_k^{m_k}(a), y] = 0$$

для будь-яких цілих чисел $k \geq 1$, $m_i \geq 0$ та диференціювань $\delta_i \in \Delta$ ($i = 1, \dots, k$). Як і у доведенні умови (4.2), робимо висновок, що

$$(R[\delta_1^{m_1} \dots \delta_k^{m_k}(a), y]R)^2 = 0.$$

Тоді

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{\delta_1 \dots \delta_k \in \Delta \\ y \in R}} R[\delta_1^{m_1} \dots \delta_k^{m_k}(a), y]R$$

— сума нільпотентних ідеалів, а тому є ніль-ідеалом. Оскільки I — Δ -ідеал, то бачимо, що $I = 0$ та, як наслідок, $a \in Z(R)$.

(ii) Нехай $a \in Z(I)$ та $y \in R$. Тоді для $\delta_1, \dots, \delta_k \in \Delta$ маємо

$$\delta_1^{m_1} \dots \delta_k^{m_k}(a) \in Z(I)$$

та $ay \in I$. Звідси одержеємо наступне

$$a(\delta_1^{m_1} \dots \delta_k^{m_k}(a)y) = \delta_1^{m_1} \dots \delta_k^{m_k}(a)(ay) = a(y\delta_1^{m_1} \dots \delta_k^{m_k}(a)).$$

Таким чином,

$$a[\delta_1^{m_1} \dots \delta_k^{m_k}(a), y] = 0.$$

Згідно (i) отримуємо, що $a \in Z(R)$ центральний.

(iii) Згідно (ii) маємо $I \subseteq Z(R)$. Вважаємо, що R є Δ -первинним, $u, v \in R$ та $a \in I$. Тоді $au \in I$ і так $au \in Z(R)$. Оскільки

$$a(uv) = (au)v = v(au) = (va)u = a(vu),$$

то бачимо, що

$$[u, v] \in \text{ann}_r I.$$

За лемою 1.2(3) отримуємо, що $[u, v] = 0$, а отже, R комутативне. \square

Лема 4.3. *Нехай R — Δ -первинне кільце та $a \in R$. Якщо $a \in C_R(I)$ для деякого ненульовго правого Δ -ідеала I з R , то $a \in Z(R)$.*

Доведення. Візьмемо $y \in R$ та $b \in I$. Тоді $by \in I$ і так $ba y = a(by) = bya$. Звідси випливає, що

$$I[a, y] = 0 = [a, y]I.$$

За лемою 1.2(3) робимо висновок, що $[a, y] = 0$. Отже, $a \in Z(R)$. \square

Лема 4.4. *Лівий анулятор $\text{ann}_l(X_a)$ — лівий Δ -ідеал кільця R .*

Доведення. Випливає безпосередньо із означення. \square

Лема 4.5. *Якщо R — Δ -напівпервинне кільце, то*

$$C_R([R, R]) \subseteq Z(R).$$

Доведення. Візьмемо $a \in C_R([R, R])$, $d, \delta \in \Delta$ та $x, y \in R$. Замінімо x на a та $xd(a)$ на xy в (4.1). Тоді одержимо

$$[x, xd(a)] = [x, x]d(a) + x[x, d(a)]$$

та, як наслідок,

$$[a, x[x, d(a)]] = 0 \text{ та } [a, x][x, d(a)] = 0.$$

Тоді, з тих же міркувань, що й у доведенні леми 4.2(1), отримуємо, що $[a, x] \in \text{ann}_l(X_a)$ та $A = \text{ann}_l(X_a)$ — Δ -ідеал. Тому

$$[\delta(a), x][d(a), x] = \delta([a, x][d(a), x]) = 0.$$

Оскільки $A \cap \text{ann}_l A = 0$, то робимо висновок, що $a \in Z(R)$. \square

Лема 4.6. *Нехай R — вільне від 2-скруту Δ -напівпервинне кільце. Якщо $a \in R$ комутує з усіма елементами із X_a , то $a \in Z(R)$.*

Доведення. Нехай $r, x, y \in R$ та $d \in \Delta$. Очевидно, що $\partial_a^2(x) = 0$. З рівності $\partial_a^2(xy) = 0$ слідує, що

$$2\partial_a(x)\partial_a(y) = 0,$$

а тоді $\partial_a(x)\partial_a(y) = 0$. Оскільки

$$0 = \partial_a(x)\partial_a(rx) = \partial_a(x)\partial_a(r)x + \partial_a(x)r\partial_a(x) = \partial_a(x)r\partial_a(x),$$

то робимо висновок, що

$$\partial_a(x)R\partial_a(x) = 0 \text{ та } (\partial_a(x)R)^2 = 0.$$

Більше того, $a[b, x] = [b, x]a$ для будь-якого $[b, x] \in X_a$, і тоді

$$\begin{aligned} d(a)[b, x] + a[d(b), x] + a[b, d(x)] &= \\ &= [b, x]d(a) + [d(b), x]a + [b, d(x)]a. \end{aligned}$$

З цього випливає, що

$$d(a)[b, x] = [b, x]d(a).$$

А це означає, що $C_R(X_a) \in \Delta$ -стабільним та $(\partial_{d(a)}(x)R)^2 = 0$. Як наслідок,

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{x \in R \\ m_k \geq 0 \\ \delta_1, \dots, \delta_k \in \Delta}} \partial_{\delta_1^{m_1} \dots \delta_k^{m_k}}(a)(x)R$$

— сума нільпотентних ідеалів, а тому I — ніль-ідеал. Оскільки I — Δ -ідеал, робимо висновок, що $I = 0$. Отже, $a \in Z(R)$. \square

Наступна лема — це розширення леми 1 з [62] на диференційний випадок.

Лема 4.7. *Нехай R — вільне від 2-скруту Δ -напівпервинне кільце, T — його Δ -ідеал Лі. Якщо $[T, T] \subseteq Z(R)$, то $T \subseteq Z(R)$.*

Доведення. Нехай $x \in R$ та $t \in T$.

1) Якщо $[T, T] = 0$, то $[t, x] \in T$ і так $[t, [t, x]] = 0$. За лемою 4.6 маємо $T \subseteq Z(R)$.

2) Тепер припустимо, що $0 \neq [a, b] \in [T, T]$ для деяких $a, b \in T$. Тоді

$$\partial_a(b) \in Z(R) \text{ та } \partial_a^2(R) \subseteq Z(R).$$

Більше того, маємо, що

$$\begin{aligned} Z(R) \ni \partial_a^2(bx) &= \partial_a(\partial_a(b)x + b\partial_a(x)) = \\ &= \partial_a^2(b)x + 2\partial_a(b)\partial_a(x) + b\partial_a^2(x) = \\ &= 2\partial_a(b)\partial_a(x) + b\partial_a^2(x), \end{aligned}$$

а отже,

$$[2\partial_a(b)\partial_a(x) + b\partial_a^2(x), b] = 0.$$

Тоді

$$\begin{aligned} 0 &= 2\partial_b(\partial_a(b))\partial_a(x) + 2\partial_a(b)\partial_b(\partial_a(x)) + \\ &\quad + \partial_b(b)\partial_a^2(x) + b\partial_b(\partial_a^2(x)) = \\ &= 2\partial_a(b)\partial_b(\partial_a(x)) \end{aligned} \tag{4.3}$$

та

$$\partial_a(ba) = \partial_a(b)a + b\partial_a(a) = \partial_a(b)a.$$

Замінімо ba на x в (4.3) та отримаємо

$$\begin{aligned} 0 &= 2\partial_a(b)\partial_b(\partial_a(b)a) = \\ &= 2\partial_a(b)(\partial_b(\partial_a(b)) + \partial_a(b)\partial_b(a)) = -2\partial_a(b)^3. \end{aligned}$$

Тому $\partial_a(b)^3 = 0$ і $R\partial_a(b)$ — нільпотентний ідеал в R та, як наслідок,

$$\sum_{a,b \in T} R\partial_a(b)$$

— ненульовий ніль Δ -ідеал. Отримали суперечність.

□

Лема 4.8. *Якщо U — Δ -ідеал Лі кільця R та*

$$I(U) = \{u \in U \mid uR \subseteq U\},$$

то $I(U)$ — найбільший Δ -ідеал кільця R такий, що

$$I(U) \subseteq U.$$

Доведення. Нехай $u, v \in I(U)$, $x, y \in R$ та $\delta \in \Delta$. Очевидно, що $I(U)$ — адитивна підгрупа кільця R , $I(U) \subseteq U$ та

$$(ux)y = u(xy) \in (ux)R = u(xR) \subseteq uR \subseteq U,$$

тобто $ux \in I(U)$. Із рівностей

$$u(xy) - (yu)x = (ux)y - y(ux) = [ux, y] \in U$$

(а також $(yu)x \in U$) маємо, що $yu \in I(U)$. Отже, U — двобічний ідеал кільця R . Більше того,

$$\delta(u)x + u\delta(x) = \delta(ux) \in \delta(U) \subseteq U$$

та $u\delta(x) \in uR \subseteq U$. Таким чином, $\delta(u)x \in U$. Це означає, що $I(U)$ — Δ -ідеал кільця R . Якщо A — Δ -ідеал кільця R , що міститься в U , то

$$AR \subseteq A \subseteq U,$$

а отже, $A \subseteq I(U)$.

□

Лема 4.9. *Нехай U — Δ -ідеал Лі кільця R . Якщо U — асоціативне підкільце із R , то $[U, U] = 0$ або U містить ненульовий Δ -ідеал кільця R .*

Доведення. Вважаємо, що $x \in R$ та $[U, U] \neq 0$. Тоді $[u, v] \neq 0$ для деяких $u, v \in U$ та

$$[u, vx] = u(vx) - (vx)u = (uv - vu)x + v(ux - xu).$$

Оскільки $[u, x], [u, vx] \in U$ та $v[u, x] \in U$, то робимо висновок, що $[u, v]x \in U$. Це означає, що $[u, v] \in I(U)$. З огляду на лему 4.8 дістаємо, що $I(U)$ — ненульовий Δ -ідеал із R , що міститься в U . \square

Твердження 4.1. *Якщо U — Δ -ідеал Лі кільця R , то $[U, U] = 0$ або існує такий ненульовий Δ -ідеал I_U кільця R , що $[I_U, R] \subseteq U$.*

Доведення. Згідно твердження 1.21 маємо

$$T(U) = \{t \in R \mid [t, R] \subseteq U\},$$

що є одночасно ідеалом Лі та асоціативним підкільцем кільця R та $U \subseteq T(U)$. Більше того, для $\delta \in \Delta$ маємо

$$[\delta(t), R] + [t, \delta(R)] = \delta([t, R]) \subseteq \delta(U) \subseteq U,$$

і тому $[\delta(t), R] \subseteq U$. Отже, $T(U)$ є Δ -стабільним. Якщо

$$[U, U] \neq 0,$$

то згідно лем 4.8 та 4.9 отримуємо

$$I_U = I(T(U)) \subseteq T(U)$$

— такий ненульовий Δ -ідеал з R , що $[I_U, R] \subseteq U$. \square

Лема 4.10. *Нехай U — Δ -ідеал Лі кільця R . Якщо $[U, U] = 0$, то централізатор $C_R(U)$ — Δ -ідеал Лі та асоціативне підкільце кільця R .*

Доведення. Встановлюється безпосередньою перевіркою. \square

Тепер розширимо теорему 1.3 з [60] в у такому вигляді.

Теорема 4.1. *Нехай R — Δ -просте кільце характеристики 2. Якщо U — Δ -ідеал Лі кільця R , то виконується одна з наступних умов:*

$$(1) [R, R] \subseteq U,$$

$$(2) U \subseteq Z(R),$$

$$(3) R \text{ містить таке підполе } P, \text{ що } U \subseteq P \text{ та } [P, R] \subseteq P.$$

Доведення. Якщо $[U, U] \neq 0$, то $[R, R] \subseteq U$ за твердженням 4.1. Тому припускаємо, що $[U, U] = 0$. Згідно з лемою 4.10 $C_R(U)$ — такий Δ -ідеал Лі та асоціативне підкільце кільця R , що $U \subseteq C_R(U)$.

a) Якщо підкільце $C_R(U)$ некомутативне, то $C_R(U) = R$ за лемою 4.9. Отже, $U \subseteq Z(R)$.

b) Тепер припустимо, що централізатор $C_R(U)$ комутативний. Якщо $c \in C_R(U)$ та $x \in R$, то

$$c^2 \in C_R(U) \text{ та } [c^2, x] = [[c, x], x] = 2c[c, x] = 0.$$

Звідси випливає, що $c^2 \in Z(R)$. Згідно із твердженням 1.22 маємо, що $Z(R)$ — поле. Як наслідок, c^2 (і так c) оборотний в $C_R(U)$. Отже, $C_R(U)$ — поле. \square

Наслідок 4.1. *Нехай R — Δ -просте кільце. Якщо U — Δ -ідеал Лі кільця R , то виконується одна з наступних умов:*

$$(1) [R, R] \subseteq U,$$

$$(2) U \subseteq Z(R),$$

(3) $\text{char } R = 2$ та R містить таке підполе P , що $U \subseteq P$ та $[P, R] \subseteq P$.

4.2. Жорданова структура

Лема 4.11. *Нехай R — Δ -просте кільце характеристики $\neq 2$, U — його власний Δ -ідеал Жордана та $a \in R$. Якщо $[a, R] \subseteq U$, то $a = 0$.*

Доведення. Візьмемо $x, y \in U$. Оскільки $[a, x] \in U$ та $(a, x) \in U$, то отримаємо, що $2ax \in U$ і, як наслідок, $ax \in U$ та $(ax, y) \in U$. Більше того, з умови $axy \in U$ випливає, що $yax \in U$. Це означає, що $RaR \subseteq U$. Оскільки $d(a) \in U$ для будь-якого $d \in \Delta$, то з огляду на твердження 1.23 отримуємо, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{\delta_1, \dots, \delta_k \in \Delta \\ (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k}} R \delta_1^{m_1} \dots \delta_k^{m_k} (a) R$$

— власний Δ -ідеал кільця R , що міститься в U . Отже, $a = 0$. \square

Зауваження 4.1. *Нехай R — вільне від 2-скруту кільце, U — його Δ -ідеал Жордана. Якщо Δ містить усі внутрішні диференціювання кільця R , то U — ідеал в R .*

Справді, маємо

$$2xa = [a, x] + (a, x) \in U$$

для будь-яких $a, b, x \in U$ і тому $xa \in U$. Застосовуючи схожі міркування, робимо висновок, що $ax \in U$.

Наш результат полягає в наступній теоремі.

Теорема 4.2. *Для вільного від 2-скруту кільця R виконуються наступні твердження:*

- (1) R — Δ -просте кільце тоді і тільки тоді, коли R^J — Δ -просте жорданове кільце,
- (2) R — Δ -первинне кільце тоді і тільки тоді, коли R^J — Δ -первинне жорданове кільце,
- (3) R — Δ -напівпервинне кільце тоді і тільки тоді, коли R^J — Δ -напівпервинне жорданове кільце.

Доведення. (1) (\Leftarrow) Якщо A — ненульовий власний Δ -ідеал кільця R , то A^J — ненульовий власний Δ -ідеал кільця Жордана R^J . Отримали суперечність.

(\Rightarrow) Нехай U — власний Δ -ідеал Жордана кільця R , $a, b \in U$ та $x \in R$. Згідно твердження 1.25 маємо $[(a, b), x] \in U$ та за лемою 4.11 бачимо, що

$$(a, b) = 0. \quad (4.4)$$

Зокрема, $2a^2 = 0$ та, як наслідок, $a^2 = 0$. Тоді

$$2axa = (a, (a, x)) = 0,$$

а звідси випливає, що $axa = 0$. Оскільки

$$0 = (a + b)x(a + b) = axb + bxa$$

та

$$\begin{aligned} 0 &= (b, (a, x)) = b(ax + xa) + (ax + xa)b = \\ &= bax + bxa + axb + xba, \end{aligned}$$

то робимо висновок, що $bax + xab = 0$. Проте $ab = -ba$, і тому $bax - xba = 0$. Це означає, що $ba \in Z(R)$. Тоді

$$(RabR)^2 = 0.$$

Оскільки

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{a, b \in U, \delta_1, \dots, \delta_k \in \Delta \\ (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k}} Ra\delta_1^{m_1} \dots \delta_k^{m_k}(b)R$$

— Δ -ідеал кільця R , що є сумою нільпотентних ідеалів, ми отримуємо, що $I = 0$. Таким чином,

$$0 = (b, x)a = (bx + xb)a = bxa + xba = 2bxa.$$

Робимо висновок, що $URU = 0$. З умов

$$(RUR)^2 = 0 \text{ та } \delta(RUR) \subseteq RUR$$

для будь-якого $\delta \in \Delta$ випливає, що $U = 0$.

(2) (\Leftarrow) Якщо A, B — Δ -ідеали кільця R такі, що $AB = 0$, то $(BA)^2 = 0$. Тоді BA — ідеал Жордана кільця R , що задовольняє умову

$$(BA, BA) = 0.$$

Тому умова (4.4) справджується для $U = BA$. Так, як і в доведенні частини (1), отримуємо, що $BA = 0$. Тоді A^J, B^J — такі Δ -ідеали в кільці Жордана R^J , що

$$(A^J, B^J) = 0.$$

Отже, $A = 0$ або $B = 0$.

(\Rightarrow) Нехай $a_1, a_2 \in A$ та $x, y \in R$. Вважаємо, що R^J не є Δ -первинним і тому існують такі ненульові Δ -ідеали Жордана A, B кільця R , що

$$(A, B) = 0.$$

З тих же міркувань, що й вище, робимо висновок, що $A \cap B = 0$. Тоді за твердженням 1.25 маємо $[(a_1, a_2), x] \in A$, а отже,

$$[(a_1, a_2), x] \pm ((a_1, a_2), x) \in A.$$

Тому $x(a_1, a_2)y \in A$. Таким чином, R містить Δ -ідеали

$$R(A, A)R \subseteq A \text{ та } R(B, B)R \subseteq B$$

такі, що

$$R(A, A)R(B, B)R \subseteq A \cap B = 0.$$

Отже, $(A, A) = 0$ або $(B, B) = 0$, а це веде до суперечності.

(3) (\Leftarrow) Якщо A — такий ненульовий Δ -ідеал кільця R , що $A^2 = 0$, то A^J — ненульовий Δ -ідеал кільця Жордана R^J такий, що

$$(A^J, A^J) = 0.$$

Отримали суперечність.

(\Rightarrow) Вважаємо, що R має такий ненульовий Δ -ідеал Жордана U , що

$$(U, U) = 0.$$

Тоді умова (4.4) справедлива для будь-яких $a, b \in U$. Як і в доведенні частини (1), отримуємо, що $U = 0$.

□

Якщо R — кільце, то на множині R можемо визначити ліве множення Жордана " $\langle -, - \rangle$ " за правилом

$$\langle a, b \rangle = 2ab$$

для будь-яких $a, b \in R$. Тоді вірними є такі рівності:

$$\langle \langle \langle a, a \rangle, b \rangle, a \rangle = \langle \langle a, a \rangle, \langle b, a \rangle \rangle$$

та

$$\langle \langle a, b \rangle, a \rangle = \langle a, \langle b, a \rangle \rangle,$$

а отже,

$$R^{lJ} = (R, +, \langle -, - \rangle)$$

— некомутативне кільце Жордана (що називається *лівим жордановим кільцем*, асоційованим з асоціативним кільцем R). Очевидно, що для комутативного кільця R маємо

$$R^J = R^{lJ}.$$

Якщо A — адитивна підгрупа кільця R така, що $\langle a, r \rangle, \langle r, a \rangle \in A$ для будь-яких $a \in A$ та $r \in R$, то A називається *ідеалом* кільця R^{lJ} . Якщо $\delta \in \Delta$ та $a, b \in R$, то

$$\delta(\langle a, b \rangle) = \delta(2ab) = 2\delta(a)b + 2a\delta(b) = \langle \delta(a), b \rangle + \langle a, \delta(b) \rangle,$$

і тому $\delta \in \text{Der}(R^{lJ})$. З іншого боку, якщо $\delta \in \text{Der}(R^{lJ})$, то

$$2\delta(ab) = \delta(\langle a, b \rangle) = \langle \delta(a), b \rangle + \langle a, \delta(b) \rangle = 2(\delta(a)b + a\delta(b)).$$

Якщо R — вільне від 2-скруту кільце, то $\delta \in \text{Der } R$.

Аналізуючи схожим чином, як і в теоремі 4.2, отримуємо наступне

Твердження 4.2. *Для вільного від 2-скруту кільця R вірні такі твердження:*

- (1) R — Δ -просте кільце тоді і тільки тоді, коли R^{lJ} — Δ -просте кільце Жордана,
- (2) R — Δ -первинне кільце тоді і тільки тоді, коли R^{lJ} — Δ -первинне кільце Жордана,
- (3) R — Δ -напівпервинне кільце тоді і тільки тоді, коли R^{lJ} — Δ -напівпервинне кільце Жордана.

4.3. Структура Лі

Наступна лема у випадку первинного кільця міститься у праці [87, Лема 7].

Лема 4.12 ([27], Лема 1.7). *Нехай R — кільце. Якщо*

$$[[R, R], [R, R]] = 0,$$

то комутаторний ідеал $C(R)$ — ніль-ідеал.

Наслідок 4.2. *Якщо R — некомутативне Δ -напівпервинне кільце, то адитивна комутаторна група $[R, R]$ некомутативна (стосовно множення елементів в кільці).*

Візьмемо $d \in \Delta$. Оскільки $C(R)$ та $\text{ann } C(R)$ — Δ -ідеали, то правило

$$\bar{d} : R / \text{ann } C(R) \ni r + \text{ann } C(R) \mapsto d(r) + \text{ann } C(R) \in R / \text{ann } C(R)$$

визначає диференціювання \bar{d} фактор-кільця $R / \text{ann } C(R)$. Тоді маємо вкладення

$$\bar{\Delta} = \{\bar{d} \mid d \in \Delta\} \subseteq \text{Der}(R / \text{ann } C(R)).$$

Оскільки $d(Z(R)) \subseteq Z(R)$, то правило

$$\hat{d} : R^L / Z(R) \ni r + Z(R) \mapsto d(r) + Z(R) \in R^L / Z(R)$$

визначає диференціювання \hat{d} фактор-кільця Лі $R^L / Z(R)$. Тоді

$$\hat{\Delta} = \{\hat{d} \mid d \in \Delta\} \subseteq \text{Der}(R^L / Z(R)).$$

З того, що $Z(R)$ — ненульовий ідеал Лі асоціативного кільця R з одиницею, отримуємо, що кільце Лі R^L не є Δ -простим. Наш наступний результат викладено у такій теоремі.

Теорема 4.3. *Нехай R — вільне від 2-скруту кільце. Тоді вірні такі твердження:*

- (1) *якщо фактор-кільце $\text{Лі } R^L/Z(R) — \widehat{\Delta}$ -просте кільце Лі , то R некомутативне та $R/\text{ann } C(R) — \overline{\Delta}$ -просте кільце,*
- (2) *якщо $R — \Delta$ -просте кільце, то $R^L/Z(R) — \widehat{\Delta}$ -просте кільце Лі або R комутативне,*
- (3) *якщо $R^L/Z(R) — \widehat{\Delta}$ -напівпервинне кільце Лі , то R некомутативне та фактор-кільце $R/\text{ann } C(R) — \overline{\Delta}$ -напівпервинне кільце,*
- (4) *якщо $R — \Delta$ -напівпервинне кільце, то $R^L/Z(R) — \widehat{\Delta}$ -напівпервинне кільце Лі або R комутативне,*
- (5) *якщо $R^L/Z(R) — \widehat{\Delta}$ -первинне кільце Лі , то R некомутативне та $R/\text{ann } C(R) — \overline{\Delta}$ -первинне кільце,*
- (6) *якщо $R — \Delta$ -первинне кільце, то $R^L/Z(R) — \widehat{\Delta}$ -первинне кільце Лі або R комутативне.*

Доведення. (1) Очевидно, що кільце R некомутативне. Якщо $A —$ ненульовий власний Δ -ідеал кільця R , то $A^L —$ ненульовий власний Δ -ідеал кільця R^L . Тому $A \subseteq Z(R)$ та, як наслідок,

$$A \cdot C(R) = 0.$$

(2) Припустимо, що Δ -просте кільце R некомутативне та $U —$ його ненульовий власний Δ -ідеал Лі . Згідно твердження 4.1 отримуємо, що $[U, U] = 0$. Тоді за лемою 4.7 дістаємо, що $U \subseteq Z(R)$. Отже, фактор-кільце $\text{Лі } R^L/Z(R) \in \widehat{\Delta}$ -простим.

(3) Нехай $A —$ такий ненульовий Δ -ідеал з R , що $A^2 = 0$. Тоді $A^L —$ ненульовий Δ -ідеал кільця $\text{Лі } R^L$ та, більше того,

$$[A^L, A^L] = 0.$$

За лемою 4.7 випливає, що $A \subseteq Z(R)$, а отже, $A \cdot C(R) = 0$.

(4) Вважаємо, що R некомутативне. Нехай A — такий ненульовий Δ -ідеал L_i кільця R , що $[A, A] = 0$. Тоді за лемою 4.7 маємо $A \subseteq Z(R)$ та, як наслідок, $R^L/Z(R)$ — $\widehat{\Delta}$ -напівпервинне кільце L_i .

(5) Нехай A, B — такі ненульові Δ -ідеали з R , що $AB = 0$. Очевидно, що $[A, B] \subseteq Z(R)$. Тоді $A \subseteq Z(R)$ або $B \subseteq Z(R)$.

(6) Припустимо, що R некомутативне та A, B — такі ненульові Δ -ідеали L_i з R , що

$$[A, B] = 0.$$

Тоді $A \cap B \subseteq Z(R)$. Оскільки $A \cap B \subseteq \text{ann } C(R)$ в Δ -первинному кільці R , то отримуємо, що перетин $A \cap B = 0$ нульовий. Якщо $T(A) = R$ (див. доведення твердження 4.1), то $[R, R] \subseteq A$ та $B \subseteq C_R([R, R])$. За лемою 4.5 маємо включення $A \subseteq Z(R)$. Таким чином, вважаємо, що $T(A) \neq R$. Якщо $[T(A), T(A)] = 0$, то $[A, A] = 0$ та згідно із лемою 4.7 одержуємо $A \subseteq Z(R)$. Припустимо, що $[T(A), T(A)] \neq 0$. За лемою 4.9 $T(A)$ містить ненульовий Δ -ідеал I кільця R . Оскільки

$$[I, B] \subseteq A \cap B = 0,$$

то робимо висновок, що $B \subseteq Z(R)$ за лемою 4.3. □

Лема 4.13. *Існує ізоморфізм кілець L_i .*

$$\text{IDer } R \ni \partial_a \mapsto a + Z(R) \in R^L/Z(R).$$

Доведення. Встановлюється безпосередньою перевіркою. □

Наслідок 4.3. *Нехай R — кільце. Тоді виконуються наступні властивості:*

- (1) $\text{IDer } R$ — *просте кільце Лі тоді і тільки тоді, коли фактор-кільце Лі $R^L/Z(R)$ просте,*
- (2) $\text{IDer } R$ — *первинне кільце Лі тоді і тільки тоді, коли фактор-кільце Лі $R^L/Z(R)$ первинне,*
- (3) $\text{IDer } R$ — *напівпервинне кільце Лі тоді і тільки тоді, коли фактор-кільце Лі $R^L/Z(R)$ напівпервинне,*
- (4) $\text{IDer } R$ — *примарне кільце Лі тоді і тільки тоді, коли фактор-кільце Лі $R^L/Z(R)$ примарне.*

Висновки до розділу 4

В цьому розділі досліджуються властивості кілець Лі та Жордана (які позначаються відповідно R^L та R^J), асоційованих з асоціативним кільцем R . Тут представлено результати, що стосуються взаємозв'язків між диференційною простотою (відповідно диференційною первинністю та диференційною напівпервинністю) кілець R , R^L та R^J .

В підрозділі 4.1 напрацьовано необхідні (надалі) підготовчі результати. Встановлено, що для Δ -ідеала Лі U кільця R виконується $[U, U] = 0$ або існує такий ненульовий Δ -ідеал I_U кільця R , що $[I_U, R] \subseteq U$ (твердження 4.1). Знайдено розширення теореми 1.3 із [60] на випадок диференційно простих кілець (теорема 4.1), а саме: доведено, що якщо U — Δ -ідеал Лі кільця R , то виконується одна з наступних умов:

- (1) $[R, R] \subseteq U$,
- (2) $U \subseteq Z(R)$,

(3) R містить таке підполе P , що $U \subseteq P$ та $[P, R] \subseteq P$.

В підрозділі 4.2 для вільного від 2-скруту кільця R знайдено взаємозв'язки між властивостями кільця Жордана R^J та властивостями асоціативного кільця R , тобто встановлено (теорема 4.2), що вірні наступні твердження:

- (1) R — Δ -просте кільце тоді і тільки тоді, коли R^J — Δ -просте жорданове кільце,
- (2) R — Δ -первинне кільце тоді і тільки тоді, коли R^J — Δ -первинне жорданове кільце,
- (3) R — Δ -напівпервинне кільце тоді і тільки тоді, коли R^J — Δ -напівпервинне жорданове кільце,

а також знайдено аналогічні зв'язки між властивостями лівого кільця Жордана R^{lJ} та властивостями асоціативного кільця R (твердження 4.2):

- (1) R — Δ -просте кільце тоді і тільки тоді, коли R^{lJ} — Δ -просте кільце Жордана,
- (2) R — Δ -первинне кільце тоді і тільки тоді, коли R^{lJ} — Δ -первинне кільце Жордана,
- (3) R — Δ -напівпервинне кільце тоді і тільки тоді, коли R^{lJ} — Δ -напівпервинне кільце Жордана.

Для вільного від 2-скруту кільця R знайдемо взаємозв'язки між властивостями фактор-кільця Лі $R^L/Z(R)$ та властивостями (асоціативного) фактор-кільця $R/\text{ann } C(R)$ (теорема 4.3). Для асоціативного кільця R знайдено зв'язки між кільцями Лі внутрішніх диференціювань $\text{IDer } R$ та асоційованим фактор-кільцем $R^L/Z(R)$ (наслідок 4.3).

В підрозділі 4.3 для вільного від 2-скруту кільця R з'ясовано вірність таких тверджень:

- (1) якщо $R^L/Z(R) - \widehat{\Delta}$ -просте кільце Лі, то R некомутативне та $R/\text{ann } C(R) - \overline{\Delta}$ -просте кільце,
- (2) якщо $R - \Delta$ -просте кільце, то $R^L/Z(R) - \widehat{\Delta}$ -просте кільце Лі або R комутативне,
- (3) якщо $R^L/Z(R) - \widehat{\Delta}$ -напівпервинне кільце Лі, то R некомутативне та фактор-кільце $R/\text{ann } C(R) - \overline{\Delta}$ -напівпервинне кільце,
- (4) якщо $R - \Delta$ -напівпервинне кільце, то $R^L/Z(R) - \widehat{\Delta}$ -напівпервинне кільце Лі або R комутативне,
- (5) якщо $R^L/Z(R) - \widehat{\Delta}$ -первинне кільце Лі, то R некомутативне та $R/\text{ann } C(R) - \overline{\Delta}$ -первинне кільце,
- (6) якщо $R - \Delta$ -первинне кільце, то $R^L/Z(R) - \widehat{\Delta}$ -первинне кільце Лі або R комутативне.

Результати цього підрозділу можна знайти в [9, 5, 11].

ВИСНОВКИ

В першому розділі дисертації досліджено деякі властивості кілець, всі диференціювання яких нільпотентні індексів ≤ 2 . Встановлено, що в напівпервинному кільці всі диференціювання (відповідно внутрішні диференціювання) нільпотентні тоді і тільки тоді, коли воно диференційно тривіальне (відповідно комутативне). Отримано, що радикал Джекобсона кільця з нільпотентними диференціюваннями індексів ≤ 2 містить всі його нільпотентні елементи.

А також досліджено диференційно напівпервинні кільця з диференціюванням, що діє як гомоморфізми чи антигомоморфізми. За певних умов встановлено, що таке диференціювання обов'язково нульове.

В другому розділі введено означення жорсткого диференціювання кільця та досліджено його властивості.

А саме розглянуто кільця R із властивістю $ad(a) \neq 0$ для деякого $d \in \text{Der } R$. Встановлено, що для вільного від 2-скруту напівпервинного кільця R усі диференціювання жорсткі тоді і тільки тоді, коли R редуковане.

Розширено результат П. Шарма на випадок нескінченних кілець у такому такому вигляді: нехай R — локальне кільце із ненульовим лівим T -нільпотентним радикалом Джекобсона $J(R)$, тоді наступні ствердження еквівалентні:

- (1) для кожного диференціювання $d \in \text{Der } R$ такого, що $d(J(R)) = 0$, випливає, що $d = 0$,
- (2) фактор-кільце $R/J(R)$ — диференційно тривіальне поле,
- (3) кожен автоморфізм $f \in \text{Aut } R$ такий, що $f(x) = x$ для

будь-якого $x \in J(R)$, тривіальний, тобто $f = \text{id}_R$.

Також встановлено, за яких умов комутативне артїнове кільце R має диференціювання, що не є жорстким.

В *третьому* розділі роботи досліджується будова кілець, що мають диференціювання (відповідно неединичний автоморфізм) з регулярними значеннями. Пригадаємо, що асоціативне кільце R задовольняє умову (*), якщо знайдеться таке ненульове диференціювання $d : R \rightarrow R$, що $d(x) = 0$ або $d(x)$ — регулярний елемент в кільці R для будь-якого елемента $x \in R$. Також автоморфізм φ кільця R задовольняє умову (**), якщо для φ -диференціювання $1 - \varphi$ справджується властивість (*).

В даному розділі отримано наступні результати:

- встановлено деякі елементарні властивості кільця R , що має диференціювання з регулярними значеннями (тобто з умовою (*));
- охарактеризовано будову комутативних кілець R , що мають ненульове диференціювання d , яке задовольняє умову (*).
- досліджено деякі елементарні властивості кілець, що мають φ -диференціювання з регулярними значеннями (тобто з умовою (**));
- описано будову правих кілець Голді R , що мають неединичний автоморфізм φ , який задовольняє умову (**).

В *четвертому* розділі досліджуються зв'язки властивостей кілець Лі та кільця Жордана (які позначаються відповідно через R^L та R^J), асоційованих з асоціативним кільцем R . Тут

представлено результати, що стосуються взаємозв'язків між диференційною простотою (відповідно диференційною первинністю та диференційною напівпервинністю) цих кілець.

На початку розділу доведено властивості, які використовуються в дослідженнях пізніше, та знайдено розширення результатів І. Херстейна на випадок диференційно простих кілець.

В даному розділі для вільного від 2-скруту кільця R досліджено взаємозв'язки між властивостями асоційованого кільця Жордана R^J та властивостями кільця R , тобто встановлено, що вірні наступні твердження:

- (1) R — Δ -просте кільце тоді і тільки тоді, коли R^J — Δ -просте жорданове кільце,
- (2) R — Δ -первинне кільце тоді і тільки тоді, коли R^J — Δ -первинне жорданове кільце,
- (3) R — Δ -напівпервинне кільце тоді і тільки тоді, коли R^J — Δ -напівпервинне жорданове кільце,

а також знайдено такі зв'язки між властивостями лівого кільця Жордана R^{lJ} та властивостями асоціативного кільця R :

- (1) R — Δ -просте кільце тоді і тільки тоді, коли R^{lJ} — Δ -просте кільце Жордана,
- (2) R — Δ -первинне кільце тоді і тільки тоді, коли R^{lJ} — Δ -первинне кільце Жордана,
- (3) R — Δ -напівпервинне кільце тоді і тільки тоді, коли R^{lJ} — Δ -напівпервинне кільце Жордана.

Для вільного від 2-скруту кільця R знайдемо взаємозв'язки між властивостями фактор-кільця Лі $R^L/Z(R)$ та властивостями (асоціативного) фактор-кільця $R/\text{ann } C(R)$. Для асоціативного кільця R знайдено зв'язки між кільцем Лі внутрішніх диференціювань $\text{IDer } R$ та асоційованим фактор-кільцем Лі $R^L/Z(R)$.

Більше того для вільного від 2-скруту кільця R з'ясовано, що:

- (1) якщо $R^L/Z(R) — \widehat{\Delta}$ -просте кільце Лі, то R некомутативне та $R/\text{ann } C(R) — \overline{\Delta}$ -просте кільце,
- (2) якщо $R — \Delta$ -просте кільце, то $R^L/Z(R) — \widehat{\Delta}$ -просте кільце Лі або R комутативне,
- (3) якщо $R^L/Z(R) — \widehat{\Delta}$ -напівпервинне кільце Лі, то R некомутативне та фактор-кільце $R/\text{ann } C(R) — \overline{\Delta}$ -напівпервинне кільце,
- (4) якщо $R — \Delta$ -напівпервинне кільце, то $R^L/Z(R) — \widehat{\Delta}$ -напівпервинне кільце Лі або R комутативне,
- (5) якщо $R^L/Z(R) — \widehat{\Delta}$ -первинне кільце Лі, то R некомутативне та $R/\text{ann } C(R) — \overline{\Delta}$ -первинне кільце,
- (6) якщо $R — \Delta$ -первинне кільце, то $R^L/Z(R) — \widehat{\Delta}$ -первинне кільце Лі або R комутативне.

Розроблені методи у дисертаційній роботі можна використати при подальшому дослідженні теорії кілець. Результати цих досліджень можуть бути використані при читанні лекцій та спецкурсів на механіко-математичних і фізико-математичних факультетах навчальних закладів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Лукашенко М.П. Кільця з нільпотентними диференціюваннями індексів ≤ 2 / М.П. Лукашенко // Карпат. мат. публ. — 2014. — Т. 6, № 1. — С. 91–95. DOI:10.15330/cmp.6.1.91-95.
- [2] Lukashenko Maria P. On derivations with regular values in rings / Maria P. Lukashenko // Math. Bulletin of the Shevchenko Scientific Society . — 2014. — V. 11. — P. 5–11.
- [3] Lukashenko M.P. On rigid derivations in rings / O.D. Artemovych, M.P. Lukashenko // Carpath. Math. Publ. — 2014. — V. 6, № 2. — P. 181–190. DOI: 10.15330/cmp.6.2.181-190
- [4] Lukashenko M.P. Derivations as homomorphisms or anti-homomorphisms in differentially semiprime rings / M.P. Lukashenko // Matematychni Studii. — 2015. — V. 43, № 1. — P. 12–15. DOI:10.15330/ms.43.1.12-15.
- [5] Lukashenko Maria P. Lie and Jordan structures of differentially semiprime rings / Orest D. Artemovych, Maria P. Lukashenko // Algebra and Discrete Mathematics. — 2015. — V. 20, № 1. — P.13–31.
- [6] Lukashenko M.P. Derivations with regular values in rings / M.P. Lukashenko // The 9-th International Algebraic Conference in Ukraine, 6–13 June, 2013, Lviv: book of abstracts. — Lviv, 2013. — P. 114.
- [7] Лукашенко М.П. Диференціювання з регулярними зна-

- ченнями в нетерових кільцях / О.Д. Артемович, М. П.Лукашенко // V Всеукраїнська наукова конференція “Нелінійні проблеми аналізу”, 19-21 вересня, 2013, Микуличин: Тези доповідей. – Івано-Франківськ: Вид-во Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника, 2013. — С.6.
- [8] Лукашенко М.П. Кільця з нільпотентними диференціюваннями індексів ≤ 2 / М.П. Лукашенко // I-а Літня школа. Алгебра, топологія і аналіз, 7-18 липня, 2014, Поляниця: Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2014. — С.46.
- [9] Lukashenko M.P. Lie and Jordan structures of differentially semiprime rings / O.D. Artemovych, M.P. Lukashenko // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin, 7-12 July, 2014, Kyiv: book of abstracts. – Kyiv, 2014. — P. 12.
- [10] Lukashenko M.P. On rigid derivations in rings / O.D. Artemovych, M.P. Lukashenko // Sixteenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, 14-15 May, 2015, Kyiv: book of abstracts. – Conference materials II. Algebra. Geometry. Analysis. Kyiv, 2015. — P. 25.
- [11] Lukashenko M. Left Jordan structure of differentially semiprime rings [Електронний ресурс] /М. Lukashenko // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015», 26–28 травня, 2015, Львів. – Електронні дані. – [Львів: Ін-тут приклад. проблем мех. і мат. ім. Я. С. Підстригача НАН України] – Режим доступу: <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2015/theses/Lukashenko.pdf> (дата звернення 04.11.2015 р.). – Назва з екрана.

- [12] Lukashenko M. P. Derivations as homomorphisms or anti-homomorphisms in differentially semiprime rings / M. P. Lukashenko // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu.A. Drozd, 20-27 August, 2015, Odessa: book of abstracts. — Odessa: I.I. Mechnikov Odessa National University, 2015. — P. 65.
- [13] Anderson D.F. The zero-divisor graph of a commutative ring / P.S. Livingston, D.F. Anderson // J. Algebra. — 1999. — V. 217. — P. 434–437. DOI:org/10.1006/jabr.1998.7840
- [14] Artemovych O.D. Differentially trivial and rigid rings of finite rank / O.D. Artemovych // Periodica Mathematica Hungarica. — 1998. — V. 36, № 1–2. — P. 1–16. DOI 10.1023/A:1004648818462
- [15] Artemovych O.D. Rigid right Bass rings / O.D. Artemovych // Algebra Colloq. — 2004. — V. 11, № 4. — P. 527–532.
- [16] Аржанцев І.В. Скінченно-вимірні підалгебри в поліноміальних алгебрах Лі рангу 1 / Аржанцев І.В., Македонський Є.О., Петравчук А.П. // Укр. мат. ж.— 2011. — Т. 63, № 5. — P. 708–712.
- [17] Ashraf M. On (σ, τ) -derivations in certain classes of rings / N. Rehman, M.A. Quadri, M. Ashraf // Rad. Mat. — 1999. — V. 9, № 2. — P. 187–192.
- [18] Asma A. Derivation which acts as a homomorphism or as an anti-homomorphism in a prime ring / A. Asma, K. Deepak // Inter. Math. Forum. — 2007. — V. 2, № 23. — P. 1105–1110.

- [19] Asma A. Generalized derivations as homomorphisms or as anti-homomorphisms in a prime rings / A. Asma, K. Deepak // Hacettepe J. Math. — 2009. — V. 38, № 1. — P. 17–20.
- [20] Asma A. On Lie ideals with derivations as homomorphisms and anti-homomorphisms / A. Asma, N. Rehman, A. Shakir // Acta Math. Hungar. — 2003. — V. 101, № 1–2. — P. 79–82.
- [21] Atiyah M.F. Introduction to commutative algebra / M.F. Atiyah, I.G. Macdonald // Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969. — 128p.
- [22] Bavula V.V. Lie algebras of unitriangular polynomial derivations and isomorphism criterion for their Lie factor algebras / V.V. Bavula // Marcel Dekker Inc., New York Basel Hong Kong, 1996. — 522p.
- [23] Beidar K.I. Rings with generalized identities / K.I. Beidar, W.S. Martindale III and A.V. Mikhalëv // arXiv:1204-4908 [Math.RA].
- [24] Beidar K.I. Orthogonal completeness and minimal prime ideals (in Russian) / K.I. Beidar, A.V. Mikhalëv // Trudy Sem. Petrovski. — 1984. — V. 10. — P. 227–234.
- [25] Beidar K.I. Orthogonal completeness and algebraic systems / K.I. Beidar and A.V. Mikhalëv // Uspekhi Mat. Nauk. — 1985. — V. 40. — P. 79–115 (Russian); English transl. in Russian Math. Surveys. — 1985. — V. 40. — P. 51–95.
- [26] Bell H.E. Rings in which derivations satisfy certain algebraic

- conditions / H.E. Bell, L.C. Kappe // *Acta Math. Hungar.* — 1989. — V. 53, № 3–4. — P. 339–346.
- [27] Bell H.E. Combinatorial commutativity and finiteness conditions for rings / H.E. Bell, A.A. Klein // *Comm. Algebra.* — 2001. — V. 29. — P. 2935–2943.
- [28] Bergen J. Lie ideals with regular and nilpotent elements and a result on derivations / J. Bergen // *Rend. Circolo Mat. Palermo Ser. II* — 1984. — V. 33. — P. 99–108.
- [29] Bergen J. Derivations with invertible values on a Lie ideal / J. Bergen and L. Carini // *Can. Math. Bull.* — 1988. — V. 31. — P. 103–110.
- [30] Bergen J. Rings with a special kind of automorphism / J. Bergen and I.N. Herstein // *Canad. Math. Bull.* — 1983. — V. 26. — P. 3–8.
- [31] Bergen J. Lie ideals and derivations of prime rings / J. Bergen, I.N. Herstein, E.W. Kerr // *J. Algebra.* — 1981. — V. 71. — P. 259–267.
- [32] Bergen J. Derivations with invertible values / J. Bergen, I. N. Herstein and C. Lanski // *Canad. J. Math.* — 1983. — V. 35. — P. 300–310.
- [33] Bergen J. Radicals of crossed products of enveloping algebras / J. Bergen, S. Montgomery, D.S. Passmann // *Israel J. Math.* — 1987. — V. 59. — P. 167–184.
- [34] Bergman G.M. Rings with fixed point-free group actions

- / G.M. Bergman, I.M. Isaacs // Proc. London Math. Soc. (3)— 1973. — V. 27. — P. 69–87.
- [35] Bhat V.K. Prime radical of Ore extensions over δ -rigid rings / V.K. Bhat // Algebra Discrete Math. — 2009. — V. 1 . — P. 14–19.
- [36] Brešar M. A note on derivations / M. Brešar // Math. J. Okayama Univ. — 1990. — V. 32. — P. 83–88.
- [37] Brešar M. Centralizing mappings and derivations in prime rings / M. Brešar // J. Algebra — 1993. — V. 156. — P. 385–394.
- [38] Brešar M. Functional identities / M. Brešar, M.A. Chebotar, W.S. Martindale 3rd // Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin, 2007. — 272p.
- [39] Бурков В.Д. О дифференциально первичных кольцах / В.Д. Бурков // Успехи мат. н. — 1980. — V. 35, № 5(215). — P. 219–220.
- [40] Burkov V.D. Stiff derivations of semiprime rings / V.D. Burkov // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. — 1987. — V. 12. — P. 12–14, 79 (english trans.: Soviet Math. (Iz. VUZ) — 1987. — V. 31(12). — P. 13–15).
- [41] Carini L. Lie ideals and nil derivations / L. Carini, A. Giambruno // Boll. Un. Mat. Ital. — 1985. — V. 6. — P. 497–503.
- [42] Chang J.C. α -Derivations with invertible values / J.C. Chang

- // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. — 1985. — V. 13. — P. 323–333.
- [43] Chuang C.L. On a conjecture of Herstein / C.L. Chuang, J.S. Lin // J. Algebra. — 1989. — V. 126. — P. 119–138. doi:[http://dx.doi.org/10.1016/0021-8693\(89\)90322-0](http://dx.doi.org/10.1016/0021-8693(89)90322-0)
- [44] Chung L.O. Nilpotency of derivations / L.O. Chuang, J. Luh // Can. Math. Bull. — 1984. — V. 26. — P. 341–346.
- [45] Chung L.O. Remark on nilpotency of derivations / L.O. Chuang, Y. Kobayashi // Proc. Japan Acad. Ser. A. — 1984. — V. 60. — P. 329–330.
- [46] Chuang C.-L. Nilpotent derivations / C.-L. Chuang, T.-K. Lee // J. Algebra. — 2005. — V. 60. — P. 381–401.
- [47] Cohen I.S. On the structure and ideal theory of complete local rings / I.S. Cohen // Trans. Amer. Math. Soc. — 1946. — V. 59. — P. 54–106.
- [48] Dhara B. Generalized derivations acting as a homomorphism or anti-homomorphism in semiprime rings / B. Dhara // Beiträge Algebra Geom. — 2012. — V. 53, № 1. — P. 203–209.
- [49] Dlab V. Semigroups with few endomorphisms / V. Dlab, D.Y. Neumann // J. Austral Math. Soc. — 1969. — V. 10. — P. 162–168.
- [50] Felzenszwalb B. On the centralizers of ideals and nil derivations / B. Felzenszwalb, C. Lanski // J. Algebra. — 1983. — V. 83. — P. 520–530.
- [51] Fisher J.R. A Goldie theorem for differentiably prime rings

- / J.R. Fisher // *Pacif. J. Math.* — 1975. — V. 58, № 1. — P. 71–77.
- [52] Grzeszczuk P. On nilpotent derivations of semiprime rings / P. Grzeszczuk // *J. Algebra.* — 1992. — V. 149. — P. 313–321.
- [53] Giambruno A. Derivations with nilpotent values / A. Giambruno, I.N. Herstein // *Rend. Circ. Mat. Palermo.* — 1981. — V. 30. — P. 199–206.
- [54] Giambruno A. Derivations with invertible values in rings with involution / A. Giambruno, P. Misso and P.C. Miles // *Pacif. J. Math.* — 1986. — V. 123. — P. 47–54.
- [55] Goodearl K. R. Primitivity in differential operator rings / K.R. Goodearl and R.B. Warfield // *Math. Zeitschrift.* — 1982. — V. 180. — P. 503–523.
- [56] Gupta N. On the Lie ideals of a ring / N. Gupta, F. Levin // *J. Algebra.* — 1983. — V. 81. — P. 225–231.
- [57] Heerema N. Derivations on p -adic fields / N. Heerema // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1962. — V. 102. — P. 346–351.
- [58] Herstein I.N. On the Lie and Jordan rings of a simple associative ring / I.N. Herstein // *Amer. J. Math.* — 1955. — V. 77. — P. 279–285.
- [59] Herstein I.N. The Lie ring of a simple associative ring / I.N. Herstein // *Duke Math. J.* — 1955. — V. 22. — P. 471–476.

- [60] Herstein I.N. Topics in Ring Theory / I.N. Herstein // Univ. Chicago Math. Lect. Notes, 1965.
- [61] Herstein I.N. Noncommutative rings / I.N. Herstein // The Carus Math. Monographs, No. 15, John Wiley and Sons Inc., New York, 1968. — 199p.
- [62] Herstein I.N. On the Lie structure of an associative ring / I.N. Herstein // J. Algebra. — 1970. — V. 14. — P. 561–571.
- [63] Herstein I.N. Rings with involution / I.N. Herstein // The University of Chicago Press, Chicago London, 1976.
- [64] Herstein I.N. Center-like elements in prime rings / I.N. Herstein // J. Algebra. — 1979. — V. 60. — P. 567–574.
- [65] Herstein I.N. Derivations of prime rings having power central values / I.N. Herstein // Contemporary Math. — 1982. — V. 13. — P. 163–171.
- [66] Hirano Y. Some commutativity theorems for prime rings with derivations and differentially semiprime rings / Y. Hirano and H. Tominaga // Math. J. Okayama Univ. — 1984. — V. 26. — P. 101–108.
- [67] Hongan M. (σ, τ) -derivations with invertible values / M. Hongan and H. Komatsu // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. — 1987. — V. 15. — P. 411–415.
- [68] Jacobson N. Abstract derivation and Lie algebras / N. Jacobson // Trans. Amer. Math. Soc. — 1937. — V. 42, № 2. — P. 206–224.

- [69] Jacobson N. Structure of rings / N. Jacobson // Amer. Math. Soc. 190 Hope St. Providence, R.I., 1956.
- [70] Jacobson N. Lie algebras / N. Jacobson // Interscience, New York, 1962.
- [71] Jacobson N. Structure and representations of Jordan algebras / N. Jacobson // Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., V. 39, Providence, R.I., 1968.
- [72] Jordan C.R. The Lie structure of a commutative ring with derivation / C.R. Jordan, D.A. Jordan // J. London Math. Soc.(2). — 1978. — V. 18. — P. 39–49.
- [73] Jordan D.A. Noetherian Ore extensions and Jacobson rings / D.A. Jordan // J. London Math. Soc. (2). — 1975. — V. 10. — P. 281–291.
- [74] Kaygorodov I. Alternative algebras admitting derivations with invertible values and invertible derivations / I. Kaygorodov and Y. Popov // arxiv:1212.0615v2 (31 Jul 2013).
- [75] Kaplansky I. An introduction to Differential Algebra / I. Kaplansky // Hermann, Paris, 1976.
- [76] Kolchin E.R. Differential Algebra and Algebraic Groups/ E.R. Kolchin // Acad. Press, New York/London, 1973.
- [77] Komatsu H. Generalized derivations with invertible values / H. Komatsu and A. Nakajima // Comm. Algebra. — 2004. — V. 32. — P. 1937–1944.

- [78] Krempa J. Some examples of reduced rings / J. Krempa // Algebra Colloq. — 1996. — V. 3, № 4. — P. 289–300.
- [79] Lambek J. Lectures on rings and modules / J. Lambek // Blaisdell Publ. Co. A division of Ginn and Co. Waltham Mass. Toronto London, 1966.
- [80] Lanski C. Derivations with nilpotent values on Lie ideals / C. Lanski // Proc. Amer. Math. Soc. — 1990. — V. 108. — P. 31–37. doi:<http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-1990-0984803-4>
- [81] Lee T.K. Derivations with invertible values on a multilinear polynomial / T.K. Lee // Proc. Amer. Math. Soc. — 1993. — V. 119. — P. 1077–1083.
- [82] Lee T.K. A result on derivations/ T.K. Lee, J.S. Lin // Proc. Amer. Math. Soc. — 1996. — V. 124, № 6. — P. 1687–1691. <http://www.jstor.org/stable/2161976>
- [83] Lee T.K. Derivations with invertible or nilpotent values on multilinear polynomials / T.K. Lee, T.L. Wong // Comm Algebra. — 2006. — V. 34, № 8. — P. 633–640.
- [84] Liu J.S. Generalized derivations with invertible or nilpotent values on multipolynimials / J.S. Liu and C.K. Liu // Comm. Algebra. — 2006. — V. 34. — P. 633–640.
- [85] Makedonskyi Ie.O. On nilpotent and solvable Lie algebras / Ie.O. Makedonskyi and A.P. Petravchuk // J. Algebra — 2014. — V. 401. — P. 245–257.

- [86] Maxson C.J. rigid rings / C.J. Maxson // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1978. — V. 21. — P. 95–101.
- [87] Martindale W.S., 3rd. Lie isomorphisms of prime rings / W.S. Martindale, 3rd // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — V. 142. — P. 437–455.
- [88] McLean K.R. Rigid Artinian rings / K.R. McLean // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1982. — V. 25. — P. 97–99.
- [89] McConnell J.C. Noncommutative Noetherian Rings / J.C. McConnell and J.C. Robson // Pure and Appl. math. A Wiley-Intersci. Publ., John Wiley and Sons, Chichester New York Brisbane Toronto Singapore, 1987. — 596p.
- [90] McCrimmon K. On Herstein's theorem relating Jordan and associative algebras / K. McCrimmon // J. Algebra. — 1969. — V. 13. — P. 382–392.
- [91] Mulay S.B. Cycles and symmetries of zero-divisors / S.B. Mulay // Comm. Algebra. — 2002. — V. 30, № 7. — P. 3533–3558.
- [92] Nowicki A. Stiff derivations of commutative rings / A. Nowicki // Colloq. Math. — 1984. — V. 48, № 1. — P. 7–16.
- [93] Nowicki A. The Lie structure of a commutative ring with a derivation / A. Nowicki // Arch. Math. — 1985. — V. 45. — P. 328–335.
- [94] Petravchuk A.P. On pairs of commuting derivations of the

- polynomial ring on one or two variables / A.P. Petravchuk
// Linear Algebra Appl. — 2010. — V. 433. — P. 574–579.
- [95] Petravchuk A.P. On behavior of solvable ideals of Lie algebras under outer derivations / A.P. Petravchuk // Comm. Algebra — 2010. — V. 38, № 6. — P. 2311–2316.
- [96] Posner E.C. Derivations in prime rings / E. C. Posner // Proc. Amer. Math. Soc. — 1957. — V. 8. — P. 1093–1100.
- [97] Posner E.C. Differentiably simple rings / E.C. Posner // Proc. Amer. Math. Soc. — 1960. — V. 11. — P. 337–343.
- [98] Rehman N. On generalized derivations as homomorphisms and anti-homomorphisms / N. Rehman // Glasnik Mat. — 2004. — V. 39(59). — P. 27–30.
- [99] Rehman N. Generalized derivations as homomorphisms and anti-homomorphisms on Lie ideals / N. Rehman, M. A. Raza // Arab J. Math. Sci. (to appear)
<http://dx.doi.org/10.1016/j.amsc.2014.09.001>
- [100] Ritt J.F. Differential Algebra / J.F. Ritt // Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 33, New York, 1950.
- [101] Sharma P.K. A note on automorphisms of local rings / P.K. Sharma // Comm. Algebra. — 2002. — V. 30, № 8. — P. 3743–3747.
- [102] Scudo G. Generalized derivations acting as homomorphisms on polynomials in prime rings / G. Scudo // Southeast Asian Bull. Math. — 2014. — V. 38. — P. 563–572.

- [103] Trzepizur A. Differential rings with central derivation of higher order / A. Trzepizur // Math. J. Okayama Univ. — 1985. — V. 27. — P. 7–9.
- [104] Vaš L. Extending ring derivations to right and symmetric rings and modules of quotients / L. Vaš // Comm. Algebra. — 2009. — V. 37. — P. 794–810.
- [105] Volpenka P. A rigid relation exists on any set / P. Volpenka, A. Pultr, Z. Hedrlin // Comment. Mat. Univ. Carolinae. — 1965. — V. 6. — P. 149–155.
- [106] Wang T.L. A special functional identity in prime rings / T.L. Wang // Comm Algebra. — 2001. — V. 32, № 1. — P. 363–377.
- [107] Wang Y. Derivations as homomorphisms or anti-homomorphisms on Lie ideals / Y. Wang, H. You // Acta Math. Sin. 23(2007), no. 6, 1149–1152.
- [108] Yenigul M. On prime and semiprime rings with α -derivations / M. Yenigul, N. Argaç // Turkish J. Math. — 1994. — V. 18. — P. 280–284.
- [109] Zuev I.I. Lie ideals of associative rings / I.I. Zuev // (in Russian), Uspehi Mat. Nauk. — 1963. — V. 18. — P. 155–158.