

Національна академія наук України
Інститут прикладних проблем механіки і математики
імені Я. С. Підстригача

Н а п р а в а х р у к о п и с у

Глова Тарас Ярославович

УДК 517.53

**УЗАГАЛЬНЕНІ ШКАЛИ ЗРОСТАННЯ
АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ**

01.01.01 – математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:

Філевич Петро Васильович,

доктор фізико-математичних наук,

професор

Львів – 2016

Зміст

Перелік умовних позначень	4
Вступ	7
Розділ 1. Огляд літератури за темою і основних результатів дисертації	17
1.1. Огляд літератури та вибір напрямів досліджень	17
1.2. Основний зміст дисертації	35
Розділ 2. Зростання рядів Діріхле	45
2.1. Властивості спряжених за Юнгом функцій	46
2.2. Загальні результати щодо зростання рядів Діріхле	54
2.3. Узагальнені типи зростання рядів Діріхле	62
2.4. Показники і Φ -тип абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле	79
2.5. Умова застосовності формули для обчислення R -порядку цілого ряду Діріхле	86
2.6. Висновки до розділу 2	92
Розділ 3. Зростання аналітичних функцій, зображених степеними рядами	93

3.1. Зростання аналітичних у крузі функцій в термінах узагальнених типів	93
3.2. Зростання цілих функцій в термінах узагальнених Φ -рядків	107
3.3. Висновки до розділу 3	115
Розділ 4. Ефект Пелі для цілих рядів Діріхле	116
4.1. Допоміжні результати	118
4.2. Критерій наявності ефекту Пелі	126
4.3. Ряди Діріхле заданого порядку з ефектом Пелі	133
4.4. Висновки до розділу 4	135
Висновки	136
Список використаних джерел	138

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Числові множини ($\mathcal{R} \in (0, +\infty]$):

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ — множина невід'ємних цілих чисел;

\mathbb{R} — множина дійсних чисел (дійсна пряма);

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ — розширена дійсна пряма;

\mathbb{C} — множина комплексних чисел (комплексна площина);

$\mathbb{D}_{\mathcal{R}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \mathcal{R}\}$.

Класи функцій ($A \in (-\infty, +\infty]$, $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$):

Λ — клас невід'ємних зростаючих до $+\infty$ послідовностей

$$\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}_0};$$

X — клас всіх функцій $h : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$;

L — клас неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функцій;

Ω_A — клас неперервних на $[\sigma_0, A)$ функцій Φ таких, що

$$x\sigma - \Phi(\sigma) \rightarrow -\infty, \sigma \uparrow A, \text{ для кожного } x \in \mathbb{R};$$

Ω_A^* — клас опуклих на $[\sigma_0, A)$ функцій $\Phi \in \Omega_A$;

Ω'_A — клас опуклих на $(-\infty, A)$ функцій Φ таких, що

$$\Phi(\sigma) \rightarrow +\infty \text{ і } \Phi'_+(\sigma) \rightarrow +\infty, \text{ якщо } \sigma \uparrow A;$$

$\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ — клас аналітичних у крузі $\mathbb{D}_{\mathcal{R}}$ функцій вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, f \neq \text{const.}$$

Позначення, пов'язані з дійсними функціями ($\lambda \in \Lambda$, $h \in X$):

$n_\lambda(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} 1$, $x \in [0, +\infty)$, — лічильна функція послідовності λ ;
 $\tilde{h}(\sigma) = \sup\{\sigma x - h(x) : x \in \mathbb{R}\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, — функція, спряжена за
Юнгом з h .

Характеристики аналітичної у крузі функції ($f \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$,
 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $r \in [0, \mathcal{R})$, $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$):

$$\begin{aligned} M(r, f) &= \max\{|f(z)| : |z| = r\} \text{ — максимум модуля функції } f; \\ \mu(r, f) &= \max\{|a_n| r^n : n \in \mathbb{N}_0\} \text{ — максимальний член функції } f; \\ G(r, f) &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n; \\ T_\Phi(f) &= \overline{\lim}_{r \uparrow \mathcal{R}} \frac{\ln M(r, f)}{\Phi(\ln r)} \text{ — } \Phi\text{-тип функції } f; \\ t_\Phi(f) &= \overline{\lim}_{r \uparrow \mathcal{R}} \frac{\ln \mu(r, f)}{\Phi(\ln r)}; \\ \mathcal{T}_\Phi(f) &= \overline{\lim}_{r \uparrow \mathcal{R}} \frac{\ln G(r, f)}{\Phi(\ln r)}. \end{aligned}$$

Характеристики цілої функції ($f \in \mathcal{H}_{+\infty}$, $\Phi \in \Omega_{+\infty}$):

$$\begin{aligned} T(r, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \text{ — характеристика Неванлінни} \\ &\text{функції } f; \\ \rho_\Phi(f) &= \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln \Phi(\ln r)} \text{ — } \Phi\text{-порядок функції } f; \\ \varkappa_\Phi(f) &= \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln \mu(r, f)}{\ln \Phi(\ln r)}; \\ \tau_\Phi(f) &= \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln G(r, f)}{\ln \Phi(\ln r)}. \end{aligned}$$

Характеристики ряду Діріхле ($F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$, $s = \sigma + it$,
 $\lambda \in \Lambda$, $\Phi \in \Omega_A$):

$$\begin{aligned} E_1(F) &= \{\sigma \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{\sigma \lambda_n} < +\infty\}; \\ E_2(F) &= \{\sigma \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| e^{\sigma \lambda_n} = 0\}; \\ \sigma_a(F) &= \begin{cases} -\infty, & \text{якщо } E_1(F) = \emptyset, \\ \sup E_1(F), & \text{якщо } E_1(F) \neq \emptyset, \end{cases} \text{ — абсциса збіжності} \\ &\text{ряду } F; \end{aligned}$$

$$\beta(F) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} = \begin{cases} -\infty, & \text{якщо } E_2(F) = \emptyset, \\ \sup E_2(F), & \text{якщо } E_2(F) \neq \emptyset; \end{cases}$$

$M(\sigma, F) = \sup\{|F(s)| : \operatorname{Re} s = \sigma\}$, $\sigma < \sigma_a(F)$, — максимум модуля ряду F ;

$\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n \in \mathbb{N}_0\}$, $\sigma < \beta(F)$, — максимальний член ряду F ;

$$G(\sigma, F) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|e^{\sigma\lambda_n}, \quad \sigma < \sigma_a(F);$$

$T_{\Phi}(F) = T_{\Phi, A}(F) = \overline{\lim}_{\sigma \uparrow A} \frac{\ln M(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)}$ — Φ -тип ряду F у півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < A\}$, $A \leq \sigma_a(F)$;

$$t_{\Phi}(F) = t_{\Phi, A}(F) = \overline{\lim}_{\sigma \uparrow A} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)}, \quad A \leq \beta(F).$$

Класи рядів Діріхле ($\lambda \in \Lambda$, $A \in (-\infty, +\infty]$):

$\mathcal{D}_A(\lambda)$ — клас рядів Діріхле вигляду $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$, $F \not\equiv \text{const}$, для яких $\sigma_a(F) \geq A$;

$$\mathcal{D}_A = \cup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}_A(\lambda);$$

$\mathcal{D}_A^*(\lambda)$ — клас рядів Діріхле вигляду $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$, $F \not\equiv \text{const}$, для яких $\beta(F) \geq A$;

$$\mathcal{D}_A^* = \cup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}_A^*(\lambda);$$

$\mathcal{S} = \mathcal{D}_{+\infty}$ — клас цілих рядів Діріхле $F \not\equiv \text{const}$ зі зростаючою до $+\infty$ послідовністю показників;

\mathcal{S}_+ — клас рядів Діріхле $F \in \mathcal{S}$ з невід'ємними коефіцієнтами;

\mathcal{S}_* — клас рядів Діріхле $F \in \mathcal{S}$, для яких

існує спадна до 0 на $(\sigma_0, +\infty)$ функція α така,

що $\ln G(\sigma, F) = O(\ln S((1 + \alpha(\sigma))\sigma, F))$, $\sigma \rightarrow +\infty$,

де $S(\sigma, F) = \max\{|F(s)| : |s| = \sigma\}$.

ВСТУП

Актуальність теми. Задача щодо описання зростання аналітичної функції через послідовність модулів коефіцієнтів степеневого ряду чи ряду Діріхле, який задає цю функцію, є однією з центральних задач теорії аналітичних функцій.

Важливими характеристиками зростання аналітичних функцій є їх порядок, тип, уточнений порядок, а також їх узагальнені версії — α , β -порядок чи Φ -тип. Роль цих характеристик в теорії аналітичних функцій є загальновідомою. Згадані поняття знаходять своє використання і в інших розділах математики, в яких як природні об'єкти виникають аналітичні функції, зокрема, в теорії ймовірностей ([41, 6, 53, 26, 54, 35, 36, 92, 93]), теорії диференціальних рівнянь ([9, 55, 77, 91, 82]), функціональному аналізу ([28]), теорії наближень ([4, 5]), алгебрі ([46]).

Зростання аналітичної функції, як правило, ототожнюють зі зростанням логарифма її максимуму модуля. З огляду на це, основою класифікації при побудові тієї чи іншої шкали зростання аналітичних функцій є швидкість зростання логарифма їх максимуму модуля.

На початковому етапі вивчення властивостей аналітичних функцій найбільш плідними виявились поняття порядку та типу цілої функції, які виникають внаслідок порівняння зростання такої функції зі зростанням степеневих функцій. Певної зручності у використанні цих понять додають класичні формули Коші-Адамара, за якими порядок і тип цілої функції порівняно просто визначаються через послідовність

модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення.

У випадку цілої функції нульового чи нескінченного порядку поняття її порядку та типу, як і формули Коші-Адамара для обчислення цих величин, дають обмежену інформацію щодо зростання самої функції. У зв'язку з цим в роботах Е. Бореля, Е. Ліндельофа, Е. Мейє, П. Бутру, О. Блюменталю, Ж. Валірона, А. Шенхаге, Г.А. Фрідмана будувались нові шкали зростання, в яких вибирались відмінні від степеневих функції порівняння, а для побудованих шкал встановлювались аналоги формул Коші-Адамара.

Гнучку шкалу зростання цілих функцій, яка містить усі раніше відомі шкали, було запропоновано М.М. Шереметою [74]. При її побудові в якості функцій порівняння вибираються не конкретні елементарні функції чи їх композиції, а виділяються широкі класи функцій порівняння з мінімальними обмеженнями, достатніми для отримання формул типу Коші-Адамара. В результаті цих досліджень виникло поняття узагальненого порядку (α, β -порядку) цілої функції. Фіксуємо в узагальненій шкалі одну з функцій α чи β та вважаючи іншу довільною, отримуємо доволі загальні її підшкали. Зокрема, прийнявши $\alpha(x) = x$ і перепозначивши β через Φ , приходимо до поняття Φ -типу цілої функції. Зазначимо, що необхідну та достатню умови на опуклу функцію Φ , за якої Φ -тип кожної цілої функції дорівнює Φ -типу логарифма максимального члена її степеневого розвинення (а тому й виражається через модулі коефіцієнтів цього розвинення за формулою типу Коші-Адамара), знайшов П.В. Філевич [62]. Ця умова виявилась значно слабшою за умови, за яких раніше були відомі формули типу Коші-Адамара для узагаль-

неної шкали у випадку $\alpha(x) = x$. Це свідчить про нетривіальність задачі щодо знаходження необхідних і достатніх умов на функції α і β , за яких α, β -порядок кожної цілої функції можна виразити через послідовність модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення за деякою формулою типу Коші-Адамара.

Дослідження, аналогічні згаданим вище, проводились і для опису зростання аналітичних у крузі функцій, зображених степеневими рядами. Шкали зростання, що виникають внаслідок порівняння зростання аналітичної в одиничному крузі функції з конкретними неперервними зростаючими до $+\infty$ на $[r_0, 1)$ функціями, розглядались в роботах Ж. Валірона, Ф. Бойерманна, М. Фуджівари, Г. Мак-Лейна, Г.А. Фрідмана, Н.В. Говорова. Зростання аналітичних в одиничному крузі функцій в термінах узагальнених порядків вивчав М.М. Шеремета [75].

Безпосереднім узагальненням степеневого ряду, що задає цілу чи аналітичну в крузі функцію, є цілий (абсолютно збіжний в \mathbb{C}) чи, відповідно, абсолютно збіжний у півплощині ряд Діріхле зі зростаючою до $+\infty$ системою показників (λ_n) . Тому згадані вище результати для степеневих рядів узагальнювались на випадок таких рядів Діріхле.

Прямими аналогами порядку та типу цілої функції, зображеної степеневим рядом, для цілих рядів Діріхле є їх R -порядок та R -тип, що були уведені Ж. Ріттом. Крім того, Ж. Рітт встановив достатні умови на послідовність (λ_n) , за яких для обчислення R -порядку та R -типу кожного цілого ряду Діріхле зі заданою системою показників (λ_n) правильні прямі аналоги формул Коші-Адамара. Питання про остаточність знайдених Ж. Ріттом умов розглядалось, зокрема, в роботах

К. Сугімури, Ф.Й. Гече, В.С. Бойчука і А.Е. Єременка. Однак, наскільки нам відомо, необхідні та достатні умови застосовності згаданих аналогів формул Коші-Адамара досі не були встановлені.

Загальні результати щодо опису зростання цілого ряду Діріхле через послідовність модулів його коефіцієнтів отримано в роботах Б.В. Винницького і М.М. Шеремети, Я.Д. П'яниці і М.М. Шеремети, М.М. Шеремети, В.А. Осколкова, В.А. Осколкова і Л.І. Калініченко.

Дослідження зростання абсолютно збіжних у півплощині в термінах порядків, типів чи узагальнених порядків проведено в роботах Е.Я. Дагене, В.С. Бойчука, Ю.М. Галя і М.М. Шеремети, А.М. Гайсина, О.Б. Скасківа і В.М. Сороківського.

Використовуючи поняття α, β -порядку абсолютно збіжного у півплощині $\operatorname{Re} s < A$ ряду Діріхле, яке для $A = +\infty$ введене в роботі Я.Д. П'яниці і М.М. Шеремети [49], а для $A = 0$ — в роботі Ю.М. Галя і М.М. Шеремети [11], згадані дослідження стосовно зростання рядів Діріхле в термінах узагальнених порядків можна охарактеризувати як такі, що визначають достатні умови на послідовність (λ_n) та функції порівняння α і β , за яких узагальнений порядок кожного абсолютно збіжного у півплощині $\operatorname{Re} s < A$ ряду Діріхле вигляду $F(s) = \sum a_n e^{s\lambda_n}$ виражається через послідовність $(|a_n|)$ за формулою типу Коші-Адамара. Зазначимо, що за знайдених умов α, β -порядок кожного такого ряду F дорівнює α, β -порядку логарифма його максимального члена. Цей факт, на якому не завжди акцентувалась увага, ставав визначальним при встановленні формул типу Коші-Адамара, оскільки зростання логарифма максимального члена ряду Діріхле відносно довільної функції

порівняння порівняно просто описується через послідовність модулів коефіцієнтів цього ряду за допомогою функції, спряженої за Юнгом зі заданою функцією порівняння.

У цьому зв'язку виникає загальна проблема щодо отримання не лише достатніх, а й необхідних і достатніх умов на послідовність (λ_n) та функції порівняння α і β , за яких узагальнений порядок кожного абсолютно збіжного у півплощині $\operatorname{Re} s < A$ ряду Діріхле дорівнює α, β -порядку логарифма його максимального члена. Ця проблема, безумовно, складна і далека від остаточного розв'язання, а тому природною є спроба отримання її розв'язання для узагальнених підшкал зростання, тобто у випадку, коли одна з функцій α чи β задана конкретно. Зокрема, актуальною є задача про встановлення необхідних і достатніх умов на послідовність (λ_n) та функцію порівняння Φ , за яких узагальнений Φ -тип кожного абсолютно збіжного у півплощині $\operatorname{Re} s < A$ ряду Діріхле дорівнює Φ -типу логарифма його максимального члена. За певних умов на функцію Φ розв'язок сформульованої задачі впливає з результатів М.М. Шеремети [78], однак в загальному випадку ця задача залишалась нерозв'язаною.

Рівність між α, β -порядком і α, β -порядком логарифма максимального члена аналітичної функції, зображеної степеневим рядом чи рядом Діріхле з фіксованою системою показників, є достатньою, але не обов'язково необхідною умовою для того, щоб її α, β -порядок можна було виразити через послідовність модулів коефіцієнтів відповідного ряду. Тому природно постає задача про встановлення необхідних і достатніх умов на функції α і β (чи на одну з цих функцій, якщо інша

є заданою), за яких α, β -порядок аналітичної функції, зображеної тим чи іншим рядом, залежить лише від послідовності модулів його коефіцієнтів. Зазначимо, що задачі такого роду в літературі досі практично не розглядались.

Доволі часто основою класифікації при побудові тієї чи іншої шкали зростання аналітичних функцій замість швидкості зростання логарифма їх максимуму модуля є швидкість зростання їх характеристики Неванлінни. Добре відомо, що для цілих функцій їх порядок збігається з порядком їх характеристики Неванлінни. Цей факт свідчить про те, що швидкість зростання логарифма максимуму модуля цілої функції скінченного порядку є близькою до швидкості зростання її характеристики Неванлінни. Однак, як довів Р. Пелі ще в 1932 р., для кожного $\rho > 0$ існує ціла функція порядку ρ , логарифм максимуму модуля якої на деякій послідовності зростає швидше за її характеристику Неванлінни (у такому випадку кажуть, що ціла функція має ефект Пелі). У випадку $\rho \geq 1$ приклади таких цілих функцій побудовано також в роботі А.А. Гольдберга і Й.В. Островського [26], причому для заданої зростаючої до $+\infty$ послідовності (λ_n) ці функції будувались у вигляді ряду Діріхле з невід'ємними коефіцієнтами a_n і показниками λ_n . У зв'язку зі сказаним виникає задача про можливість встановлення необхідних і достатніх умов, за яких заданий ряд Діріхле вказаного вигляду має ефект Пелі. Розв'язок цієї задачі за додаткової умови на послідовність (λ_n) було знайдено П.В. Філевичем [85]. У загальному випадку ця задача не була розв'язаною.

Сформульовані задачі, а також ряд інших задач розглянуто в даній

дисертаційній роботі. З огляду на сказане вище, актуальність розгляду задач такого роду не повинна викликати сумніву.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Напрямок досліджень, обраний у дисертації, передбачений планами наукової роботи Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Матеріал дисертації є складовою частиною досліджень за держбюджетними темами "Прямі та обернені задачі спектральної теорії операторів та функціональних алгебр на банахових просторах" (номер державної реєстрації 0111U008862) та "Алгебро-геометричні методи дослідження інваріантних структур на многовидах та релятивістських рівнянь математичної і теоретичної фізики" (номер державної реєстрації 0110U004819).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є описання зв'язку між зростанням аналітичних функцій та поведінкою послідовності модулів коефіцієнтів розвинень цих функцій у степеневий ряд чи ряд Діріхле.

Задачі дослідження:

1) знайти необхідну та достатню умову на послідовність показників абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле і функцію порівняння Φ , за якої Φ -тип цього ряду дорівнює Φ -типу логарифма його максимального члена;

2) встановити необхідну і достатню умову застосовності формули Ж. Рітта для обчислення R -порядку цілого ряду Діріхле;

3) отримати необхідну і достатню умову на функцію порівняння Φ , за якої Φ -тип кожної аналітичної в крузі функції можна виразити через

послідовність модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення;

4) описати всі функції порівняння Φ , для яких Φ -порядок кожної цілої функції можна виразити через послідовність модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення;

5) знайти необхідні та достатні умови наявності ефекту Пелі для цілих рядів Діріхле з невід'ємними коефіцієнтами.

Об'єктом дослідження є аналітичні функції, зображені степеневими рядами та рядами Діріхле.

Предметом дослідження є зростання аналітичних функцій, зображених степеневими рядами та рядами Діріхле.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач використовуються загальні методи теорії функцій, а також деякі прийоми та ідеї з робіт М.М. Шеремети та П.В. Філевича.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертації є новими і полягають в наступному:

1) знайдено необхідну та достатню умову на послідовність показників абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле і функцію порівняння Φ , за якої Φ -тип цього ряду дорівнює Φ -типу логарифма його максимального члена;

2) встановлено, що умова К. Сугімури є не лише достатньою, а й необхідною умовою застосовності формули Ж. Рітта для обчислення R -порядку цілого ряду Діріхле;

3) отримано необхідну і достатню умову на функцію порівняння Φ , за якої Φ -тип кожної аналітичної в крузі функції можна виразити через послідовність модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення;

4) описано всі функції порівняння Φ , для яких Φ -порядок кожної цілої функції можна виразити через послідовність модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення;

5) знайдено необхідні та достатні умови наявності ефекту Пелі для цілих рядів Діріхле з невід'ємними коефіцієнтами.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер і є певним внеском у теорію аналітичних функцій. Вони можуть бути використані як в теорії функцій, так і в інших галузях сучасної математики.

Особистий внесок здобувача. Викладені в дисертаційній роботі результати отримано автором самостійно. Науковому керівнику П. В. Філевичу в роботах, опублікованих спільно, належать постановки задач та деякі ідеї щодо їх розв'язання.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації були оприлюднені і обговорені на таких конференціях:

1) Міжнародній математичній конференції ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 19–23 вересня 2011 року);

2) Всеукраїнській науковій конференції "Алгебра, топологія, аналіз, стохастика" (Микуличин, 20–23 вересня 2012 року);

3) Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого – 3 березня 2013 року);

4) V всеукраїнській науковій конференції "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 19–21 вересня 2013 року);

5) Міжнародній науковій конференції "Комплексний аналіз та сумі-

жні питання" (Львів, 23–28 вересня 2013 року);

б) Конференції молодих учених "Підстригачівські читання – 2014" (м. Львів, 28–30 травня 2014 року).

Про результати дисертації також доповідалося на Львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники проф. А.А. Кондратюк, проф. О.Б. Скасків), на науковому семінарі відділу диференціальних рівнянь і теорії функцій Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (керівники член-кор. НАН України Б.Й. Пташник, проф. В.О. Пелих), а також на навчально-науковому семінарі "Прикладний нелінійний аналіз" кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" (керівники проф. А.В. Загороднюк, доц. С.В. Шарин).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковано у 13 наукових працях, з них 7 ([13, 14, 15, 16, 17, 18, 89]) — у фахових виданнях із переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України (1 ([18]) — без співавторів, 1 ([17]) — у науковому фаховому виданні, яке включено до міжнародної наукометричної бази даних "Scopus"), 2 ([19, 90]) — у матеріалах міжнародних наукових конференцій, 4 ([20, 21, 22, 23]) — у матеріалах всеукраїнських наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації — 151 сторінка. Список використаних джерел займає 14 сторінок і містить 98 найменувань.

Розділ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ І ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1.1. Огляд літератури та вибір напрямів досліджень

Важливими характеристиками зростання аналітичних функцій є їх порядок, тип, уточнений порядок, а також їх узагальнені версії — α , β -порядок чи Φ -тип. Зростання аналітичної функції, як правило, ототожнюють зі зростанням логарифма її максимуму модуля.

Нехай $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — множина невід'ємних цілих чисел, $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $\mathbb{D}_{\mathcal{R}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \mathcal{R}\}$. Через $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ позначимо клас аналітичних у крузі $\mathbb{D}_{\mathcal{R}}$ функцій $f \not\equiv \text{const}$ вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (1.1)$$

Для $r \in [0, \mathcal{R})$ максимум модуля і максимальний член функції $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ визначаємо відповідно за рівностями

$$M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}, \quad \mu(r, f) = \max\{|a_n| r^n : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Для заданої функції $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ її порядок $\rho(f)$ і тип $T(f)$ визначаються відповідно за рівностями

$$\rho(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln r}, \quad T(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(r, f)}{r^{\rho}},$$

де ρ — фіксоване додатне число. Якщо $0 < \rho(f) < +\infty$, то в означенні типу часто приймають $\rho = \rho(f)$ (у цьому випадку кажуть, що функція f має тип $T(f)$ за порядку $\rho(f)$), однак поняття типу цілої функції можна розглядати й незалежно від поняття її порядку.

Якщо функція $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ має вигляд (1.1), то її порядок і тип цілком визначаються послідовністю $(|a_n|)$ за відомими формулами Коші-Адамара

$$\rho(f) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{-\ln |a_n|}, \quad T(f) = \frac{1}{e\rho} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n |a_n|^{\rho/n}.$$

Порядок і тип цілої функції, що виникають внаслідок порівняння її зростання зі зростанням степеневих функцій, як і формули Коші-Адамара для обчислення цих величин, дають обмежену інформацію щодо зростання самої функції у випадку, коли задана функція є нульового чи нескінченного порядку, або скінченного порядку нульового чи нескінченного типу за цього порядку. У зв'язку з цим вже в роботах Е. Бореля, Е. Ліндельофа, Е. Мейє, П. Бутру, О. Блюменталю, Ж. Валірона, А. Шенхаге, Г.А. Фрідмана будувались нові шкали зростання, в яких вибирались відмінні від степеневих функції порівняння, а для побудованих шкал встановлювались аналоги формул Коші-Адамара (див. роботи [67, 68, 74] і бібліографію в них, а також [25, с. 566–567] і [27, с. 8–13]).

Гнучку шкалу зростання цілих функцій, яка містить усі раніше відомі шкали, було запропоновано М.М. Шереметою [74]. При її побудові в якості функцій порівняння вибираються не конкретні елементарні функції чи їх композиції, а виділяються широкі класи функцій порівняння з мінімальними обмеженнями, достатніми для отримання формул типу

Коші-Адамара.

Нехай L — клас неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функцій. Якщо $\alpha, \beta \in L$, то, як звично, величину

$$\rho_{\alpha, \beta}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\ln M(r, f))}{\beta(\ln r)}$$

називатимемо узагальненим порядком (α, β -порядком) цілої функції f . Поняття α, β -порядку й було, по суті, введено в згаданій вище роботі М.М. Шеремети, який встановив достатні умови на функції порівняння α і β , за яких α, β -порядок кожної цілої функції f вигляду (1.1) можна виразити через $(|a_n|)$ за деякою формулою типу Коші-Адамара.

Скажемо, що $l \in L'$, якщо l є диференційовною функцією з класу L , для якої $l(2x) \sim l(x)$, $x \rightarrow +\infty$, і що $l \in L''$, якщо l є диференційовною функцією з класу L , для якої виконується умова

$$\forall \gamma \in L : \quad l\left(\left(1 + \frac{1}{\gamma(x)}\right)x\right) \sim l(x), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Теорема 1.1 ([74]). *Нехай $\alpha, \eta, \gamma \in L''$, $\rho > 0$ — фіксоване число, $\beta(x) = \eta^{-1}(\gamma^\rho(x))$, $F(x, c) = \beta^{-1}(c\alpha(x))$. Якщо $\alpha, \gamma \in L'$ і виконується умова*

$$\forall c \in (0, +\infty) : \quad (\ln F(e^x, c))'_x = O(1), \quad x \rightarrow +\infty,$$

або якщо $\alpha \notin L'$ чи $\gamma \notin L'$ і виконується умова

$$\forall c \in (0, +\infty) : \quad (\ln F(e^x, c))'_x \rightarrow 1/\rho, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (1.2)$$

то для кожної функції $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ вигляду (1.1) правильна формула

$$\rho_{\alpha, \beta}(f) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n/\rho)}{\beta(e^{1/\rho}|a_n|^{-1/n})}.$$

Деякі доповнення до теореми 1.1 зроблено в роботах С.К. Балашова [1] та Я.Д. П'яниці [48].

Аналіз доведень отриманих в [74, 1, 48] теорем показує, що за вказаних в них умов на функції порівняння α і β , для кожної функції $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ її α, β -порядок дорівнює α, β -порядку логарифма її максимального члена, тобто $\rho_{\alpha, \beta}(f) = \rho_{\alpha, \beta}^*(f)$, де

$$\rho_{\alpha, \beta}^*(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\ln \mu(r, f))}{\beta(\ln r)}.$$

Цей факт, про який в цитованих роботах явно не згадано, став вирішальним при встановленні згаданих формул типу Коші-Адамара з огляду на те, що зростання логарифма максимального члена функції $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ вигляду (1.1) можна порівняно просто описати через послідовність $(|a_n|)$. При здійсненні такого опису корисним є поняття спряженої за Юнгом функції.

Для кожного $A \in (-\infty, +\infty]$ нехай Ω'_A — клас опуклих на $(-\infty, A)$ функцій Φ таких, що $\Phi(\sigma) \rightarrow +\infty$ і $\Phi'_+(\sigma) \rightarrow +\infty$, якщо $\sigma \uparrow A$. Якщо $\Phi \in \Omega'_A$, то нехай $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — функція, спряжена з Φ за Юнгом, тобто

$$\tilde{\Phi}(\sigma) = \sup\{\sigma x - \Phi(x) : x \in \mathbb{R}\}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

(Тут ми вважаємо, що $\Phi(x) = +\infty$, якщо $x \geq A$ і $A < +\infty$.) Добре відомим (див., наприклад, [30, с. 186–188]) є наступне твердження.

Лема 1.1. *Нехай $\Phi \in \Omega'_{+\infty}$, а $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ — ціла функція вигляду (1.1).*

Тоді наступні умови рівносильні:

$$(i) \ln \mu(r, f) \leq \Phi(\ln r), \quad r \geq r_0;$$

$$(ii) \ln |a_n| \leq -\tilde{\Phi}(n), \quad n \geq n_0.$$

Фіксуємо одну з функцій α чи β в шкалі М.М. Шеремети, а іншу вважаючи довільною, отримуємо хоч і часткову, але доволі загальну шкалу зростання цілих функцій. Зокрема, прийнявши $\alpha(x) = x$ і перепозначивши β через Φ , прийдемо до поняття узагальненого типу (Φ -типу)

$$T_{\Phi}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(r, f)}{\Phi(\ln r)}$$

цілої функції f . Зазначимо, що необхідну і достатню умову на неперервно диференційовну функцію $\Phi \in \Omega'_{+\infty}$, за якої Φ -тип кожної функції $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ дорівнює Φ -типу логарифма її максимального члена, тобто $T_{\Phi}(f) = t_{\Phi}(f)$, де

$$t_{\Phi}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu(r, f)}{\Phi(\ln r)},$$

знайшов П.В. Філевич [62].

Теорема 1.2 ([62]). *Нехай $\Phi \in \Omega'_{+\infty}$ — неперервно диференційовна на $(-\infty, +\infty)$ функція. Для того, щоб $T_{\Phi}(f) = t_{\Phi}(f)$ для кожної функції $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\ln \Phi'(x) = o(\Phi(x)), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (1.3)$$

Якщо $\Phi \in \Omega'_{+\infty}$, то (див., наприклад, [30, с. 186–188]) функція $\tilde{\Phi}$ є опуклою на \mathbb{R} і $\tilde{\Phi}(\sigma)/\sigma \rightarrow +\infty$, $\sigma \rightarrow +\infty$, а тому для деякого $\sigma_0 > 0$ функція $\bar{\Phi}(\sigma) = \tilde{\Phi}(\sigma)/\sigma$, $\sigma \geq \sigma_0$, є неперервною зростаючою до $+\infty$ функцією. Врахувавши, що для довільної сталої $c > 0$ спряженою за Юнгом з функцією $c\Phi(x)$ є функція $c\tilde{\Phi}(\sigma/c)$, яка при $\sigma \geq \sigma_0$ збігається з функцією $\sigma\bar{\Phi}(\sigma/c)$, і скориставшись лемою 1.1 нескладно довести, що

для кожної функції $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ вигляду (1.1) правильна рівність

$$t_{\Phi}(f) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\psi\left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)}, \quad (1.4)$$

де ψ — обернена до $\overline{\Phi}$ функція (на цей факт, наскільки нам відомо, у випадку неперервно диференційовної функції $\Phi \in \Omega'_{+\infty}$ вперше було звернуто увагу в роботі М.М. Зеліска і М.М. Шеремети [98]).

Отже, за умови (1.3) на неперервно диференційовну функцію $\Phi \in \Omega'_{+\infty}$ для кожної $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ вигляду (1.1) правильна наступна формула типу Коші-Адамара

$$T_{\Phi}(f) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\psi\left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)}. \quad (1.5)$$

Зауважимо, що серед результатів робіт [74, 1, 48] у випадку Φ -типу ($\alpha(x) = x$, $\beta(x) = \Phi(x)$) застосовною є лише теорема 1.1 в тій частині, коли $\alpha \notin L'$. Тоді, окрім інших, повинна виконуватись умова (1.2), яка у розглянутому випадку набуде вигляду

$$\forall c \in (0, +\infty) : \quad (\ln \Phi^{-1}(ce^x))'_x \rightarrow 1/\rho, \quad x \rightarrow +\infty,$$

що, як легко бачити, рівносильно умові

$$\frac{\Phi(x)}{x\Phi'(x)} \rightarrow 1/\rho, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Зрозуміло, що ця умова для неперервно диференційовної функції $\Phi \in \Omega'_{+\infty}$ є значно сильнішою за умову (1.3). Отже, наведені в [74, 1, 48] умови на функції порівняння α і β швидше за все є далекими від остаточних умов існування формул типу Коші-Адамара для обчислення α, β -порядку кожної цілої функції f вигляду (1.1) через $(|a_n|)$.

Дослідження, аналогічні до розглянутих вище, проводились і для функцій, аналітичних в одиничному крузі \mathbb{D}_1 , тобто для функцій з класу \mathcal{H}_1 . Шкали зростання, що виникають внаслідок порівняння зростання аналітичної в одиничному крузі функції з конкретними неперервними зростаючими до $+\infty$ на $[r_0, 1)$ функціями, розглядались в роботах Ж. Валірона, Ф. Бойерманна, М. Фуджівари, Г. Мак-Лейна, Г.А. Фрідмана, Н.В. Говорова (див. роботи [67, 68, 24, 70, 75] і бібліографію в них, а також [42, с. 50–51]). Зростання аналітичних в одиничному крузі функцій в термінах узагальнених порядків вивчалось в роботах М.М. Шеремети [70, 75].

Нехай Λ — клас невід'ємних зростаючих до $+\infty$ послідовностей $\lambda = (\lambda_n)$. Для послідовності $\lambda \in \Lambda$ і постійної величини $A \in (-\infty, +\infty]$ через $\mathcal{D}_A(\lambda)$ позначимо клас абсолютно збіжних у півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < A\}$ рядів Діріхле вигляду

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it, \quad (1.6)$$

таких, що $F(s) \not\equiv \text{const}$. Якщо $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ — ряд Діріхле вигляду (1.6), то для всіх $\sigma < A$ максимум модуля і максимальний член цього ряду визначаємо відповідно за рівностями

$$M(\sigma, F) = \sup\{|F(s)| : \operatorname{Re} s = \sigma\}, \quad \mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Розглянемо аналітичну в крузі $\mathbb{D}_{\mathcal{R}}$, $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, функцію f , задану степеневим рядом (1.1). Зробивши в цьому ряді заміну $z = e^s$, отримаємо абсолютно збіжний у півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < A\}$, $A = \ln \mathcal{R}$, ряд Діріхле (1.6) з показниками $\lambda_n = n$, $n \in \mathbb{N}_0$, і за такої заміни матимемо $\sigma = \ln r$, $M(\sigma, F) = M(r, f)$, $\mu(\sigma, F) = \mu(r, f)$. Отже, цілі ($A = +\infty$)

чи абсолютно збіжні у півплощині $(-\infty < A < +\infty)$ ряди Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ є безпосередніми узагальненнями степеневих розвинень цілих $(\mathcal{R} = +\infty)$ чи, відповідно, аналітичних у крузі $(0 < \mathcal{R} < +\infty)$ функцій $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$. З огляду на це, розглянуті вище результати щодо зростання аналітичних функцій, зображених степеневими рядами, природно узагальнювались на випадок рядів Діріхле.

Прямими аналогами порядку і типу цілої функції вигляду (1.1) для цілих рядів Діріхле вигляду (1.6) є введені Ж. Ріттом [94] величини

$$R(F) = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(\sigma, F)}{\sigma}, \quad T(F) = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{e^{\rho\sigma}},$$

де ρ — фіксоване додатне число, які, як звично (див. [71, с. 29]), називатимемо R -порядком (порядком за Ріттом) та R -типом (типом за Ріттом) ряду (1.6). Зрозуміло, що у випадку послідовності $\lambda = (\lambda_n)$ такої, що $\lambda_n = n$, $n \in \mathbb{N}_0$, для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ вигляду (1.6) правильні наступні прямі аналоги формул Коші-Адамара

$$R(F) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln |a_n|}, \quad T(F) = \frac{1}{e^\rho} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \lambda_n |a_n|^{\rho/\lambda_n}. \quad (1.7)$$

Для послідовності $\lambda \in \Lambda$ нехай

$$\begin{aligned} \tau(\lambda) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n}, & \underline{\tau}(\lambda) &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n}, \\ \delta(\lambda) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \ln \lambda_n}, & \underline{\delta}(\lambda) &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \ln \lambda_n}. \end{aligned}$$

Ж. Рітт [94] довів, що перша з формул (1.7) залишатиметься правильною для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ вигляду (1.6) у випадку довільної послідовності $\lambda \in \Lambda$, що задовольняє умову $\tau(\lambda) < +\infty$. Сильніший результат отримав К. Сугімура [95].

Теорема 1.3 ([95]). *Нехай $\lambda \in \Lambda$. Умова $\delta(\lambda) = 0$ є достатньою для того, щоб для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ була правильна перша з формул (1.7).*

Зауважимо, що теорему 1.3 пізніше передували К. Танака [96] і А.Г. Аспейтія [80].

Умова $\delta(\lambda) = 0$ в теоремі 1.3 є в певному сенсі близькою до остаточної. Такий висновок дозволяє зробити наступна теорема, що також доведена К. Сугімурою [95] .

Теорема 1.4 ([95]). *Нехай $\lambda \in \Lambda$. Умова $\underline{\delta}(\lambda) = 0$ є необхідною для того, щоб для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ була правильна перша з формул (1.7).*

Ф.Й. Гече [12] розглянув таке запитання: чи можна умову $\delta(\lambda) = 0$ в теоремі 1.3 замінити умовою $\underline{\delta}(\lambda) = 0$, тобто чи є умова $\underline{\delta}(\lambda) = 0$ не лише необхідною, а й достатньою для того, щоб для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ була правильна перша з формул (1.7)? Власне, Ф.Й. Гече [12] довів наступну теорему, з якої випливає негативна відповідь на розглянуте ним запитання.

Теорема 1.5 ([12]). *Для довільної спадної до 0 послідовності (ε_n) існують послідовність $\lambda \in \Lambda$, ряд Діріхле $F \in \mathcal{S}(\lambda)$ і послідовність натуральних чисел (n_k) такі, що*

$$\frac{\ln n_k}{\lambda_{n_k} \ln \lambda_{n_k}} = \varepsilon_{n_k} \quad (k \in \mathbb{N}_0); \quad R(F) > \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln |a_n|}.$$

Що стосується другої з формул (1.7), то стосовно неї правильна наступна теорема Ж. Рітта [94].

Теорема 1.6 ([94]). *Нехай $\lambda \in \Lambda$. Умова $\tau(\lambda) = 0$ є достатньою для того, щоб для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ була правильною друга з формул (1.7).*

Наступна теорема, яка є наслідком з отриманих в роботі В.С. Бойчука і О.Е. Єременка [3] результатів для випадку $\underline{\tau}(\lambda) > 0$, показує, що умова $\tau(\lambda) = 0$ в теоремі 1.6 є в певному сенсі близька до остаточної.

Теорема 1.7 ([3]). *Нехай $\lambda \in \Lambda$. Умова $\underline{\tau}(\lambda) = 0$ є необхідною для того, щоб для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ була правильною друга з формул (1.7).*

У зв'язку з теоремами 1.3–1.7 виникає наступна задача, яка, наскільки нам відомо, досі не була розв'язаною.

Задача 1.1. *Встановити необхідну і достатню умову на послідовність $\lambda \in \Lambda$, за якої для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ вигляду (1.6) правильною перша (друга) з формул (1.7).*

У загальній постановці задачу щодо опису зростання цілого ряду Діріхле через послідовність модулів його коефіцієнтів було розглянуто і частково розв'язано в роботах Б.В. Винницького і М.М. Шеремети [7, 8], Я.Д. П'яниці і М.М. Шеремети [49], М.М. Шеремети [76, 71], В.А. Осколкова [44], В.А. Осколкова і Л.І. Калініченко [45], М.М. Зеліска [33]. Як зазначено в роботі В.А. Осколкова і Л.І. Калініченко [45], на сьогодні ця задача є далекою від остаточного розв'язання.

Зазначимо також, що часткові шкали зростання для абсолютно збіжних у півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < 0\}$ рядів Діріхле вигляду (1.6) будувались в роботах Е.Я. Дагене [29], В.С. Бойчука [2] і А.М. Гайсина [10].

Зростання таких рядів в термінах узагальнених порядків вивчалось в роботах Ю.М. Галя і М.М. Шеремети [11], О.Б. Скасківа і В.М. Сороківського [50], Л.В. Кулявець [36, 37].

Використовуючи поняття α, β -порядку абсолютно збіжного у півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < A\}$ ряду Діріхле, яке для $A = +\infty$ введене в роботі Я.Д. П'янила і М.М. Шеремети [49], а для $A = 0$ — в роботі Ю.М. Галя і М.М. Шеремети [11], результати практично усіх цитованих вище робіт (за винятком робіт [7, 8, 44, 45, 33, 36, 37], в яких розглядались дещо інші шкали зростання) можемо охарактеризувати як такі, що визначають достатні умови на послідовність λ та функції порівняння α і β , за яких узагальнений порядок кожного абсолютно збіжного у півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < A\}$, де $A = +\infty$ чи $A = 0$, ряду Діріхле вигляду (1.6) виражається через послідовність $(|a_n|)$ за формулою типу Коші-Адамара. За знайдених умов, як показує аналіз результатів згаданих робіт, α, β -порядок кожного такого ряду F дорівнює α, β -порядку логарифма його максимального члена. Цей факт, на якому не завжди акцентувалась увага, ставав визначальним при встановленні формул типу Коші-Адамара, оскільки зростання логарифма максимального члена ряду Діріхле порівняння просто описується через послідовність модулів коефіцієнтів цього ряду.

Розглянемо довільну дійсну функцію $\Phi : [\sigma_0, A) \rightarrow (0, +\infty)$ і нехай Φ^* — найбільша опукла на $[\sigma_0, A)$ функція, яка не перевищує Φ . Зауважимо, що Φ^* збігається на $[\sigma_0, A)$ з другою спряженою за Юнгом з Φ функцією (див., наприклад, [30, с. 187]). Зрозуміло, що для ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ вигляду (1.6) нерівність $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$,

$\sigma \in [\sigma_1, A)$, завдяки опуклості функції $\ln \mu(\sigma, F)$, є рівносильною до нерівності $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi^*(\sigma)$, $\sigma \in [\sigma_2, A)$, а опис зростання функції $\ln \mu(\sigma, F)$ відносно опуклої функції через послідовність $(|a_n|)$ можна здійснити за допомогою твердження типу леми 1.1, зокрема, за допомогою такої леми (див. [71, с. 18–19], [79]).

Лема 1.2 ([79]). *Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi \in \Omega'_A$ — неперервно диференційовна на $(-\infty, A)$ функція така, що функція Φ' є зростаючою на $(-\infty, A)$, φ — обернена до Φ' функція, $\Psi(x) = x - \frac{\Phi(x)}{\Phi'(x)}$, а $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ — ряд Діріхле вигляду (1.6). Тоді наступні умови рівносильні:*

- (i) $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, A)$;
- (ii) $\ln |a_n| \leq -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geq n_0$.

У зв'язку зі сказаним виникає загальна проблема щодо отримання необхідних і достатніх умов на послідовність (λ_n) та функції порівняння α і β , за яких узагальнений порядок кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ дорівнює α, β -порядку логарифма його максимального члена. Ця проблема, безумовно, складна і далека від остаточного розв'язання, а тому природною є спроба отримання її розв'язання для часткових шкал зростання, тобто у випадку, коли одна з функцій α чи β задана конкретно. Зокрема, актуальною є наступна задача.

Задача 1.2. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, $A \in (-\infty, +\infty]$, а функція Φ задовольняє умови леми 1.2. Знайти необхідну і достатню умову на послідовність λ і функцію Φ , за якої для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ правильна рівність $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$, де*

$$T_\Phi(F) = \overline{\lim}_{\sigma \uparrow A} \frac{\ln M(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)}, \quad t_\Phi(F) = \overline{\lim}_{\sigma \uparrow A} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)}.$$

Величина $T_\Phi(F)$ називається Φ -типом ряду F . Як зауважено в роботі М.М. Зеліска і М.М. Шеремети [98], з леми 1.2 випливає, що

$$t_\Phi(F) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\Phi' \left(\Psi^{-1} \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right) \right)}$$

для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ вигляду (1.6). Отже, умова на послідовність λ і функцію Φ , про яку йдеться в задачі 1.2, буде одночасно умовою, за якої для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ правильна формула

$$T_\Phi(F) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\Phi' \left(\Psi^{-1} \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right) \right)}.$$

За певних додаткових умов на функцію Φ розв'язок задачі 1.2 впливає з наступної теореми М.М. Шеремети [78].

Теорема 1.8 ([78]). *Нехай $\lambda \in \Lambda$, $A \in (-\infty, +\infty]$, а $\Phi \in \Omega'_A$ — двічі неперервно диференційовна на $(-\infty, A)$ функція така, що $\frac{\Phi'(\sigma)}{\Phi(\sigma)} \nearrow +\infty$ і $\ln \Phi'(\sigma) = o(\Phi(\sigma))$, якщо $\sigma \uparrow A$. Для того, щоб для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ з нерівності $t_\Phi(F) \leq 1$ випливала нерівність $T_\Phi(F) \leq 1$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\ln n_\lambda(x) = o(\Phi(\Psi(\varphi(x))))), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (1.8)$$

Нехай $t \in (0, +\infty)$ — фіксоване число. Застосовуючи теорему 1.8 до функції $t\Phi$ замість функції Φ , бачимо, що якщо функція Φ задовольняє умови цієї теореми, то для того, щоб $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$ для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\forall t > 0: \quad n_\lambda(x) = o(\Phi(\Psi(\varphi(x/t))))), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Зауважимо, однак, що з теореми 1.8 не випливає теорема 1.2. Крім того, накладені в теоремі 1.8 умови на функцію Φ не дозволяють за-

стосувати цю теорему для отримання розв'язку задачі 1.1 у випадку другої з формул (1.7).

Рівність між α, β -порядком і α, β -порядком логарифма максимального члена аналітичної функції, заданої степеневим рядом чи рядом Діріхле, є достатньою, але не обов'язково необхідною умовою для того, щоб її α, β -порядок можна було виразити через послідовність модулів коефіцієнтів відповідного ряду. З огляду на це, виникає задача про встановлення необхідних і достатніх умов на функції α і β , за яких α, β -порядок аналітичної функції, заданої тим чи іншим рядом, залежить лише від послідовності модулів його коефіцієнтів.

Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$. Для функції $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ вигляду (1.1) і кожного $r \in (0, \mathcal{R})$ покладемо

$$G(r, f) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n.$$

Якщо $\Phi \in \Omega'_{\ln \mathcal{R}}$, то нехай

$$T_{\Phi}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \mathcal{R}} \frac{\ln M(r, f)}{\Phi(\ln r)}, \quad \mathcal{T}_{\Phi}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \mathcal{R}} \frac{\ln G(r, f)}{\Phi(\ln r)}.$$

Для зручності n -ний коефіцієнт степеневого розвинення функції $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ позначатимемо також через $a_n(f)$.

Позначимо через $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ клас відображень $F : \mathcal{H}_{\mathcal{R}} \rightarrow [0, +\infty]$ таких, що $F(f) = F(g)$ для довільних функцій $f, g \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$, послідовності модулів коефіцієнтів степеневих розвинень яких співпадають, тобто $|a_n(f)| = |a_n(g)|$, $n \in \mathbb{N}_0$. Зауважимо, що якщо $\Phi \in \Omega'_{\ln \mathcal{R}}$, то $T_{\Phi} \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ тоді і лише тоді, коли $\mathcal{T}_{\Phi}(f) = T_{\Phi}(f)$ для кожної $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$.

Наступну теорему, яка в частині достатності впливає з теореми 1.2, було анонсовано П.В. Філевичем в [64].

Теорема 1.9 ([64]). *Нехай $\Phi \in \Omega'_{+\infty}$ — неперервно диференційовна на $(-\infty, +\infty)$ функція. Для того, щоб $\mathcal{T}_\Phi(f) = T_\Phi(f)$ для кожної функції $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$, необхідно і досить, щоб виконувалась умова (1.3).*

З теорем 1.2 і 1.9 випливає наступна теорема.

Теорема 1.10. *Нехай $\Phi \in \Omega'_{+\infty}$ — неперервно диференційовна на $(-\infty, +\infty)$ функція. Тоді наступні твердження рівносильні:*

- (i) $T_\Phi \in \mathcal{F}_{+\infty}$;
- (ii) $T_\Phi(f) = t_\Phi(f)$ для кожної функції $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$;
- (iii) виконується умова (1.3).

З теореми 1.10 можемо зробити наступні висновки: якщо умова (1.3) виконується, то, згідно з (1.4), для кожної функції $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ правильна формула (1.5); якщо ж умова (1.3) не виконується, то Φ -тип цілої функції $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ вигляду (1.1) не можна, взагалі кажучи, виразити через послідовність $(|a_n|)$, тобто у цьому випадку не існує жодної формули типу Коші-Адамара для обчислення величини $T_\Phi(f)$.

У зв'язку з теоремами 1.9 і 1.10 виникає питання щодо можливості встановлення аналогів цих теорем для аналітичних в крузі функцій, зокрема, постає наступна задача.

Задача 1.3. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty)$. Знайти необхідну і достатню умову на неперервно диференційовну на $(-\infty, \ln \mathcal{R})$ функцію $\Phi \in \Omega'_{\ln \mathcal{R}}$, за якої $T_\Phi \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}}$, тобто $\mathcal{T}_\Phi(f) = T_\Phi(f)$ для кожної функції $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$.*

Викликає інтерес розгляд подібних задач і для інших загальних шкал зростання аналітичних функцій.

Введемо узагальнений порядок функції $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ за формулою

$$\rho_{\Phi}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln \Phi(\ln r)},$$

де $\Phi \in \Omega'_{+\infty}$. Така шкала є природною з огляду на те, що функція $\ln M(e^x, f)$ належить до класу $\Omega'_{+\infty}$ у випадку довільної трансцендентної цілої функції f . Для функції $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ покладемо також

$$\tau_{\Phi}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln G(r, f)}{\ln \Phi(\ln r)}.$$

Задача 1.4. Знайти необхідну і достатню умову на неперервно диференційовну на $(-\infty, +\infty)$ функцію $\Phi \in \Omega'_{+\infty}$, за якої $\rho_{\Phi}(f) \in \mathcal{F}_{+\infty}$, тобто $\rho_{\Phi}(f) = \tau_{\Phi}(f)$ для кожної функції $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$.

Доволі часто основою класифікації при побудові тієї чи іншої шкали зростання аналітичних функцій замість швидкості зростання логарифма їх максимуму модуля є швидкість зростання їх характеристики Неванлінни. Добре відомо, що для цілої функції f її порядок збігається з порядком її характеристики Неванлінни

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Більше того, якщо f має порядок $\rho < +\infty$, а $\rho(r)$ — деякий її уточнений порядок, то

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(r, f)}{r^{\rho(r)}} \leq c(\rho) \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{T(r, f)}{r^{\rho(r)}},$$

де $c(\rho)$ — додатна стала, залежна лише від ρ (див., наприклад, [25, с. 554]). Звідси випливає, що

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(r, f)}{T(r, f)} \leq c(\rho).$$

З іншого боку, як довів Р. Пелі ще в 1932 р., для кожного $\rho > 0$ існує ціла функція порядку ρ така, що

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(r, f)}{T(r, f)} = +\infty. \quad (1.9)$$

Якщо для цілої функції f виконується співвідношення (1.9), то будемо казати, як і в роботі А.А. Гольдберга і Й.В. Островського [26], що ця функція має ефект Пелі.

Нехай $\lambda \in \Lambda$. Позначимо через $\mathcal{S}_+(\lambda)$ клас відмінних від тотожної сталої цілих рядів Діріхле вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n} \quad (1.10)$$

з невід'ємними коефіцієнтами a_n . Покладемо $\mathcal{S}_+ = \cup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{S}_+(\lambda)$.

Теорема 1.11 ([26]). *Нехай $\lambda \in \Lambda$, $\rho \geq 1$. Існує цілий ряд Діріхле $f \in \mathcal{S}_+(\lambda)$ такий, що $\rho_f = \rho$ і функція f має ефект Пелі.*

Умова $\rho \geq 1$ в теоремі 1.11 обумовлена тим, що довільна функція $f \in \mathcal{S}_+$, як легко бачити, завжди є порядку $\rho(f) \geq 1$.

Теорему 1.11 застосовано в [26] для дослідження властивостей характеристичних функцій ймовірнісних законів. Проте, як зазначено в [26], ця теорема може мати й самостійний інтерес.

Зауважимо також, що теорема 1.11 лише стверджує існування цілих функцій $f \in \mathcal{S}_+(\lambda)$, що мають ефект Пелі. Її доведення є чисто конструктивним, що не дає змоги вказати прості достатні умови наявності у цілої функції $f \in \mathcal{S}_+(\lambda)$ ефекту Пелі. У зв'язку з цим виникає наступна задача.

Задача 1.5. Для заданого ряду Діріхле $f \in \mathcal{S}_+$ вигляду (1.10) встановити необхідні і достатні умови на послідовності (a_n) і λ , за яких функція f має:

(i) ефект Пелі;

(ii) ефект Пелі та заданий порядок $\rho \geq 1$.

Нехай α — неспадна додатна на $[x_0, +\infty)$ функція. Функцію α називатимемо помірно змінною, якщо $\alpha(2x) = O(\alpha(x))$, $x \rightarrow +\infty$.

П.В. Філевич [85] анонсував наступні результати.

Теорема 1.12 ([85]). Нехай $f \in \mathcal{S}_+(\lambda)$. Функція f має ефект Пелі тоді і лише тоді, коли $\ln M(r, f)$ не є помірно змінною функцією.

Теорема 1.13 ([85]). Нехай $\rho \in [1, +\infty)$, послідовність $\lambda \in \Lambda$ така, що $\tau(\lambda) < +\infty$, а $f \in \mathcal{S}_+$ — ряд Діріхле вигляду (1.10). Для того, щоб функція f мала ефект Пелі і порядок $\rho(f) = \rho$, необхідно і достатньо, щоб існували зростаючі до $+\infty$ послідовності (n_k) і (\varkappa_k) відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел такі, що

$$a_n = 0 \quad (n < n_0); \quad a_{n_k} \neq 0 \quad (k \in \mathbb{N}_0);$$

$$\varkappa_k = \frac{\ln a_{n_k} - \ln a_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \quad (k \in \mathbb{N}_0);$$

$$a_n \leq a_{n_k} e^{\varkappa_k(\lambda_{n_k} - \lambda_n)} \quad (n \in (n_k, n_{k+1}), k \in \mathbb{N}_0);$$

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\varkappa_k \lambda_{n_{k+1}}}{\ln a_{n_{k+1}}} = -1; \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \lambda_{n_{k+1}}}{\ln \varkappa_k} = \rho - 1.$$

Як бачимо, теорема 1.13 дає розв'язок задачі 1.5 лише в частині (ii) і лише за додаткової умови $\tau(\lambda) < +\infty$. У загальному випадку ця задача не була розв'язаною.

1.2. Основний зміст дисертації

У розділі 2 дисертаційної роботи досліджується задача щодо опису зростання рядів Діріхле через послідовність модулів їх коефіцієнтів в термінах узагальнених шкал зростання.

Нехай \mathbb{N}_0 — множина невід’ємних цілих чисел, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, Λ — клас невід’ємних зростаючих до $+\infty$ послідовностей $\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ і $A \in (-\infty, +\infty]$.

Для ряду Діріхле вигляду

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it, \quad (1.11)$$

покладемо

$$E_1(F) = \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{\sigma\lambda_n} < +\infty \right\},$$

$$E_2(F) = \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| e^{\sigma\lambda_n} = 0 \right\}.$$

Абсцису абсолютної збіжності і абсцису існування максимального члена ряду (1.11) визначимо відповідно за рівностями

$$\sigma_a(F) = \begin{cases} -\infty, & \text{якщо } E_1(F) = \emptyset, \\ \sup E_1(F), & \text{якщо } E_1(F) \neq \emptyset, \end{cases}$$

$$\beta(F) = \begin{cases} -\infty, & \text{якщо } E_2(F) = \emptyset, \\ \sup E_2(F), & \text{якщо } E_2(F) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Якщо $\sigma_a(F) > -\infty$, то для всіх $\sigma < \sigma_a(F)$ нехай

$$M(\sigma, F) = \sup\{|F(s)| : \operatorname{Re} s = \sigma\}$$

— максимум модуля ряду (1.11). Якщо ж $\beta(F) > -\infty$, то для всіх $\sigma < \beta(F)$ нехай

$$\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n \in \mathbb{N}_0\}$$

— максимальний член цього ряду.

Через $\mathcal{D}_A(\lambda)$ позначимо клас рядів Діріхле вигляду (1.11) таких, що $F(s) \not\equiv \text{const}$ і $\sigma_a(F) \geq A$. Покладемо $\mathcal{D}_A = \cup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}_A(\lambda)$.

Через $\mathcal{D}_A^*(\lambda)$ позначимо клас рядів Діріхле вигляду (1.11) таких, що $F(s) \not\equiv \text{const}$ і $\beta(F) \geq A$. Покладемо $\mathcal{D}_A^* = \cup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}_A^*(\lambda)$.

Зростання ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ утотожнюємо зі зростанням функції $\ln M(\sigma, F)$, $\sigma \in (-\infty, A)$.

Нехай Ω_A — клас неперервних на півінтервалі вигляду $[\sigma_0, A)$ функцій Φ таких, що $x\sigma - \Phi(\sigma) \rightarrow -\infty$, $\sigma \uparrow A$, для кожного $x \in \mathbb{R}$, а Ω_A^* — підклас опуклих на $[\sigma_0, A)$ функцій $\Phi \in \Omega_A$. Якщо $\Phi \in \Omega_A$, то нехай $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — функція, спряжена з Φ за Юнгом, тобто

$$\tilde{\Phi}(x) = \sup\{x\sigma - \Phi(\sigma) : \sigma \in \mathbb{R}\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(Тут ми вважаємо, що $\Phi(\sigma) = +\infty$, якщо $\sigma \notin [\sigma_0, A)$.)

Поняття функції, спряженої за Юнгом з функцією $\Phi \in \Omega_A$, відіграє важливу роль при описі зростання ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ відносно заданої функції Φ через послідовність модулів його коефіцієнтів.

Властивості спряжених за Юнгом функцій наведено у допоміжному підрозділі 2.1. Зокрема, якщо $\Phi \in \Omega_A$, то з наведених у підрозділі 2.1 результатів випливають наступні факти: $\tilde{\Phi}$ є опуклою на \mathbb{R} функцією; якщо φ — правобічна похідна від функції $\tilde{\Phi}$, то

$$\tilde{\Phi}(x) = x\varphi(x) - \Phi(\varphi(x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

$\varphi(x) < A$ на \mathbb{R} і $\varphi(x) \nearrow A$, якщо $x \uparrow +\infty$; якщо

$$x_0 = \inf\{x > 0 : \Phi(\varphi(x)) > 0\},$$

то функція $\bar{\Phi}(x) = \tilde{\Phi}(x)/x$ є зростаючою до A на $(x_0, +\infty)$. З опуклості функції $\tilde{\Phi}$ випливає її неперервність, а тому й неперервність на $(x_0, +\infty)$ функції $\bar{\Phi}$. Тому на інтервалі (A_0, A) , де $A_0 = \bar{\Phi}(x_0+0)$, визначена обернена до $\bar{\Phi}$ функція ψ , яка на вказаному інтервалі неперервна і зростає до $+\infty$. Вважаємо, що $\psi(\sigma) = +\infty$ для кожного $\sigma \in [A, +\infty]$.

Загальні результати щодо зростання рядів Діріхле отримано в підрозділі 2.2. Зокрема, тут доведено наступну (в певній частині відому) лему, що дає опис зростання логарифма максимального члена ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ відносно заданої функції $\Phi \in \Omega_A$ через послідовність модулів його коефіцієнтів.

Лема 2.8. *Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_A$, а $F \in \mathcal{D}_A^*$ – ряд Діріхле вигляду (1.11). Тоді $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, A)$, якщо і лише якщо $\ln |a_n| \leq -\tilde{\Phi}(\lambda_n)$ для всіх $n \geq n_0$.*

Крім того, в підрозділі 2.2 доведено наступні теореми, які будуть істотно використовуватися в наступних підрозділах.

Теорема 2.1. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, $A \in (-\infty, +\infty]$ і $\Phi, \Gamma \in \Omega_A$. Якщо*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{\tilde{\Phi}(\lambda_n) - \tilde{\Gamma}(\lambda_n)}} < +\infty,$$

то кожен ряд Діріхле F з класу $\mathcal{D}_A^(\lambda)$ такий, що $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$, $\sigma \in [\sigma_1, A)$, належить до класу $\mathcal{D}_A(\lambda)$ і для нього $\ln M(\sigma, F) \leq \Gamma(\sigma)$, $\sigma \in [\sigma_2, A)$.*

Теорема 2.2. *Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$, послідовність $\lambda \in \Lambda$ така, що $\tau(\lambda) > 0$, якщо $A < +\infty$, і $\tau(\lambda) = +\infty$, якщо $A = +\infty$, а*

$G \in \mathcal{D}_A^*(\lambda) \setminus \mathcal{D}_A(\lambda)$ – ряд Діріхле вигляду

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it,$$

для якого $b_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тоді для довільної додатної на $(-\infty, A)$ функції l існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ вигляду (2.1) такий, що $a_n = b_n$ або $a_n = 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ і $M(\sigma, F) = F(\sigma) \geq l(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, A)$.

Зростання рядів Діріхле в термінах узагальнених типів досліджується в підрозділах 2.3 і 2.4.

Якщо $\Phi \in \Omega_A$ і $F \in \mathcal{D}_A$, то величину

$$T_\Phi(F) = T_{\Phi, A}(F) = \overline{\lim}_{\sigma \uparrow A} \frac{\ln M(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)}$$

називатимемо Φ -типом ряду F у півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < A\}$.

Для $\Phi \in \Omega_A$ і $F \in \mathcal{D}_A^*$ нехай

$$t_\Phi(F) = t_{\Phi, A}(F) = \overline{\lim}_{\sigma \uparrow A} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)}.$$

У підрозділі 2.3 наведено наступну теорему, що містить розв'язок задачі 1.2.

Теорема 2.7. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, $A \in (-\infty, +\infty]$, а $\Phi \in \Omega_A$. Для того, щоб $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$ для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall t > 0 : \quad \ln n = o(\Phi(\varphi(\lambda_n/t))), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.12)$$

Зауважимо також, що якщо $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ і $t_\Phi(F) = +\infty$, то $T_\Phi(F) = +\infty$ за нерівністю $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$, $\sigma < A$, а тому $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$. З

огляду на це, наступна теорема уточнює теорему 2.7 в частині достатності.

Теорема 2.8. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, $A \in (-\infty, +\infty]$, а $\Phi \in \Omega_A$. Якщо виконується умова (1.12), то кожен ряд Діріхле F з класу $\mathcal{D}_A^*(\lambda)$ такий, що $t_\Phi(F) < +\infty$, належить до класу $\mathcal{D}_A(\lambda)$ і для нього виконується рівність $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$.*

Для послідовності $\lambda \in \Lambda$, функції $\Phi \in \Omega_A$ і довільних $t_2 > t_1 > 0$ покладемо

$$\Delta(t_1, t_2) = \Delta_{\Phi, \lambda}(t_1, t_2) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{t_1 \tilde{\Phi}(\lambda_n/t_1) - t_2 \tilde{\Phi}(\lambda_n/t_2)}.$$

Теореми 2.7 і 2.8 є наслідками з двох наступних теорем відповідно.

Теорема 2.11. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_A$, а $T_0 > t_0 \geq 0$ — довільні сталі. Для того, щоб для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ такого, що $t_\Phi(F) = t_0$, справджувалась нерівність $T_\Phi(F) < T_0$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\exists c \in (t_0, T_0) : \quad \Delta(c, T_0) < 1. \quad (1.13)$$

Теорема 2.12. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_A$, а $T_0 > t_0 \geq 0$ — довільні сталі. Якщо виконується умова (1.13), то кожен ряд Діріхле F з класу $\mathcal{D}_A^*(\lambda)$ такий, що $t_\Phi(F) = t_0$, належить до класу $\mathcal{D}_A(\lambda)$ і для нього виконується нерівність $T_\Phi(F) < T_0$.*

Як зауважено у підрозділі 2.4, у випадку $A = +\infty$ для довільної послідовності $\lambda \in \Lambda$ існує функція $\Phi \in \Omega_A$ така, що виконується умова (1.12), а тому за теоремою 2.7 для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ маємо $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$. Це не так у випадку $A < +\infty$. Більше того, справедлива така теорема.

Теорема 2.13. *Нехай $A \in (-\infty, +\infty)$, а $\lambda \in \Lambda$. Для того, щоб існувала функція $\Phi \in \Omega_A$ така, що для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ виконується рівність $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$, необхідно і досить, щоб*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty.$$

Для ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}^*(\lambda)$ вигляду (1.11) покладемо

$$K(F) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln |a_n|}.$$

Розв'язок задачі 1.1 у випадку першої з формул 1.7 отримано у підрозділі 2.5. Як випливає з наступної теореми, умова $\delta(\lambda) = 0$ у теоремі 1.3 є також необхідною, тобто ця умова є остаточною умовою застосовності формули $R(F) = K(F)$.

Теорема 2.15. *Нехай $\lambda \in \Lambda$. Якщо $\delta(\lambda) > 0$, то існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ такий, що $R(F) > K(F)$.*

Теореми 1.3 і 2.15 є наслідками з наведених далі загальніших теорем 2.16 і 2.17 відповідно.

Теорема 2.16. *Нехай $\lambda \in \Lambda$. Якщо $\delta(\lambda) < +\infty$, то кожен ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}^*(\lambda)$ такий, що $K(F) < 1/\delta(\lambda)$, є цілим і для нього правильна нерівність*

$$R(F) \leq \frac{K(F)}{1 - \delta(\lambda)K(F)}.$$

Отже, якщо $K(F) < 1/\delta(\lambda)$ для деякого ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$, то за теоремою 2.16 величини $K(F)$ і $R(F)$ є скінченними одночасно. Така ситуація, взагалі кажучи, є неможливою, якщо $K(F) \geq 1/\delta(\lambda)$.

Теорема 2.17. *Нехай $\lambda \in \Lambda$. Якщо $\delta(\lambda) > 0$ і $K \in [1/\delta(\lambda), +\infty)$, то для довільної функції $H \in L$ існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ такий, що*

$$K(F) = K \text{ i}$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{H(\sigma)} = +\infty. \quad (1.14)$$

Теорема 2.15 є наслідком з теореми 2.16 (досить, наприклад, вибрати $H(\sigma) = \exp(\sigma^2)$).

Теорема 2.17, з одного боку, вказує на істотність умови $K(F) < 1/\delta(\lambda)$ в теоремі 2.16. З іншого боку, з цієї теореми можна зробити такий висновок: якщо $\delta(\lambda) > 0$, то ряди Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ можуть зростати як завгодно швидко навіть тоді, коли величина $K(F)$ для них залишається скінченною.

Теореми 2.16 і 2.17 отримано у підрозділі 2.5 в якості наслідків з теорем 2.1 і 2.2 відповідно.

Задача щодо встановлення умов, за яких узагальнений тип чи порядок аналітичної функції можна виразити через послідовність модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення, тісно пов'язана з не менш складною задачею щодо встановлення умов, за яких узагальнений тип чи порядок аналітичної функції не залежить від аргументів коефіцієнтів її степеневого розвинення. Для двох загальних шкал зростання розв'язки задач такого роду (див. задачі 1.3 і 1.4) знайдено в розділі 3.

Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$. Для функцій $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ і $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$ покладемо

$$t_{\Phi}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \mathcal{R}} \frac{\ln \mu(r, f)}{\Phi(\ln r)}.$$

Зрозуміло, що $t_{\Phi}(f) \leq T_{\Phi}(f) \leq \mathcal{T}_{\Phi}(f)$. Зауважимо також, що $T_{\Phi} \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ тоді і лише тоді, коли $\mathcal{T}_{\Phi}(f) = T_{\Phi}(f)$ для кожної $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$.

Для функції $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$ покладемо

$$\Delta_{\Phi} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\Phi(\varphi(n))},$$

φ визначаються за функцією Φ так само, як і вище.

Розв'язок задачі 1.3 дає наступна теорема, отримана у підрозділі 3.1.

Теорема 3.1. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$. Тоді наступні твердження рівносильні:*

$$(i) T_{\Phi} \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}};$$

$$(ii) T_{\Phi}(f) = t_{\Phi}(f) \text{ для кожної функції } f \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}};$$

$$(iii) \Delta_{\Phi} = 0.$$

Для довільних функцій $\Phi \in \Omega_{+\infty}^*$ і $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ покладемо

$$c_{\Phi} = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln \Phi(x)}, \quad d_{\Phi} = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln \Phi'_+(x)}{\ln \Phi(x)},$$

$$\varkappa_{\Phi}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln \mu(r, f)}{\ln \Phi(\ln r)}.$$

Тоді $\rho_{\Phi} = \rho_{\Phi}(f) \in \mathcal{F}_{+\infty}$ є відображенням з класу $\mathcal{F}_{+\infty}$ тоді і лише тоді, коли для довільної $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ правильна рівність $\rho_{\Phi}(f) = \tau_{\Phi}(f)$.

Розв'язок задачі 1.4 міститься в наступній теоремі, отриманій у підрозділі 3.2.

Теорема 3.4. *Нехай $\Phi \in \Omega_{+\infty}^*$. Тоді наступні твердження рівносильні:*

$$1) \rho_{\Phi} \in \mathcal{F}_{+\infty};$$

$$2) \rho_{\Phi}(f) = \varkappa_{\Phi}(f) \text{ для довільної } f \in \mathcal{H}_{+\infty};$$

$$3) d_{\Phi} \leq c_{\Phi}.$$

У розділі 4 дисертаційної роботи досліджується задача 1.5 щодо наявності ефекту Пелі для цілих рядів Діріхле $f \in \mathcal{S}_+$ вигляду (1.10).

Задачу 1.5 у частинах (i) та (ii) повністю розв'язано відповідно у

підрозділах 4.2 та 4.3.

Через \mathcal{S} позначимо клас відмінних від тотожної сталої цілих рядів Діріхле вигляду (1.10), де $\lambda \in \Lambda$. Для ряду Діріхле $f \in \mathcal{S}$ вигляду (1.10) покладемо $T_n = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|$ для кожного $n \in \mathbb{N}_0$. Поряд з рядом (1.10) розглянемо ряд Діріхле

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n e^{z\lambda_n}. \quad (1.15)$$

З наведених у підрозділі 4.1 допоміжних результатів випливає, що

$$\beta(\tilde{f}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{T_n} = +\infty.$$

Отже, для ряду (1.15) його максимальний член

$$\mu(r, \tilde{f}) = \max\{T_n e^{r\lambda_n} : n \in \mathbb{N}_0\}$$

є визначеним для кожного $r \in \mathbb{R}$.

Позначимо через \mathcal{S}_* клас рядів Діріхле $f \in \mathcal{S}$, для яких існує спадна до 0 на $[r_0, +\infty)$ функція α така, що

$$\ln G(r, f) = O(\ln M((1 + \alpha(r))r, f)), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Зрозуміло, що $\mathcal{S}_+ \subset \mathcal{S}_* \subset \mathcal{S}$.

Основним результатом підрозділу 4.2 є наступний критерій наявності ефекту Пелі для цілого ряду Діріхле $f \in \mathcal{S}_*$ в термінах його коефіцієнтів і показників.

Теорема 4.1. *Для кожного цілого ряду Діріхле $f \in \mathcal{S}_*$ вигляду (1.10) рівносильними є такі твердження:*

- (i) f має ефект Пелі;
- (ii) $T(r, f)$ не є помірно змінною функцією;

- (iii) $\ln M(r, f)$ не є помірно змінною функцією;
 (iv) $\ln G(r, f)$ не є помірно змінною функцією;
 (v) $\ln \mu(r, \tilde{f})$ не є помірно змінною функцією;
 (vi) існують зростаючі до $+\infty$ послідовності (n_k) і (K_k) відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел такі, що

$$T_n = 0 \quad (n < n_0); \quad T_{n_k} \neq 0 \quad (k \in \mathbb{N}_0); \quad (1.16)$$

$$K_k = \frac{\ln |T_{n_k}| - \ln |T_{n_{k+1}}|}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \quad (k \in \mathbb{N}_0); \quad (1.17)$$

$$|T_n| \leq |T_{n_k}| e^{K_k(\lambda_{n_k} - \lambda_n)} \quad (n \in (n_k, n_{k+1}), k \in \mathbb{N}_0); \quad (1.18)$$

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{K_k \lambda_{n_{k+1}}}{\ln |T_{n_{k+1}}|} = -1. \quad (1.19)$$

Розв'язок задачі 1.5 у частині (ii) містить така теорема.

Теорема 4.4. *Нехай $\rho \in [1, +\infty)$, а $f \in \mathcal{S}_*$ — цілий ряд Діріхле вигляду (1.10). Для того, щоб функція f мала ефект Пелі і порядок $\rho(f) = \rho$, необхідно і достатньо, щоб існували зростаючі до $+\infty$ послідовності (n_k) і (K_k) відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел такі, що виконуються співвідношення (1.16)–(1.19) і*

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \lambda_{n_{k+1}}}{\ln K_k} = \rho - 1. \quad (1.20)$$

Розділ 2

ЗРОСТАННЯ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$, $\lambda = (\lambda_n)$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність, $\mathcal{D}_A(\lambda)$ — клас абсолютно збіжних у півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < A\}$ рядів Діріхле вигляду

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it, \quad (2.1)$$

таких, що $F(s) \not\equiv \text{const}$, а Ω_A — клас неперервних на півінтервалі вигляду $[\sigma_0, A)$ функцій Φ таких, що

$$\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{\sigma \uparrow A} (x\sigma - \Phi(\sigma)) = -\infty. \quad (2.2)$$

Зауважимо, що у випадку $A < +\infty$ умова (2.2) рівносильна умові $\Phi(\sigma) \rightarrow +\infty$, $\sigma \rightarrow A - 0$, а у випадку $A = +\infty$ ця умова рівносильна умові $\Phi(\sigma)/\sigma \rightarrow +\infty$, $\sigma \rightarrow +\infty$.

При описі зростання ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ відносно заданої дійсної функції $\Phi \in \Omega_A$ в термінах послідовності модулів його коефіцієнтів важливу роль відіграє поняття функції $\tilde{\Phi}$, спряженої за Юнгом з Φ . З огляду на це, у підрозділі 2.1 наведено необхідні нам властивості спряжених за Юнгом функцій, деякі з яких є добре відомими (див., наприклад, [30, § 3.2], [69], [73], [43]).

Результати загального характеру щодо зростання ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ отримаємо у підрозділі 2.2. Тут доведемо твердження типу леми 1.2, в якому для заданих ряду $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ вигляду (2.1) і функції $\Phi \in \Omega_A$ вкажемо умови на послідовність $(|a_n|)$, які є необхідними і достатніми для виконання нерівності $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$, $\sigma \in [\sigma_1, A)$. Крім того, встановимо достатні умови на послідовність λ і функції $\Phi, \Gamma \in \Omega_A$, за яких для ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ з нерівності $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$, $\sigma \in [\sigma_1, A)$, випливає нерівність $\ln M(\sigma, F) \leq \Gamma(\sigma)$, $\sigma \in [\sigma_2, A)$.

Зростання рядів Діріхле в термінах узагальнених типів вивчається у підрозділах 2.3 і 2.4. Зокрема, тут знайдено необхідну і достатню умову на послідовність λ і функцію $\Phi \in \Omega_A$, за якої для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ правильна рівність $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$, чим повністю розв'язано задачу 1.2 (а тому й задачу 1.1 у випадку другої з формул (1.7)). Більше того, для заданих $T_0 \geq t_0 \geq 0$ встановлено необхідну і достатню умову на послідовність λ і функцію $\Phi \in \Omega_A$, за якої для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ з нерівності $t_\Phi(F) \leq t_0$ випливає нерівність $T_\Phi(F) \leq T_0$.

Нарешті, у підрозділі 2.5 розв'язано задачу 1.1 у випадку першої з формул (1.7).

2.1. Властивості спряжених за Юнгом функцій

Позначимо через X клас всіх функцій $h : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Якщо $h \in X$, то нехай $\tilde{h} \in X$ — функція, спряжена за Юнгом з функцією h , тобто

$$\tilde{h}(\sigma) = \sup\{\sigma x - h(x) : x \in \mathbb{R}\}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Якщо $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ — деяка дійсна функція ($D \subset \mathbb{R}$), то при означенні спряженої з нею за Юнгом ми довізначаємо функцію h до функції з класу X , приймаючи $h(x) = +\infty$, $x \notin D$.

Зрозуміло, що якщо $h, g \in X$ і $h(x) \geq g(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, то $\tilde{h}(\sigma) \leq \tilde{g}(\sigma)$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$.

Нехай $h \in X$. Тоді $\tilde{\tilde{h}}(x) \leq h(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ ($\tilde{\tilde{h}}$ — спряжена за Юнгом з \tilde{h} , тобто друга спряжена за Юнгом з h). Справді, з означення функції \tilde{h} випливає, що для всіх $\sigma, x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $\sigma x - h(x) \leq \tilde{h}(\sigma)$, а тому й нерівність $x\sigma - \tilde{h}(\sigma) \leq h(x)$. Взявши супремум від обидвох частин останньої нерівності за всіма $\sigma \in \mathbb{R}$, отримуємо $\tilde{\tilde{h}}(x) \leq h(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Лема 2.1. *Нехай $h, g \in X$. Тоді наступні умови рівносильні:*

- (i) $\tilde{h}(\sigma) \leq g(\sigma)$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$;
- (ii) $h(x) \geq \tilde{g}(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Доведення. Якщо виконується умова (i), то $\tilde{\tilde{h}}(x) \geq \tilde{g}(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Звідси випливає (ii), оскільки $\tilde{\tilde{h}}(x) \leq h(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Якщо виконується умова (ii), то $\tilde{h}(\sigma) \leq \tilde{g}(\sigma)$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$. Звідси випливає (i), оскільки $\tilde{\tilde{g}}(\sigma) \leq g(\sigma)$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$. □

Лема 2.2. *Нехай $h \in X$. Тоді \tilde{h} — опукла на \mathbb{R} функція, тобто для довільних $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ таких, що $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ правильна нерівність*

$$\tilde{h}(x_2)(x_3 - x_1) \leq \tilde{h}(x_1)(x_3 - x_2) + \tilde{h}(x_3)(x_2 - x_1). \quad (2.3)$$

Доведення. Для кожного $t \in \mathbb{R}$ маємо

$$(tx_2 - h(t))(x_3 - x_1) = (tx_1 - h(t))(x_3 - x_2) + (tx_3 - h(t))(x_2 - x_1).$$

Беручи супремум від обидвох частин наведеної рівності за всіма $t \in \mathbb{R}$, бачимо, що виконується нерівність (2.3). \square

Для функції $h \in X$ покладемо $D_h = \{x \in \mathbb{R} : h(x) < +\infty\}$. Зрозуміло, що в означенні функції \tilde{h} замість супремуму за всіма $x \in \mathbb{R}$ досить брати супремум за всіма $x \in D_h$.

Зокрема, якщо функція $h \in X$ така, що множина D_h містить лише один елемент, тобто $D_h = \{x_0\}$, то

$$\tilde{h}(\sigma) = \sigma x_0 - h(x_0), \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що якщо $g(x) = x\sigma_0 - c_0$, $x \in \mathbb{R}$, де $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ і $c_0 < +\infty$, то, як легко бачити, $D_{\tilde{g}} = \{\sigma_0\}$, причому $\tilde{g}(\sigma_0) = c_0$.

Лема 2.3. *Нехай функція $h \in X$ така, що D_h є проміжком дійсної осі і h — опукла на D_h . Тоді $\tilde{h}(x) = h(x)$, $x \in D_h$.*

Доведення. Оскільки $\tilde{h}(x) \leq h(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, то досить довести, що $h(x) \leq \tilde{h}(x)$ для всіх $x \in D_h$.

Якщо $h(x) = -\infty$ для деякого $x \in D_h$, то з опуклості h на D_h випливає, що $h(x) = -\infty$ для всіх $x \in D_h$. Тоді, зрозуміло, $h(x) \leq \tilde{h}(x)$ для всіх $x \in D_h$.

Припустимо, що $h(x) > -\infty$ для всіх $x \in D_h$, і зафіксуємо довільне $x_0 \in D_h$. Тоді для кожного $x \in D_h$ за опуклістю функції h маємо

$$h(x) - h(x_0) \geq \sigma_0(x - x_0),$$

де σ_0 — одна з односторонніх похідних $h'_-(x_0)$ чи $h'_+(x_0)$. Отже, $h(x) \geq g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, де $g(x) = x\sigma_0 - c_0$, а $c_0 = x_0\sigma_0 - h(x_0)$. Тоді $\tilde{h}(x) \geq \tilde{g}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Але $\tilde{g}(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, а тому $\tilde{h}(x_0) \geq \tilde{g}(x_0) = g(x_0) = h(x_0)$. \square

Лема 2.4. Нехай функції $h, g \in X$ такі, що D_h є проміжком дійсної осі, $g(x) \leq h(x)$, $x \in D_h$, і g опукла на D_h . Тоді $g(x) \leq \tilde{h}(x)$, $x \in D_h$.

Доведення. Нехай $\alpha(x) = g(x)$, $x \in D_h$, і $\alpha(x) = +\infty$, $x \notin D_h$. Тоді $D_\alpha = D_h$ і за попередньою лемою $\tilde{\alpha}(x) = \alpha(x)$, $x \in D_h$.

Оскільки $\alpha(x) \leq h(x)$, $x \in D_h$, то $\alpha(x) \leq h(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Тоді $\tilde{\alpha}(x) \leq \tilde{h}(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Отже, якщо $x \in D_h$, то $g(x) = \alpha(x) = \tilde{\alpha}(x) \leq \tilde{h}(x)$. \square

Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$ і $\Phi : [\sigma_0, A) \rightarrow \mathbb{R}$ — функція з класу Ω_A . Вважаємо, що функція Φ належить до класу X , приймаючи для цього $\Phi(\sigma) = +\infty$ для всіх $\sigma \notin [\sigma_0, +\infty)$ (тоді $D_\Phi = [\sigma_0, +\infty)$). Зафіксуємо довільне $x \in \mathbb{R}$ і покладемо

$$y(\sigma) = x\sigma - \Phi(\sigma), \quad \sigma \in [\sigma_0, A).$$

Функція y неперервна на $[\sigma_0, A)$, причому, згідно з (2.2), $y(\sigma) \rightarrow -\infty$, якщо $\sigma \uparrow A$. Зрозуміло, що тоді ця функція досягає на $[\sigma_0, A)$ свого максимуму, а тому

$$\tilde{\Phi}(x) = \max_{\sigma \geq \sigma_0} y(\sigma), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Для кожного фіксованого $x \in \mathbb{R}$ розглянемо множину

$$S(x) = \{\sigma \geq \sigma_0 : y(\sigma) = \tilde{\Phi}(x)\}.$$

Зі сказаного вище випливає, що $S(x)$ є непорожньою обмеженою зверху множиною. Нехай $\varphi(x) = \sup S(x)$. Тоді $\varphi(x) \in S(x)$, тобто існує $\max S(x)$ і $\phi(x) = \max S(x)$. Справді, якщо припустити, що $\phi(x) \notin S(x)$, то множина $S(x)$ нескінченна і $\sigma < \varphi(x)$ для кожного $\sigma \in S(x)$. Нехай тоді (σ_n) — деяка зростаюча до $\varphi(x)$ послідовність елементів

множини $S(x)$. Для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ маємо $y(\sigma_n) = \tilde{\Phi}(x)$. Спрямувавши тут n до ∞ і скориставшись неперервністю функції Φ , отримуємо $y(\varphi(x)) = \tilde{\Phi}(x)$, тобто $\varphi(x) \in S(x)$, що суперечить зробленому припущенню. Отже, множина $S(x)$ має найбільший елемент і ним є $\varphi(x)$.

Лема 2.5. *Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_A$ і*

$$\varphi(x) = \max\{\sigma \in [\sigma_0, A) : x\sigma - \Phi(\sigma) = \tilde{\Phi}(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тоді:

(i) φ — неспадна на \mathbb{R} функція;

(ii) φ — неперервна справа на \mathbb{R} функція;

(iii) $\varphi(x) \rightarrow A$, $x \rightarrow +\infty$;

(iv) в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ правобічна похідна від функції $\tilde{\Phi}(x)$ дорівнює $\varphi(x)$;

(v) якщо $x_0 = \inf\{x > 0 : \Phi(\varphi(x)) > 0\}$, то функція $\bar{\Phi}(x) = \tilde{\Phi}(x)/x$ є зростаючою до A на $(x_0, +\infty)$;

(vi) функція $\alpha(x) = \Phi(\varphi(x))$ є неспадною на $[0, +\infty)$.

Доведення. Нехай $x_1 < x_2$. Оскільки $x_j\varphi(x_j) - \Phi(\varphi(x_j)) = \tilde{\Phi}(x_j)$, $j \in \{1, 2\}$, то з означення функції $\tilde{\Phi}$ випливають нерівності

$$x_1\varphi(x_1) - \Phi(\varphi(x_1)) \geq x_1\varphi(x_2) - \Phi(\varphi(x_2)),$$

$$x_2\varphi(x_2) - \Phi(\varphi(x_2)) \geq x_2\varphi(x_1) - \Phi(\varphi(x_1)),$$

додавши які, отримаємо $(\varphi(x_2) - \varphi(x_1))(x_2 - x_1) \geq 0$. Звідси маємо $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$. Твердження (i) доведено.

Нехай $x_0 \in \mathbb{R}$ — фіксована точка. З твердження (i) випливає існування правобічної границі $\varphi(x_0+0)$, а також нерівність $\varphi(x_0+0) \geq \varphi(x_0)$.

Доведемо, що $\varphi(x_0 + 0) = \varphi(x_0)$, тобто що φ неперервна справа в точці x_0 . Справді, з означення функції $\tilde{\Phi}$ випливає нерівність

$$x\varphi(x_0) - \Phi(\varphi(x_0)) \leq x\varphi(x) - \Phi(\varphi(x)),$$

спрямовуючи в якій x до x_0 справа, отримуємо

$$\tilde{\Phi}(x_0) \leq x_0\varphi(x_0 + 0) - \Phi(\varphi(x_0 + 0)).$$

З іншого боку,

$$\tilde{\Phi}(x_0) \geq x_0\varphi(x_0 + 0) - \Phi(\varphi(x_0 + 0)).$$

Отже,

$$\tilde{\Phi}(x_0) = x_0\varphi(x_0 + 0) - \Phi(\varphi(x_0 + 0)).$$

Тоді з означення функції φ випливає, що $\varphi(x_0 + 0) \leq \varphi(x_0)$, а тому $\varphi(x_0 + 0) = \varphi(x_0)$. Твердження (ii) доведено.

Доведемо (iii). Припустимо, від супротивного, що $\varphi(+\infty) = B < A$. Нехай $C \in (B, A)$. Скориставшись означенням функції $\tilde{\Phi}$, для довільного $x \in \mathbb{R}$ маємо $xC - \Phi(C) \leq x\varphi(x) - \Phi(\varphi(x))$. Звідси випливає нерівність $x(C - \varphi(x)) \leq \Phi(C) - \Phi(\varphi(x))$, спрямовуючи в якій x до $+\infty$, отримуємо $+\infty \leq \Phi(C) - \Phi(B)$, що неможливо.

Доведемо твердження (iv). Нехай $x \in \mathbb{R}$ — фіксована точка і $h > 0$. З означення функції $\tilde{\Phi}$ маємо

$$\frac{\tilde{\Phi}(x+h) - \tilde{\Phi}(x)}{h} \geq \frac{(x+h)\varphi(x) - \Phi(\varphi(x)) - \tilde{\Phi}(x)}{h} = \varphi(x),$$

$$\frac{\tilde{\Phi}(x+h) - \tilde{\Phi}(x)}{h} \leq \frac{\tilde{\Phi}(x+h) - (x\varphi(x+h) - \Phi(\varphi(x+h)))}{h} = \varphi(x+h).$$

Отже,

$$\varphi(x) \leq \frac{\tilde{\Phi}(x+h) - \tilde{\Phi}(x)}{h} \leq \varphi(x+h).$$

Спрямовуючи тут h до 0 і використовуючи при цьому твердженням (ii), бачимо, що правобічна похідна функції $\tilde{\Phi}(x)$ в точці x дорівнює $\varphi(x)$.

Доведемо (v). Оскільки $x\varphi(x) - \tilde{\Phi}(x) = \Phi(\varphi(x)) > 0$, $x > x_0$, то

$$(\bar{\Phi}(x))'_+ = \frac{x\varphi(x) - \tilde{\Phi}(x)}{x^2} > 0, \quad x > x_0,$$

а тому функція $\bar{\Phi}(x)$ зростає на інтервалі $(x_0, +\infty)$.

Крім того, з нерівності $x\varphi(x) - \tilde{\Phi}(x) > 0$, $x > x_0$, випливає, що $\bar{\Phi}(x) < \varphi(x) < A$, $x > x_0$. З іншого боку, для довільного фіксованого x_1 і всіх $x \geq x_1$ отримуємо

$$\tilde{\Phi}(x) = \tilde{\Phi}(x_1) + \int_{x_1}^x \varphi(t) dt \geq \tilde{\Phi}(x_1) + (x - x_1)\varphi(x_1),$$

звідки випливає, що

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{\Phi}(x) \geq \varphi(x_1).$$

Спрямувавши тут x_1 до $+\infty$, бачимо, що $\bar{\Phi}(x) \rightarrow A$, $x \rightarrow +\infty$.

Доведемо (vi). Нехай $x_2 > x_1 \geq 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \alpha(x_2) - \alpha(x_1) &= x_2\varphi(x_2) - x_1\varphi(x_1) + \tilde{\Phi}(x_1) - \tilde{\Phi}(x_2) \geq \\ &\geq x_2\varphi(x_2) - x_1\varphi(x_1) + (x_1 - x_2)\varphi(x_2) = \\ &= x_1(\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) \geq 0, \end{aligned}$$

а тому функція $\alpha(x) = \Phi(\varphi(x))$ є неспадною на $[0, +\infty)$. \square

Лема 2.6. *Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi_1, \Phi_2 \in \Omega_A$ і $\Phi_1(\sigma) = \Phi_2(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, A)$. Тоді $\tilde{\Phi}_1(x) = \tilde{\Phi}_2(x)$ для всіх $x \geq x_0$.*

Доведення. Для $j \in \{1, 2\}$ нехай $D_{\Phi_j} = [\sigma_j, A)$ і

$$\varphi_j(x) = \max\{\sigma \in [\sigma_j, A) : x\sigma - \Phi_j(\sigma) = \tilde{\Phi}_j(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

З лема 2.5 випливає, що

$$\min\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\} \geq \max\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}, \quad x \geq x_0.$$

Тоді для кожного $x \geq x_0$ маємо

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1(x) &= x\varphi_1(x) - \Phi_1(\varphi_1(x)) = x\varphi_1(x) - \Phi_2(\varphi_1(x)) \leq \\ &\leq \max_{\sigma \geq \sigma_2} (x\sigma - \Phi_2(\sigma)) = \tilde{\Phi}_2(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2(x) &= x\varphi_2(x) - \Phi_2(\varphi_2(x)) = x\varphi_2(x) - \Phi_1(\varphi_2(x)) \leq \\ &\leq \max_{\sigma \geq \sigma_1} (x\sigma - \Phi_1(\sigma)) = \tilde{\Phi}_1(x), \end{aligned}$$

а тому $\tilde{\Phi}_1(x) = \tilde{\Phi}_2(x)$. □

Лема 2.7. *Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_A$, а β — звуження функції $\tilde{\Phi}$ на D_Φ ($D_\beta = D_\Phi$). Тоді:*

$$(i) \tilde{\beta}(x) = \tilde{\Phi}(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(ii) \beta(\varphi(x)) = \Phi(\varphi(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \text{ де } \varphi \text{ — правобічна похідна від } \tilde{\Phi};$$

$$(iii) \beta \in \Omega_A^*.$$

Доведення. Нехай $\gamma(\sigma) = \tilde{\Phi}(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$. За лемою 2.5 функція $\tilde{\Phi}$ є опуклою на \mathbb{R} , причому $D_{\tilde{\Phi}} = \mathbb{R}$, а тому $\tilde{\gamma}(x) = \tilde{\Phi}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, за лемою 2.3. Оскільки $\gamma(\sigma) \leq \beta(\sigma) \leq \Phi(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, то $\tilde{\gamma}(x) \geq \tilde{\beta}(x) \geq \tilde{\Phi}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, звідки випливає (i).

Крім того, для довільних $\sigma, x \in \mathbb{R}$ маємо

$$x\sigma - \tilde{\Phi}(\sigma) = x\sigma - \gamma(\sigma) \leq \tilde{\gamma}(x) = \tilde{\Phi}(x) = x\varphi(x) - \Phi(\varphi(x)). \quad (2.4)$$

Звідси, прийнявши $\sigma = \varphi(x)$, отримуємо $\tilde{\Phi}(\varphi(x)) \geq \Phi(\varphi(x))$, $x \in \mathbb{R}$. З іншого боку, $\tilde{\Phi}(\sigma) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, а тому (ii) доведено.

Для доведення (iii) перепишемо (2.4) у вигляді

$$\tilde{\Phi}(\sigma) \geq x(\sigma - \varphi(x)) + \Phi(\varphi(x)), \quad \sigma, x \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Оскільки $\beta \in \text{опуклою на } D_\beta$, то досить довести, що виконується (2.2) з β замість Φ .

Нехай спочатку $A < +\infty$. Зафіксуємо довільне $c > 0$ і виберемо $x_0 > 0$ так, щоб виконувалась нерівність $\Phi(\varphi(x_0)) \geq c$. Скориставшись (2.5) з $x = x_0$ для всіх $\sigma \in [\varphi(x_0), A)$ маємо $\tilde{\Phi}(\sigma) \geq c$. З довільності $c > 0$ випливає, що $\tilde{\Phi}(\sigma) \rightarrow +\infty, \sigma \rightarrow A - 0$, а тому виконується (2.2) з β замість Φ .

Нехай $A = +\infty$. Зафіксуємо довільне $x_0 > 0$. Скориставшись (2.5) з $x = x_0$, отримуємо

$$\liminf_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\Phi}(\sigma)}{\sigma} \geq \liminf_{\sigma \rightarrow +\infty} \left(x_0 \left(1 - \frac{\varphi(x_0)}{\sigma} \right) + \frac{\Phi(\varphi(x_0))}{\sigma} \right) = x_0.$$

З довільності $x_0 > 0$ випливає, що $\tilde{\Phi}(\sigma)/\sigma \rightarrow +\infty, \sigma \rightarrow +\infty$, а тому виконується (2.2) з β замість Φ . \square

2.2. Загальні результати щодо зростання рядів Діріхле

Нехай \mathbb{N}_0 — множина невід'ємних цілих чисел, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, Λ — клас невід'ємних зростаючих до $+\infty$ послідовностей $\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ і $A \in (-\infty, +\infty]$.

Для послідовності $\lambda \in \Lambda$ покладемо

$$\tau(\lambda) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n}$$

і розглянемо ряд Діріхле вигляду (2.1). Нехай

$$E_1(F) = \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{\sigma \lambda_n} < +\infty \right\},$$

$$E_2(F) = \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| e^{\sigma \lambda_n} = 0 \right\}.$$

Абсцису абсолютної збіжності і абсцису існування максимального члена ряду (2.1) визначимо відповідно за рівностями

$$\sigma_a(F) = \begin{cases} -\infty, & \text{якщо } E_1(F) = \emptyset, \\ \sup E_1(F), & \text{якщо } E_1(F) \neq \emptyset, \end{cases}$$

$$\beta(F) = \begin{cases} -\infty, & \text{якщо } E_2(F) = \emptyset, \\ \sup E_2(F), & \text{якщо } E_2(F) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Легко бачити, що

$$\beta(F) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}.$$

Добре відомо також (див., наприклад, [39, с. 114–115]), що

$$\sigma_a(F) \leq \beta(F) \leq \sigma_a(F) + \tau(\lambda)$$

і ці нерівності точні (більше того, як доведено в [87], для довільних $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ таких, що $A \leq B \leq A + \tau(\lambda)$, існує ряд Діріхле F вигляду (2.1), для якого $\sigma_a(F) = A$ и $\beta(F) = B$).

Якщо $\sigma_a(F) > -\infty$, то для всіх $\sigma < \sigma_a(F)$ нехай

$$M(\sigma, F) = \sup\{|F(s)| : \operatorname{Re} s = \sigma\}$$

— максимум модуля ряду (2.1). Якщо ж $\beta(F) > -\infty$, то для всіх $\sigma < \beta(F)$ нехай

$$\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| e^{\sigma \lambda_n} : n \in \mathbb{N}_0\}$$

— максимальний член цього ряду. У випадку $\sigma_a(F) > -\infty$, як добре відомо, $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$ для всіх $\sigma < \sigma_a(F)$.

Через $\mathcal{D}_A(\lambda)$ позначимо клас рядів Діріхле вигляду (2.1) таких, що $F(s) \not\equiv \text{const}$ і $\sigma_a(F) \geq A$. Покладемо $\mathcal{D}_A = \cup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}_A(\lambda)$.

Через $\mathcal{D}_A^*(\lambda)$ позначимо клас рядів Діріхле вигляду (2.1) таких, що $F(s) \not\equiv \text{const}$ і $\beta(F) \geq A$. Покладемо $\mathcal{D}_A^* = \cup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}_A^*(\lambda)$.

Якщо $F \in \mathcal{D}_A$, то, як добре відомо, $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$ для всіх $\sigma < A$.

Зауважимо, що $\mathcal{D}_A(\lambda) \subset \mathcal{D}_A^*(\lambda)$ для довільної послідовності $\lambda \in \Lambda$. Зі сказаного вище випливає, що у випадку скінченного A маємо $\mathcal{D}_A(\lambda) = \mathcal{D}_A^*(\lambda)$ тоді і лише тоді, коли $\tau(\lambda) = 0$. Крім того, $\mathcal{D}_{+\infty}(\lambda) = \mathcal{D}_{+\infty}^*(\lambda)$ тоді і лише тоді, коли $\tau(\lambda) < +\infty$. Зрозуміло також, що $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_A^*$ і це включення строге.

Лема 2.8. *Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_A$, а $F \in \mathcal{D}_A^*$ — ряд Діріхле вигляду (2.1). Тоді $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, A)$, якщо і лише якщо $\ln |a_n| \leq -\tilde{\Phi}(\lambda_n)$ для всіх $n \geq n_0$.*

Доведення. Припустимо, що $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, A)$. Покладемо $\Psi(\sigma) = \Phi(\sigma)$ для кожного $\sigma \in [\sigma_0, A)$ і $\Psi(\sigma) = +\infty$ для кожного $\sigma \notin [\sigma_0, A)$. Нехай $h \in X$ — функція така, що $h(\lambda_n) = -\ln |a_n|$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ і $h(x) = +\infty$ для всіх $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_0, \lambda_1, \dots\}$. Тоді $\ln \mu(\sigma, F) = \tilde{h}(\sigma)$, якщо $\sigma < \beta(F)$. Отже, $\tilde{h}(\sigma) \leq \Psi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$. За лемою 2.1 маємо $h(x) \geq \tilde{\Psi}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Тому, скориставшись лемою 2.6, для всіх $n \geq n_0$ отримуємо $\ln |a_n| = -h(\lambda_n) \leq -\tilde{\Psi}(\lambda_n) = -\tilde{\Phi}(\lambda_n)$.

Припустимо, що $\ln |a_n| \leq -\tilde{\Phi}(\lambda_n)$ для всіх $n \geq n_0$. Якщо $\mu(\sigma, F)$ є обмеженою на $(-\infty, A)$ функцією, то $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх

$\sigma \in [\sigma_0, A)$. Якщо функція $\mu(\sigma, F)$ необмежена на $(-\infty, A)$, то поряд з рядом F розглянемо ряд Діріхле

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it, \quad (2.6)$$

такий, що $b_n = 0$ для $n < n_0$ і $b_n = a_n$ для $n \geq n_0$. Тоді, як легко обґрунтувати, $\mu(\sigma, F) = \mu(\sigma, G)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, A)$. Крім того, $\ln |b_n| \leq -\tilde{\Phi}(\lambda_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, а тому за лемою 2.1 маємо $\ln \mu(\sigma, G) \leq \Phi(\sigma)$, $\sigma < A$. Звідси й випливає, що $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, A)$. \square

Доведемо тепер наступну загальну теорему про зростання рядів Діріхле.

Теорема 2.1. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, $A \in (-\infty, +\infty]$ і $\Phi, \Gamma \in \Omega_A$. Якщо*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{\tilde{\Phi}(\lambda_n) - \tilde{\Gamma}(\lambda_n)}} < +\infty, \quad (2.7)$$

то кожен ряд Діріхле F з класу $\mathcal{D}_A^(\lambda)$ такий, що $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$, $\sigma \in [\sigma_1, A)$, належить до класу $\mathcal{D}_A(\lambda)$ і для нього $\ln M(\sigma, F) \leq \Gamma(\sigma)$, $\sigma \in [\sigma_2, A)$.*

Доведення. Нехай $\lambda \in \Lambda$, $A \in (-\infty, +\infty]$, а функції $\Phi, \Gamma \in \Omega_A$ такі, що виконується умова (2.7).

Розглянемо довільний ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}_A^*(\lambda)$ вигляду (2.1) такий, що $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$, $\sigma \in [\sigma_1, A)$. За лемою 2.8 маємо $\ln |a_n| \leq -\tilde{\Phi}(\lambda_n)$, $n \geq n_1$.

Зафіксуємо $n_2 \geq n_1$ таке, що

$$\sum_{n \geq n_2} \frac{1}{e^{\tilde{\Phi}(\lambda_n) - \tilde{\Gamma}(\lambda_n)}} \leq \frac{1}{2}.$$

Тоді для всіх $\sigma \in [\sigma_2, A)$ отримуємо

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{\sigma \lambda_n} &= \sum_{n < n_2} |a_n| e^{\sigma \lambda_n} + \sum_{n \geq n_2} |a_n| e^{\sigma \lambda_n} \leq \frac{1}{2} e^{\Gamma(\sigma)} + \sum_{n \geq n_2} \frac{e^{\sigma \lambda_n}}{e^{\tilde{\Phi}(\lambda_n)}} = \\ &= \frac{1}{2} e^{\Gamma(\sigma)} + e^{\Gamma(\sigma)} \sum_{n \geq n_2} \frac{e^{\sigma \lambda_n - \Gamma(\sigma)}}{e^{\tilde{\Phi}(\lambda_n)}} \leq e^{\Gamma(\sigma)} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n \geq n_2} \frac{e^{\tilde{\Gamma}(\lambda_n)}}{e^{\tilde{\Phi}(\lambda_n)}} \right) \leq e^{\Gamma(\sigma)}. \end{aligned}$$

Отже, $\sigma_a(F) \geq A$, тобто $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$. Крім того, $\ln M(\sigma, F) \leq \Gamma(\sigma)$, $\sigma \in [\sigma_2, A)$. \square

Далі нам буде потрібна і така теорема.

Теорема 2.2. *Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$, послідовність $\lambda \in \Lambda$ така, що $\tau(\lambda) > 0$, якщо $A < +\infty$, і $\tau(\lambda) = +\infty$, якщо $A = +\infty$, а $G \in \mathcal{D}_A^*(\lambda) \setminus \mathcal{D}_A(\lambda)$ – ряд Діріхле вигляду (2.6), для якого $b_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тоді для довільної додатної на $(-\infty, A)$ функції l існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ вигляду (2.1) такий, що $a_n = b_n$ або $a_n = 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ і $M(\sigma, F) = F(\sigma) \geq l(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, A)$.*

Доведення. Не зменшуючи загальності, можемо вважати функцію l неспадною на $(-\infty, A)$.

Оскільки $G \in \mathcal{D}_A^*(\lambda) \setminus \mathcal{D}_A(\lambda)$, то $\beta(G) \geq A$ і $\sigma_a(G) < A$. З нерівності $\beta(G) \geq A$ випливає існування зростаючої до A послідовності (η_n) такої, що

$$\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{b_n} \geq \eta_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Тоді $b_n \leq e^{-\eta_n \lambda_n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Оскільки $\sigma_a(G) < A$, то для всіх $\sigma \in (\sigma_a(G), A)$ і довільного $m \in \mathbb{N}_0$ маємо

$$\sum_{n \geq m} b_n e^{\sigma \lambda_n} = +\infty.$$

Зафіксуємо зростаючу до A послідовність (σ_n) . Виберемо зростаючу послідовність (m_k) невід'ємних цілих чисел так, щоб для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ виконувались нерівності

$$\eta_{m_k} \geq \sigma_k, \quad e^{(\sigma_k - \sigma_{k+1})\lambda_{m_{k+1}}}(l(\sigma_{k+2}) + 1) < \frac{1}{(k+1)^2},$$

$$\sum_{n=m_k}^{m_{k+1}-1} b_n e^{\sigma_k \lambda_n} \geq l(\sigma_{k+1}),$$

і покладемо

$$p_k = \min \left\{ p \geq m_k : \sum_{n=m_k}^p b_n e^{\sigma_k \lambda_n} \geq l(\sigma_{k+1}) \right\}.$$

Зауважимо, що тоді $m_k \leq p_k \leq m_{k+1} - 1$ і

$$\begin{aligned} l(\sigma_{k+1}) &\leq \sum_{n=m_k}^{p_k} b_n e^{\sigma_k \lambda_n} < l(\sigma_{k+1}) + b_{p_k} e^{\sigma_k \lambda_{p_k}} \leq \\ &\leq l(\sigma_{k+1}) + e^{(\sigma_k - \eta_{p_k})\lambda_{p_k}} \leq l(\sigma_{k+1}) + 1. \end{aligned}$$

Нехай $n \in \mathbb{N}_0$. Покладемо $a_n = b_n$, якщо $n \in [m_k, p_k]$ для деякого $k \in \mathbb{N}_0$, і $a_n = 0$, якщо $n \notin [m_k, p_k]$ для кожного $k \in \mathbb{N}_0$. Розглянемо ряд Діріхле F вигляду (2.1) і доведемо, що $\sigma_a(G) \geq A$. Справді, для кожного фіксованого $j \in \mathbb{N}_0$ маємо

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq m_{j+1}} a_n e^{\sigma_j \lambda_n} &= \sum_{k \geq j+1} \sum_{n=m_k}^{p_k} b_n e^{\sigma_j \lambda_n} = \sum_{k \geq j+1} \sum_{n=m_k}^{p_k} b_n e^{\sigma_k \lambda_n} e^{(\sigma_j - \sigma_k)\lambda_n} \\ &\leq \sum_{k \geq j+1} e^{(\sigma_j - \sigma_k)\lambda_{m_k}} \sum_{n=m_k}^{p_k} b_n e^{\sigma_k \lambda_n} \\ &\leq \sum_{k \geq j+1} e^{(\sigma_{k-1} - \sigma_k)\lambda_{m_k}} (l(\sigma_{k+1}) + 1) < \sum_{k \geq j+1} \frac{1}{k^2} < +\infty, \end{aligned}$$

звідки і випливає, що $\sigma_a(F) \geq A$. Крім того, якщо $\sigma \in [\sigma_0, A)$, то $\sigma \in [\sigma_k, \sigma_{k+1})$ для деякого $k \in \mathbb{N}_0$ і тоді

$$F(\sigma) \geq \sum_{n=m_k}^{p_k} a_n e^{\sigma \lambda_n} = \sum_{n=m_k}^{p_k} b_n e^{\sigma \lambda_n} \geq \sum_{n=m_k}^{p_k} b_n e^{\sigma_k \lambda_n} \geq l(\sigma_{k+1}) \geq l(\sigma).$$

Теорему доведено. \square

Теорема 2.2 буде істотно використовуватись при доведенні основних результатів наступних підрозділів. Тут вкажемо на два прості наслідки з цієї теореми.

Важливою задачею при дослідженні властивостей цілих рядів Діріхле є задача про встановлення оцінок зверху для максимуму модуля цілого ряду Діріхле через його максимальний член (див., наприклад, роботи [51, 58] і бібліографію в них). Зокрема, для заданої функції $h \in L$ встановлювались умови на послідовність $\lambda \in \Lambda$, за яких для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0$ зовні деякої малої виняткової множини значень σ виконується співвідношення $M(\sigma, F) \leq h(\mu(\sigma, F))$ чи для всіх $\sigma \geq \sigma_0$ виконується співвідношення $M(\sigma, F) \leq \mu(h(\sigma), F)$. З наступної теореми, яка випливає з теореми 2.2, бачимо, що виконання такого сорту співвідношень для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ можливе лише за умови $\tau(\lambda) < +\infty$.

Теорема 2.3. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, $\tau(\lambda) = +\infty$. Тоді для довільних функцій $l_1, l_2 \in L$ існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ такий, що*

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{M(\sigma, F)}{l_1(\mu(l_2(\sigma), F))} = +\infty.$$

Доведення. Як зазначалося вище, у випадку $\tau(\lambda) = +\infty$ множина $\mathcal{D}_{+\infty}^*(\lambda) \setminus \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ не є порожньою. Тому досить застосувати теорему

2.2 до довільного ряду $G \in \mathcal{D}_{+\infty}^*(\lambda) \setminus \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ вигляду (2.6) такого, що $b_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, і до функції $l(\sigma) = l_1^2(\mu(l_2(\sigma), G))$. \square

Якщо $\tau(\lambda) > 0$, то у випадку скінченного A існують абсолютно збіжні у півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < A\}$ ряди Діріхле довільного швидкого зростання з обмеженим максимальним членом. Цей факт впливає з наступної теореми.

Теорема 2.4. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, $\tau(\lambda) > 0$. Тоді для довільної додатної на $(-\infty, 0)$ функції l існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}_0(\lambda)$ вигляду (2.1) такий, що $a_n = 1$ або $a_n = 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ і $M(\sigma, F) = F(\sigma) \geq l(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$.*

Доведення. Розглянемо ряд Діріхле

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{s\lambda_n}.$$

Зрозуміло, що $\beta(G) = 0$, а тому $G \in \mathcal{D}_0^*(\lambda)$.

Зафіксуємо деяке $\sigma \in (-\tau(\lambda), 0)$. Тоді $\tau(\lambda) > -\sigma$, звідки негайно випливає, що множина $E = \{k \in \mathbb{N}_0 : \ln k \geq -\sigma\lambda_k\}$ є нескінченною.

Для довільного $k \in E$ маємо

$$\sum_{n=[k/2]}^k e^{\sigma\lambda_n} \geq \sum_{n=[k/2]}^k e^{\sigma\lambda_k} \geq \frac{k}{2} e^{\sigma\lambda_k} \geq \frac{k}{2} e^{-\ln k} = \frac{1}{2}.$$

Отже, ряд G в точці $s = \sigma$ є розбіжним, а тому $G \notin \mathcal{D}_0(\lambda)$.

Для завершення доведення залишилось застосувати теорему 2.2. \square

2.3. Узагальнені типи зростання рядів Діріхле

Якщо $\Phi \in \Omega_A$ і $F \in \mathcal{D}_A$, то величину

$$T_\Phi(F) = T_{\Phi,A}(F) = \overline{\lim}_{\sigma \uparrow A} \frac{\ln M(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)}$$

називатимемо Φ -типом ряду F у півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < A\}$.

Для $\Phi \in \Omega_A$ і $F \in \mathcal{D}_A^*$ нехай

$$t_\Phi(F) = t_{\Phi,A}(F) = \overline{\lim}_{\sigma \uparrow A} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)}$$

— Φ -тип логарифма максимального члена ряду F у півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < A\}$.

Якщо $F \in \mathcal{D}_A$, то, зрозуміло, $t_\Phi(F) \leq T_\Phi(F)$.

Поняття Φ -типу ряду Діріхле є узагальненням класичного поняття типу цілого ряду Діріхле. Типом цілого ($F \in \mathcal{D}_{+\infty}$) ряду Діріхле називається величина

$$T(F) = \overline{\lim}_{\sigma \uparrow +\infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{e^{\rho\sigma}},$$

де ρ — фіксоване додатне число. Якщо $\tau(\lambda) = 0$, то тип кожного цілого ряду Діріхле вигляду (2.1) може бути обчислений (див., наприклад, [39, с. 178]) через послідовність $(|a_n|)$ за формулою

$$T(F) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{e^{\rho}} |a_n|^{\frac{\rho}{\lambda_n}}. \quad (2.8)$$

Нехай $\Phi \in \Omega_A$ і $\tilde{\Phi}$ — функція, спряжена за Юнгом з функцією Φ , тобто

$$\tilde{\Phi}(x) = \sup\{x\sigma - \Phi(\sigma) : \sigma \in [\sigma_0, A]\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

З наведених вище лем 2.2 і 2.5 випливають наступні факти: $\tilde{\Phi}$ є опуклою на \mathbb{R} функцією; якщо φ — правобічна похідна від функції $\tilde{\Phi}$, то

$$\tilde{\Phi}(x) = x\varphi(x) - \Phi(\varphi(x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

$\varphi(x) < A$ на \mathbb{R} і $\varphi(x) \nearrow A$, якщо $x \uparrow +\infty$; якщо

$$x_0 = \inf\{x > 0 : \Phi(\varphi(x)) > 0\},$$

то функція $\bar{\Phi}(x) = \tilde{\Phi}(x)/x$ є зростаючою до A на $(x_0, +\infty)$. З опуклості функції $\tilde{\Phi}$ випливає її неперервність, а тому й неперервність на $(x_0, +\infty)$ функції $\bar{\Phi}$. Тому на інтервалі (A_0, A) , де $A_0 = \bar{\Phi}(x_0 + 0)$, визначена обернена до $\bar{\Phi}$ функція ψ , яка на вказаному інтервалі неперервна і зростає до $+\infty$. Вважаємо, що $\psi(\sigma) = +\infty$ для кожного $\sigma \in [A, +\infty]$. Зауважимо, що якщо $F \in \mathcal{D}_A^*$ — ряд Діріхле вигляду (2.1), то $\beta(F) \geq A$, а тому

$$\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \geq A_0, \quad n \geq n_0.$$

Нехай $t > 0$ — фіксоване число. Враховуючи, що спряженою за Юнгом з функцією $h(\sigma) = t\Phi(\sigma)$, $\sigma \in [\sigma_0, A)$, є функція $\tilde{h}(x) = t\tilde{\Phi}(x/t)$, $x \in \mathbb{R}$, і $\tilde{h}(x) = x\bar{\Phi}(x/t)$, $x \geq tx_0$, за лемою 2.8 отримуємо

$$t_\Phi(F) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\psi\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)}. \quad (2.9)$$

Отже, для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A^*$, а тому й для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A$ вигляду (2.1) правильна формула (2.9). Тому Φ -тип довільного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A$ вигляду (2.1) такого, що $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$, можна обчислити через послідовність $(|a_n|)$ за формулою

$$T_\Phi(F) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\psi\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)}, \quad (2.10)$$

яка у розглянутому вище класичному випадку ($A = +\infty$ і $\Phi(\sigma) = e^{\rho\sigma}$, $\sigma \geq 0$) збігається з формулою (2.8). З огляду на сказане, природно виникає наступна задача, яка є переформулюванням задачі 1.2 для ширшого класу функцій Φ .

Задача 2.6. Знайти необхідну і достатню умову на послідовність $\lambda \in \Lambda$ і функцію $\Phi \in \Omega_A$, за якої для довільного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A$ вигляду (2.1) правильна рівність $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$, а тому й формула (2.12).

В окремих випадках розв'язок задачі 2.6 отримано в роботах [62, 63, 78, 65]. Позначимо через Ω_A^* — клас опуклих на $[\sigma_0, A)$ функцій $\Phi \in \Omega_A$. Зауважимо, що тоді односторонні похідні Φ'_- та Φ'_+ є неспадними на $[\sigma_0, A)$ функціями і $\Phi'_-(\sigma) \rightarrow +\infty$, $x \uparrow A$. Крім того, скориставшись означенням функції $\tilde{\Phi}$ і лемою 2.5, легко довести, що

$$\Phi'_-(\varphi(x)) \leq x \leq \Phi'_+(\varphi(x)), \quad x > x_0 := \Phi'_+(\sigma_0). \quad (2.11)$$

Розв'язок сформульованої задачі для цілих рядів Діріхле у випадку послідовності $\lambda = (n)$ знайдено, фактично, в [62] (насправді, в [62] розглядаються цілі функції, зображені степеневими рядами). Наведемо у рівносильному формулюванні результат з [62].

Теорема 2.5 ([62]). *Нехай $\lambda = (n)$, $\Phi \in \Omega_{+\infty}^*$ — неперервно диференційовна на $[\sigma_0, A)$ функція. Для того, щоб для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ справджувалась рівність $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\ln \Phi'(\sigma) = o(\Phi(\sigma)), \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

Нехай $\Phi : [\sigma_0, A) \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервно диференційовна функція з класу Ω_A^* така, що Φ' є додатною зростаючою на $[\sigma_0, A)$ функцією. Тоді з (2.11) випливає, що звуження правобічної похідної φ функції $\tilde{\Phi}$ на інтервал $(x_0, +\infty)$ є оберненою до Φ' функцією. Покладемо

$$\Psi(\sigma) = \sigma - \frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}, \quad \sigma \in [\sigma_0, A).$$

(Функція Ψ , як відомо, називається спряженою за Ньютоном з функцією Φ .) Легко бачити, що $\Psi(\varphi(x)) = \bar{\Phi}(x)$, $x \in [x_0, +\infty)$. Для послідовності $\lambda \in \Lambda$ нехай $n_\lambda(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} 1$ — її лічильна функція. Наступну теорему отримав М. М. Шеремета [78].

Теорема 2.6 ([78]). *Нехай $\lambda \in \Lambda$, $A \in (-\infty, +\infty]$, а $\Phi \in \Omega_A^*$ — двічі неперервно диференційовна на $[\sigma_0, A)$ функція така, що $\frac{\Phi'(\sigma)}{\Phi(\sigma)} \nearrow +\infty$ і $\ln \Phi'(\sigma) = o(\Phi(\sigma))$, якщо $\sigma \uparrow A$. Для того, щоб для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ з нерівності $t_\Phi(F) \leq 1$ випливала нерівність $T_\Phi(F) \leq 1$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\ln n_\lambda(x) = o(\Phi(\Psi(\varphi(x))))), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2.12)$$

Зауваження 2.1. *Замінивши в теоремі 2.6 нерівності $t_\Phi(F) \leq 1$ і $T_\Phi(F) \leq 1$ відповідно на рівності $t_\Phi(F) = 1$ і $T_\Phi(F) = 1$, отримуємо, як легко бачити, твердження, рівносильне теоремі 2.6.*

Зауваження 2.2. *Умову (2.12) можемо переписати у вигляді*

$$\ln n_\lambda(x) = o(\Phi(\bar{\Phi}(x))), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2.13)$$

Крім того, як легко бачити, ця умова рівносильна кожній з умов

$$\ln n_\lambda(\Phi'(\sigma)) = o(\Phi(\Psi(\sigma))), \quad \sigma \uparrow A;$$

$$\ln n = o(\Phi(\bar{\Phi}(\lambda_n))), \quad n \rightarrow \infty.$$

Зауваження 2.3. *Достатність умови (2.12) у теоремі 2.6 доведено в [78] лише за припущення, що $\Phi \in \Omega_A^*$ є двічі неперервно-диференційовною функцією такою, що функція Φ'/Φ неспадає на $[\sigma_0, A)$.*

Нехай $t \in (0, +\infty)$ — фіксоване число. Застосовуючи теорему 2.6 до функції $t\Phi$ замість функції Φ і враховуючи зауваження 2.2, бачимо,

що якщо функція $\Phi \in \Omega_A^*$ задовольняє умови теореми 2.6 і $\lambda \in \Lambda$, то для того, щоб $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$ для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\forall t > 0 : \quad \ln n = o(\Phi(\bar{\Phi}(\lambda_n/t))), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

Зауважимо також, що з теореми 2.6 не випливає теорема 2.5. Крім того, теорема 2.6 не дає відповіді на таке запитання: чи є умова $\tau(\lambda) = 0$ необхідною для того, щоб для кожного цілого ряду Діріхле вигляду (2.1) справджувалась формула (2.8)? Зазначимо, що позитивна відповідь на сформульоване запитання впливає з отриманих нижче результатів.

З огляду на теорему 2.6 виникає і така задача, яка є загальнішою за задачу 2.6.

Задача 2.7. *Нехай $T_0 \geq t_0 \geq 0$ — довільні сталі. Знайти необхідну і достатню умову на послідовність $\lambda \in \Lambda$ і функцію $\Phi \in \Omega_A$, за якої для довільного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A$ такого, що $t_\Phi(F) = t_0$, виконувалась нерівність $T_\Phi(F) \leq T_0$.*

Нижче отримаємо розв'язки задач 2.6 і 2.7 в повному обсязі.

Для послідовності $\lambda \in \Lambda$, функції $\Phi \in \Omega_A$ і довільних $t_2 > t_1 > 0$ покладемо

$$\Delta(t_1, t_2) = \Delta_{\Phi, \lambda}(t_1, t_2) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{t_1 \tilde{\Phi}(\lambda_n/t_1) - t_2 \tilde{\Phi}(\lambda_n/t_2)}.$$

Вкажемо, насамперед, на деякі властивості величини $\Delta(t_1, t_2)$. Для цього нам буде потрібна така лема.

Лема 2.9. Нехай Ψ — опукла на \mathbb{R} функція і $x_0 \geq 0$. Тоді для довільних $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ таких, що $t_3 > t_2 > t_1 > 0$ правильні нерівності

$$\begin{aligned} t_1 \Psi \left(\frac{x_0}{t_1} \right) - t_2 \Psi \left(\frac{x_0}{t_2} \right) &\geq \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} \left(t_1 \Psi \left(\frac{x_0}{t_1} \right) - t_3 \Psi \left(\frac{x_0}{t_3} \right) \right), \\ t_2 \Psi \left(\frac{x_0}{t_2} \right) - t_3 \Psi \left(\frac{x_0}{t_3} \right) &\leq \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} \left(t_1 \Psi \left(\frac{x_0}{t_1} \right) - t_3 \Psi \left(\frac{x_0}{t_3} \right) \right). \end{aligned}$$

Доведення. Оскільки Ψ — опукла на \mathbb{R} функція, то для $x_0 \geq 0$ і довільних $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ таких, що $t_3 > t_2 > t_1 > 0$, правильна нерівність

$$\Psi \left(\frac{x_0}{t_2} \right) \left(\frac{x_0}{t_1} - \frac{x_0}{t_3} \right) \leq \Psi \left(\frac{x_0}{t_1} \right) \left(\frac{x_0}{t_2} - \frac{x_0}{t_3} \right) + \Psi \left(\frac{x_0}{t_3} \right) \left(\frac{x_0}{t_1} - \frac{x_0}{t_2} \right),$$

домноживши яку на добуток $t_1 t_2 t_3$, отримуємо

$$\Psi \left(\frac{x_0}{t_2} \right) t_2 (t_3 - t_1) \leq \Psi \left(\frac{x_0}{t_1} \right) t_1 (t_3 - t_2) + \Psi \left(\frac{x_0}{t_3} \right) t_3 (t_2 - t_1).$$

Скориставшись отриманою нерівністю, маємо

$$\begin{aligned} \Psi \left(\frac{x_0}{t_1} \right) t_1 (t_3 - t_1) - \Psi \left(\frac{x_0}{t_2} \right) t_2 (t_3 - t_1) &\geq \\ &\geq \Psi \left(\frac{x_0}{t_1} \right) t_1 (t_3 - t_1) - \Psi \left(\frac{x_0}{t_1} \right) t_1 (t_3 - t_2) - \Psi \left(\frac{x_0}{t_3} \right) t_3 (t_2 - t_1) = \\ &= \Psi \left(\frac{x_0}{t_1} \right) t_1 (t_2 - t_1) - \Psi \left(\frac{x_0}{t_3} \right) t_3 (t_2 - t_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi \left(\frac{x_0}{t_2} \right) t_2 (t_3 - t_1) - \Psi \left(\frac{x_0}{t_3} \right) t_3 (t_3 - t_1) &\leq \\ &\leq \Psi \left(\frac{x_0}{t_1} \right) t_1 (t_3 - t_2) + \Psi \left(\frac{x_0}{t_3} \right) t_3 (t_2 - t_1) - \Psi \left(\frac{x_0}{t_3} \right) t_3 (t_3 - t_1) = \\ &= \Psi \left(\frac{x_0}{t_1} \right) t_1 (t_3 - t_2) - \Psi \left(\frac{x_0}{t_3} \right) t_3 (t_3 - t_2), \end{aligned}$$

звідки й випливають потрібні нерівності. □

Якщо d — фіксоване число, то для функції $\gamma(t) = t\tilde{\Phi}(d/t)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, маємо

$$\gamma'_+(t) = \tilde{\Phi}\left(\frac{d}{t}\right) - \frac{d}{t}\varphi\left(\frac{d}{t}\right) = -\Phi\left(\varphi\left(\frac{d}{t}\right)\right).$$

Отже,

$$t_1\tilde{\Phi}\left(\frac{d}{t_1}\right) - t_2\tilde{\Phi}\left(\frac{d}{t_2}\right) = \int_{t_1}^{t_2} \Phi\left(\varphi\left(\frac{d}{t}\right)\right) dt. \quad (2.15)$$

Нехай $a > 0$ — фіксоване число. Розглянемо функцію $y = \Delta(a, t)$, $t \in (a, +\infty)$. Врахувавши, що функція $\alpha(x) = \Phi(\varphi(x))$ є додатною на $(x_0, +\infty)$, і скориставшись (2.15) та лемами 2.2 і 2.9, для довільних $t_2 > t_1 > a$ отримуємо

$$0 \leq y(t_2) \leq y(t_1) \leq \frac{t_2 - a}{t_1 - a} y(t_2).$$

Звідси випливає, що функція y тотожно дорівнює нулю, або тотожно дорівнює $+\infty$, або вона є додатною неперервною незростаючою на $(a, +\infty)$ функцією.

Нехай $b > 0$ — фіксоване число. Розглянемо функцію $y = \Delta(t, b)$, $t \in (0, b)$. Знову скориставшись лемою 2.9, для довільних $0 < t_1 < t_2 < b$ отримуємо

$$0 \leq y(t_1) \leq \frac{b - t_2}{b - t_1} y(t_2).$$

Звідси випливає, що якщо $y(t_2) = 0$ для деякого $t_2 \in (0, b)$, то $y(t) = 0$ на $(0, t_2]$; якщо $y(t_1) = +\infty$ для деякого $t_1 \in (0, b)$, то $y(t) = +\infty$ на $[t_1, b)$; якщо в деякій точці $t \in (0, b)$ функція y не приймає значень 0 і $+\infty$, то в цій точці задана функція зростає.

Зауважимо також, що за лемою 2.6 функція $\alpha(x) = \Phi(\varphi(x))$ є неспадною на $[0, +\infty)$, а тому з (2.15) для довільних $d \geq 0$ і $t_2 > t_1 > 0$

маємо

$$\begin{aligned} (t_2 - t_1)\Phi\left(\varphi\left(\frac{d}{t_2}\right)\right) &\leq t_1\tilde{\Phi}\left(\frac{d}{t_1}\right) - t_2\tilde{\Phi}\left(\frac{d}{t_2}\right) \leq \\ &\leq (t_2 - t_1)\Phi\left(\varphi\left(\frac{d}{t_1}\right)\right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Розв'язок задачі 2.6 міститься в такій теоремі.

Теорема 2.7. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, $A \in (-\infty, +\infty]$, а $\Phi \in \Omega_A$. Для того, щоб $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$ для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall t > 0 : \quad \ln n = o(\Phi(\varphi(\lambda_n/t))), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.17)$$

Зауваження 2.4. *Нехай $\Phi \in \Omega_A$, а β — звуження функції $\tilde{\Phi}$ на D_Φ . Тоді за лемою 2.7 маємо $\beta \in \Omega_A^*$, $\beta(\varphi(x)) = \Phi(\varphi(x))$ для кожного $x \in \mathbb{R}$, а також $\tilde{\beta}(x) = \tilde{\Phi}(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, звідки випливає, що φ є правобічною похідною від $\tilde{\beta}$. Крім того, оскільки для кожного ряду $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ функції $\ln M(\sigma, F)$ і $\ln \mu(\sigma, F)$ є опуклими на $(-\infty, A)$, то $T_\Phi(F) = T_\beta(F)$ і $t_\Phi(F) = t_\beta(F)$ за лемою 2.4. З огляду на сказане, при доведенні теореми 2.7, як і при доведенні наведених далі теорем, можна було б обмежитись функціями Φ з класу Ω_A^* , який є вузким за клас Ω_A . Більше того, функції з класу Ω_A^* володіють добрими для використання властивостями, які випливають з їх опуклості. Незважаючи на це, умова належності функції Φ до ширшого класу Ω_A не викликати в нас жодних додаткових труднощів.*

Зауваження 2.5. *Якщо функція $\Phi \in \Omega_A$ є опуклою на $[\sigma_0, A)$, тобто $\Phi \in \Omega_A^*$, то за нерівностями (2.11) умова (2.17) рівносильна умові*

$$\forall t > 0 : \quad \ln n_\lambda(t\Phi'_+(\sigma)) = o(\Phi(\sigma)), \quad \sigma \uparrow A, \quad (2.18)$$

причому тут Φ'_+ можна замінити на Φ'_- .

Зауваження 2.6. Умови (2.14) і (2.17) рівносильні для кожної функції $\Phi \in \Omega_A^*$. Цей факт випливає з нерівностей (2.19), наведених в наступній лемі.

Лема 2.10. Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_A^*$ і $q \in (0, 1)$. Тоді для всіх $x \geq x_0$ виконуються нерівності

$$(1 - q)\Phi(\varphi(qx)) \leq \Phi(\bar{\Phi}(x)) < \Phi(\varphi(x)). \quad (2.19)$$

Доведення. Якщо $\Phi \in \Omega_A^*$, то Φ є зростаючою на $[\sigma_1, A)$ функцією.

Оскільки

$$\bar{\Phi}(x) = \varphi(x) - \frac{\Phi(\varphi(x))}{x} < \varphi(x), \quad x > x_1,$$

то $\Phi(\bar{\Phi}(x)) < \Phi(\varphi(x))$, $x > x_2$, тобто виконується права з нерівностей (2.19).

Далі, скориставшись опуклістю функції Φ і (2.11), маємо

$$\Phi(\varphi(x)) - \Phi(\varphi(qx)) \leq (\varphi(x) - \varphi(qx))\Phi'_-(\varphi(x)) \leq (\varphi(x) - \varphi(qx))x$$

для всіх $x > x_3$, а тому для всіх $x > x_4$ отримуємо

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi(qx)) - \Phi(\bar{\Phi}(x)) &\leq (\varphi(qx) - \bar{\Phi}(x))\Phi'_-(\varphi(qx)) \leq \\ &\leq \left(\varphi(qx) - \varphi(x) + \frac{\Phi(\varphi(x))}{x} \right) qx \leq \\ &\leq \left(\frac{\Phi(\varphi(qx)) - \Phi(\varphi(x))}{x} + \frac{\Phi(\varphi(x))}{x} \right) qx = q\Phi(\varphi(qx)). \end{aligned}$$

Звідси випливає ліва з нерівностей (2.19). \square

Зауважимо також, що якщо $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ і $t_\Phi(F) = +\infty$, то $T_\Phi(F) = +\infty$ за нерівністю $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$, $\sigma < A$, а тому $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$. \exists

огляду на це, наступна теорема уточнює теорему 2.7 в частині достатності.

Теорема 2.8. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, $A \in (-\infty, +\infty]$, а $\Phi \in \Omega_A$. Якщо виконується умова (2.17), то кожен ряд Діріхле F з класу $\mathcal{D}_A^*(\lambda)$ такий, що $t_\Phi(F) < +\infty$, належить до класу $\mathcal{D}_A(\lambda)$ і для нього виконується рівність $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$.*

Розв'язок задачі 2.7 міститься в такій теоремі.

Теорема 2.9. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_A$, а $T_0 \geq t_0 \geq 0$ – довільні сталі. Для того, щоб для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ такого, що $t_\Phi(F) = t_0$, справджувалась нерівність $T_\Phi(F) \leq T_0$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall T > T_0 \exists c \in (t_0, T) : \Delta(c, T) < 1. \quad (2.20)$$

Як впливає з теореми 2.9, умова

$$\forall T > 1 \exists c \in (1, T) : \Delta(c, T) < 1, \quad (2.21)$$

є необхідною і достатньою для того, щоб для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ з нерівності $t_\Phi(F) \leq 1$ випливала нерівність $T_\Phi(F) \leq 1$. Якщо $A = +\infty$ і $\Phi(\sigma) = \sigma \ln \sigma$, $\sigma \geq e$, то, як легко перевірити, умова (2.21) набуде вигляду

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n}{\lambda_n} < 1,$$

а умову (2.12) можна записати у вигляді

$$\ln n = o(e^{\lambda_n}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Звідси бачимо, що умова (2.21) не збігається, взагалі кажучи, з умовою (2.12) з теореми 2.6, тобто ця теорема без додаткових умов на функцію Φ перестає бути вірною.

З боку достатності теорему 2.9 можна уточнити.

Теорема 2.10. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_A$, а $T_0 \geq t_0 \geq 0$ — довільні сталі. Якщо виконується умова (2.20), то кожен ряд Діріхле F з класу $\mathcal{D}_A^*(\lambda)$ такий, що $t_\Phi(F) = t_0$, належить до класу $\mathcal{D}_A(\lambda)$ і для нього виконується нерівність $T_\Phi(F) \leq T_0$.*

Теореми 2.9 і 2.10 є безпосередніми наслідками з наведених далі теорем 2.11 і 2.12 відповідно.

Теорема 2.11. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_A$, а $T_0 > t_0 \geq 0$ — довільні сталі. Для того, щоб для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ такого, що $t_\Phi(F) = t_0$, справджувалась нерівність $T_\Phi(F) < T_0$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\exists c \in (t_0, T_0) : \quad \Delta(c, T_0) < 1. \quad (2.22)$$

Теорема 2.12. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_A$, а $T_0 > t_0 \geq 0$ — довільні сталі. Якщо виконується умова (2.22), то кожен ряд Діріхле F з класу $\mathcal{D}_A^*(\lambda)$ такий, що $t_\Phi(F) = t_0$, належить до класу $\mathcal{D}_A(\lambda)$ і для нього виконується нерівність $T_\Phi(F) < T_0$.*

Перейдемо до доведення наведених теорем.

Доведення теореми 2.12. Нехай $\lambda \in \Lambda$, $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_A$, а $T_0 > t_0 \geq 0$ — довільні сталі. Припустимо, що виконується умова (2.22), тобто для деякого $c \in (t_0, T_0)$ маємо $\Delta(c, T_0) < 1$. Розглянемо функцію

$y = \Delta(c, t)$, $t \in (c, +\infty)$. З властивостей цієї функції, описаних вище, випливає існування числа $T \in (c, T_0)$ такого, що $\Delta(c, T) < 1$. Нехай $q \in (\Delta(c, T), 1)$. Тоді існує $n_0 \in \mathbb{N}_0$ таке, що

$$\ln n \leq q \left(c\tilde{\Phi} \left(\frac{\lambda_n}{c} \right) - T\tilde{\Phi} \left(\frac{\lambda_n}{T} \right) \right), \quad n \geq n_0,$$

а тому

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{c\tilde{\Phi}(\lambda_n/c) - T\tilde{\Phi}(\lambda_n/T)}} < +\infty. \quad (2.23)$$

Розглянемо довільний ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}_A^*(\lambda)$ такий, що $t_\Phi(F) = t_0$. Тоді $t_\Phi(F) < c$, а тому $\ln \mu(\sigma, F) \leq c\Phi(\sigma)$, $\sigma \in [\sigma_1, A)$. За теоремою 2.1, з огляду на (2.23), ряд F належить до класу $\mathcal{D}_A(\lambda)$ і для цього ряду виконується нерівність $\ln M(\sigma, F) \leq T\Phi(\sigma)$, $\sigma \in [\sigma_2, A)$, з якої випливає, що $T_\Phi(F) \leq T < T_0$. \square

Для доведення теореми 2.11 нам буде потрібна наступна лема.

Лема 2.11. *Нехай (x_n) – додатна послідовність така, що*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{x_n} = \delta \geq 1.$$

Тоді для кожного $q \in (0, 1)$ множина $E(q) = \{n \in \mathbb{N}_0 : \ln n \geq qx_n \wedge x_{[n/2]} \geq qx_n\}$ є нескінченною.

Доведення. Якщо $\delta = +\infty$, то, прийнявши

$$m_k = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : \ln n \geq (k+1)x_n\},$$

бачимо, що $m_k \in E(q)$ для кожного $k \in \mathbb{N}_0$. Якщо ж $\delta < +\infty$, то для деякої зростаючої послідовності (p_k) невід'ємних цілих чисел маємо $\ln p_k \sim \delta x_{p_k}$, $k \rightarrow \infty$, і, як наслідок,

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{p_k}}{x_{[p_k/2]}} = \frac{1}{\delta} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln p_k}{x_{[p_k/2]}} = \frac{1}{\delta} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln[p_k/2]}{x_{[p_k/2]}} \leq \frac{1}{\delta} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{x_n} = 1.$$

Зрозуміло, що тоді $p_k \in E_q$ для всіх $k \geq k_0(q)$. \square

Доведення теореми 2.11. З огляду на теорему 2.12, нам залишається довести лише необхідність умови (2.22).

Припустимо, що ця умова не виконується, тобто $\Delta(c, T_0) \geq 1$ для всіх $c \in (t_0, T_0)$, і доведемо, що тоді існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ вигляду (2.1) такий, що $t_\Phi(F) = t_0$, але $T_\Phi(F) \geq T_0$.

Для довільних $t_2 > t_1 > 0$ покладемо

$$\delta(t_1, t_2) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{(t_2 - t_1)\Phi(\varphi(\lambda_n/t_1))}.$$

Зауважимо, що $\Delta(t_1, t_2) \geq \delta(t_1, t_2)$ за правою з нерівностей (2.16).

Розглянемо спочатку випадок, коли для всіх $c \in (t_0, T_0)$ виконується нерівність $\delta(c, T_0) \geq 1$, яка є сильнішою ніж нерівність $\Delta(c, T_0) \geq 1$. За лемою 2.11 для довільних фіксованих $c \in (t_0, T_0)$ та $q \in (0, 1)$ множина $E(c, q)$ тих $n \in \mathbb{N}_0$, для яких одночасно виконуються нерівності

$$\ln n \geq q(T_0 - c)\Phi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{c}\right)\right), \quad \Phi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_{[n/2]}}{c}\right)\right) \geq q\Phi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{c}\right)\right),$$

є нескінченною. Нехай (c_k) спадна до t_0 послідовність точок інтервалу (t_0, T_0) , а (q_k) зростаюча до 1 послідовність точок інтервалу $(0, 1)$. Виберемо послідовність (n_k) невід'ємних цілих чисел так, щоб для довільного $k \in \mathbb{N}_0$ виконувались умови $n_k \in E(c_k, q_k)$ і $[n_{k+1}/2] > n_k$.

Нехай $n \in \mathbb{N}_0$. Покладемо $b_n = e^{-c_k \tilde{\Phi}(\lambda_n/c_k)}$, якщо $n \in [[n_k/2], n_k]$ для деякого $k \in \mathbb{N}_0$, і нехай $b_n = 0$, якщо $n \notin [[n_k/2], n_k]$ для кожного $k \in \mathbb{N}_0$. Розглянемо ряд Діріхле (2.6) з так визначеними коефіцієнтами b_n . Цей ряд можемо записати у вигляді

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=[n_k/2]}^{n_k} \frac{e^{s\lambda_n}}{e^{c_k \tilde{\Phi}(\lambda_n/c_k)}}. \quad (2.24)$$

Для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ таких, що $n \in [[n_k/2], n_k]$ для деякого $k \in \mathbb{N}_0$, маємо

$$\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{b_n} = \frac{c_k}{\lambda_n} \tilde{\Phi} \left(\frac{\lambda_n}{c_k} \right) = \bar{\Phi} \left(\frac{\lambda_n}{c_k} \right).$$

Оскільки за лемою 2.5 функція $\bar{\Phi}$ є зростаючою до A на $(x_0, +\infty)$, то $\beta(G) = A$. Отже, $G \in \mathcal{D}_A^*(\lambda)$. Крім того, якщо $\psi : (A_0, A) \rightarrow (x_0, +\infty)$ – обернена до $\bar{\Phi}$ функція (тут $A_0 = \bar{\Phi}(x_0 + 0)$), то для всіх $n \in [[n_k/2], n_k]$ і кожного $k \geq k_0$ маємо

$$\frac{\lambda_n}{\psi \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{b_n} \right)} = c_k,$$

звідки випливає, що $t_\Phi(G) = t_0$.

Якщо $G \in \mathcal{D}_A(\lambda)$, то досить покласти $a_n = b_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, тобто прийняти $F = G$. Справді, якщо $\sigma_k = \varphi(\lambda_{n_k}/c_k)$, то для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ і всіх $n \in [[n_k/2], n_k]$ маємо

$$\begin{aligned} \sigma_k \lambda_n - c_k \tilde{\Phi} \left(\frac{\lambda_n}{c_k} \right) &= \lambda_n \varphi \left(\frac{\lambda_{n_k}}{c_k} \right) - \lambda_n \varphi \left(\frac{\lambda_n}{c_k} \right) + c_k \Phi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{c_k} \right) \right) \geq \\ &\geq c_k \Phi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{c_k} \right) \right) \geq c_k \Phi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_{[n_k/2]}}{c_k} \right) \right) \geq c_k q_k \Phi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_{n_k}}{c_k} \right) \right), \end{aligned}$$

а тому

$$\begin{aligned} M(\sigma_k, G) = G(\sigma_k) &\geq \sum_{n=[n_k/2]}^{n_k} \frac{e^{\sigma_k \lambda_n}}{e^{c_k \tilde{\Phi}(\lambda_n/c_k)}} \geq \frac{n_k}{2} e^{c_k q_k \Phi(\varphi(\lambda_{n_k}/c_k))} \geq \\ &\geq e^{q_k(T_0 - c_k)\Phi(\varphi(\lambda_{n_k}/c_k)) - \ln 2} e^{c_k q_k \Phi(\varphi(\lambda_{n_k}/c_k))} = e^{q_k T_0 \Phi(\sigma_k) - \ln 2}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $\ln M(\sigma_k, G) \geq q_k T_0 \Phi(\sigma_k) - \ln 2$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$.

Оскільки $\sigma_k \rightarrow A$, $k \rightarrow \infty$, то

$$T_\Phi(F) = T_\Phi(G) \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln M(\sigma_k, G)}{\Phi(\sigma_k)} \geq T_0 \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} q_k = T_0.$$

Якщо $G \notin \mathcal{D}_A(\lambda)$, то за теоремою 2.2 існує ряд $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ вигляду (2.1) такий, що $a_n = b_n$ або $a_n = 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ і $F(\sigma) \geq e^{T_0\Phi(\sigma)}$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, A)$. Зрозуміло, що тоді $t_\Phi(F) = t_0$ і $T_\Phi(F) \geq T_0$.

Отже, у випадку, коли для всіх $c \in (t_0, T_0)$ виконується нерівність $\delta(c, T_0) \geq 1$, існування потрібного ряду доведено. Розглянемо тепер протилежний випадок, тобто припустимо, що для деякого $d_0 \in (t_0, T_0)$ виконується нерівність $\delta(d_0, T_0) < 1$. Тоді

$$\ln p < (T_0 - d_0)\Phi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_p}{d_0}\right)\right) - \ln 3, \quad p \geq p_0.$$

Звідси, врахувавши, що функція $\alpha(x) = \Phi(\varphi(x))$ є неспадною на $[0, +\infty)$, для кожного $c \in (t_0, d_0]$ отримуємо

$$\ln p < (T_0 - c)\Phi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_p}{c}\right)\right) - \ln 3, \quad p \geq p_0. \quad (2.25)$$

Згідно зі зробленим вище припущенням, $\Delta(c, T_0) \geq 1$ для всіх $c \in (t_0, T_0)$. З описаних вище властивостей функції $y = \Delta(t, T_0)$, $t \in (0, T_0)$, випливає, що тоді для всіх $c \in (t_0, T_0)$ виконується сильніша нерівність $\Delta(c, T_0) > 1$.

Нехай (c_k) спадна до t_0 послідовність точок з $(t_0, c_0]$. Оскільки $\Delta(c_k, T_0) > 1$ для кожного $k \in \mathbb{N}_0$, то існує послідовність (n_k) невід'ємних цілих чисел така, що $n_0 \geq 2p_0$ і для довільного $k \in \mathbb{N}_0$ виконуються умови $[n_{k+1}/2] > n_k$ і

$$\ln n_k > c_k \tilde{\Phi}\left(\frac{\lambda_{n_k}}{c_k}\right) - T_0 \tilde{\Phi}\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_0}\right). \quad (2.26)$$

Нехай $n \in \mathbb{N}_0$. Покладемо $b_n = e^{-c_k \tilde{\Phi}(\lambda_n/c_k)}$, якщо $n \in [[n_k/2], n_k]$ для деякого $k \in \mathbb{N}_0$, і нехай $b_n = 0$, якщо $n \notin [[n_k/2], n_k]$ для кожного $k \in \mathbb{N}_0$. Розглянемо ряд Діріхле (2.6) з так визначеними коефіцієнтами

b_n . Цей ряд можемо записати у вигляді (2.24). Застосовуючи такі самі міркування, як і вище, бачимо, що $\beta(G) = A$ і $t_\Phi(G) = t_0$.

Використовуючи (2.25) з $c = c_k$ і $p = [n_k/2]$, а також (2.26), для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ отримуємо

$$\begin{aligned} (T_0 - c_k)\Phi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_{[n_k/2]}}{c_k}\right)\right) &> \\ &> \ln\left[\frac{n_k}{2}\right] + \ln 3 > \ln n_k > c_k\tilde{\Phi}\left(\frac{\lambda_{n_k}}{c_k}\right) - T_0\tilde{\Phi}\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_0}\right) = \\ &= \int_{c_k}^{T_0} \Phi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_{n_k}}{t}\right)\right) dt \geq (T_0 - c_k)\Phi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_0}\right)\right), \end{aligned}$$

а тому

$$\frac{\lambda_{[n_k/2]}}{c_k} > \frac{\lambda_{n_k}}{T_0}. \quad (2.27)$$

Покладемо $\sigma_k = \varphi(\lambda_{n_k}/T_0)$. Тоді для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ і всіх $n \in [[n_k/2], n_k]$, скориставшись (2.26), монотонністю функції φ і (2.27), маємо

$$\begin{aligned} \sigma_k \lambda_n - c_k \tilde{\Phi}\left(\frac{\lambda_n}{c_k}\right) &= \\ &= \lambda_n \varphi\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_0}\right) - c_k \tilde{\Phi}\left(\frac{\lambda_n}{c_k}\right) - T_0 \Phi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_0}\right)\right) + T_0 \Phi(\sigma_k) = \\ &= (\lambda_n - \lambda_{n_k}) \varphi\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_0}\right) - c_k \tilde{\Phi}\left(\frac{\lambda_n}{c_k}\right) + T_0 \tilde{\Phi}\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_0}\right) + T_0 \Phi(\sigma_k) > \\ &> (\lambda_n - \lambda_{n_k}) \varphi\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_0}\right) - c_k \tilde{\Phi}\left(\frac{\lambda_n}{c_k}\right) + c_k \tilde{\Phi}\left(\frac{\lambda_{n_k}}{c_k}\right) - \ln n_k + T_0 \Phi(\sigma_k) = \\ &= (\lambda_n - \lambda_{n_k}) \varphi\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_0}\right) + c_k \int_{\lambda_n/c_k}^{\lambda_{n_k}/c_k} \varphi(x) dx - \ln n_k + T_0 \Phi(\sigma_k) \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq (\lambda_n - \lambda_{n_k})\varphi\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_0}\right) + c_k\left(\frac{\lambda_{n_k}}{c_k} - \frac{\lambda_n}{c_k}\right)\varphi\left(\frac{\lambda_n}{c_k}\right) - \ln n_k + T_0\Phi(\sigma_k) = \\
&= (\lambda_{n_k} - \lambda_n)\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{c_k}\right) - \varphi\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_0}\right)\right) - \ln n_k + T_0\Phi(\sigma_k) \geq \\
&\geq -\ln n_k + T_0\Phi(\sigma_k).
\end{aligned}$$

Якщо $G \in \mathcal{D}_A(\lambda)$, то досить покласти $a_n = b_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, тобто прийняти $F = G$. Справді, для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ маємо

$$M(\sigma_k, G) = G(\sigma_k) \geq \sum_{n=[n_k/2]}^{n_k} \frac{e^{\sigma_k \lambda_n}}{e^{c_k \tilde{\Phi}(\lambda_n/c_k)}} \geq \frac{n_k}{2} e^{-\ln n_k + T_0\Phi(\sigma_k)} = e^{T_0\Phi(\sigma_k) - \ln 2}.$$

Звідси випливає, що $\ln M(\sigma_k, G) \geq T_0\Phi(\sigma_k) - \ln 2$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$.

Оскільки $\sigma_k \rightarrow A$, $k \rightarrow \infty$, то $T_\Phi(F) = T_\Phi(G) \geq T_0$.

Якщо $G \notin \mathcal{D}_A(\lambda)$, то за теоремою 2.2 існує ряд $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ вигляду (2.1) такий, що $a_n = b_n$ або $a_n = 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ і $F(\sigma) \geq e^{T_0\Phi(\sigma)}$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, A)$. Зрозуміло, що тоді $t_\Phi(F) = t_0$ і $T_\Phi(F) \geq T_0$. \square

Доведення теореми 2.8. Нехай $\lambda \in \Lambda$, $A \in (-\infty, +\infty]$, а $\Phi \in \Omega_A$. Припустимо, що виконується умова (2.17), і розглянемо ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}_A^*(\lambda)$ такий, що $t_\Phi(F) < +\infty$. Покладемо $t_0 = t_\Phi(F)$. Нехай $T_0 > t_0$ і $c \in (t_0, T_0)$ — довільні фіксовані числа. Скориставшись умовою (2.17) з $t = T_0$ і лівою з нерівностей (2.16), для всіх $n \geq n_0$ отримуємо

$$\ln n \leq \frac{T_0 - c}{2} \Phi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{T_0}\right)\right) \leq \frac{1}{2} \left(c \tilde{\Phi}\left(\frac{\lambda_n}{c}\right) - T_0 \tilde{\Phi}\left(\frac{\lambda_n}{T_0}\right) \right),$$

а тому $\Delta(c, T_0) \leq 1/2 < 1$. За теоремою 2.12 ряд F належить до класу $\mathcal{D}_A(\lambda)$ і для нього виконується нерівність $T_\Phi(F) < T_0$, з якої, завдяки довільності $T_0 > t_0$, випливає рівність $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$. \square

Доведення теореми 2.7. З огляду на теорему 2.8, нам залишається довести лише необхідність умови (2.17). Припустимо, що ця умова не виконується, тобто існують додатні сталі t_0 і δ такі, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\Phi(\varphi(\lambda_n/t_0))} \geq \delta. \quad (2.28)$$

Покладемо $T_0 = t_0 + \delta$. Тоді, скориставшись правою з нерівностей (2.16), для кожного $c \in (t_0, T_0)$ і всіх $n \geq n_0$ отримуємо

$$c\tilde{\Phi}\left(\frac{\lambda_n}{c}\right) - T_0\tilde{\Phi}\left(\frac{\lambda_n}{T_0}\right) \leq (T_0 - c)\Phi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{c}\right)\right) \leq \delta\Phi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{t_0}\right)\right).$$

Звідси і з (2.28) випливає, що $\Delta(c, T_0) \geq 1$ для кожного $c \in (t_0, T_0)$. За теоремою 2.11 існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ такий, що $t_\Phi(F) = t_0$ і $T_\Phi(F) \geq T_0 > t_0$. \square

2.4. Показники і Φ -тип абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле

Нехай $\lambda \in \Lambda$ — деяка послідовність. Розглянемо довільну неперервну зростаючу на $[0, +\infty)$ функцію l таку, що $\ln n \leq l(\lambda_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, і нехай $\varphi(x) = l(x^2)$, $x \geq 0$. Функція φ є неперервною зростаючою до $+\infty$ на $[0, +\infty)$, а тому для деякої $\Phi \in \Omega_{+\infty}^*$ маємо $\Phi'(x) = \varphi^{-1}(x)$, $x \geq x_0$. Тоді для кожного $B > 0$ отримуємо

$$\begin{aligned} \ln n_\lambda(B\Phi'(x)) &\leq l(B\Phi'(x)) \leq l((\Phi'(x))^2) = \\ &= \varphi(\Phi'(x)) = x = o(\Phi(x)), \quad x \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

тобто виконується умова (2.18) (з $A = +\infty$). Звідси і з теореми 2.7 випливає наступне твердження (див. зауваження 2.5): *якщо $A = +\infty$,*

то для довільної послідовності $\lambda \in \Lambda$ існує функція $\Phi \in \Omega_A$ така, що $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$ для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$.

У випадку $A < +\infty$ наведене твердження не є правильним. Більше того, справедлива така теорема.

Теорема 2.13. *Нехай $A \in (-\infty, +\infty)$, а $\lambda \in \Lambda$. Для того, щоб існувала функція $\Phi \in \Omega_A$ така, що для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ виконується рівність $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$, необхідно і досить, щоб*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty. \quad (2.29)$$

Теорема 2.13 є безпосереднім наслідком з 2.7 і наступного твердження.

Теорема 2.14. *Нехай $A \in (-\infty, +\infty)$, а $\lambda \in \Lambda$. Для того, щоб існувала функція $\Phi \in \Omega_A$ така, що виконується умова (2.17), необхідно і досить, щоб виконувалась умова (2.29).*

Насамперед доведемо декілька лем, які будуть потрібні для доведення теореми 2.14.

Для кожного $A \in (-\infty, +\infty]$ нехай Ω'_A — клас опуклих на $(-\infty, A)$ функцій Φ таких, що $\Phi(\sigma) \rightarrow +\infty$ і $\Phi'_+(\sigma) \rightarrow +\infty$, якщо $\sigma \uparrow A$. Зауважимо, що в означенні класу Ω'_A у випадку $A = +\infty$ зайвою є умова $\Phi'_+(\sigma) \rightarrow +\infty$, $\sigma \uparrow A$, а у випадку $A < +\infty$ зайвою є умова $\Phi(\sigma) \rightarrow +\infty$, $\sigma \uparrow A$. Крім того, $\Phi \in \Omega'_A$ тоді і лише тоді, коли звуження функції Φ на деякий (на довільний) півінтервал вигляду $[\sigma_0, A)$ є функцією з класу Ω_A^* .

Лема 2.12. *Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi \in \Omega'_A$, $x_0 = \inf\{x \in (-\infty, A) :$*

$\Phi'_+(x) > 0\}$, $t_0 = \inf\{\Phi(x) : x \in (x_0, A)\}$ і

$$\alpha(t) = \Phi'_+(\Phi^{-1}(t)), \quad t > t_0. \quad (2.30)$$

Тоді функція α є додатною неспадною неперервною справа на $(t_0, +\infty)$ і для довільного фіксованого $t_1 > t_0$ інтеграл

$$\int_{t_1}^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)} \quad (2.31)$$

збігається (розбігається) тоді і лише тоді, коли $A < +\infty$ ($A = +\infty$).

Доведення. Оскільки $\Phi'_+(x) > 0$ на $(x_0, +\infty)$, то функція Φ зростає на $(x_0, +\infty)$. Крім того, Φ неперервна на $(-\infty, A)$. Отже, обернена функція Φ^{-1} визначена на інтервалі $(t_0, +\infty)$ і є на ньому неперервною зростаючою функцією. Звідси випливає, що α — додатна неспадна неперервна справа на $(t_0, +\infty)$ функція.

Якщо $t_1 > t_0$ і $x_1 = \Phi^{-1}(t_1)$, то за (2.30) маємо

$$\int_{t_1}^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)} = \int_{x_1}^A \frac{d\Phi(x)}{\alpha(\Phi(x))} = \int_{x_1}^A \frac{\Phi'_+(x)dx}{\Phi'_+(x)} = \int_{x_1}^A dx = A - x_1,$$

а тому інтеграл (2.31) збігається (розбігається) тоді і лише тоді, коли $A < +\infty$ ($A = +\infty$). \square

Зауваження 2.7. Лема 2.12 залишиться правильною, якщо в ній Φ'_+ замінити на Φ'_- , а відносно функції α стверджувати, що вона є неперервною зліва, а не справа.

Лема 2.13. Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$, $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, а α — додатна неспадна неперервна справа на $(t_0, +\infty)$ функція така, що для деякого фіксованого $t_1 > t_0$ інтеграл (2.31) збігається у випадку $A < +\infty$ і розбігається у випадку $A = +\infty$. Тоді існує функція $\Phi \in \mathcal{O}'_A$, для якої виконується рівність (2.30).

Доведення. Для всіх $t > t_0$ покладемо

$$\beta(t) = A - \int_t^{+\infty} \frac{dy}{\alpha(y)},$$

якщо $A < +\infty$, і нехай

$$\beta(t) = \int_{t_1}^t \frac{dy}{\alpha(y)},$$

якщо $A = +\infty$. Тоді функція β є неперервною зростаючою до A на $(t_0, +\infty)$, причому

$$\beta'_+(t) = \frac{1}{\alpha(t)}, \quad t > t_0.$$

Тому для всіх $x \in (x_0, A)$, де $x_0 = \inf\{\beta(t) : t > t_0\}$, визначена обернена функція $\Phi(x) = \beta^{-1}(x)$. Ця функція зростає до $+\infty$ на (x_0, A) і для неї маємо

$$\Phi'_+(x) = \frac{1}{\beta'_+(\Phi(x))} = \alpha(\Phi(x)), \quad x \in (x_0, A), \quad (2.32)$$

звідки легко отримуємо (2.30). Крім того, з (2.32) випливає, що функція Φ'_+ є зростаючою до $+\infty$ на (x_0, A) . Отже, якщо $x_0 = -\infty$, то $\Phi \in \Omega'_A$. Якщо ж $x_0 > -\infty$, то, скориставшись опуклістю функції Φ на (x_0, A) , маємо $t_0 = \Phi(x_0 + 0) > -\infty$, а тому функцію Φ можна довизначити до функції з класу Ω'_A , поклавши $\Phi(x) = t_0$ для всіх $x \leq x_0$. \square

Зауваження 2.8. Якщо в лемі 2.13 вважати функцію α неперервною зліва, а не справа, то можна стверджувати, що існує функція $\Phi \in \Omega'_A$, для якої замість (2.30) виконується рівність $\alpha(t) = \Phi'_-(\Phi^{-1}(t))$, $t > t_0$.

Лема 2.14. Нехай α — додатна неспадна на $[a, +\infty)$ функція, для якої

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)} < +\infty. \quad (2.33)$$

Тоді існує додатна неспадна на $[a, +\infty)$ функція β така, що $\beta(t) = o(\alpha(t))$, якщо $t \rightarrow +\infty$, і $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\beta(t)} < +\infty$.

Лема 2.14 є добре відомою. Зокрема, як зауважив В. Бергвайлер [81], для її доведення досить покласти $\beta(t) = \sup\{\alpha(y)\sqrt{\gamma(y)} : y \in [a, t]\}$, $t \geq a$, де

$$\gamma(y) = \int_y^{+\infty} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}, \quad y \geq a.$$

Тоді, очевидно, β є додатною неспадною на $[a, +\infty)$ функцією. Оскільки $\gamma(y) \rightarrow 0$, $y \rightarrow +\infty$, то для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ існує $y_0 \geq a$ таке, що $\gamma(y) \leq \varepsilon$ для всіх $y \geq y_0$. Тому для всіх $t \geq y_0$ маємо

$$\beta(t) \leq \max\{\alpha(y_0)\gamma(a), \alpha(t)\varepsilon\},$$

звідки отримуємо

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \leq \varepsilon.$$

З довільності $\varepsilon > 0$ випливає співвідношення $\beta(t) = o(\alpha(t))$, $t \rightarrow +\infty$.

Крім того,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\beta(t)} \leq \int_a^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)\sqrt{\gamma(t)}} = - \int_a^{+\infty} \frac{d\gamma(t)}{\sqrt{\gamma(t)}} = \int_0^{\gamma(a)} \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty.$$

Лема 2.15. Нехай α — додатна неспадна на $[a, +\infty)$ функція, для якої виконується (2.33). Тоді існує неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[a, +\infty)$ функція γ така, що $\gamma(a) = a$, $\gamma(t) = o(t)$, якщо $t \rightarrow +\infty$, і $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(\gamma(t))} < +\infty$.

Доведення. Згідно з лемою 2.14, для функції α існує додатна неспадна на $[a, +\infty)$ функція β така, що $\beta(t) = o(\alpha(t))$, $t \rightarrow +\infty$, і $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\beta(t)} < +\infty$. Для всіх $t \geq a$ покладемо

$$\eta(t) = \int_a^t \frac{\alpha(\tau)}{\beta(\tau)} d\tau + a.$$

Функція η є неперервною зростаючою до $+\infty$ на $[a, +\infty)$, причому $\eta(a) = a$ і $t = o(\eta(t))$, $t \rightarrow +\infty$. Нехай $\gamma = \eta^{-1}$. Тоді $\gamma(a) = a$, γ — неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[a, +\infty)$ функція і $\gamma(t) = o(t)$, $t \rightarrow +\infty$. Крім того,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(\gamma(t))} = \int_a^{+\infty} \frac{d\eta(y)}{\alpha(y)} = \int_a^{+\infty} \frac{dy}{\beta(y)} < +\infty.$$

Лемі доведено. \square

Безпосереднім наслідком з лем 2.14 і 2.15 є таке твердження.

Лема 2.16. *Нехай α — додатна неспадна на $[a, +\infty)$ функція, що задовольняє (2.33). Тоді існують додатна неспадна на $[a, +\infty)$ функція β , для якої $\beta(t) = o(\alpha(t))$, $t \rightarrow +\infty$, і неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[a, +\infty)$ функція γ , для якої $\gamma(a) = a$ і $\gamma(t) = o(t)$, $t \rightarrow +\infty$, такі, що $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\beta(\gamma(t))} < +\infty$.*

Доведення теореми 2.14. Достатність. Припустимо, що виконується умова (2.29), і нехай α — неперервна зростаюча на $[0, +\infty)$ функція така, що $\alpha(\ln n) = \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$. Якщо $t \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$ для деякого $n \in \mathbb{N}$, то

$$\ln n_\lambda(t) = \ln(n+1) \leq \ln n + 1 = \alpha^{-1}(\lambda_n) + 1 \leq \alpha^{-1}(t) + 1.$$

Отже, $\ln n_\lambda(t) \leq \alpha^{-1}(t) + 1$, $t \geq \lambda_1$.

Далі зауважимо, що з умови (2.29) випливає умова (2.33) (з $a = 0$), оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} \geq \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y\alpha(\ln y)} = \int_1^{+\infty} \frac{d \ln y}{\alpha(\ln y)} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)}.$$

За лемою 2.16 існують додатна неспадна на $[0, +\infty)$ функція β , для якої $\beta(t) = o(\alpha(t))$, $t \rightarrow +\infty$, і неперервна зростаюча до $+\infty$ на

$[0, +\infty)$ функція γ , для якої $\gamma(0) = 0$ і $\gamma(t) = o(t)$, $t \rightarrow +\infty$, такі, що $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\beta(\gamma(t))} < +\infty$. Нехай $\delta(t) = \beta(t+0)$, $t \geq 0$. Функція δ , як і функція β , є додатною неспадною на $[0, +\infty)$, причому $\delta(t) = o(\alpha(t))$, $t \rightarrow +\infty$. Крім того, функція β є неперервною справа на $[0, +\infty)$. Згідно з лемою 2.13, існує функція $\Psi \in \Omega'_A$, для якої $\delta(\gamma(t)) = \Psi'_+(\Psi^{-1}(t))$, $t > 0$. Нехай Φ — звуження Ψ на деякий півінтервал $[\sigma_0, A)$. Функція Φ і буде шуканою. Справді, $\Phi \in \Omega_A^*$, а тому й $\Phi \in \Omega_A$. Крім того, для кожного $C > 0$ і всіх $\sigma \in [\sigma_0(C), A)$ маємо

$$\begin{aligned} \ln n_\lambda(C\Phi'_+(\sigma)) &= \ln n_\lambda(C\delta(\gamma(\Phi(\sigma)))) \leq \ln n_\lambda(\alpha(\gamma(\Phi(\sigma)))) \leq \\ &\leq \alpha^{-1}(\alpha(\gamma(\Phi(\sigma)))) + 1 = \gamma(\Phi(\sigma)) + 1, \end{aligned}$$

звідки випливає (2.18), а тому й (2.17).

Необхідність. Припустимо, що існує функція $\Phi \in \Omega_A$, для якої виконується умова (2.17). Не зменшуючи загальності можемо вважати (див. лему 2.7), що $\Phi \in \Omega_A^*$ (інакше замість Φ далі розглядаємо $\tilde{\Phi}$). Тоді умова (2.17) є рівносильною умові (2.18), з якої, зокрема, маємо

$$\ln n_\lambda(\Phi'_+(\sigma)) \leq \Phi(\sigma), \quad \sigma \in [\sigma_0, A).$$

Продовжимо функцію Φ до функції з класу Ω'_A і це продовження позначимо також через Φ . Покладемо

$$x_0 = \inf\{x \in (-\infty, A) : \Phi'_-(x) > 0\}, \quad t_0 = \inf\{\Phi(x) : x \in (x_0, A)\}$$

і нехай

$$\alpha(t) = \Phi'_-(\Phi^{-1}(t)), \quad t > t_0.$$

Тоді (див. зауваження 2.7) функція α є додатною неспадною неперервною зліва на $(t_0, +\infty)$ і для фіксованого $t_1 > t_0$ інтеграл (2.31) збігається.

Нехай n_0 — найменше натуральне число, для якого правильні нерівності $\ln(n-1) \geq t_1$ і $\lambda_n \geq \Phi'_+(\sigma_0)$. Якщо $n \geq n_0$, а $\sigma \in [\sigma_0, A)$ таке, що $\Phi'_-(\sigma) \leq \lambda_n \leq \Phi'_+(\sigma)$, то

$$\alpha(\ln n) \leq \alpha(\ln n_\lambda(\lambda_n)) \leq \alpha(\ln n_\lambda(\Phi'_+(\sigma))) \leq \alpha(\Phi(\sigma)) = \Phi'_-(\sigma) \leq \lambda_n,$$

а тому

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} &\leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n\alpha(\ln n)} \leq \int_{n_0-1}^{+\infty} \frac{dy}{y\alpha(\ln y)} = \\ &= \int_{\ln(n_0-1)}^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)} \leq \int_{t_1}^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)} < +\infty, \end{aligned}$$

звідки випливає (2.29). Теорему доведено. \square

2.5. Умова застосовності формули для обчислення R -порядку цілого ряду Діріхле

Прямим аналогом порядку цілої функції, зображеної степеневим рядом, для цілого ряду Діріхле F вигляду (2.1) є введена Ж. Ріттом [94] величина

$$R(F) = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(\sigma, F)}{\sigma},$$

яка називається R -порядком цього ряду.

Для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}^*(\lambda)$ вигляду (2.1) введемо наступні позначення

$$R^*(F) = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln \mu(\sigma, F)}{\sigma}, \quad K(F) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln |a_n|}.$$

Якщо $\lambda \in \Lambda$, то нехай

$$\delta(\lambda) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \ln \lambda_n}.$$

Як довів К. Сугімура [95] (див. теорему 1.3), умова $\delta(\lambda) = 0$ є достатньою для того, щоб для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ була правильною формула $R(F) = K(F)$ для обчислення R -порядку цього ряду через послідовність $(|a_n|)$ модулів його коефіцієнтів. З наступної теореми випливає, що умова $\delta(\lambda) = 0$ у наведеному твердженні К. Сугімури є також необхідною, тобто ця умова є остаточною умовою застосовності формули $R(F) = K(F)$.

Теорема 2.15. *Нехай $\lambda \in \Lambda$. Якщо $\delta(\lambda) > 0$, то існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ такий, що $R(F) > K(F)$.*

Теореми 1.3 і 2.15 є наслідками з наведених далі загальніших теорем 2.16 і 2.17 відповідно.

Теорема 2.16. *Нехай $\lambda \in \Lambda$. Якщо $\delta(\lambda) < +\infty$, то кожен ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}^*(\lambda)$ такий, що $K(F) < 1/\delta(\lambda)$, є цілим і для нього правильна нерівність*

$$R(F) \leq \frac{K(F)}{1 - \delta(\lambda)K(F)}.$$

Отже, якщо $K(F) < 1/\delta(\lambda)$ для деякого ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$, то за теоремою 2.16 величини $K(F)$ і $R(F)$ є скінченними одночасно. Така ситуація, взагалі кажучи, є неможливою, якщо $K(F) \geq 1/\delta(\lambda)$.

Теорема 2.17. *Нехай $\lambda \in \Lambda$. Якщо $\delta(\lambda) > 0$ і $K \in [1/\delta(\lambda), +\infty)$, то для довільної функції $H \in L$ існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ такий, що $K(F) = K$ і*

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{H(\sigma)} = +\infty. \quad (2.34)$$

Теорема 2.15 є наслідком з теореми 2.17 (досить, наприклад, вибрати $H(\sigma) = \exp(\sigma^2)$).

Теорема 2.17, з одного боку, вказує на істотність умови $K(F) < 1/\delta(\lambda)$ в теоремі 2.16. З іншого боку, з цієї теореми можна зробити такий висновок: якщо $\delta(\lambda) > 0$, то ряди Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ можуть зростати як завгодно швидко навіть тоді, коли величина $K(F)$ для них залишається скінченною.

Теореми 2.16 і 2.17 легко отримаємо з теорем 2.1 і 2.2 відповідно. Для цього нам будуть потрібні наступні леми, які в принципі є добре відомими.

Лема 2.17. *Нехай $F \in \mathcal{D}_{+\infty}^*$. Тоді $R^*(F) = K(F)$.*

Доведення. Зауважимо, що якщо $\Phi \in \Omega_{+\infty}^*$ і c — додатна стала, то для функції $h(\sigma) = \Phi(c\sigma)$ маємо

$$\tilde{h}(x) = \sup_{\sigma \in \mathbb{R}} (x\sigma - \Phi(c\sigma)) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\frac{xt}{c} - \Phi(t) \right) = \tilde{\Phi} \left(\frac{x}{c} \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Покладемо $\Phi(\sigma) = e^\sigma$, $\sigma \geq 0$. Тоді, як легко перевірити, $\tilde{\Phi}(x) = x \ln(x/e)$ для всіх $x \geq 1$.

Спочатку доведемо нерівність $K(F) \leq R^*(F)$. Ця нерівність тривіальна, якщо $R^*(F) = +\infty$. Нехай $R^*(F) < +\infty$, а $c > R^*(F)$ — довільна стала. З означення величини $R^*(F)$ випливає, що

$$\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(c\sigma), \quad \sigma \geq \sigma_0. \quad (2.35)$$

Тоді за лемою 2.8 маємо

$$\ln |a_n| \leq -\tilde{\Phi}(\lambda_n/c), \quad n \geq n_0, \quad (2.36)$$

що можна переписати у вигляді

$$\ln |a_n| \leq -\frac{\lambda_n}{c} \ln \frac{\lambda_n}{ec}, \quad n \geq n_0. \quad (2.37)$$

Звідси випливає нерівність $K(F) \leq c$. З довільності $c > R^*(F)$ отримуємо $K(F) \leq R^*(F)$.

Доведемо тепер, що $R^*(F) \leq K(F)$. Ця нерівність тривіальна, якщо $K(F) = +\infty$. Нехай $K(F) < +\infty$, а $c > K(F)$ — довільна стала. З означення величини $K(F)$ випливає (2.37), звідки маємо (2.36). Тоді за лемою 2.8 виконується (2.35). Отже, $R^*(F) \leq c$. З довільності $c > K(F)$ отримуємо $R^*(F) \leq K(F)$. \square

Лема 2.18. *Нехай (x_n) — додатна неспадна послідовність. Якщо*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n} < +\infty, \quad (2.38)$$

то $n = o(x_n)$, $n \rightarrow \infty$.

Доведення. Припустимо, від супротивного, що $n \neq o(x_n)$, $n \rightarrow \infty$. Тоді для деякого $\beta > 0$ існує безліч $k \in \mathbb{N}$ таких, що $k > \beta x_k$. Отже, для безлічі $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\sum_{n=[k/2]}^k \frac{1}{x_n} \geq \sum_{n=[k/2]}^k \frac{1}{x_k} \geq \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{x_k} \geq \frac{k}{2} \cdot \frac{\beta}{k} = \frac{\beta}{2},$$

що суперечить умові (2.38). \square

Доведення теореми 2.16. Нехай $\lambda \in \Lambda$, $\delta(\lambda) < +\infty$, а $F \in \mathcal{D}_{+\infty}^*(\lambda)$ — ряд Діріхле такий, що $K(F) < 1/\delta(\lambda)$. Прийmemo $A_0 = K(F)$,

$$B_0 = \frac{A_0}{1 - \delta(\lambda)A_0}.$$

Нехай $B > B_0$ — довільне фіксоване число. Тоді

$$\frac{1}{A_0} - \frac{1}{B} > \frac{1}{A_0} - \frac{1}{B_0} = \delta(\lambda),$$

а тому існує $A \in (A_0, B)$ таке, що

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} > \delta(\lambda). \quad (2.39)$$

Покладемо $\Phi(\sigma) = e^\sigma$, $\sigma \geq 0$. Тоді (див. доведення леми 2.17) при $n \rightarrow \infty$ отримуємо

$$\tilde{\Phi}\left(\frac{\lambda_n}{A}\right) - \tilde{\Phi}\left(\frac{\lambda_n}{B}\right) = \frac{\lambda_n}{A} \ln \frac{\lambda_n}{eA} - \frac{\lambda_n}{B} \ln \frac{\lambda_n}{eB} \sim \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) \lambda_n \ln \lambda_n,$$

а тому, згідно з (2.39),

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\tilde{\Phi}(\lambda_n/A) - \tilde{\Phi}(\lambda_n/B)} < 1.$$

Звідси випливає, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{\tilde{\Phi}(\lambda_n/A) - \tilde{\Phi}(\lambda_n/B)}} < +\infty. \quad (2.40)$$

За лемою 2.17 маємо $R^*(F) = K(F) = A_0 < A$, а тому $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(A\sigma)$, $\sigma \geq \sigma_1$. Звідси і з (2.40) випливає, згідно з теоремою 2.1, що ряд F є цілим і для нього правильна нерівність $\ln M(\sigma, F) \leq \Phi(B\sigma)$, $\sigma \geq \sigma_2$. Тоді $R(F) \leq B$. Оскільки $B > B_0$ — довільне число, то

$$R(F) \leq B_0 = \frac{K(F)}{1 - \delta(\lambda)K(F)},$$

що й потрібно було довести. \square

Доведення теореми 2.17. Розглянемо послідовність $\lambda \in \Lambda$ таку, що $\delta(\lambda) > 0$, і нехай $K \in [1/\delta(\lambda), +\infty)$ — довільне фіксоване число, а $H \in L$. Доведемо, що існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$, для якого $K(F) = K$ і виконується співвідношення (2.34). При цьому можемо вважати, не зменшуючи загальності, що $\sigma = o(H(\sigma))$, $\sigma \rightarrow +\infty$.

Покладемо $\delta = 1/K$ і нехай (β_k) — зростаюча до δ послідовність точок інтервалу $(0, \delta)$. Оскільки $\beta_k < \delta(\lambda)$ для кожного $k \in \mathbb{N}_0$, то існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\frac{\ln n_k}{\lambda_{n_k} \ln \lambda_{n_k}} \geq \beta_k, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.41)$$

Прийmemo $\delta_n = \beta_0$ для всіх $n \leq n_0$ і $\delta_n = \beta_{k+1}$ для всіх $n \in (n_k, n_{k+1}]$ та $k \in \mathbb{N}_0$. Зауважимо, що (δ_n) — неспадна послідовність з інтервалу $(0, \delta)$, яка прямує до δ . Звідси, зокрема, випливає, що для деякого $p_0 \in \mathbb{N}$ такого, що $\lambda_{p_0} \geq x_0$, послідовність $(e^{\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n})_{n=p_0}^\infty$ є зростаючою. Крім того, для всіх $k \in \mathbb{N}_0$ за (2.41) маємо $e^{\delta_{n_k} \lambda_{n_k} \ln \lambda_{n_k}} \leq n_k$. Тому, згідно з лемою 2.18,

$$\sum_{n=p_0}^{\infty} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} = +\infty. \quad (2.42)$$

Нехай $b_n = 0$, якщо $n < p_0$, і $b_n = e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n}$, якщо $n \geq p_0$. Розглянемо ряд Діріхле

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{s \lambda_n}.$$

З (2.42) випливає, що цей ряд розбігається в точці $s = 0$, тобто $G \notin \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$. З іншого боку,

$$\beta(G) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{b_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} (\delta_n \ln \lambda_n) = +\infty,$$

тобто $G \in \mathcal{D}_{+\infty}^*(\lambda)$. За теоремою 2.2 існує ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}_{+\infty}(\lambda)$ вигляду (2.1) такий, що $a_n = b_n$ або $a_n = 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ і $M(\sigma, F) = F(\sigma) \geq \exp(H^2(\sigma))$ для всіх $\sigma \geq \sigma_0$. Зрозуміло, що тоді виконується співвідношення (2.34). Покажемо, що $K(F) = K$. Насамперед зауважимо, що ряд F не зводиться до експоненціального полінома, бо для експоненціального полінома виконується співвідношення $\ln M(\sigma, F) = O(\sigma)$, $\sigma \rightarrow +\infty$, яке суперечить (2.34), оскільки $\sigma = o(H(\sigma))$, $\sigma \rightarrow +\infty$. Отже, $a_n = b_n$ для безлічі значень n . Врахувавши, що величина

$$\frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln |a_n|}$$

дорівнює $1/\delta_n$ у випадку, якщо $a_n = b_n$, і дорівнює 0, якщо $a_n = 0$, отримуємо

$$K(F) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln |a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta_n} = \frac{1}{\delta} = K.$$

Теорему доведено. □

2.6. Висновки до розділу 2

Розділ 2 присвячено дослідженню зростання рядів Діріхле в термінах послідовності модулів їх коефіцієнтів.

Встановлено достатні умови на послідовність λ і функції $\Phi, \Gamma \in \Omega_A$, за яких для ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ з нерівності $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$, $\sigma \in [\sigma_1, A)$, випливає нерівність $\ln M(\sigma, F) \leq \Gamma(\sigma)$, $\sigma \in [\sigma_2, A)$.

Знайдено необхідну і достатню умову на послідовність λ і функцію $\Phi \in \Omega_A$, за якої для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}_A(\lambda)$ правильна рівність $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$, яка дозволяє виразити величину $T_\Phi(F)$ через послідовність модулів коефіцієнтів цього ряду за формулою типу Коші-Адамара. Як наслідок, встановлено, що умова $\tau(\lambda) = 0$ є остаточною умовою застосовності прямого аналогу формули Коші-Адамара для обчислення R -типу цілого ряду Діріхле.

Доведено, що умова $\delta(\lambda) = 0$ є остаточною умовою застосовності прямого аналогу формули Коші-Адамара для обчислення R -порядку цілого ряду Діріхле.

Розділ 3

ЗРОСТАННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ, ЗОБРАЖЕНИХ СТЕПЕНЕВИМИ РЯДАМИ

Задача щодо встановлення умов, за яких узагальнений тип чи порядок аналітичної функції можна виразити через послідовність модулів коефіцієнтів її степеневих розвинутих за деякою формулою типу Коші-Адамара, тісно пов'язана з не менш складною задачею щодо встановлення умов, за яких узагальнений тип чи порядок аналітичної функції не залежить від аргументів коефіцієнтів її степеневих розвинутих. Для двох загальних шкал зростання розв'язки задач такого роду (див. задачі 1.3 і 1.4) знайдено в даному розділі.

3.1. Зростання аналітичних у крузі функцій в термінах узагальнених типів

Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $\mathbb{D}_{\mathcal{R}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \mathcal{R}\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Через $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ позначимо клас аналітичних у крузі $\mathbb{D}_{\mathcal{R}}$ функцій вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (3.1)$$

що відмінні від постійної. Для всіх $r \in (0, \mathcal{R})$ максимум модуля і максимальний член функції $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ визначаємо відповідно за рівностями

$$M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}, \quad \mu(r, f) = \max\{|a_n|r^n : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Крім того, покладемо

$$G(r, f) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n.$$

Для зручності n -ний коефіцієнт степеневого розвинення функції f позначатимемо також через $a_n(f)$.

Нехай $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ — клас відображень $F : \mathcal{H}_{\mathcal{R}} \rightarrow [0, +\infty]$ таких, що $F(f) = F(g)$ для довільних функцій $f, g \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$, послідовності модулів коефіцієнтів степеневих розвинень яких співпадають, тобто $|a_n(f)| = |a_n(g)|$, $n \in \mathbb{N}_0$. Якщо $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ — деяке фіксоване відображення, то для кожної $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ величина $F(f)$ не залежить від аргументів коефіцієнтів $a_n(f)$. Розглянувши поряд з функцією f функцію g таку, що $a_n(g) = |a_n(f)|$, $n \in \mathbb{N}_0$, бачимо, що функція g , а тому й величина $F(f) = F(g)$ повністю визначається послідовністю $(|a_n(f)|)$ (зазначимо, що $M(r, g) = G(r, f)$).

Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$. Якщо $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ і $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$, то, як звично, величину

$$T_{\Phi}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \mathcal{R}} \frac{\ln M(r, f)}{\Phi(\ln r)}$$

називатимемо Φ -типом функції f . Покладемо також

$$t_{\Phi}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \mathcal{R}} \frac{\ln \mu(r, f)}{\Phi(\ln r)}, \quad \mathcal{T}_{\Phi}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \mathcal{R}} \frac{\ln G(r, f)}{\Phi(\ln r)}.$$

Зрозуміло, що $t_{\Phi}(f) \leq T_{\Phi}(f) \leq \mathcal{T}_{\Phi}(f)$. Зауважимо також, що $T_{\Phi} \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ тоді і лише тоді, коли $\mathcal{T}_{\Phi}(f) = T_{\Phi}(f)$ для кожної $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$.

Скрізь у цьому підрозділі функції φ і ψ визначаються за функцією Φ так само, як і в підрозділі 2.3. Покладемо

$$\Delta_{\Phi} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\Phi(\varphi(n))}.$$

Зауважимо, що якщо $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}^*$, то

$$\Delta_{\Phi} = \overline{\lim}_{x \uparrow \ln \mathcal{R}} \frac{\ln \Phi'_+(x)}{\Phi(x)}.$$

Розв'язок задачі 1.3 дає наступна теорема.

Теорема 3.1. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$. Тоді наступні твердження рівносильні:*

- (i) $T_{\Phi} \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}}$;
- (ii) $T_{\Phi}(f) = t_{\Phi}(f)$ для кожної функції $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$;
- (iii) $\Delta_{\Phi} = 0$.

Теорема 3.1 випливає з наступних теорем.

Теорема 3.2. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$. Якщо $\Delta_{\Phi} = 0$, то $T_{\Phi}(f) = t_{\Phi}(f)$ для кожної $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$.*

Теорема 3.3. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$. Якщо $\Delta_{\Phi} > 0$, то існує функція $g \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ така, що $T_{\Phi}(g) > T_{\Phi}(g)$.*

Зауважимо, що теорема 3.2 є безпосереднім наслідком з теореми 2.7.

Нижче наведемо інше її доведення.

Застосовуючи формулу (2.9) у випадку $\lambda_n = n$, $n \in \mathbb{N}_0$, для довільної $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ вигляду (3.1) маємо

$$t_{\Phi}(f) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\psi\left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)}.$$

Отже, якщо $\Delta_\Phi = 0$, то, згідно з теоремою 1.9, для кожної $f \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$ вигляду (3.1) отримуємо

$$T_\Phi(f) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\psi\left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)}, \quad (3.2)$$

тобто у випадку $\Delta_\Phi = 0$ маємо формулу типу Коші–Адамара, за якою Φ -тип кожної аналітичної функції $f \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$ вигляду (3.1) можна обчислити через послідовність $(|a_n|)$. У випадку $\Delta_\Phi \neq 0$ формула (3.2), взагалі кажучи, неправильна. Більше того, згідно з теоремою 1.9, не існує жодної формули, за якою Φ -тип кожної аналітичної функції $f \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$ вигляду (3.1) можна обчислити через послідовність $(|a_n|)$.

У випадку $\mathcal{R} = +\infty$ теорему 3.2 доведено П.В. Філевичем в роботі [65], а теорему 3.3 ним же анонсовано в [64]. За словами П.В. Філевича в його доведенні (не опублікованому) теореми 3.3 при $\mathcal{R} = +\infty$ істотно використовувалось поняття випадкової цілої функції і прийоми з робіт [84, 60, 61, 56, 65]. У даній роботі наведемо інше (не ймовірнісне) доведення теореми 3.3 у загальному випадку, тобто при $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$. Зазначимо, що наше доведення базується на ідеях з робіт [34, 57].

Наведемо спочатку деякі допоміжні результати.

Для аналітичної в крузі $\mathbb{D}_\mathcal{R}$ функції f вигляду (3.1) нехай

$$\nu(r, f) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : |a_n| r^n = \mu(r, f)\}$$

— її центральний індекс. Добре відомо, що $\nu(r, f) = r(\ln \mu(r, f))'_+$ для всіх $r \in (0, \mathcal{R})$. Крім того, правильна така лема ([86]).

Лема 3.1. *Нехай (n_k) — зростаюча послідовність невід'ємних цілих чисел, $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, а (c_k) — зростаюча до \mathcal{R} додатна послідовність.*

Якщо комплексна послідовність (a_n) така, що $a_{n_0} \neq 0$,

$$a_n = 0, \quad n < n_0, \quad (3.3)$$

$$|a_{n_{k+1}}| = |a_{n_0}| \prod_{j=0}^k c_j^{n_j - n_{j+1}}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (3.4)$$

$$|a_n| \leq |a_{n_k}| c_k^{n_k - n}, \quad n \in (n_k, n_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (3.5)$$

то степеневий ряд (3.1) задає аналітичну в крузі $\mathbb{D}_{\mathcal{R}}$ функцію f , для якої:

(i) $\nu(r, f) = n_0$ для всіх $r \in (0, c_0)$;

(ii) $\nu(r, f) = n_{k+1}$ для всіх $r \in [c_k, c_{k+1})$ і $k \in \mathbb{N}_0$.

Лема 3.2. Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $\Psi \in \Omega'_{\ln \mathcal{R}}$, а (n_k) — послідовність невід'ємних цілих чисел і (d_k) — зростаюча до \mathcal{R} додатна послідовність такі, що

$$\Psi'_-(\ln d_k) \leq n_k \leq \Psi'_+(\ln d_k) < \Psi'_-(\ln d_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (3.6)$$

Якщо

$$c_k = \exp \left\{ \frac{n_{k+1} \ln d_{k+1} - n_k \ln d_k + \Psi(\ln d_k) - \Psi(\ln d_{k+1})}{n_{k+1} - n_k} \right\}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (3.7)$$

а комплексна послідовність (a_n) така, що

$$|a_{n_0}| = \exp\{\Psi(\ln d_0) - n_0 \ln d_0\} \quad (3.8)$$

і виконуються співвідношення (3.3)–(3.5), то $d_k < c_k < d_{k+1}$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$ і степеневий ряд (3.1) задає аналітичну в крузі $\mathbb{D}_{\mathcal{R}}$ функцію

f , для якої

$$\ln \mu(d_k, f) = \Psi(\ln d_k), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (3.9)$$

$$\ln \mu(r, f) \leq \Psi(\ln r), \quad r \in (0, \mathcal{R}). \quad (3.10)$$

Доведення. З (3.6) і опуклості функції Ψ для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ випливають нерівності

$$n_k \leq \Psi'_+(\ln d_k) < \frac{\Psi(\ln d_{k+1}) - \Psi(\ln d_k)}{\ln d_{k+1} - \ln d_k} < \Psi'_-(\ln d_{k+1}) \leq n_{k+1}. \quad (3.11)$$

Скориставшись (3.11) і (3.7), для всіх $k \in \mathbb{N}_0$ отримуємо

$$c_k > \exp \left\{ \frac{n_{k+1} \ln d_{k+1} - n_k \ln d_k - n_{k+1}(\ln d_{k+1} - \ln d_k)}{n_{k+1} - n_k} \right\} = d_k,$$

$$c_k < \exp \left\{ \frac{n_{k+1} \ln d_{k+1} - n_k \ln d_k - n_k(\ln d_{k+1} - \ln d_k)}{n_{k+1} - n_k} \right\} = d_{k+1}.$$

Отже, $d_k < c_k < d_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Звідси випливає, що (c_k) — зростаюча до \mathcal{R} додатна послідовність. Оскільки послідовність (n_k) також зростаюча, то за лемою 3.1 степеневий ряд (3.1) з коефіцієнтами a_n , що задовольняють умови (3.8) та (3.3)–(3.5), задає аналітичну в крузі $\mathbb{D}_{\mathcal{R}}$ функцію f , для якої

$$\mu(r, f) = |a_{n_0}| r^{n_0}, \quad r \in (0, c_0], \quad (3.12)$$

$$\mu(r, f) = |a_{n_{k+1}}| r^{n_{k+1}}, \quad r \in [c_k, c_{k+1}], \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (3.13)$$

Доведемо за індукцією (3.9). Якщо $k = 0$, то за (3.12) і (3.8) маємо

$$\ln \mu(d_0, f) = \ln |a_{n_0}| + n_0 \ln d_0 = \Psi(\ln d_0).$$

Припустимо, що для деякого $k \in \mathbb{N}_0$ рівність $\ln \mu(d_k, f) = \Psi(\ln d_k)$ вже

доведено. Тоді, використовуючи (3.13), (3.4) і (3.7), отримуємо

$$\begin{aligned}
\ln \mu(d_{k+1}, f) &= \ln |a_{n_{k+1}}| + n_{k+1} \ln d_{k+1} = \\
&= \ln |a_{n_k}| - (n_{k+1} - n_k) \ln c_k + n_{k+1} \ln d_{k+1} = \\
&= \ln |a_{n_k}| + n_k \ln d_k - (n_{k+1} - n_k) \ln c_k + n_{k+1} \ln d_{k+1} - n_k \ln d_k = \\
&= \ln \mu(d_k, f) + \Psi(\ln d_{k+1}) - \Psi(\ln d_k) = \Psi(\ln d_{k+1}).
\end{aligned}$$

Далі покладемо $c_{-1} = 0$ і нехай $k \in \mathbb{N}_0$. Якщо $r \in (c_{k-1}, d_k)$, то

$$\begin{aligned}
\ln \mu(r, f) - \Psi(\ln r) &= \Psi(\ln d_k) - \Psi(\ln r) + \ln \mu(r, f) - \ln \mu(d_k, f) = \\
&= \int_r^{d_k} \frac{\Psi'_-(\ln t)}{t} dt - \int_r^{d_k} \frac{n_k}{t} dt \leq \int_r^{d_k} \frac{\Psi'_-(\ln d_k) - n_k}{t} dt \leq 0.
\end{aligned}$$

Якщо ж $r \in (d_k, c_k)$, то

$$\begin{aligned}
\ln \mu(r, f) - \Psi(\ln r) &= \ln \mu(r, f) - \ln \mu(d_k, f) + \Psi(\ln d_k) - \Psi(\ln r) = \\
&= \int_{d_k}^r \frac{n_k}{t} dt - \int_{d_k}^r \frac{\Psi'_+(\ln t)}{t} dt \leq \int_{d_k}^r \frac{n_k - \Psi'_+(\ln d_k)}{t} dt \leq 0.
\end{aligned}$$

Отже, $\ln \mu(r, f) \leq \Psi(\ln r)$ для всіх $r \in (0, \mathcal{R})$. Лему 3.2 доведено. \square

Лема 3.3. Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Psi \in \Omega'_A$ і

$$A_0 = \inf\{x \in (-\infty, A) : \Psi'_-(x) > 0, \Psi(x) > 0\}.$$

Тоді функція

$$H(x) = x - \frac{\Psi(x)}{\Psi'_-(x)}$$

є неспадною на (A_0, A) і $H(x) \rightarrow A$, $x \rightarrow A$.

Доведення. Нехай $x_1, x_2 \in (A_0, A)$ і $x_1 < x_2$. Тоді

$$\Psi(x_2) = \Psi(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \Psi'_-(x) dx \leq \Psi(x_1) + (x_2 - x_1)\Psi'_-(x_2),$$

а тому

$$\begin{aligned} H(x_2) - H(x_1) &= x_2 - \frac{\Psi(x_2)}{\Psi'_-(x_2)} - x_1 + \frac{\Psi(x_1)}{\Psi'_-(x_1)} \geq \\ &\geq x_2 - \frac{\Psi(x_1) + (x_2 - x_1)\Psi'_-(x_2)}{\Psi'_-(x_2)} - x_1 + \frac{\Psi(x_1)}{\Psi'_-(x_1)} = \\ &= \frac{\Psi(x_1)(\Psi'_-(x_2) - \Psi'_-(x_1))}{\Psi'_-(x_2)\Psi'_-(x_1)} \geq 0. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що H є неспадною на (A_0, A) .

Нехай $A_1 = \lim_{x \rightarrow A} H(x)$. Очевидно, що $A_1 \leq A$. Припустимо, від супротивного, що $A_1 < A$ і нехай $A_2 = \max\{A_0, A_1\}$. Тоді для всіх $x \in (A_2, A)$ маємо

$$x - \frac{\Psi(x)}{\Psi'_-(x)} < A_1,$$

звідки отримуємо

$$\frac{\Psi'_-(x)}{\Psi(x)} < \frac{1}{x - A_1}.$$

Тому, якщо $x_0 \in (A_2, A)$ — фіксоване число, а $x \in (x_0, A)$ — довільне число, то

$$\ln \Psi(x) - \ln \Psi(x_0) = \int_{x_0}^x \frac{\Psi'_-(t)}{\Psi(t)} dt < \int_{x_0}^x \frac{dt}{t - A_1} = \ln \frac{x - A_1}{x_0 - A_1}.$$

Звідси у випадку скінченного A випливає, що функція Ψ є обмеженою зверху на інтервалі $(-\infty, A)$, а у випадку $A = +\infty$, що границя

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Psi(x)}{x}$$

є скінченною. В обох випадках це суперечить означенню класу Ω'_A .

Отже, $A_1 = A$. □

Зауваження 3.1. Зрозуміло, що лема 3.3 залишиться правильною, якщо в ній Ψ'_- замінити на Ψ'_+ .

Лема 3.4. Нехай $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, $r_2 \geq r_1 > 0$. Тоді для кожного многочлена вигляду

$$P(z) = \sum_{j=m}^n a_j z^j$$

правильна подвійна нерівність

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^m \leq \frac{M(r_2, P)}{M(r_1, P)} \leq \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n.$$

Доведення. Розглянемо многочлени

$$\varphi(w) = \frac{P(r_2 w)}{M(r_2, P) w^{m-1}} = \frac{1}{M(r_2, P)} \sum_{j=m}^n a_j r_2^j w^{j-m+1},$$

$$\psi(w) = \frac{w^{n+1}}{M(r_1, P)} P\left(\frac{r_1}{w}\right) = \frac{1}{M(r_1, P)} \sum_{j=m}^n a_j r_1^j w^{n+1-j}.$$

Легко бачити, що $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ і $M(1, \varphi) = M(1, \psi) = 1$. Тоді за лемою Шварца для кожного $\rho \in (0, 1]$ маємо

$$M(\rho, \varphi) = \frac{M(r_2 \rho, P)}{M(r_2, P) \rho^{m-1}} \leq \rho, \quad M(\rho, \psi) = \frac{\rho^{n+1}}{M(r_1, P)} M\left(\frac{r_1}{\rho}, P\right) \leq \rho.$$

Залишилось прийняти $\rho = \frac{r_1}{r_2}$. □

Наступну лему доведено в [34, с. 46].

Лема 3.5. Нехай $N \in \mathbb{N}$. Існують числа $e_0(N), \dots, e_{N-1}(N) \in \{-1, 1\}$ такі, що

$$\max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \sum_{j=0}^{N-1} e_j(N) e^{ij\theta} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{2}-1} \sqrt{N}.$$

Доведення теореми 3.2. Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, а функція $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$ така, що $\Delta_\Phi = 0$. Доведемо, що для кожної аналітичної функції $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ вигляду (3.1) правильна рівність $\mathcal{T}_\Phi(f) = t_\Phi(f)$. Очевидно, що для цього досить довести нерівність $\mathcal{T}_\Phi(f) \leq t_\Phi(f)$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $\Phi \in \Omega'_{\ln \mathcal{R}}$ (див. лему 2.7).

Зафіксуємо довільне $r \in (0, \mathcal{R})$. Тоді для кожного $R \in (r, \mathcal{R})$ отримуємо

$$\begin{aligned} G(r, f) &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n \left(\frac{r}{R}\right)^n \leq \mu(R, f) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n = \\ &= \mu(R, f) \frac{R}{R-r}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Покладемо

$$R(r) = \sup \left\{ R \in (r, \mathcal{R}) : \Phi'_+(\ln R) \leq \frac{R}{R-r} \right\}.$$

Зауважимо, що тоді

$$\Phi'_-(\ln R(r)) \leq \frac{R(r)}{R(r)-r} \leq \Phi'_+(\ln R(r)), \quad (3.15)$$

звідки, зокрема, маємо

$$\frac{R(r)}{r} \rightarrow 1, \quad r \rightarrow \mathcal{R}. \quad (3.16)$$

Крім того, оскільки $\ln x < x - 1$ для всіх $x > 1$, то

$$\begin{aligned} \Phi(\ln R(r)) - \Phi(\ln r) &= \int_{\ln r}^{\ln R(r)} \Phi'_-(x) dx \leq \Phi'_-(\ln R(r)) \ln \frac{R(r)}{r} \leq \\ &\leq \frac{R(r)}{R(r)-r} \frac{R(r)-r}{r} = \frac{R(r)}{r}. \end{aligned}$$

Звідси і з (3.16) випливає, що

$$\Phi(\ln R(r)) \sim \Phi(\ln r), \quad r \rightarrow \mathcal{R}.$$

Тому, використовуючи (3.14) з $R = R(r)$ і праву з нерівностей (3.15), отримуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\Phi(f) &= \overline{\lim}_{r \rightarrow \mathcal{R}} \frac{\ln G(r, f)}{\Phi(\ln R(r))} \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \mathcal{R}} \frac{\ln \mu(R(r), f) + \ln \Phi'_+(\ln R(r))}{\Phi(\ln R(r))} \leq \\ &\leq t_\Phi(f) + \Delta_\Phi = t_\Phi(f). \end{aligned}$$

Теорему 3.2 доведено. □

Доведення теореми 3.3. Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, а функція $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$ така, що $\Delta_\Phi > 0$. Доведемо, що існує аналітична функція $g \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$, для якої $\mathcal{T}_\Phi(g) > T_\Phi(g)$. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що $\Phi \in \Omega'_{\ln \mathcal{R}}$ (див. лему 2.7).

Зафіксуємо деяке $\delta \in (0, \Delta_\Phi/8)$ і покладемо $\Psi(x) = \delta\Phi(x)$ для всіх $x \in (0, \ln \mathcal{R})$. Зрозуміло, що тоді $\Psi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$ і

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \mathcal{R}} \frac{\ln(\Psi'_+(\ln r) - 1)}{\Phi(\ln r)} = \Delta_\Phi > 8\delta.$$

Тому для множини

$$E = \{r \in (0, \mathcal{R}) : \ln[\Psi'_+(\ln r)] > 8\delta\Phi(\ln r)\}$$

маємо $\sup E = \mathcal{R}$. Крім того, для кожного $r \in E$ такого, що

$$\Psi'_+(\ln r) \geq \Psi'_+(-\infty) + 1,$$

існує $d \in (0, \mathcal{R})$, для якого

$$\Psi'_-(\ln d) \leq [\Psi'_+(\ln r)] \leq \Psi'_+(\ln d);$$

тоді $d \leq r$, а тому

$$\ln[\Psi'_+(\ln r)] > 8\delta\Phi(\ln d).$$

Зі сказаного і з леми 3.2 випливає існування послідовності натуральних чисел (n_k) і зростаючої до \mathcal{R} додатної послідовності (d_k) таких, що виконується (3.6) і для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ маємо

$$\ln n_k > 8\delta\Phi(\ln d_k), \quad (3.17)$$

$$\ln(5k + 16) \leq \Psi(\ln d_k), \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{d_k}{h(d_{k+1})}\right)^{n_{k+1}-n_k} \leq \frac{1}{2}, \quad (3.19)$$

де $h(r) = H(\ln r)$, а H — функція з леми 3.3.

Визначимо послідовність (c_k) згідно з (3.7). Нехай (a_n) — невід’ємна послідовність така, що виконуються (3.8), (3.3), (3.4) і $a_n = a_{n_k} c_k^{n_k - n}$ для всіх $n \in (n_k, n_{k+1})$ і $k \in \mathbb{N}_0$. Зрозуміло, що тоді виконується і (3.5).

За лемами 3.1 і 3.2 степеневий ряд (3.1) задає аналітичну в крузі $\mathbb{D}_{\mathcal{R}}$ функцію f , для якої правильні співвідношення (3.9), (3.10), (3.12), (3.13). Зауважимо, що ряд (3.1) можна записати у вигляді

$$f(z) = a_{n_0} z^{n_0} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=n_{p+1}}^{n_{p+1}} a_n z^n = a_{n_0} z^{n_0} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=n_{p+1}}^{n_{p+1}} a_{n_p} c_p^{n_p - n} z^n$$

Для кожного $p \in \mathbb{N}_0$ покладемо $N_p = n_{p+1} - n_p$ і нехай

$$P_p(z) = \sum_{n=n_{p+1}}^{n_{p+1}} \frac{1}{\sqrt{N_p}} e_{n-n_p-1}(N_p) a_n z^n,$$

де $e_0(N_p), \dots, e_{N_p-1}(N_p) \in \{-1, 1\}$ — числа, існування яких стверджується лемою 3.5 при $N = N_p$. Розглянемо степеневий ряд

$$g(z) = a_{n_0} z^{n_0} + \sum_{p=0}^{\infty} P_p(z).$$

Оскільки $|c_n(g)| \leq a_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, то цей ряд задає аналітичну в крузі $\mathbb{D}_{\mathcal{R}}$ функцію.

Далі покажемо, що $\mathcal{T}_{\Phi}(g) \geq 4\delta$. Справді,

$$G(c_k, g) \geq \sum_{n=n_{k+1}}^{n_{k+1}} \frac{1}{\sqrt{N_k}} a_{n_k} c_k^{n_k - n} c_k^n = \mu(c_k, f) \sqrt{N_k} \geq \sqrt{N_k} \geq \sqrt{\frac{n_{k+1}}{2}}$$

для всіх $k \geq k_1$. Тому, враховуючи (3.17), отримуємо

$$\mathcal{T}_{\Phi}(g) \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln G(c_k, g)}{\Phi(\ln c_k)} \geq \frac{1}{2} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln n_{k+1}}{\Phi(\ln c_k)} \geq 4\delta \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\ln d_{k+1})}{\Phi(\ln c_k)} \geq 4\delta.$$

Доведемо, що $\mathcal{T}_{\Phi}(g) \leq 2\delta$. З цією метою зафіксуємо деяке $k \in \mathbb{N}_0$ і для кожного $p \in \mathbb{N}_0$ оцінимо $M(c_k, P_p)$ зверху через $\mu(c_k, f)$.

Насамперед за (3.13) і лемою 3.5 для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ маємо

$$\begin{aligned} M(c_p, P_p) &= \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \sum_{n=n_p+1}^{n_{p+1}} \frac{1}{\sqrt{N_p}} e_{n-n_p-1}(N_p) a_{n_p} c_p^{n_p-n} c_p^n e^{in\theta} \right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N_p}} \mu(c_p, f) \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \sum_{j=0}^{N_p-1} e_j(N_p) e^{ij\theta} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{N_p}} \mu(c_p, f) \frac{2}{\sqrt{2}-1} \sqrt{N_p} \leq 5\mu(c_p, f). \end{aligned}$$

Нехай $k \geq 1$ і $p \leq k-1$. Тоді $c_p < c_k$ і

$$\ln \mu(c_k, f) - \ln \mu(c_p, f) = \int_{c_p}^{c_k} \frac{\nu(t, f)}{t} dt \geq \int_{c_p}^{c_k} \frac{n_{p+1}}{t} dt = n_{p+1} \ln \frac{c_k}{c_p},$$

тобто

$$\mu(c_p, f) \left(\frac{c_k}{c_p} \right)^{n_{p+1}} \leq \mu(c_k, f).$$

Тому, скориставшись лемою 3.4, отримуємо

$$M(c_k, P_p) \leq M(c_p, P_p) \left(\frac{c_k}{c_p} \right)^{n_{p+1}} \leq 5\mu(c_p, f) \left(\frac{c_k}{c_p} \right)^{n_{p+1}} \leq 5\mu(c_k, f).$$

Далі маємо

$$\begin{aligned} \ln c_k - \ln h(d_{k+1}) &\geq \ln c_k - \ln d_{k+1} + \frac{\Psi(\ln d_{k+1})}{n_{k+1}} = \\ &= \frac{n_{k+1} \ln d_{k+1} - n_k \ln d_k + \Psi(\ln d_k) - \Psi(\ln d_{k+1})}{n_{k+1} - n_k} - \\ &- \ln d_{k+1} + \frac{\Psi(\ln d_{k+1})}{n_{k+1}} = \\ &= \frac{n_k(\ln d_{k+1} - \ln d_k) + \Psi(\ln d_k) - \Psi(\ln d_{k+1})}{n_{k+1} - n_k} + \frac{\Psi(\ln d_{k+1})}{n_{k+1}} = \\ &= \frac{n_k n_{k+1}(\ln d_{k+1} - \ln d_k) + n_{k+1} \Psi(\ln d_k) - n_k \Psi(\ln d_{k+1})}{(n_{k+1} - n_k) n_{k+1}} > \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> \frac{n_k n_{k+1} (\ln d_{k+1} - \ln d_k) + n_{k+1} \Psi(\ln d_k)}{(n_{k+1} - n_k) n_{k+1}} \\
&- \frac{n_k (\Psi(\ln d_k) + n_{k+1} (\ln d_{k+1} - \ln d_k))}{(n_{k+1} - n_k) n_{k+1}} = \frac{\Psi(\ln d_k)}{n_{k+1}} > 0,
\end{aligned}$$

тобто $c_k > h(d_{k+1})$, $k \geq k_2$.

Нехай $p \geq k + 1$, $k \geq k_2$. Використовуючи лему 3.4 і співвідношення (3.13) та (3.4), отримуємо

$$\begin{aligned}
M(c_k, P_p) &\leq M(c_p, P_p) \left(\frac{c_k}{c_p}\right)^{n_p+1} \leq 5\mu(c_p, f) \left(\frac{c_k}{c_p}\right)^{n_p+1} = \\
&= 5\mu(c_k, f) \frac{a_{n_p} c_p^{n_p}}{a_{n_k} c_k^{n_k}} \left(\frac{c_k}{c_p}\right)^{n_p+1} = 5\mu(c_k, f) \frac{c_k^{n_p-n_k+1}}{c_p} \prod_{j=k}^{p-1} \frac{1}{c_j^{n_{j+1}-n_j}}.
\end{aligned}$$

Отже,

$$M(c_{k+1}, P_p) \leq 5\mu(c_k, f) \frac{c_k}{c_{k+1}} < 5\mu(c_k, f),$$

а якщо $p \geq k + 2$, то, скориставшись (3.19), маємо

$$\begin{aligned}
M(c_k, P_p) &\leq 5\mu(c_k, f) \frac{c_k^{n_p-n_{k+1}+1}}{c_p} \prod_{j=k+1}^{p-1} \frac{1}{c_j^{n_{j+1}-n_j}} \leq \\
&\leq 5\mu(c_k, f) \frac{c_k}{c_p} \prod_{j=k+1}^{p-1} \left(\frac{c_{j-1}}{c_j}\right)^{n_{j+1}-n_j} < \\
&< 5\mu(c_k, f) \prod_{j=k+1}^{p-1} \left(\frac{d_j}{h(d_{j+1})}\right)^{n_{j+1}-n_j} \leq \\
&\leq 5\mu(c_k, f) \prod_{j=k+1}^{p-1} \frac{1}{2} = \frac{5}{2^{p-k-1}} \mu(c_k, f).
\end{aligned}$$

Використовуючи встановлені оцінки, а також співвідношення (3.18)

та (3.9), для всіх $k \geq k_2$ отримуємо

$$\begin{aligned} M(c_k, g) &\leq a_{n_0} c_k^{n_0} + \sum_{p=0}^{\infty} M(c_k, P_p) \leq \\ &\leq \mu(c_k, f) + \sum_{p=0}^{k+1} 5\mu(c_k, f) + \sum_{p=k+2}^{\infty} \frac{5}{2^{p-k-1}} \mu(c_k, f) = \\ &= (5k + 16)\mu(c_k, f) \leq e^{\Psi(\ln d_k)} \mu(c_k, f) = \mu(d_k, f) \mu(c_k, f) \leq \mu^2(c_k, f). \end{aligned}$$

Отже, $\ln M(c_k, g) \leq 2 \ln \mu(c_k, f)$, $k \geq k_2$. Оскільки на відрізку $[c_k, c_{k+1}]$ функція $\ln M(r, g)$ є опуклою відносно $\ln r$, а функція $\ln \mu(r, f)$ — лінійною відносно $\ln r$ і обидві функції є додатними на $[c_k, c_{k+1}]$, $k \geq k_3$, то на кожному з таких відрізків функція

$$y(r) = \frac{\ln M(r, g)}{\ln \mu(r, f)}$$

досягає свого максимуму в одній з точок c_k чи c_{k+1} . Тому $\ln M(r, g) \leq 2 \ln \mu(r, f)$ для всіх $r \in [r_0, \mathcal{R})$. Тоді, з огляду на (3.10),

$$T_{\Phi}(g) \leq 2 \overline{\lim}_{r \rightarrow \mathcal{R}} \frac{\ln \mu(r, f)}{\Phi(\ln r)} \leq 2 \overline{\lim}_{r \rightarrow \mathcal{R}} \frac{\Psi(\ln r)}{\Phi(\ln r)} = 2\delta,$$

а тому $\mathcal{T}_{\Phi}(g) > T_{\Phi}(g)$. Теорему доведено. \square

3.2. Зростання цілих функцій в термінах узагальнених Φ -порядків

У цьому підрозділі розглядатимемо доволі загальну шкалу зростання цілих функцій, увівши узагальнений порядок функції $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ за формулою

$$\rho_{\Phi}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln \Phi(\ln r)},$$

де $\Phi \in \Omega_{+\infty}^*$. Така шкала є природною з огляду на те, що для кожної фіксованої $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ функція $\ln M(e^x, f)$ належить до класу $\Omega'_{+\infty}$.

Для довільних функцій $\Phi \in \Omega_{+\infty}^*$ і $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ покладемо

$$c_\Phi = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln \Phi(x)}, \quad d_\Phi = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln \Phi'_+(x)}{\ln \Phi(x)},$$

$$\varkappa_\Phi(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln \mu(r, f)}{\ln \Phi(\ln r)} \quad \tau_\Phi(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln G(r, f)}{\ln \Phi(\ln r)}.$$

Тоді, як легко бачити,

$$c_\Phi \leq \varkappa_\Phi(f) \leq \rho_\Phi(f) \leq \tau_\Phi(f). \quad (3.20)$$

Крім того, $c_\Phi \in [0, 1]$, причому для кожного $c \in [0, 1]$ можна навести приклад функції $\Phi \in \Omega_{+\infty}$ такої, що $c_\Phi = c$. Ясно також, що $\varkappa_\Phi = \varkappa_\Phi(f)$ і $\tau_\Phi = \tau_\Phi(f)$ — відображення з класу $\mathcal{F}_{+\infty}$. Крім того, $\rho_\Phi = \rho_\Phi(f)$ є відображенням з класу $\mathcal{F}_{+\infty}$ тоді і лише тоді, коли для довільної $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ правильна рівність $\rho_\Phi(f) = \tau_\Phi(f)$.

Розв'язок задачі 1.4 міститься в наступній теоремі.

Теорема 3.4. *Нехай $\Phi \in \Omega_{+\infty}^*$. Тоді наступні твердження рівносильні:*

- 1) $\rho_\Phi \in \mathcal{F}_{+\infty}$;
- 2) $\rho_\Phi(f) = \varkappa_\Phi(f)$ для довільної $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$;
- 3) $d_\Phi \leq c_\Phi$.

Врахувавши другу та третю з нерівностей (3.20), а також той факт, що $G(r, f) = M(r, g)$ для $f, g \in \mathcal{H}_{+\infty}$ таких, що $a_n(g) = |a_n(f)|$, $n \in \mathbb{N}_0$, теорему 3.4 легко отримуємо з двох наступних теорем.

Теорема 3.5. *Нехай $\Phi \in \Omega_{+\infty}^*$. Якщо $d_\Phi \leq c_\Phi$, то для довільної цілої функції $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ правильна рівність $\tau_\Phi(f) = \varkappa_\Phi(f)$.*

Теорема 3.6. Нехай $\Phi \in \Omega_{+\infty}^*$. Якщо $d_\Phi > c_\Phi$, то існує ціла функція $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ така, що $\tau_\Phi(f) > \rho_\Phi(f)$.

З наведених теорем можна зробити такі висновки:

1) якщо $d_\Phi \leq c_\Phi$, то для кожної цілої функції $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ її узагальнений порядок $\rho_\Phi(f)$ можна виразити через послідовність $(|a_n(f)|)$; формами такого вираження є рівності $\rho_\Phi(f) = \varkappa_\Phi(f)$ чи $\rho_\Phi(f) = \tau_\Phi(f)$;

2) якщо $d_\Phi > c_\Phi$, то існують цілі функції $f, g \in \mathcal{H}_{+\infty}$ такі, що $|a_n(f)| = |a_n(g)|$, $n \in \mathbb{N}_0$, і $\rho_\Phi(f) \neq \rho_\Phi(g)$, тобто, взагалі кажучи, узагальнений порядок цілої функції не можна виразити лише через послідовність модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення.

Доведення теореми 3.5. Нехай $\Phi \in \Omega_{+\infty}^*$, виконується умова $d_\Phi \leq c_\Phi$ і $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ — довільна ціла функція вигляду (3.1). Досить довести, згідно з (3.20), що $\tau_\Phi(f) \leq \varkappa_\Phi(f)$. Нема що доводити, якщо $\varkappa_\Phi(f) = +\infty$. Нехай $\varkappa_\Phi(f) < +\infty$ і \varkappa — довільне число таке, що $\varkappa > \varkappa_\Phi(f)$. З означення величини $\varkappa_\Phi(f)$, умови $d_\Phi \leq c_\Phi$ і першої з нерівностей (3.20) для всіх $r \geq r_1$ отримуємо

$$\ln \mu(r, f) \leq \Phi^\varkappa(\ln r), \quad \ln \Phi'_+(\ln r) \leq \Phi^\varkappa(\ln r). \quad (3.21)$$

Оскільки $\Phi \in \Omega_{+\infty}^*$, то Φ'_+ є неспадною, необмеженою на $[x_0, +\infty)$ функцією, а тому для кожного $r \geq r_2$ маємо $\Phi'_+(\ln r) \geq 1$ і існує

$$R(r) = \sup \left\{ R > r : \Phi'_+(\ln R) \leq \frac{r}{R-r} \right\}.$$

Зауважимо, що тоді

$$1 \leq \Phi'_-(\ln R(r)) \leq \frac{r}{R(r)-r} \leq \Phi'_+(\ln R(r)),$$

звідки, зокрема, отримуємо нерівність $R(r) \leq 2r$. Крім того, оскільки $\ln x < x - 1$ для всіх $x > 1$, то

$$\begin{aligned} \Phi(\ln R(r)) - \Phi(\ln r) &= \int_{\ln r}^{\ln R(r)} \Phi'_-(x) dx \leq \Phi'_-(\ln R(r)) \ln \frac{R(r)}{r} < \\ &< \frac{r}{R(r) - r} \frac{R(r) - r}{r} = 1. \end{aligned}$$

Тому, використовуючи нерівності (3.14) і (3.21), для всіх $r \geq r_3$ отримуємо

$$\begin{aligned} \ln G(r, f) &\leq \ln \mu(R(r), f) + \ln \frac{2r}{R(r) - r} \leq \\ &\leq \Phi^\varkappa(\ln R(r)) + \ln \Phi'_+(\ln R(r)) + \ln 2 \leq 3(1 + \Phi(\ln r))^\varkappa. \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$\tau_\Phi(f) \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3 + \varkappa \ln(1 + \Phi(\ln r))}{\ln \Phi(\ln r)} = \varkappa.$$

З довільності $\varkappa > \varkappa_\Phi(f)$ випливає, що $\tau_\Phi(f) \leq \varkappa_\Phi(f)$. Теорему доведено. \square

Доведення теореми 3.6. Нехай для функції $\Phi \in \Omega_{+\infty}^*$ виконується умова $d_\Phi > c_\Phi$. Доведемо, що тоді існує ціла функція $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$ така, що $\tau_\Phi(f) > \rho_\Phi(f)$.

Нехай $\delta \in (c_\Phi, d_\Phi)$, а (δ_n) — спадна до 0 фіксована послідовність. Виберемо зростаючу до $+\infty$ послідовність (x_k) так, щоб виконувались наступні умови:

$$\Phi'_+(x_0) > 1; \tag{3.22}$$

$$x_{k+1} \geq x_k + 1, \quad k \in \mathbb{N}_0; \tag{3.23}$$

$$\ln \delta_k = o(\ln \Phi(x_k)), \quad k \rightarrow +\infty; \quad (3.24)$$

$$(\Phi'_+(x_{k+1}))^{\delta_{k+1}} \geq 2(\Phi'_+(x_k))^{\delta_k} + 1, \quad k \in \mathbb{N}_0; \quad (3.25)$$

$$(\Phi'_+(x_k))^{\delta_k} < \ln x_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}_0; \quad (3.26)$$

$$\ln \ln \Phi'_+(x_k) \geq \delta \ln \Phi(x_k), \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (3.27)$$

Для всіх $x \in [x_k, x_{k+1})$ і кожного $k \in \mathbb{N}_0$ покладемо

$$\psi(x) = (\Phi'_+(x_k))^{\delta_k}.$$

Нехай

$$\Psi(x) = \int_{x_0}^x \psi(t) dt, \quad x \geq x_0.$$

Тоді для всіх $x \in [x_k, x_{k+1})$ і $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\Phi(x) \geq \Phi(x) - \Phi(x_k) = \int_{x_k}^x \Phi'_+(t) dt \geq \Phi'_+(x_k)(x - x_k),$$

а тому, використовуюючи умову (3.26), отримуємо

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \int_{x_0}^{x_k} \psi(t) dt + \int_{x_k}^x \psi(t) dt \leq \\ &\leq \int_{x_0}^{x_k} (\Phi'_+(x_{k-1}))^{\delta_{k-1}} dt + \int_{x_k}^x (\Phi'_+(x_k))^{\delta_k} dt \leq \\ &\leq (x_k - x_0)(\Phi'_+(x_{k-1}))^{\delta_{k-1}} + (x - x_k)(\Phi'_+(x_k))^{\delta_k} \leq \\ &\leq x_k \ln x_k + (x - x_k)(\Phi'_+(x_k))^{\delta_k} = \\ &= x_k \ln x_k + (x - x_k)^{1-\delta_k} ((x - x_k)\Phi'_+(x_k))^{\delta_k} \leq \\ &\leq x \ln x + x^{1-\delta_k} \Phi^{\delta_k}(x) \leq x(\ln x + \Phi^{\delta_k}(x)). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \Psi(x)}{\ln \Phi(x)} = c_\Phi. \quad (3.28)$$

Нехай $n_0 = 0$, $n_{k+1} = [\psi(x_k)]$ і $c_k = e^{x_k}$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$. Тоді $n_1 \geq 1$ за умовою (3.22), $c_{k+1} \geq ec_k$ і $n_{k+1} \geq 2n_k$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$ за умовами (3.23) і (3.25) відповідно.

Покладемо $b_0 = b_{n_0} = 1$, $b_{n_{k+1}} = \prod_{j=0}^k c_j^{n_j - n_{j+1}}$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$ і нехай $b_n = b_{n_k} c_k^{n_k - n}$, якщо $n \in (n_k, n_{k+1})$ і $k \in \mathbb{N}_0$. Розглянемо степеневий ряд

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

За лемою 3.1 цей ряд задає цілу функцію $g \in \mathcal{H}_{+\infty}$ таку, що $\nu(r, g) = n_{k+1} = [\psi(\ln c_k)] = [\psi(\ln r)]$ для всіх $r \in [c_k, c_{k+1})$ і $k \in \mathbb{N}_0$. Отже, $\nu(r, g) = [\psi(\ln r)]$, $r \geq c_0$, а тому $\nu(r, g) \sim \psi(\ln r)$, $r \rightarrow +\infty$. За правилом Лопіталя маємо $\ln \mu(r, g) \sim \Psi(\ln r)$, $r \rightarrow +\infty$. Звідси і з (3.28) отримуємо, що $\varkappa_\Phi(g) = c_\Phi$.

Крім того, скориставшись умовами (3.24) і (3.27), маємо

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n_{k+1}}{\ln \Phi(\ln c_k)} &= \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \psi(x_k)}{\ln \Phi(x_k)} = \\ &= \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln (\Phi'_+(x_k))^{\delta_k}}{\ln \Phi(x_k)} \geq \delta > c_\Phi. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Далі, для $r > 0$ і $k \in \mathbb{N}$ нехай

$$A_k(r) = \sum_{n=0}^{n_k-1} b_n r^n, \quad B_k(r) = \sum_{n=n_k}^{\infty} b_n r^n.$$

Оцінимо зверху $A_k(c_k)$ і $B_{k+1}(c_k)$. Для цього скористаємось рівністю

$$\mu(c_k, g) = \mu(c_k - 0, g) = b_{n_k} c_k^{n_k}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

яка випливає з неперервності функції $\mu(r, g)$, $r > 0$.

Нехай, отже, $k \in \mathbb{N}$ і $n \in [0, n_k - 1]$. Тоді $n \in [n_m, n_{m+1})$ для деякого $m \leq k - 1$, а тому

$$\begin{aligned} b_n c_k^n &= b_{n_m} c_m^{n_m-n} c_k^n = b_{n_k} \prod_{j=m}^{k-1} c_j^{n_{j+1}-n_j} c_m^{n_m-n} c_k^n \leq b_{n_k} \prod_{j=m}^{k-1} c_{k-1}^{n_{j+1}-n_j} c_{k-1}^{n_m-n} c_k^n = \\ &= b_{n_k} c_{k-1}^{n_k-n} c_k^n = \mu(c_k, g) \left(\frac{c_{k-1}}{c_k} \right)^{n_k-n} \leq \mu(c_k, g) \frac{1}{e^{n_k-n}}. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо

$$A_k(c_k) = \sum_{n=0}^{n_k-1} b_n c_k^n < \mu(c_k, g) \sum_{n=0}^{n_k-1} \frac{1}{2^{n_k-n}} < \mu(c_k, g), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.30)$$

Нехай тепер $k \in \mathbb{N}_0$ і $n \geq n_{k+1}$. Тоді $n \in [n_m, n_{m+1})$ для деякого $m \geq k + 1$, а тому

$$\begin{aligned} b_n c_k^n &= b_{n_m} c_m^{n_m-n} c_k^n = b_{n_k} \prod_{j=k}^{m-1} c_j^{n_{j+1}-n_j} c_m^{n_m-n} c_k^n \leq b_{n_k} c_k^{n_k-n_{k+1}} c_{k+1}^{n_{k+1}-n} c_k^n = \\ &= b_{n_k} c_k^{n_k-n_{k+1}+n} c_{k+1}^{n_{k+1}-n} = \mu(c_k, g) \left(\frac{c_k}{c_{k+1}} \right)^{n-n_{k+1}} \leq \mu(c_k, g) \frac{1}{e^{n-n_{k+1}}}. \end{aligned}$$

Звідси для всіх $k \in \mathbb{N}_0$ отримуємо

$$B_{k+1}(c_k) = \sum_{n=n_{k+1}}^{\infty} b_n c_k^n < \mu(c_k, g) \sum_{n=n_{k+1}}^{\infty} \frac{1}{2^{n-n_{k+1}}} = 2\mu(c_k, g). \quad (3.31)$$

Покладемо $N_k = n_{k+1} - n_k$ для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ і розглянемо степневий ряд (3.1), коефіцієнти якого $a_n(f) = a_n$ визначено наступним чином

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{N_k}} b_n e_{n-n_k}(N_k), \quad n \in [n_k, n_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

де $e_0(N_k), \dots, e_{N_k-1}(N_k) \in \{-1, 1\}$ — числа, існування яких стверджується лемою 3.5 при $N = N_k$. Тоді $|a_n| \leq b_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, а тому ряд (3.1) задає цілу функцію $f \in \mathcal{H}_{+\infty}$.

Зрозуміло, що для цієї функції

$$\begin{aligned} G(c_k, f) &\geq \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} a_n c_k^n = \frac{1}{\sqrt{N_k}} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} b_{n_k} c_k^{n_k-n} c_k^n = \\ &= \mu(c_k, g) \sqrt{N_k} \geq \sqrt{N_k} \geq \sqrt{\frac{n_{k+1}}{2}} \end{aligned}$$

для кожного $k \in \mathbb{N}_0$. Тому, скориставшись (3.29), отримуємо

$$\tau_\Phi(f) \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln G(c_k, g)}{\ln \Phi(\ln c_k)} \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln n_{k+1}}{\ln \Phi(\ln c_k)} \geq \delta > c_\Phi. \quad (3.32)$$

З іншого боку, використовуючи (3.30), (3.31) і лему 3.5, для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\begin{aligned} M(c_k, f) &\leq \sum_{n=0}^{n_k-1} |a_n| c_k^n + \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} a_n c_k^n e^{in\theta} \right| + \sum_{n=n_{k+1}}^{\infty} |a_n| c_k^n \leq \\ &\leq A_k(c_k) + \frac{1}{\sqrt{N_k}} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} b_{n_k} c_k^{n_k-n} e_{n-n_k}(N_k) c_k^n e^{in\theta} \right| + B_{k+1}(c_k) \leq \\ &\leq \mu(c_k, g) + \frac{1}{\sqrt{N_k}} \mu(c_k, g) \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \sum_{j=0}^{N_k-1} e_j(N_k) e^{ij\theta} \right| + 2\mu(c_k, g) \leq \\ &\leq 3\mu(c_k, g) + \frac{1}{\sqrt{N_k}} \mu(c_k, g) \frac{2}{\sqrt{2}-1} \sqrt{N_k} < 8\mu(c_k, g). \end{aligned}$$

Отже, $\ln M(c_k, f) < 3 + \ln \mu(c_k, g)$, $k \in \mathbb{N}$. Оскільки на відрізку $[c_k, c_{k+1}]$, $k \in \mathbb{N}$, функція $\ln M(r, f)$ є опуклою, а функція $\ln \mu(r, g)$ — лінійною відносно $\ln r$, то на цьому відрізку функція $h(r) = \ln M(r, f) - \ln \mu(r, g)$ досягає свого максимуму в одній з точок c_k чи c_{k+1} . Тому $\ln M(r, f) \leq 3 + \ln \mu(r, g)$ для всіх $r \geq c_1$. Тоді

$$\rho_\Phi(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln \Phi(\ln r)} \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln \mu(r, g)}{\ln \Phi(\ln r)} = c_\Phi.$$

Звідси і з (3.32) маємо $\tau_\Phi(f) > \rho_\Phi(f)$. Теорему доведено. \square

3.3. Висновки до розділу 3

Розділ 3 присвячено дослідженню зростання аналітичних функцій, зображених степеневими рядами, в термінах послідовності модулів коефіцієнтів цих рядів.

Тут, зокрема, отримано необхідну і достатню умову на функцію порівняння Φ , за якої Φ -тип кожної аналітичної в крузі функції f можна виразити через послідовність $(|a_n|)$ модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення. За знайденої умови Φ -тип кожної функції f дорівнює Φ -типу логарифма її максимального члена i , як наслідок, виражається через послідовність $(|a_n|)$ за формулою типу Коші-Адамара. Якщо знайдена умова не виконується, то не існує жодної формули, за якою Φ -тип кожної функції f можна було б обчислити через послідовність $(|a_n|)$.

Крім того, у даному розділі описано всі функції порівняння Φ , для яких Φ -порядок кожної цілої функції можна виразити через послідовність модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення.

Розділ 4

ЕФЕКТ ПЕЛІ ДЛЯ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Нехай $\Omega'_{+\infty}$ — клас опуклих на \mathbb{R} функцій Φ таких, що $\Phi(x)/x \rightarrow +\infty$, якщо $x \rightarrow +\infty$.

Для довільної трансцендентної цілої функції f її максимум модуля і характеристику Неванлінни визначимо відповідно за рівностями

$$M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}, \quad T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

де $\ln^+ x = \ln \max\{x, 1\}$. Зрозуміло, що $T(r, f) \leq \ln M(r, f)$ для всіх $r \geq r_0$. Як відомо, $\ln M(e^x, f)$ і $T(e^x, f)$ є функціями з класу $\Omega'_{+\infty}$.

Як і в [26], скажемо, що функція f має *ефект Пелі*, якщо для неї виконується співвідношення

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(r, f)}{T(r, f)} = +\infty. \quad (4.1)$$

Дж. Клуні [83] довів, що для кожної $\Phi \in \Omega'_{+\infty}$ існує трансцендентна ціла функція f , для якої $\ln M(r, f) \sim \Phi(\ln r)$, $r \rightarrow +\infty$, і справджується співвідношення

$$\ln M(r, f) \sim T(r, f), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (4.2)$$

Отже, жодні умови на зростання цілої функції не можуть забезпечити наявності в неї ефекту Пелі.

З іншого боку, умови на зростання цілої функції, які забезпечують відсутність в неї ефекту Пелі, вже можна вказати. Зокрема, як добре відомо (див., наприклад, [31]), для кожної трансцендентної цілої функції f такої, що

$$\ln M(r, f) = O(\ln^2 r), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (4.3)$$

справджується співвідношення (4.2). Поряд з цим, серед трансцендентних цілих функцій, для яких умова (4.3) не виконується, існують цілі функції довільного повільного зростання, що мають ефект Пелі ([88]).

Позначимо через Λ клас невід'ємних зростаючих до $+\infty$ послідовностей $\lambda = (\lambda_n)$. Нехай \mathcal{D} — клас відмінних від тотожної сталої рядів Діріхле вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \quad (4.4)$$

де $\lambda \in \Lambda$ і (a_n) — комплексна послідовність. Нехай \mathcal{S} — підклас цілих (абсолютно збіжних в \mathbb{C}) рядів Діріхле з класу \mathcal{D} , а \mathcal{S}_+ , у свою чергу, — підклас рядів Діріхле з класу \mathcal{S} з невід'ємними коефіцієнтами a_n . Кожен ряд з класу \mathcal{S} задає деяку цілу функцію. Ряд з ширшого класу \mathcal{D} може бути розбіжним в кожній точці $z \in \mathbb{C}$.

Нехай α — неспадна додатна на $[x_0, +\infty)$ функція. Як звично, функцію α називаємо помірно змінною, якщо $\alpha(2x) = O(\alpha(x))$, $x \rightarrow +\infty$. Легко перевірити, що наведена умова рівносильна до таких:

- 1) $\alpha(Cx) = O(\alpha(x))$, $x \rightarrow +\infty$, для кожного фіксованого $C > 1$;
- 2) існує $C > 1$ таке, що $\alpha(Cx) = O(\alpha(x))$, $x \rightarrow +\infty$.

Використовуючи (див., наприклад, [25, с. 54]) добре відомі нерівності

$$T(r, f) \leq \ln^+ M(r, f) \leq \frac{R+r}{R-r} T(r, f), \quad R > r > 0, \quad (4.5)$$

що виконуються для кожної цілої функції f , легко довести, що якщо f має ефект Пелі, то $\ln M(r, f)$ не є помірно змінною функцією. Обернене твердження загалом невірне: згідно з сформульованим вище результатом Дж. Клуні функція $\ln M(r, f)$ може не бути помірно змінною, проте f не зобов'язана мати ефект Пелі. Однак, для функцій f з класу \mathcal{S}_+ (див. теорему 1.12) і навіть для функцій f з ширшого класу \mathcal{S}_* , який уведемо нижче, обернене твердження є правильним, тобто f має ефект Пелі тоді і лише тоді, коли $\ln M(r, f)$ не є помірно змінною функцією. Саме цей факт дозволить описати наявність ефекту Пелі для цілої функції f з класу \mathcal{S}_+ (чи \mathcal{S}_*), заданої у вигляді ряду Діріхле (4.4), в термінах коефіцієнтів a_n і показників λ_n цього ряду.

Зокрема, задачу 1.5 у частинах (i) та (ii) повністю розв'язано відповідно у підрозділах 4.2 та 4.3.

Результати підрозділу 4.1 носять допоміжний характер.

4.1. Допоміжні результати

Для довільного ряду Діріхле $f \in \mathcal{D}$ вигляду (4.4) розглянемо множину

$$B(f) = \{r \in \mathbb{R} : |a_n|e^{r\lambda_n} = o(1), n \rightarrow \infty\}$$

і покладемо

$$\beta(f) = \begin{cases} -\infty, & \text{якщо } B(f) = \emptyset; \\ \sup B(f), & \text{якщо } B(f) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Легко довести, що

$$\beta(f) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}.$$

Зрозуміло також, що якщо $B(f) \neq \emptyset$, то $B(f) = (-\infty, \beta(f))$ або $B(f) = (-\infty, \beta(f)]$ і для кожного $r \in (-\infty, \beta(f))$ визначені максимальний член

$$\mu(r, f) = \max\{|a_n|e^{r\lambda_n} : n \in \mathbb{N}_0\}$$

та центральний індекс

$$\nu(r, f) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : |a_n|e^{r\lambda_n} = \mu(r, f)\}$$

ряду Діріхле (4.4). Крім того, добре відомим є наступне твердження (див., наприклад, [39, с. 180–184]).

Лема 4.1. *Якщо ряд Діріхле $f \in \mathcal{D}$ вигляду (4.4) такий, що $\beta(f) = +\infty$, то існують зростаючі до $+\infty$ послідовності (n_k) і (\varkappa_k) відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел такі, що*

$$a_n = 0 \quad (n < n_0); \quad a_{n_k} \neq 0 \quad (k \in \mathbb{N}_0); \quad (4.6)$$

$$\varkappa_k = \frac{\ln |a_{n_k}| - \ln |a_{n_{k+1}}|}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \quad (k \in \mathbb{N}_0); \quad (4.7)$$

$$|a_n| \leq |a_{n_k}|e^{\varkappa_k(\lambda_{n_k} - \lambda_n)} \quad (n \in (n_k, n_{k+1}), k \in \mathbb{N}_0), \quad (4.8)$$

і $\nu(r, f) = n_0$, якщо $r < \varkappa_0$, та $\nu(r, f) = n_{k+1}$, якщо $r \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1})$ і $k \in \mathbb{N}_0$.

Послідовності (n_k) і (\varkappa_k) , про які йдеться в лемі 4.1, є відповідно зростаючими послідовностями усіх значень і усіх точок розриву центрального індексу $\nu(r, f)$. За умов лемі 4.1 маємо $\lambda_{\nu(r, f)} = \lambda_{n_0}$, $\mu(r, f) = |a_{n_0}|e^{r\lambda_{n_0}}$, якщо $r < \varkappa_0$, та $\lambda_{\nu(r, f)} = \lambda_{n_{k+1}}$, $\mu(r, f) = |a_{n_{k+1}}|e^{r\lambda_{n_{k+1}}}$, якщо $r \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1})$ і $k \in \mathbb{N}_0$. Отже,

$$\lambda_{\nu(r, f)} = (\ln \mu(r, f))'_+,$$

а тому

$$\ln \mu(r, f) - \ln \mu(r, f) = \int_r^R \lambda_{\nu(t,f)} dt, \quad R > r. \quad (4.9)$$

Крім того, $\mu(r, f)$ є зростаючою до $+\infty$ на \mathbb{R} функцією, а тому з рівності $\ln \mu(r, f) = \ln |a_{\nu(r,f)}| + r\lambda_{\nu(r,f)}$, прийнявши

$$r_0 = \inf\{r > 0 : \mu(r, f) > 1\},$$

отримуємо

$$\frac{r\lambda_{\nu(r,f)}}{\ln |a_{\nu(r,f)}|} < -1, \quad r > r_0 \geq 0. \quad (4.10)$$

В певному сенсі протилежним до лема 4.1 є таке твердження ([58]).

Лема 4.2. *Якщо для ряду Діріхле $f \in \mathcal{D}$ вигляду (4.4) існують зростаючі до $+\infty$ послідовності (n_k) і (\varkappa_k) відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел такі, що виконуються співвідношення (4.6)–(4.8), то для цього ряду $\beta(f) = +\infty$ і $\nu(r, f) = n_0$, якщо $r < \varkappa_0$, та $\nu(r, f) = n_{k+1}$, якщо $r \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1})$ і $k \in \mathbb{N}_0$.*

Доведення наступної лема ґрунтується на міркуваннях, близьких до міркувань з [59].

Лема 4.3. *Нехай ряд Діріхле $f \in \mathcal{D}$ вигляду (4.4) такий, що $\beta(f) = +\infty$, а (n_k) і (\varkappa_k) – зростаючі послідовності відповідно усіх значень і усіх точок розриву центрального індексу $\nu(r, f)$. Тоді наступні твердження рівносильні:*

- (i) $\ln \mu(r, f)$ не є помірно змінною функцією;
- (ii) правильне співвідношення

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{r\lambda_{\nu(r,f)}}{\ln \mu(r, f)} = +\infty; \quad (4.11)$$

(iii) виконується рівність

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{r \lambda_{\nu(r,f)}}{\ln |a_{\nu(r,f)}|} = -1;$$

(iv) справедливе співвідношення

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\varkappa_k \lambda_{n_{k+1}}}{\ln |a_{n_{k+1}}|} = -1. \quad (4.12)$$

Доведення. Насамперед доведемо, що $\ln \mu(r, f)$ є помірно змінною функцією тоді і лише тоді, коли рівність (4.11) не виконується. Звідси буде випливати рівносильність тверджень (i) та (ii).

Якщо $\ln \mu(r, f)$ є помірно змінною функцією, то існує стала $C_1 > 1$ така, що $\ln \mu(2r, f) \leq C_1 \ln \mu(r, f)$ для всіх $r \geq r_1$. Тоді, згідно з (4.9),

$$\begin{aligned} r \lambda_{\nu(r,f)} &\leq \int_r^{2r} \lambda_{\nu(t,f)} dt = \ln \mu(2r, f) - \ln \mu(r, f) \leq \\ &\leq (C_1 - 1) \ln \mu(r, f), \quad r \geq r_1, \end{aligned}$$

звідки бачимо, що (4.11) не виконується.

Навпаки, якщо (4.11) не виконується, то існує стала C_2 така, що $r \lambda_{\nu(r,f)} \leq C_2 \ln \mu(r, f)$ для всіх $r \geq r_2$. Виберемо сталу $C > 1$ так, щоб виконувалась нерівність $\frac{C-1}{C} C_2 \leq \frac{1}{2}$. Тоді, згідно з (4.9),

$$\begin{aligned} \ln \mu(Cr, f) - \ln \mu(r, f) &= \int_r^{Cr} \lambda_{\nu(t,f)} dt \leq \\ &\leq (C - 1) r \lambda_{\nu(Cr,f)} \leq \frac{C - 1}{C} C_2 \ln \mu(Cr, f) \leq \frac{1}{2} \ln \mu(Cr, f), \end{aligned}$$

звідки отримуємо, що $\ln \mu(Cr, f) \leq 2 \ln \mu(r, f)$ для всіх $r \geq r_2$. Отже, $\ln \mu(r, f)$ є помірно змінною функцією. Рівносильність тверджень (i) та (ii) доведено.

Рівносильність тверджень (ii) та (iii) випливає з рівностей

$$\frac{r\lambda_{\nu(r,f)}}{\ln \mu(r,f)} = \frac{r\lambda_{\nu(r,f)}}{\ln |a_{\nu(r,f)}| + r\lambda_{\nu(r,f)}} = \frac{1}{\frac{\ln |a_{\nu(r,f)}|}{r\lambda_{\nu(r,f)}} + 1}$$

і з нерівності (4.10).

Доведемо рівносильність тверджень (iii) та (iv). Нехай

$$k_0 = \min\{k \in \mathbb{N}_0 : \ln |a_{n_{k+1}}| < 0\}.$$

Тоді для всіх цілих $k \geq k_0$ маємо

$$\max \left\{ \frac{r\lambda_{\nu(r,f)}}{\ln |a_{\nu(r,f)}|} : r \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1}) \right\} = \frac{\varkappa_k \lambda_{n_{k+1}}}{\ln |a_{n_{k+1}}|}.$$

Отже,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{r\lambda_{\nu(r,f)}}{\ln |a_{\nu(r,f)}|} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\varkappa_k \lambda_{n_{k+1}}}{\ln |a_{n_{k+1}}|}.$$

З отриманої рівності і випливає рівносильність (iii) та (iv). \square

Лема 4.4. *Нехай ряд Діріхле $f \in \mathcal{D}$ вигляду (4.4) такий, що $\beta(f) = +\infty$, а (n_k) і (\varkappa_k) — зростаючі послідовності відповідно усіх значень і усіх точок розриву центрального індексу $\nu(r, f)$. Тоді*

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \lambda_{n_{k+1}}}{\ln \varkappa_k} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln \mu(r, f)}{\ln r} - 1. \quad (4.13)$$

Доведення. З нерівності (4.9) для всіх достатньо великих r отримуємо

$$r\lambda_{\nu(r,f)} \leq \int_r^{2r} \lambda_{\nu(t,f)} dt = \ln \mu(2r, f) - \ln \mu(r, f) \leq \ln \mu(2r, f),$$

$$r\lambda_{\nu(r,f)} \geq \int_0^r \lambda_{\nu(t,f)} dt = \ln \mu(r, f) - \ln \mu(0, f).$$

Звідси бачимо, що

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \lambda_{\nu(r,f)}}{\ln r} + 1 = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln \mu(r, f)}{\ln r}. \quad (4.14)$$

Нехай $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N}_0 : \ln \varkappa_k > 0\}$. Тоді для всіх цілих $k \geq k_0$ маємо

$$\max \left\{ \frac{\ln \lambda_{\nu(r,f)}}{\ln r} : r \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1}) \right\} = \frac{\ln \lambda_{n_{k+1}}}{\ln \varkappa_k}.$$

Отже,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \lambda_{\nu(r,f)}}{\ln r} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \lambda_{n_{k+1}}}{\ln \varkappa_k},$$

звідки, згідно з (4.14), отримуємо (4.13). Лему доведено. \square

Далі знову ж розглянемо довільний ряд Діріхле $f \in \mathcal{D}$ вигляду (4.4)

і покладемо

$$A(f) = \left\{ r \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{r\lambda_n} < +\infty \right\},$$

$$\sigma_a(f) = \begin{cases} -\infty, & \text{якщо } A_f = \emptyset; \\ \sup A_f, & \text{якщо } A_f \neq \emptyset. \end{cases}$$

Величина $\sigma_a(f)$, як відомо, називається абсцисою абсолютної збіжності ряду (4.4). Для неї, очевидно, правильна нерівність $\sigma_a(f) \leq \beta(f)$.

Якщо $A(f) \neq \emptyset$, то для всіх $r < \sigma_a(f)$ покладемо

$$G(r, f) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{r\lambda_n}.$$

Зрозуміло, що ряд (4.4) є цілим, тобто $f \in \mathcal{S}$, тоді і лише тоді, коли $\sigma_a(f) = +\infty$. Для цілого ряду Діріхле функція $G(r, f)$ є визначеною на \mathbb{R} і, очевидно, $M(r, f) \leq G(r, f)$ для всіх $r \geq 0$; якщо ж $f \in \mathcal{S}_+$, то $M(r, f) = G(r, f)$, $r \geq 0$.

Нам буде потрібний наступний критерій цілості ряду (4.4) (див., наприклад, [72]).

Лема 4.5. *Для того, щоб ряд Діріхле $f \in \mathcal{D}$ вигляду (4.4) був цілим (тобто належав до класу \mathcal{S}), необхідно і досить, щоб виконувалась*

умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|} = +\infty.$$

Для послідовності $\lambda \in \Lambda$ покладемо

$$\tau(\lambda) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n}.$$

Справедливий наступний класичний результат Ж. Валірона [97] (див. також [39, с. 184], [47], [58]).

Лема 4.6. *Нехай послідовність $\lambda \in \Lambda$ така, що $\tau(\lambda) < A < +\infty$. Тоді для кожного ряду Діріхле $f \in \mathcal{S}$ вигляду (4.4) виконується співвідношення*

$$G(r, f) = o(\mu(r + A, f)), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Лема 4.7. *Нехай $\lambda \in \Lambda$ — послідовність цілих чисел. Тоді для кожного ряду Діріхле $f \in \mathcal{S}$ вигляду (4.4) і довільного фіксованого $A > 0$ виконується співвідношення*

$$G(r, f) = o(M(\sqrt{(r + A)^2 + \pi^2}, f)), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (4.15)$$

Доведення. Нехай $f \in \mathcal{S}$ — ряд Діріхле вигляду (4.4). Для всіх $x \in \mathbb{R}$ покладемо

$$\mathcal{M}(x, f) = \sup\{|f(x + iy)| : y \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, що $\mathcal{M}(r, f) \leq G(r, f)$. Відомо (див., наприклад, [39, с. 183]), що $\mu(r, f) \leq \mathcal{M}(r, f)$. Крім того, оскільки $\lambda \in \Lambda$ — послідовність цілих чисел, то $\lambda_n \geq n$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$. Отже, $\tau(\lambda) = 0$, а тому, згідно з лемою 4.6, для довільного фіксованого $A > 0$ виконується співвідношення

$$G(r, f) = o(\mathcal{M}(r + A, f)), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (4.16)$$

З цілості показників λ_n випливає також, що для кожного фіксованого $x \in \mathbb{R}$ функція $|f(x + iy)|$, як функція від y , є періодичною з періодом 2π . Отже,

$$\mathcal{M}(x, f) = \max\{|f(x + iy)| : y \in [-\pi, \pi]\}.$$

Враховуючи, що для $r \geq 0$ круг $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \sqrt{r^2 + \pi^2}\}$ містить відрізок $[r - i\pi, r + i\pi]$, за принципом максимуму модуля отримуємо

$$\mathcal{M}(r, f) \leq M(\sqrt{r^2 + \pi^2}, f), \quad r \geq 0.$$

Звідси і з (4.16) отримуємо (4.15). □

Нехай $\rho(f)$ — порядок цілої функції f , тобто

$$\rho(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln r}.$$

Наступна лема, в принципі, є добре відомою.

Лема 4.8. *Нехай f — ціла функція, відмінна від тотожної постійної. Якщо $\ln M(r, f)$ є помірно змінною функцією, то $\rho(f) < +\infty$.*

Доведення. Справді, якщо функція $\ln M(r, f)$ є помірно змінною, то існує стала $C_0 > 1$ така, що $\ln M(er, f) \leq C_0 \ln M(r, f)$ для всіх $r \geq r_0$. Крім того, як відомо, функція $\ln M(r, f)$ — опукла відносно $\ln r$, а тому

$$K(r, f) = r(\ln M(r, f))'_+$$

є неспадною невід'ємною на $(0, +\infty)$ функцією. З огляду на це, для всіх $r \geq r_0$ маємо

$$\begin{aligned} K(r, f) &\leq \int_r^{er} \frac{K(t, f)}{t} dt = \ln M(er, f) - \ln M(r, f) \leq \\ &\leq (C_0 - 1) \ln M(r, f). \end{aligned}$$

Тому для всіх $r \geq r_0$ отримуємо

$$\begin{aligned} \ln \ln M(r, f) - \ln \ln M(r_0, f) &= \int_{r_0}^r \frac{K(t, f)}{t \ln M(t, f)} dt \leq \\ &\leq (C_0 - 1) \int_{r_0}^r \frac{dt}{t} = (C_0 - 1) \ln \frac{r}{r_0}, \end{aligned}$$

звідки й випливає, що $\rho(f) \leq C_0 - 1 < +\infty$. \square

4.2. Критерій наявності ефекту Пелі

Для ряду Діріхле $f \in \mathcal{S}$ вигляду (4.4) покладемо $T_n = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|$ для кожного $n \in \mathbb{N}_0$. Поряд з рядом (4.4) розглянемо ряд Діріхле

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n e^{z\lambda_n}. \quad (4.17)$$

За лемою 4.5 маємо

$$\beta(\tilde{f}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{T_n} = +\infty.$$

Отже, для ряду (4.17) його максимальний член

$$\mu(r, \tilde{f}) = \max\{T_n e^{r\lambda_n} : n \in \mathbb{N}_0\}$$

є визначеним для кожного $r \in \mathbb{R}$.

Позначимо через \mathcal{S}_* клас рядів Діріхле $f \in \mathcal{S}$, для яких існує спадна до 0 на $(a, +\infty)$ функція α така, що

$$\ln G(r, f) = O(\ln M((1 + \alpha(r))r, f)), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (4.18)$$

Зрозуміло, що $\mathcal{S}_+ \subset \mathcal{S}_* \subset \mathcal{S}$.

Основним результатом цього підрозділу є наступний критерій наявності ефекту Пелі для цілого ряду Діріхле $f \in \mathcal{S}_*$ в термінах його коефіцієнтів і показників.

Теорема 4.1. Для кожного цілого ряду Діріхле $f \in \mathcal{S}_*$ вигляду (4.4) рівносильними є такі твердження:

(i) f має ефект Пелі;

(ii) $T(r, f)$ не є помірно змінною функцією;

(iii) $\ln M(r, f)$ не є помірно змінною функцією;

(iv) $\ln G(r, f)$ не є помірно змінною функцією;

(v) $\ln \mu(r, \tilde{f})$ не є помірно змінною функцією;

(vi) існують зростаючі до $+\infty$ послідовності (n_k) і (K_k) відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел такі, що

$$T_n = 0 \quad (n < n_0); \quad T_{n_k} \neq 0 \quad (k \in \mathbb{N}_0); \quad (4.19)$$

$$K_k = \frac{\ln |T_{n_k}| - \ln |T_{n_{k+1}}|}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \quad (k \in \mathbb{N}_0); \quad (4.20)$$

$$|T_n| \leq |T_{n_k}| e^{K_k(\lambda_{n_k} - \lambda_n)} \quad (n \in (n_k, n_{k+1}), k \in \mathbb{N}_0); \quad (4.21)$$

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{K_k \lambda_{n_{k+1}}}{\ln |T_{n_{k+1}}|} = -1. \quad (4.22)$$

Доведення. Нехай $f \in \mathcal{S}_*$ — цілий ряд Діріхле вигляду (4.4), а α — додатна спадна до 0 на $(a, +\infty)$ функція така, що виконується співвідношення (4.18).

Легко бачити, що рівносильність тверджень (ii) і (iii) випливає з нерівностей (4.5), тверджень (iii) і (iv) — з нерівності $M(r, f) \leq G(r, f)$ і співвідношення (4.18), а тверджень (iv) і (v) — з встановлених в [72] нерівностей

$$\mu(r, \tilde{f}) \leq G(r, f) \leq G(0, f) + \frac{1}{\varepsilon} \mu((\varepsilon + 1)r, \tilde{f}), \quad \varepsilon > 0, r \geq 0. \quad (4.23)$$

Доведемо рівносильність тверджень (v) і (vi). Розглянемо ряд (4.17) і припустимо, що $\ln \mu(r, \tilde{f})$ не є помірно змінною функцією. За лемою

4.1, застосованою до цього ряду, існують зростаючі до $+\infty$ послідовності (n_k) і (K_k) відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел такі, що виконуються співвідношення (4.19)–(4.21). За цією ж лемою (n_k) і (K_k) є зростаючими послідовностями відповідно усіх значень і всіх точок розриву центрального індексу $\nu(r, \tilde{f})$. Тому, згідно з лемою 4.3, для цих послідовностей виконується (4.22).

Навпаки, нехай для ряду (4.17) існують зростаючі до $+\infty$ послідовності (n_k) і (K_k) відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел такі, що виконуються співвідношення (4.19)–(4.22). Зі співвідношень (4.19)–(4.21), згідно з лемою 4.2, випливає, що (n_k) і (K_k) є зростаючими послідовностями відповідно усіх значень і всіх точок розриву центрального індексу $\nu(r, \tilde{f})$. Тому, враховуючи (4.22) і застосовуючи до ряду (4.17) лему 4.3, можемо зробити висновок, що $\ln \mu(r, \tilde{f})$ не є помірно змінною функцією. Отже, рівносильність тверджень (v) і (vi) доведено.

Крім того, як вже зазначалось вище, з (i) випливає (iii) за нерівностями (4.5). Тому нам залишається показати, що з (iii) випливає (i).

Нехай, отже, функція $\ln M(r, f)$ не є помірно змінною, тобто

$$\forall C > 1 : \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(Cr, f)}{\ln M(r, f)} = +\infty. \quad (4.24)$$

Зафіксуємо довільне $L > 0$ і виберемо $\varepsilon > 0$ настільки малим, щоб виконувалась нерівність $\delta := \arccos \frac{1}{1+\varepsilon} \leq \frac{1}{L}$. Зі співвідношень (4.18) і (4.24) отримуємо

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M((1+\varepsilon)r, f)}{\ln G(r, f)} = +\infty,$$

звідки негайно випливає існування додатних зростаючих $+\infty$ послідов-

ностей (γ_k) і (r_k) таких, що

$$\ln M((1 + \varepsilon)r_k, f) = \gamma_k \ln G(r_k, f), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Нехай $E = [-\pi, \pi] \setminus [-\theta, \theta]$. Оскільки

$$|f(re^{i\theta})| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\lambda_n r (\cos \theta + i \sin \theta)} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{\lambda_n r \cos \theta} = G(r \cos \theta, f),$$

то для всіх $r > 0$ і $\theta \in E$ маємо

$$|f((1 + \varepsilon)re^{i\theta})| \leq G(r, f).$$

Тоді для всіх цілих $k \geq k_0$ отримуємо

$$\begin{aligned} T((1 + \varepsilon)r_k, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f((1 + \varepsilon)r_k e^{i\theta})| d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \ln^+ |f((1 + \varepsilon)r_k e^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_E \ln^+ |f((1 + \varepsilon)r_k e^{i\theta})| d\theta \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \ln M((1 + \varepsilon)r_k, f) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_E \ln G(r_k, f) d\theta \leq \\ &\leq \frac{\delta}{\pi} \ln M((1 + \varepsilon)r_k, f) + \ln G(r_k, f) \leq \left(\frac{1}{\pi L} + \frac{1}{\gamma_k} \right) \ln M((1 + \varepsilon)r_k, f). \end{aligned}$$

Отже,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(r, f)}{T(r, f)} \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln M((1 + \varepsilon_k)r_k, f)}{T((1 + \varepsilon_k)r_k, f)} \geq \pi L.$$

З довільності L випливає, що для функції f виконується співвідношення (4.1), тобто ця функція має ефект Пелі. Теорему доведено. \square

Наслідок 4.1. (i) Кожен ряд Діріхле $f \in \mathcal{S}_*$ порядку $\rho_f = +\infty$ має ефект Пелі.

(ii) Нехай $\lambda \in \Lambda$ — послідовність цілих чисел. Кожен ряд Діріхле $f \in \mathcal{S}$ вигляду (4.4) і порядку $\rho_f = +\infty$ має ефект Пелі.

Доведення. Твердження (i) є безпосереднім наслідком з теореми 4.1 і леми 4.8. Тому для доведення твердження (ii) достатньо показати, що якщо $\lambda \in \Lambda$ — послідовність цілих чисел, а $f \in \mathcal{S}$ — ряд Діріхле вигляду (4.4), то $f \in \mathcal{S}_*$.

Нехай, отже, $\lambda \in \Lambda$ — послідовність цілих чисел, а $f \in \mathcal{S}$ — ряд Діріхле вигляду (4.4). Покладемо

$$\alpha(r) = \frac{\sqrt{(r+1)^2 + \pi^2}}{r} - 1.$$

Ясно, що α є додатною спадна до 0 на $(0, +\infty)$ функцією. Крім того, застосовуючи лему 4.7 з $A = 1$, отримуємо

$$G(r, f) = o(M(1 + \alpha(r))r, f), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Звідси бачимо, що для функції f виконується співвідношення (4.18), тобто $f \in \mathcal{S}_*$. Наслідок доведено. \square

У випадку, коли послідовність $\lambda = (\lambda_n)$ не надто повільно прямує до $+\infty$, для ряду Діріхле $f \in \mathcal{S}_*$ вигляду (4.4) правильний простіший для перевірки критерій наявності ефекту Пелі.

Теорема 4.2. *Нехай послідовність $\lambda \in \Lambda$ така, що $\tau(\lambda) < +\infty$. Тоді для кожного цілого ряду Діріхле $f \in \mathcal{S}_*$ вигляду (4.4) рівносильними є такі твердження:*

(i) f має ефект Пелі;

(ii) $\ln \mu(r, f)$ не є помірно змінною функцією;

(iii) існують зростаючі до $+\infty$ послідовності (n_k) і (\varkappa_k) відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел такі, що виконуються співвідношення (4.6)–(4.8) і (4.12).

Доведення. За теоремою 4.1 функція f має ефект Пелі, якщо і лише якщо $\ln G(r, f)$ не є помірно змінною функцією. Оскільки $\tau(\lambda) < +\infty$, то з нерівності $\mu(r, f) \leq G(r, f)$ і леми 4.6 випливає, що $\ln G(r, f)$ не є помірно змінною функцією тоді і лише тоді, коли $\ln \mu(r, f)$ не є помірно змінною функцією. Отже, твердження (i) і (ii) — рівносильні. Рівносильність тверджень (ii) і (iii) для ряду (4.4) доводиться аналогічно до рівносильності тверджень (v) і (vi) для ряду (4.17) в теоремі 4.1. \square

Нехай $\lambda \in \Lambda$ — послідовність цілих чисел. Тоді $\tau(\lambda) = 0$ і (див. доведення наслідку 4.1) кожен ряд Діріхле $f \in \mathcal{S}$ вигляду (4.4) належить до класу \mathcal{S}_* . Тому з теореми 4.2 отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 4.2. *Нехай $\lambda \in \Lambda$ — послідовність цілих чисел. Ряд Діріхле $f \in \mathcal{S}$ вигляду (4.4) має ефект Пелі тоді і лише тоді, коли існує зростаюча послідовність невід'ємних цілих чисел (n_k) , для якої виконуються співвідношення (4.6)–(4.8) і (4.12).*

Позначимо через Λ_* підклас послідовностей $\lambda \in \Lambda$, для яких кожен цілий ряд Діріхле $f \in \mathcal{S}$ вигляду (4.4) входить до класу \mathcal{S}_* . Зрозуміло, що тоді твердження наслідку 4.2 і твердження (ii) наслідку 4.1 правильні для кожної послідовності $\lambda \in \Lambda_*$. З огляду на це, виникає така задача: *Описати клас Λ_* , тобто знайти необхідну і достатню умову на послідовність $\lambda \in \Lambda$, за якої для кожного цілого ряду Діріхле $f \in \mathcal{S}$ вигляду (4.4) існує додатна спадна до 0 на $(a, +\infty)$ функція α така, що виконується співвідношення (4.18).*

Зі сказаного вище випливає, що достатньою умовою належності послідовності $\lambda \in \Lambda$ до класу Λ_* є цілість її членів. Іншу достатню умову

дозволяє знайти наступна теорема О.Б. Скасківа [52].

Теорема 4.3 ([52]). *Нехай $\lambda \in \Lambda$. Для того, щоб для довільного ряду Діріхле $f \in \mathcal{S}$ вигляду (4.4) існувала множина $E_f \subset (0, +\infty)$ скінченної міри така, що*

$$G(r, f) \sim m(r, f), \quad E_f \not\ni r \rightarrow +\infty, \quad (4.25)$$

де $m(x, f) = \inf\{|f(x + iy)| : y \in \mathbb{R}\}$, $x \in \mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб для послідовності λ виконувалась умова

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty. \quad (4.26)$$

Наслідок 4.3. *Якщо для послідовності $\lambda \in \Lambda$ виконується умова (4.26), то $\lambda \in \Lambda_*$.*

Доведення. Нехай для послідовності $\lambda \in \Lambda$ виконується умова (4.26), а $f \in \mathcal{S}$ — довільний ряд Діріхле вигляду (4.4). Тоді за теоремою 4.3 існує множина $E_f \subset (0, +\infty)$ скінченної міри δ така, що для функції f виконується співвідношення (4.25). Нехай $c > \delta$. Тоді на кожному інтервалі $(r, r + c)$, $r > 0$, знайдеться точка $\gamma(r)$, яка не належить множині E_f . Згідно з (4.25),

$$G(\gamma(r), f) \sim m(\gamma(r), f), \quad r \rightarrow +\infty.$$

З отриманого співвідношення випливає існування додатної спадної до 0 на $(a, +\infty)$ функції α такої, що виконується співвідношення (4.18).
Наслідок доведено. □

4.3. Ряди Діріхле заданого порядку з ефектом Пелі

Розв'язок задачі 1.5 у частині (ii), тобто задачі про можливість встановлення необхідних і достатніх умов на коефіцієнти і показники ряду Діріхле $f \in \mathcal{S}_+$, за яких цей ряд має одночасно як ефект Пелі, так і заданий порядок $\rho \in [1, +\infty)$, містить така теорема.

Теорема 4.4. *Нехай $\rho \in [1, +\infty)$, а $f \in \mathcal{S}_*$ — цілий ряд Діріхле вигляду (4.4). Для того, щоб функція f мала ефект Пелі і порядок $\rho(f) = \rho$, необхідно і достатньо, щоб існували зростаючі до $+\infty$ послідовності (n_k) і (K_k) відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел такі, що виконуються співвідношення (4.19)–(4.22) і*

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \lambda_{n_{k+1}}}{\ln K_k} = \rho - 1. \quad (4.27)$$

Доведення. Нехай $f \in \mathcal{S}_*$ — цілий ряд Діріхле вигляду (4.4), а α — додатна спадна до 0 на $(a, +\infty)$ функція така, що виконується співвідношення (4.18).

Поряд з рядом (4.4) розглянемо ряд (4.17).

З нерівності $M(r, f) \leq G(r, f)$ і співвідношення (4.18) випливає, що в означенні порядку $\rho(f)$ функцію $M(r, f)$ можна замінити функцією $G(r, f)$, яку, в свою чергу, можна замінити на $\mu(r, \tilde{f})$ згідно з нерівностями (4.23). Отже,

$$\rho(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln \mu(r, \tilde{f})}{\ln r}. \quad (4.28)$$

Доведемо спочатку *достатність*. Припустимо, що існують зростаючі до $+\infty$ послідовності (n_k) і (K_k) відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел такі, що виконуються співвідношення (4.19)–(4.22) і (4.27).

Тоді за теоремою 4.1, згідно зі співвідношеннями (4.19)–(4.22), випливає, що f має ефект Пелі. Крім того, зі співвідношень (4.19)–(4.21) і леми 4.2, застосованої до ряду (4.17), можемо зробити висновок, що (n_k) і (K_k) є зростаючими послідовностями відповідно усіх значень і всіх точок розриву центрального індексу $\nu(r, \tilde{f})$. Застосовуючи до ряду (4.17) лему 4.4, отримуємо

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \lambda_{n_{k+1}}}{\ln K_k} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln \mu(r, \tilde{f})}{\ln r} - 1. \quad (4.29)$$

Враховуючи (4.29), (4.28) і (4.27), бачимо, що $\rho(f) = \rho$.

Перейдемо до доведення *необхідності*. Нехай f має ефект Пелі і порядок $\rho(f) = \rho$. За теоремою 4.1 з наявності ефекту Пелі випливає існування зростаючих до $+\infty$ послідовностей (n_k) і (K_k) відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел таких, що виконуються співвідношення (4.19)–(4.22). Зі співвідношень (4.19)–(4.21) і леми 4.2, застосованої до ряду (4.17), можемо зробити висновок, що (n_k) і (K_k) є зростаючими послідовностями відповідно усіх значень і всіх точок розриву центрального індексу $\nu(r, \tilde{f})$. Застосовуючи до ряду (4.17) лему 4.4, отримуємо (4.29). Тоді з (4.29), (4.28) і рівності $\rho(f) = \rho$ випливає, що виконується (4.27). Теорему доведено. \square

Нехай послідовність $\lambda \in \Lambda$ така, що $\tau(\lambda) < +\infty$, а $f \in \mathcal{S}_*$ — довільний цілий ряд Діріхле вигляду (4.4). Як зазначено вище, в означенні порядку $\rho(f)$ функцію $M(r, f)$ можна замінити функцією $G(r, f)$; функцію $G(r, f)$, в свою чергу, можна замінити на $\mu(r, f)$ згідно з нерівністю $\mu(r, f) \leq G(r, f)$ і лемою 4.6. Отже,

$$\rho(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln \mu(r, f)}{\ln r}. \quad (4.30)$$

Задіявши до ряду (4.4) і співвідношення (4.30) такі ж міркування, як і в доведенні теореми 4.4 до ряду (4.17) і співвідношення (4.28), бачимо, що справедлива наступна теорема.

Теорема 4.5. *Нехай $\rho \in [1, +\infty)$, послідовність $\lambda \in \Lambda$ така, що $\tau(\lambda) < +\infty$, а $f \in \mathcal{S}_*$ – цілий ряд Діріхле вигляду (4.4). Для того, щоб функція f мала ефект Пелі і порядок $\rho(f) = \rho$, необхідно і достатньо, щоб існували зростаючі до $+\infty$ послідовності (n_k) і (\varkappa_k) відповідно невід’ємних цілих і дійсних чисел такі, що виконуються співвідношення (4.6)–(4.8), (4.12) і*

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \lambda_{n_{k+1}}}{\ln \varkappa_k} = \rho - 1.$$

4.4. Висновки до розділу 4

Нехай \mathcal{S}_* клас відмінних від тотожної сталої цілих рядів Діріхле вигляду $f(z) = \sum a_n e^{z\lambda_n}$ з невід’ємною зростаючою до $+\infty$ системою показників (λ_n) таких, що $\ln G(r, f) = O(\ln M((1 + \alpha(r))r, f))$, $r \rightarrow +\infty$, де $G(r, f) = \sum |a_n| e^{r\lambda_n}$, а $M(r, f)$ – максимум модуля функції f .

Для заданого ряду $f \in \mathcal{S}_*$ знайдено умови на послідовності (a_n) та (λ_n) відповідно коефіцієнтів та показників цього ряду, які є необхідними і достатніми для того, щоб функція f мала ефект Пелі (чи мала ефект Пелі і заданий порядок $\rho \geq 1$ одночасно).

Отримані результати істотно узагальнюють отримані раніше результати А.А. Гольдберга і Й.В. Островського [26] та П.В. Філевича [85] стосовно ефекту Пелі для цілих функцій, зображених рядами Діріхле з невід’ємними коефіцієнтами.

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено встановленню зв'язку між зростанням аналітичних функцій та поведінкою послідовності модулів коефіцієнтів розвинень цих функцій у степеневий ряд чи ряд Діріхле. Опис такого зв'язку здійснюється в термінах узагальнених шкал зростання, породжених тим чи іншим узагальненим типом чи порядком.

Основні результати дисертації мають форму критеріїв.

Зокрема, в дисертаційній роботі знайдено необхідну і достатню умову на невід'ємну зростаючу до $+\infty$ послідовність λ і функцію порівняння Φ , за якої Φ -тип кожного абсолютно збіжного у заданій півплощині (чи в \mathbb{C}) ряду Діріхле зі системою показників λ дорівнює Φ -типу логарифма максимального члена цього ряду i , як наслідок, виражається через послідовність модулів коефіцієнтів заданого ряду за формулою типу Коші-Адамара.

Встановлено також, що умова К. Сугімури на невід'ємну зростаючу до $+\infty$ послідовність λ є не лише достатньою, а й необхідною умовою застосовності формули Ж. Рітта для обчислення R -порядку кожного цілого ряду Діріхле зі системою показників λ .

Отримано необхідну і достатню умову на функцію порівняння Φ , за якої Φ -тип кожної аналітичної в крузі функції можна виразити через послідовність модулів коефіцієнтів її степеневих розвинень. За

знайденої на Φ умови Φ -тип довільної аналітичної в заданому крузі функції дорівнює Φ -типу логарифма її максимального члена i , як наслідок, виражається через послідовність модулів коефіцієнтів степеневого розвинення цієї функції за формулою типу Коші-Адамара. Якщо знайдена на Φ умова не виконується, то не існує жодної формули типу Коші-Адамара, за якою Φ -тип кожної такої функції можна було б обчислити через послідовність модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення.

Описано всі функції порівняння Φ , для яких Φ -порядок довільної цілої функції можна виразити через послідовність модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення.

Для заданого цілого ряду Діріхле з невід'ємними коефіцієнтами та невід'ємною зростаючою до $+\infty$ системою показників знайдено необхідні та достатні умови наявності в нього ефекту Пелі.

Достовірність результатів дисертації підтверджується тим, що вони опубліковані в фахових журналах і були оприлюднені на багатьох наукових конференціях і спеціалізованих наукових семінарах. Для їх доведень використовуються сучасні методи теорії функцій. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть знайти застосування як в теорії функцій, так і в інших розділах математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Балашов С.К. *О связи между роста целой функции обобщенного порядка с коэффициентами ее степенного разложения и распределением корней* / С.К. Балашов // Изв. вузов. Мат. — 1972. — №8. — С. 10–18.
- [2] Бойчук В.С. *О росте абсолютно сходящихся в полуплоскости рядов Дирихле* / В.С. Бойчук // Мат. сб. К.: Наукова думка, 1976. — С. 238–240.
- [3] Бойчук В.С. *О росте целых функций, представимых рядами Дирихле* / В.С. Бойчук, А.Э. Еременко // Изв. вузов. Мат. — 1975. — №5. — С. 93–95.
- [4] Вакарчук С.Б. *О наилучшем полиномиальном приближении целых трансцендентных функций обобщенного порядка* / С.Б. Вакарчук, С.И. Жир // Укр. мат. журн. — 2008. — Т.60, №8. — С. 1011–1026.
- [5] Вакарчук С.Б. *О наилучших полиномиальных приближениях целых трансцендентных функций многих комплексных переменных в некоторых банаховых пространствах* / С.Б. Вакарчук, С.И. Жир // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 66, №12. — С. 1598–1614.

- [6] Винницкий Б.В. *Об одном свойстве целых характеристических функций вероятностных законов* / Б.В. Винницкий // Изв. вузов. Мат. — 1975. — №4. — С. 95–97.
- [7] Винницкий Б.В. *Асимптотика коэффициентов рядов Дирихле, представляющих целые функции* / Б.В. Винницкий, М.М. Шеремета // Укр. мат. журн. — 1975. — Т. 27, №2. — С. 147–157.
- [8] Винницкий Б.В. *О коэффициентах ряда Дирихле, задающего целую функцию* / Б.В. Винницкий, М.М. Шеремета // Укр. мат. журн. — 1977. — Т. 29, №2. — С. 232–237.
- [9] Виттих Г. *Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям* / Г. Виттих. — М.: ГИФМЛ, 1960. — 320 с.
- [10] Гайсин А.М. *Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуполосе* / А.М. Гайсин // Мат. сб. — 1982. — Т. 117, №3. — С. 412–424.
- [11] Галь Ю.М. *О росте аналитических в полуплоскости функций, заданных рядами Дирихле* / Ю.М. Галь, М.Н. Шеремета // ДАН УССР. Сер. А. — 1978. — № 12. — С. 1065–1067.
- [12] Гече Ф.И. *Замечания о формулах для определения линейного порядка целой функции, представленной рядом Дирихле* / Ф.И. Гече // Укр. мат. журн. — 1964. — Т.16, №5. — С. 7–12.
- [13] Глова Т.Я. *Зростання цілих функцій в термінах узагальнених порядків* / Т.Я. Глова, П.В. Філевич // Карпатські мат. публ. — 2012. — Т. 4, №1. — С. 28–35.

- [14] Глова Т.Я. *Про одну оцінку R -типу цілого ряду Діріхле та її точність* / Т.Я. Глова., П.В. Філевич // Карпатські мат. публ. — 2013. — Т. 5, №2. — С. 208–216.
- [15] Глова Т. *Умова застосовності формули для обчислення R -порядку цілих рядів Діріхле* / Т. Глова, П. Філевич // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2013. — Вип. 78. — С. 27-34.
- [16] Глова Т.Я. *Зростання аналітичних функцій у термінах узагальнених типів* / Т.Я. Глова, П.В. Філевич // Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка". "Фізико-математичні науки". — 2014. — №804. — С. 75–83.
- [17] Глова Т.Я. *Ефект Пелі для цілих рядів Діріхле* / Т.Я. Глова, П.В. Філевич // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, №6. — С. 739–751. (Переклад: Hlova T.Ya. *Paley Effect for entire Dirichlet series* / T.Ya. Hlova, P.V. Filevych // Ukrainian Math. J. — 2015. — V. 67, №6. — P. 838–852. DOI 10.1007/s11253-015-1117-x.)
- [18] Глова Т.Я. *Зростання абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле в термінах узагальнених типів* / Т.Я. Глова // Прикарпатський вісник НТШ. Серія "Число". — 2016. — №1(33). — С. 103–109.
- [19] Глова Т.Я. *Зростання цілої функції в термінах узагальнених типів* / Т.Я. Глова, П.В. Філевич // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька, Дрогобич, 19–23 вересня, 2011 р.: Тези доповідей. — Львів, 2011. — С. 48.

- [20] Глова Т.Я. *Зростання цілих функцій в термінах узагальнених порядків* / Т.Я. Глова, П.В. Філевич // Всеукраїнська наукова конференція "Алгебра, топологія, аналіз, стохастика", Микуличин, 20-23 вересня, 2012 р.: Тези доповідей. — Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2012. — С. 13.
- [21] Глова Т.Я. *Узагальнені порядки зростання цілих функцій* / Т.Я. Глова, П.В. Філевич // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", Ворохта, 25 лютого – 3 березня, 2013 р.: Тези доповідей. — Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2013. — С. 43-44.
- [22] Глова Т.Я. *Зростання рядів Діріхле* / Т.Я. Глова, П.В. Філевич // V всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу", Івано-Франківськ, 19-21 вересня, 2013 р.: Тези доповідей. — Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2013. — С. 22.
- [23] Глова Т.Я. *Зростання аналітичних функцій в термінах узагальнених типів* [Електронний ресурс] / Т.Я. Глова, П.В. Філевич // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2014", 28-30 травня, 2014 р., Львів. — Електронні дані. — [Львів: Ін-тут приклад. проблем мех. і мат. ім. Я.С. Підстригача НАН України] — Режим доступу: <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2014/theses/Glova.pdf> (дата звернення 10.07.2015 р.). — Назва з екрана.

- [24] Говоров Н.В. *О связи между ростом функции, аналитической в круге, и коэффициентами ее степенного разложения* / Н.В. Говоров // Труды Новочеркасск. политехн. ин-та. — 1959. — Т. 100. — С. 101–115.
- [25] Гольдберг А.А. *Распределение значений мероморфных функций* / А.А. Гольдберг, И.В. Островский. — М.: Наука, 1970. — 590 с.
- [26] Гольдберг А.А. *Об эффекте Пейли для целых характеристических функций и целых функций, представленных рядами Дирихле* / А.А. Гольдберг, И.В. Островский // Теория функц., функц. анализ и их прил. — 1985. — Вып. 43. — С. 18–23.
- [27] Гольдберг А.А. *Целые и мероморфные функции* / А.А. Гольдберг, Б.Я. Левин, И.В. Островский // Комплексный анализ. Одна переменная – 1, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — М.: ВИНТИ, 1991. — Т. 85. — С. 5–185.
- [28] Горбачук М.Л. *О порядке роста операторной экспоненты на целых векторах* / М.Л. Горбачук // Функц. анализ и его прил. — 2002. — Т. 36, №1. — С. 75–78.
- [29] Дагене Е.Я. *О центральном показателе ряда Дирихле* / Е.Я. Дагене // Лит. мат. сб. — 1968. — Т. 8, №3. — С. 504–521.
- [30] Евграфов М.А. *Асимптотические оценки и целые функции* / М.А. Евграфов. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
- [31] Заболоцкий Н.В. *О медленном росте основных характеристик*

- целых функций* / Н.В. Заболоцкий, М.Н. Шеремета // Мат. заметки. — 1999. — Т. 65, №2. — С. 206–214.
- [32] Зеліско М.М. *Про асимптотичне поведження логарифмів максимуму модуля і максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле* / М.М. Зеліско, М.М. Шеремета // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2006. — Вип. 66. — С. 70–74.
- [33] Зеліско М.М. *Модифікація узагальненого порядку цілого ряду Діріхле та її застосування* / М.М. Зеліско // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2007. — Вип. 67. — С. 143–147.
- [34] Кахан Ж.-П. *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье* / Ж.-П. Кахан. — М.: Мир, 1976. — 204 с.
- [35] Кінаш О.М. *Зростання характеристичних функцій ймовірнісних законів* / О.М. Кінаш, М.І. Пароля, М.М. Шеремета // Доп. НАН України — 2012. — №8. — С. 13–17.
- [36] Кулявець Л. *Про модифіковані узагальнені порядки цілих рядів Діріхле та характеристичні функції ймовірнісних законів* / Л. Кулявець, М. Шеремета // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2012. — Вип. 77. — С. 124–131.
- [37] Кулявець Л. *Про модифіковані узагальнені порядки абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле* / Л. Кулявець // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2014. — Вип. 79. — С. 69–79.
- [38] Левин Б.Я. *Распределение корней целых функции* / Б.Я. Левин. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 632 с.

- [39] Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент* / А.Ф. Леонтьев. — М.: Наука, 1976. — 536 с.
- [40] Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент* / А.Ф. Леонтьев. — М.: Наука, 1983. — 176 с.
- [41] Линник Ю.В. *Разложения случайных величин и векторов* / Ю.В. Линник, И.В. Островский // М.: Наука, 1972. — 480 с.
- [42] Мак-Лейн Г. *Асимптотические значения голоморфных функций* / Г. Мак-Лейн. — М.: Мир, 1966. — 104 с.
- [43] Микитюк Я.В. *О функциях, двойственных по Юнгу, и поведении максимальных членов производных ряда Дирихле* / Я.В. Микитюк, М.Н. Шеремета, О.М. Сумык // Мат. заметки. — 2001. — Т. 69, №1. - С. 74–81.
- [44] Осколков В.А. *О некоторых вопросах теории целых функций* / В.А. Осколков // Мат. сб. — 1993. — Т. 184, №1. — С. 129–148.
- [45] Осколков В.А. *Рост целых функций, представленных рядами Дирихле* / В.А. Осколков, Л.И. Калиниченко // Мат. сб. — 1996. — Т. 187, №10. — С. 129–144.
- [46] Петроградский В.М. *Рост полилильпотентных многообразий алгебр Ли и быстро растущие целые функции* / В.М. Петроградский // Мат. сб. — 1997. — Т. 188, №6. — С. 119–138.
- [47] Притула Я.Я. *Про максимум модуля i максимальный член целого ряда Дирихле* / Я.Я. Притула // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 1995. — Вип. 43. — С. 25–30.

- [48] Пьяныло Я.Д. *Об обобщенных порядках целых функций* / Я.Д. Пьяныло // Изв. вузов. Мат. — 1975. — №5. — С. 84–87.
- [49] Пьяныло Я.Д. *О росте целых функций, представленных рядами Дирихле* / Я.Д. Пьяныло, М.Н. Шеремета // Изв. вузов. Мат. — 1975. — №10. — С. 91–93.
- [50] Скаскив О.Б. *О росте на горизонтальных лучах аналитических функций, представленных рядами Дирихле* / О.Б. Скаскив, В.М. Сорокинский // Укр. мат. журн. — 1990. — Т. 42, №3. — С. 363–371.
- [51] Скаскив О.Б. *О некоторых соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле* / О.Б. Скаскив // Мат. заметки. — 1999. — Т. 66, №2. — С. 282–292.
- [52] Скасків О.Б. *Максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле* / О.Б. Скасків // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1984. — №11. — С. 22–24.
- [53] Сорокинский В.М. *О росте характеристических функций вероятностных законов* / В.М. Сорокинский // Изв. вузов. Мат. — 1979. — №9. — С. 48–52.
- [54] Сорокинский В.М. *Об обобщенных порядках роста аналитических характеристических функций вероятностных законов* / В.М. Сорокинский // Укр. мат. журн. — 1987. — Т. 33, №1. — С. 115–118.

- [55] Стрелиц Ш.И. *Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений* / Ш.И. Стрелиц. — Вильнюс: Минтис, 1972. — 468 с.
- [56] Филевич П.В. *Неравенства типа Вимана-Валирона для целых и случайных целых функций конечного логарифмического порядка* / П.В. Филевич // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т. 42, №3. — С. 683–692.
- [57] Филевич П.В. *О влиянии аргументов коэффициентов степенного разложения целой функции на рост ее максимума модуля* / П.В. Филевич // Сиб. мат. журн. — 2003. — Т. 44, №3. — С. 674–685.
- [58] Филевич П.В. *К теореме Валирона о соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле* / П.В. Филевич // Изв. вузов. Мат. — 2004. — №4. — С. 66–72.
- [59] Филевич П.В. *Правильно растущие целые ряды Дирихле* / П.В. Филевич, М.Н. Шеремета // Мат. заметки. — 2003. — Т. 74, №1. — С. 118–131.
- [60] Філевич П.В. *Деякі класи цілих функцій, в яких майже напевне можна покращити нерівність Вімана-Валірона* / П.В. Філевич // Мат. студ. — 1996. — Т. 6. — С. 59–66.
- [61] Філевич П.В. *Співвідношення між максимумом модуля і максимальним членом для випадкових цілих функцій* / П.В. Філевич // Мат. студ. — 1997. — Т. 7, №2. — С. 157–166.

- [62] Філевич П.В. *Асимптотична поведінка цілих функцій з винятковими значеннями у співвідношенні Бореля* / П.В. Філевич // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, №4. — С. 522-530.
- [63] Філевич П.В. *Про зростання максимуму модуля цілої функції на послідовності* / П.В. Філевич // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, №8. — С. 1149–1153.
- [64] Філевич П.В. *До поняття порядку і типу цілих функцій* / П.В. Філевич // Міжнародна наукова конференція "Нові підходи до розв'язування диференціальних рівнянь", Дрогобич, 1-5 жовтня, 2001 р.: Тези доповідей. — Київ, 2001. — С. 149.
- [65] Філевич П.В. *Зростання цілої і випадкової цілої функції* / П.В. Філевич // Мат. студ. — 2008. — Т. 30, №1. — С. 15–21.
- [66] Філевич П.В. *Ефект Пелі для цілих рядів Діріхле* / П.В. Філевич // Міжнародна конференція з комплексного аналізу пам'яті А.А. Гольдберга, Львів, 31 травня – 5 червня, 2010 р.: Тези доповідей. — Львів, 2010. — С. 136–138.
- [67] Фридман Г.А. *Зависимость роста модуля аналитической функции от роста модуля коэффициентов ее степенного разложения*: дисс. ... канд. физ.-мат. наук / Г.А. Фридман. — М.: МГУ, 1951.
- [68] Фридман Г.А. *Медленно возрастающие функции и их приложение* / Г.А. Фридман // Сиб. мат. журн. — 1966. — Т. 7, №5. — С. 1139–1160.

- [69] Фридман Г.А. *Об асимптотическом поведении функций, двойственных по Юнгу* / Г.А. Фридман // Мат. сб. — 1966. — Т. 70, №4. — С. 518—525.
- [70] Шеремета М.М. *Про зв'язок між ростом функції, аналітичної в крузі, і модулями коефіцієнтів її ряду Тейлора* / М.М. Шеремета // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 1965. — Вип. 2. — С. 101—110.
- [71] Шеремета М.М. *Цілі ряди Діріхле* / М.М. Шеремета. — К.: ІСДО, 1993. — 168 с.
- [72] Шеремета М.М. *Про зростання цілого ряду Діріхле* / М.М. Шеремета // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51, №8. — С. 1149—1153.
- [73] Шеремета М.М. *Зв'язок між зростанням спряжених за Юнгом функцій* / М.М. Шеремета, О.М.Сумик // Мат. студ. — 1999. — Т. 11, №1. — С. 41—47.
- [74] Шеремета М.Н. *О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения* / М.Н. Шеремета // Изв. вузов. Мат. — 1967. — №2. — С. 100—108.
- [75] Шеремета М.Н. *О связи между ростом целых или аналитических в круге функций нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений* / М.Н. Шеремета // Изв. вузов. Мат. — 1968. — №6. — С. 115—121.
- [76] Шеремета М.Н. *О целых функциях, представленных рядами Дирихле* / М.Н. Шеремета // Изв. вузов. Мат. — 1978. — №3. — С. 90—

98.

- [77] Шеремета М.Н. *Асимптотика целых функций, заданных рядами Дирихле и удовлетворяющих дифференциальным уравнениям первого порядка с экспоненциальными коэффициентами* / М.Н. Шеремета // Диф. уравнения. — 1981. — Т. 17, №63. — С. 1139–1142.
- [78] Шеремета М.Н. *О максимуме модуля и максимальном члене ряда Дирихле* / М.Н. Шеремета // Мат. заметки. — 2003. — Т. 73, №3. — С. 437–443.
- [79] Шеремета М.Н. *О производной ряда Дирихле* / М.Н. Шеремета, С.И. Федыняк // Сиб. мат. журн. — 1998. — Т. 39, №1. — С. 206–223.
- [80] Azpeitia A.G. *A remark on the Ritt order of entire functions defined by Dirichlet series* / A.G. Azpeitia // Proc. Amer. Math. Soc. — 1961. — V. 12, №5. — P. 722–723.
- [81] Bergweiler W. *A question of Gol'dberg concerning entire functions with prescribed zeros* / W. Bergweiler // J. d'Anal. Math. — 1994. — V. 63. — P. 121–129.
- [82] Chyzhykov I. *Finiteness of φ -order of solutions of linear differential equations in the unit disc* / I. Chyzhykov, J. Heittokangas, J. Rättyä // J. d'Anal. Math. — 2009. — V. 109, №1. — P. 163–198.
- [83] Clunie J. *On integral function having prescribed asymptotic growth* / J. Clunie // Can. J. Math. — 1965. — V. 17, №3. — P. 396–404.

- [84] Erdős P. *On random entire function* / P. Erdős, A. Rényi // *Zastosowania mat.* — 1969. — V. 10. — P. 47–55.
- [85] Filevych P.V. *To the Sheremeta theorem concerning relations between the maximal term and the maximum modulus of entire Dirichlet series* / P.V. Filevych // *Mat. Stud.* — 2000. — V. 13, №2. — P. 139–144.
- [86] Filevych P.V. *On the slow growth of power series convergent in the unit disk* / P.V. Filevych // *Mat. Stud.* — 2001. — V. 16, №2. — P. 217–221.
- [87] Filevych P.V. *On relations between the abscissa of convergence and the abscissa of absolute convergence of random Dirichlet series* / P.V. Filevych // *Mat. Stud.* — 2003. — T. 20, №1. — P. 33–39.
- [88] Filevych P.V. *On Paley's effect for entire functions* / P.V. Filevych // *Mat. Stud.* — 2003. — V. 19, №1. — P. 37–41.
- [89] Hlova T.Ya. *Generalized types of the growth of Dirichlet series* / T.Ya. Hlova, P.V. Filevych // *Карпатські мат. публ.* — 2015. — Т. 7, №2. — С. 172–187.
- [90] Hlova T.Ya. *The growth of analytical functions in the terms of generalized orders* / T.Ya. Hlova, P.V. Filevych // International conference "Complex analysis and related topics", Lviv, 23-28 september, 2013: Book of Abstracts. — Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2013. — P. 31.
- [91] Laine I. *Nevanlinna theory and complex differential equations* / I. Laine. — Berlin: W. de Gruyter, 1993.

- [92] Parolya M.I. *Estimates from below for characteristic functions of probability laws* / M.I. Parolya, M.M. Sheremeta // *Mat. Stud.* — 2013. — V. 39, №1. — P. 54–66.
- [93] Platsydem M.I. *Estimates for the maximum modulus of analytic characteristic functions of probability laws on some sequence* / M.I. Platsydem, M.M. Sheremeta // *Mat. Stud.* — 2014. — V. 42, №2. — P. 149–159.
- [94] Ritt J.F. *On certain points in the theory of Dirichlet series* / J.F. Ritt // *Amer. J. Math.* — 1928. — V. 50. — P. 73–78.
- [95] Sugimura K. *Übertragung einiger Satze aus der Theorie der ganzen Funktionen auf Dirichletschen Reihen* / K. Sugimura // *Math. Z.* — 1929. — Bd. 29. — S. 264–277.
- [96] Tonaka C. *Note on Dirichlet series (V). On the integral functions defined by Dirichlet series (I)* / C. Tonaka // *Tôhoku. Math. J.* — 1953. — V. 2, №1. — P. 67–78.
- [97] Valiron G. *Sur l'abscisse de convergence des series de Dirichlet* / G. Valiron // *Bull. Soc. Math. France.* — 1924. — V. 52. — P. 86–98.
- [98] Zelisko M.M. *On the lower Φ -type of the maximal term of Dirichlet series* / M.M. Zelisko, M.M. Sheremeta // *Mat. Stud.* — 2007. — V. 28, №2. — P. 147–150.