

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
Інститут прикладних проблем механіки і математики
імені Я. С. Підстригача

На правах рукопису

Бубняк Марія Миколаївна

УДК 517.524

**Множини збіжності періодичних гіллястих
ланцюгових дробів спеціального вигляду**

01.01.01 — математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Боднар Дмитро Ількович
доктор фізико-математичних
наук, професор

Львів — 2016

ЗМІСТ

	Стор.
ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ	10
1.1. Огляд літератури за темою дисертації	10
1.2. Перелік основних результатів	24
1.3. Висновки до розділу 1	38
РОЗДІЛ 2. ОЗНАЧЕННЯ ТА ЕЛЕМЕНТАРНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРІОДИЧНИХ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ	40
2.1. Означення періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду	40
2.2. Підхідні дроби та залишки. Еквівалентні перетворення	43
2.3. Формули різниці двох підхідних дробів	46
2.4. Висновки до розділу 2	53
РОЗДІЛ 3. ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ТА ОЦІНКИ ШВИДКОСТІ ПОТОЧКОВОЇ ЗБІЖНОСТІ ПЕРІОДИЧНИХ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ	54
3.1. Обмежені множини збіжності 1-періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду	54
3.2. Необмежені множини збіжності та оцінки швидкості збіжності 1-періодичних ГЛД	66
3.3. Кутові множини збіжності	79
3.4. Збіжність $(2,1,\dots,1)$ -періодичного ГЛД спеціального вигляду	87
3.5. Необхідна умова збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду з дійсними елементами	99

3.6. Висновки до розділу 3	101
--------------------------------------	-----

РОЗДІЛ 4. ОЗНАКИ РІВНОМІРНОЇ ЗБІЖНОСТІ ПЕРІОДИЧНИХ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ	102
---	-----

4.1. Рівномірна збіжність 1-періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду	102
--	-----

4.2. Багатовимірне узагальнення параболічної теореми для 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду .	112
---	-----

4.3. Багатовимірне узагальнення овальної теореми для періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду	126
---	-----

4.4. Висновки до розділу 4	134
--------------------------------------	-----

ВИСНОВКИ	137
----------	-----

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	138
----------------------------	-----

ВСТУП

Актуальність теми. Неперервні (ланцюгові) дроби – ефективний апарат побудови дробово-раціональних наближень аналітичних функцій. Засновником теорії таких дробів, як окремого розділу математики, вважається Л. Ейлер. Багато видатних математиків XVIII – XIX століть, зокрема Е. Галуа, К.Ф. Гаусс, Д.Х. Ламберт, Д. Бернуллі, Ж.Л. Лагранж, Т.Я. Стілтєс, О. Перрон, П.Л. Чебишов внесли вагомий вклад у розвиток цієї теорії. У XIX столітті сформувалися два наукові напрями: теоретико-числовий та аналітичний. Перший вивчає правильні неперервні дроби, їх застосування для наближення дійсних чисел, розв’язання діофантових рівнянь тощо. Другий досліджує числові та різні типи функціональних неперервних дробів з комплексними елементами, вивчає питання їх збіжності та стійкості, розвинення функцій у неперервні дроби та оцінки похибок наближень аналітичних функцій підхідними дробами та ін. Одним із найбільш загальних методів побудови розвинення аналітичної функції у неперервний дріб є побудова відповідного дробу до степеневому ряду, в який розвивається дана функція. Принцип відповідності пов’язує неперервні дроби з апроксимаціями Паде. М.А. Штерн, О. Штолц, Л. Зейдель, А. Прінгсгейм, Е. Ван Флек, І.В. Слешинський, Ю. Ворпіцький, Х.С. Уолл, В.Т. Скотт та В. Трон встановили перші ознаки збіжності неперервних дробів. Їх аналітична теорія викладена у монографіях Т.Я. Стілтєса, А.Н. Хованського, У. Джонса і В. Трона, Л. Лорентцен і Х. Воделанда.

Періодичні дроби – важливий підклас неперервних дробів. Їх узагальненням є гранично-періодичні неперервні дроби, в які розвиваються багато елементарних та спеціальних функцій. Для прискорення збіжності останніх використовують періодичні неперервні дроби. О. Штолц, Д. Бернуллі, Л. Ейлер, К. Кахль, Е. Галуа, А. Прінгсгейм, В. Лейтон, Т. Тіле, Р. Лейн, В.Т. Скотт досліджували періодичні неперервні дроби, Е. Ван Флек, Х. Уолл, У. Джонс,

О. Перрон, В. Трон, Х. Воделанд, Л. Лорентцен – гранично-періодичні дробі.

Перші багатовимірні узагальнення неперервних дробів розглядалися у теоретико-числовому напрямі. Серед них найбільш відомим є алгоритм Якобі-Перрона. Ж.Л. Лагранж довів, що будь-яка квадратична ірраціональність зображається правильним періодичним неперервним дробом. Багатовимірне узагальнення цього результату призвело до побудови різних конструкцій багатовимірних неперервних дробів, зокрема періодичних. Л.Бернштейн, В.Брун, Г.Жекерес, Г.Мінковський, Г.Ф. Вороной, Л.М. Мілне-Томсон, В.І. Арнольд, Р.А. Заторський займалися побудовою та дослідженням таких дробів.

В.Я. Скоробогатько, використовуючи інтерпретацію неперервних дробів у вигляді графів, визначив гіллясті ланцюгові дробі – аналоги неперервних дробів для функцій багатьох змінних. Основи аналітичної теорії таких дробів заклали в своїх роботах В.Я. Скоробогатько, П.І. Боднарчук, Д.І. Боднар, Х.Й. Кучмінська, М.О. Недашковський, Р.І. Дмитришин, О.С. Манзій, В.Р. Гладун, Н.П. Гоєнко та інші. Перша конструкція періодичних гіллястих ланцюгових дробів, яка представляла алгебраїчну ірраціональність третього порядку, наведена у монографії П.І. Боднарчука та В.Я. Скоробогатька.

Задача відповідності подвійного степеневого ряду та багатовимірного функціонального дробу спонукала до побудови та дослідження двовимірних неперервних дробів у роботах Х.Й. Кучмінської, М. О'Доногоє, Дж. Мерфі, В. Семашко, А. Коут, О.М. Сусь, Т.М. Антонової. При переході до N змінних ефективними виявилися гіллясті ланцюгові дробі з нерівнозначними змінними, які при фіксованих значеннях називають гіллястими ланцюговими дробами спеціального вигляду. Ці дробі вивчали Д.І. Боднар, Х.Й. Кучмінська, Т.М. Антонова, Р.І. Дмитришин, В. Семашко, О.Є. Баран. Однак, на відміну від неперервних дробів підхідні дробі відповідних гіллястих ланцюгових дробів не є апроксимантами Паде. Конструктивній побудові та дослідженню одно- та багатовимірних апроксимацій Паде присвячені роботи А.П. Голуба

та його учнів.

В аналітичній теорії гіллястих ланцюгових дробів періодичні дробви використовують для побудови мажорант і дослідження найкращих областей збіжності. Актуальною є задача визначення періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду, дослідження їх властивостей, встановлення ознак збіжності та оцінок похибок наближень підхідними дробами.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача у рамках держбюджетних тем: "Алгебро-геометричні методи дослідження інваріантних структур на многовидах та рівнянь релятивістської математичної і теоретичної фізики" (державний реєстраційний номер 011U004819), "Розвиток методів дослідження структур на многовидах, асоційованих з групами, алгебрами і графами, та розвиток геометричного аналізу стосовно теорії релятивістських полів і часток" (державний реєстраційний номер 0115U007253).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду (ГЛД), яке включає наступні задачі:

- визначення $\vec{p}$ -періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду, встановлення формул різниці між їх підхідними дробами;
- дослідження кругових, кутових, параболічних областей збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду;
- встановлення багатовимірного узагальнення овальної теореми для $\vec{p}$ -періодичних ГЛД спеціального вигляду;
- встановлення умов поточної, рівномірної збіжності та оцінок похибок апроксимації періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду в деяких обмежених областях.

Об'єктом дослідження є $\vec{p}$ -періодичні гіллясті ланцюгові дробви спеціального вигляду.

Предметом дослідження є властивості $\vec{p}$ -періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду, ознаки їх збіжності, оцінки наближення підхідними дробами.

Методи дослідження. Поставлені задачі були розв'язані з використанням методів математичного та комплексного аналізу, аналітичної теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі одержані результати є новими і полягають у наступному:

- вперше визначено $\vec{p}$ -періодичні гіллясті ланцюгові дробу спеціального вигляду; встановлено формули та оцінка різниці між їх підхідними дробами;
- для 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду досліджено різні області збіжності (параболічні, об'єднання параболічних областей, кутові, площини з розрізами, кругові тощо); доведено необхідну умову збіжності;
- для $\vec{p}$ -періодичні гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду доведено багатовимірні узагальнення овальної теореми для неперервних дробів, яке застосовано для розширення кругових областей збіжності;
- встановлено умови поточної та рівномірної збіжності, оцінки похибок апроксимацій для 1-періодичного, $(2,1,\dots,1)$ -періодичного та $\vec{p}$ -періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду при додаткових умовах.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації носять теоретичний характер і можуть бути використані при подальшому дослідженні в аналітичній теорії гіллястих ланцюгових дробів. Їх можна рекомендувати для використання при читанні лекцій та спецкурсів студентам математичних та інших факультетів вищих учбових закладів.

Особистий внесок здобувача. Наведені в дисертації результати отримані автором самостійно. В опублікованих спільно з проф. Боднаром Д.І.

роботах науковому керівнику належать постановки задач та аналіз одержаних результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались на: Міжнародній математичній конференції імені В. Я. Скоробогатка (19 – 23 вересня 2011 р., 25 – 28 серпня 2015 р., м. Дрогобич); Міжнародній науковій конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяченій 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (28 травня – 3 червня 2012 р., м. Кам'янець-Подільський); Міжнародній науковій конференції, присвяченій 120-річчю з дня народження Стефана Банаха (17 – 21 вересня 2012 р., м. Львів); Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки та математики" (21 – 25 травня 2013 р., м. Львів); Міжнародній науковій конференції "Боголюбівські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка (23 – 30 червня 2013 р., м. Севастополь); Міжнародній науковій конференції "Аналіз та суміжні питання" (23 – 28 вересня 2013 р., м. Львів); Всеукраїнській науковій конференції "Нелінійні проблеми аналізу" (19 – 21 вересня 2013 р., м. Івано-Франківськ); Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (24 лютого – 2 березня 2014 р., смт. Ворохта); Міжнародній конференції молодих математиків (3 – 6 червня 2015 р., м. Київ); Міжнародній науковій конференції з нагоди 75-річчя Віталія Павловича Моторного (8 – 11 жовтня 2015 р., м. Дніпропетровськ).

Результати дисертації доповідалися на науковому семінарі з аналітичної теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів (керівники: д. ф.-м.н., проф. Д. І. Боднар, д. ф.-м.н., пр. н. с. Х. Й. Кучмінська), науковому семінарі імені В. Я. Скоробогатка Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (керівники: чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Б. Й. Пташник, д.ф.-м.н., пр. н. с. В. О. Пелих), семінарі

з теорії аналітичних функцій у м. Івано-Франківську (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, керівник д.ф.-м.н., проф. А. В. Загороднюк).

Публікації. Результати досліджень, включені в дисертацію, опубліковано автором у 9 статтях: 6 з яких – у фахових вітчизняних математичних наукових журналах [22, 30, 31, 34, 36, 78], в тому числі 1 стаття перекладена і опублікована науковому фаховому виданні, що включене до міжнародної наукометричної бази даних "Scopus" [30], а також висвітлено в 11 тезах.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів та списку використаних джерел, який містить 125 найменувань. Повний обсяг дисертації – 151 стр., обсяг списку використаних джерел – 13 стр. Дисертацію проілюстровано 5 рисунками.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

1.1. Огляд літератури за темою дисертації

Неперервним (ланцюговим) дробом називають послідовність впорядкованих пар $\langle \langle \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \rangle, \{f_n\}_{n=0}^{\infty} \rangle$, де $a_1, a_2, \dots$ та $b_0, b_1, b_2, \dots$ – комплексні числа, причому всі $a_n \neq 0$, а $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовність в розширеній комплексній площині і

$$f_n = S_n(0), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

де

$$S_0(\omega) = s_0(\omega), \quad S_n(\omega) = S_{n-1}(s_n(\omega)), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

і

$$s_0(\omega) = b_0 + \omega, \quad s_n(\omega) = \frac{a_n}{b_n + \omega}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для запису неперервного дробу

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots}} \quad (1.2)$$

у закордонних виданнях використовують наступні скорочені позначення

$$b_0 + \mathop{\mathrm{K}}\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}; \quad b_0 + \frac{|a_1|}{|b_1|} + \frac{|a_2|}{|b_2|} + \dots$$

та інші. У вітчизняній літературі вживають позначення, запропоноване Ю. Слешинським

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n},$$

яке будемо надалі використовувати.

Числа $a_1, a_2, \dots$ та $b_1, b_2, \dots$ називають частинними чисельниками та знаменниками дробу (1.2) відповідно.

Скінченні неперервні дроби

$$f_0 = b_0, \quad f_n = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k}, \quad n \geq 1,$$

називають n -ми підхідними дробами, або n -ми наближеннями (n -апроксимантами) неперервного дроби (1.2).

Кожному неперервному дроби $b_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{n=1}^{\infty} (a_n/b_n)$ ставлять у відповідність послідовність комплексних чисел, які визначають з рекурентних співвідношень Валліса

$$\begin{aligned} A_n &= b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \\ B_n &= b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \tag{1.3}$$

з початковими умовами: $A_{-1} = 1$, $A_0 = b_0$, $B_{-1} = 0$, $B_0 = 1$. Тоді $f_n = A_n/B_n$, $n \geq 0$. Відповідно A_n та B_n називають n -им чисельником та знаменником n -го підхідного дроби f_n .

Розглянемо неперервний дріб

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{d_n}, \tag{1.4}$$

де $b_0, c_n, d_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$. Нехай g_n , $n \geq 0$, – його n -ті підхідні дроби. Неперервні дроби (1.2) і (1.4) називаються еквівалентними, якщо $f_n = g_n$, $n \geq 1$. Дроби (1.2) і (1.4) еквівалентні тоді і лише тоді, коли існує послідовність ненульових сталих $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ така, що $c_n = \rho_n \rho_{n-1} a_n$, $d_n = \rho_n b_n$, $n \geq 1$, і $\rho_0 = 1$.

Якщо $b_n \neq 0$, $n \geq 1$, то, використовуючи еквівалентні перетворення, дріб (1.2) можна записати у вигляді $b_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{n=1}^{\infty} (c_n/1)$, де $c_1 = \frac{a_1}{b_1}$, $c_n = \frac{a_n}{b_n b_{n-1}}$, $n \geq 2$. Дріб (1.2) еквівалентний неперервному дроби з частинними чисельниками рівними одиниці $b_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{n=1}^{\infty} (1/d_n)$, де $d_n = b_n \prod_{k=1}^n a_k^{(-1)^{n+k-1}}$, $n \geq 1$.

Парною частиною дроби (1.2) називають дріб $d_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{n=1}^{\infty} (c_n/d_n)$ з підхідними дробами g_n , $n \geq 1$, якщо справджуються рівності $g_k = f_{2k}$, $k \geq 0$.

Непарною частиною дроби (1.2) називають дріб (1.4), якщо $g_k = f_{2k-1}$, $k \geq 1$.

Неперевний дріб (1.2) збігається (або збігається у класичному розумінні згідно з Перроном [111, 125]), якщо існує скінченна границя послідовності його підхідних дробів $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ і $f \in \mathbb{C}$. Якщо існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ і $f \in \widehat{\mathbb{C}}$, то неперевний дріб (1.2) збігається у широкому розумінні [111] або у класичному розумінні [109, с. 6]. Надалі ми будемо дотримуватися означення, запропоноване Перроном. Крім вище наведених означень вводять також поняття збіжності неперевного дробу в загальному [109, с. 60].

Для доведення збіжності неперевного дробу застосовують різні методи, які ґрунтуються на

- інтерпритаціях фундаметнальних нерівностей [125, с. 40],
- властивостях дробово-лінійних відображень [92, 125],
- встановленні множин елементів та множин значень дробу [92, 109],
- теоремі Стілтєса-Віталі [109, с. 115].

У монографії [109, с. 70] подано наступні означення. Для заданої послідовності множин $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$, $V_n \subset \widehat{\mathbb{C}}$, $n \geq 0$, визначають послідовність множин $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ за допомогою співвідношень: $\Omega_n = \{(a_n, b_n) \in \mathbb{C}^2 : a_n/(b_n + V_n) \subseteq V_{n-1}\}$. Послідовність $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ називають послідовністю множин елементів дробу (1.2), яка відповідає послідовності множин значень $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$. Якщо ж умови $(a_n, b_n) \in \Omega_n$, $n \geq 1$, гарантують збіжність неперевного дробу, то Ω_n , $n \geq 1$ називають множинами збіжності. Якщо $\Omega_n = \Omega$, $n \geq 1$, то Ω називають простою множиною збіжності.

Наведемо основні класичні ознаки збіжності неперевних дробів.

Теорема 1.1. (Ворніцький) [125, с. 42]. *Нехай елементи неперевного дробу*

$$\left(1 + \widetilde{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1}\right)^{-1}, \quad (1.5)$$

задовольняють умову: $|a_n| \leq 1/4$, $n \geq 1$. Тоді

1) дріб (1.5) збігається;

2) множиною значення є круг $\mathcal{K} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 4/3| \leq 2/3\}$;

3) стала $1/4$ в умові та область $\mathcal{K}$ є найкращими, тобто стали $1/4$ неможливо збільшити, а область $\mathcal{K}$ зменшити.

Теорема 1.2. (Слешинський -Прінгсгейм) [109, с. 129]. Неперервний дріб (1.2) з комплексними елементами збігається, якщо

$$|b_n| \geq |a_n| + 1, \quad n \geq 1.$$

Для n -го підхідного дробу справджується нерівність: $|f_n - b_0| < 1, n \geq 1$.

Теорема 1.3. (Ван Флек) [92, с. 102]. Нехай елементи неперервного дробу

$$b_0 + \overset{\infty}{D} \frac{1}{b_n}, \quad (1.6)$$

задовольняють умови: $b_n \neq 0, |\arg b_n| < \pi/2 - \varepsilon, n \geq 0$ і $0 < \varepsilon < \pi/2$. Тоді

1) n -ий підхідний дріб неперервного дробу (1.6) задовольняє умови: $f_n \neq 0$ і $|\arg f_n| < \pi/2 - \varepsilon, n \geq 1$.

2) існують скінченні границі парних і непарних підхідних дробів (1.6).

3) для збіжності неперервного дробу (1.6) необхідно і досить, щоб розбігався ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$.

Теорема 1.4. [109, с. 151]. Нехай

$$\mathcal{V}_\alpha = \{\omega \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\omega e^{-i\alpha}) \geq -\frac{1}{2} \cos \alpha\} \bigcup \infty,$$

$$\mathcal{P}_\alpha = \{\omega : |\omega| - \operatorname{Re}(\omega e^{-2i\alpha}) \leq \frac{1}{2} \cos^2 \alpha\}, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

тоді для фіксованого $\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| < \pi/2$, множина $\mathcal{P}_\alpha$ є множиною елементів неперервного дробу

$$\overset{\infty}{D} (a_n/1), \quad (1.7)$$

яка відповідає множині значень $\mathcal{V}_\alpha$. Якщо елементи цього дробу належать

множині $\mathcal{P}_\alpha$ і $S = \infty$, де $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_2 a_4 \dots a_{2n}}{a_1 a_3 \dots a_{2n+1}} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_1 a_3 \dots a_{2n-1}}{a_4 a_6 \dots a_{2n}} \right|$, то

неперервний дріб збігається до скінченного значення.

У 1945 році Р. Лейн встановив теорему, яка доводить збіжність неперервного дробу в овальній області.

Теорема 1.5. [104, с. 41] Нехай $C \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} C > -1/2$ і $0 < R < |1 + C|$.

Тоді множина

$$\mathcal{E} = \{a \in \mathbb{C} : |a(1 + \overline{C}) - C(|1 + C|^2 - R^2)| + R|a| \leq R(|1 + C|^2 - R^2)\}$$

є множиною збіжності неперервного дробу (1.7)

$$\mathcal{V} = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega - C| < R\}$$

є множиною значень, яка відповідає $\mathcal{E}$. Більше того

$$|f - S_n(\omega)| \leq 2R \frac{|C| + R}{|1 + C| - R} M^{n-1},$$

де f – значення цього дробу, $S_n(\omega)$ – дробово-лінійного відображення, визначеного згідно з (1.1), при $b_n = 1$, $n \geq 1$, $M = \max \left\{ \frac{|\omega|}{|1 + \omega|}, \omega \in \overline{V} \right\}$.

Періодичні дроби є важливим підкласом неперервних дробів. Дріб (1.2) називають p -періодичним, якщо його елементи задовольняють умови: $a_{pn+k} = a_k$ та $b_{pn+k} = b_k$; $n \geq 0$; $1 \leq k \leq p$; $p \in \mathbb{N}$. 1-періодичний неперервний дріб вивчати ще Л. Ейлер, Д. Бернуллі. Е. Кахль, Е. Галуа, В. Лейтон, О. Перрон, Р. Лейн, Г. Уолл, У. Джоунс, В. Трон, Х. Воделанд, Л. Лорентцен, А. Беардон та інші досліджували p -періодичні неперервні дроби.

Розглянемо 1-періодичний неперервний дріб з комплексними елементами вигляду

$$1 + \frac{c}{|1|} + \frac{c}{|1|} + \dots \quad (1.8)$$

Теорема 1.6. [92, с. 48]. Дріб (1.8) збігається для всіх ненульових комплексних чисел $c \in \mathbb{C}$, за винятком $c = -(1/4) - a$, де a – довільне дійсне додатне число. Для $c = -(1/4) - a$, $a = |a|e^{i\gamma}$, $-\pi < \gamma < \pi$ значення неперервного дробу дорівнює $(1 + 2\sqrt{|a|}e^{i\gamma/2})/2$.

Найбільш загальний результат, який стосується збіжності та розбіжності періодичних неперервних дробів наведено нижче.

Теорема 1.7. [125, с. 37]. Нехай x та y – нерухомі точки дробово-лінійного відображення $S_p(w) = \frac{a_1}{|b_1|} + \dots + \frac{a_{p-1}}{|b_{p-1}|} + \frac{a_p}{|b_p + w|}$, де $a_1, a_2, \dots, a_p$ та $b_1, b_2, \dots, b_p$ – комплексні числа, a_k відмінні від нуля, $k = \overline{1, p}$. Нехай f_n – n -ий підхідний дріб p -періодичного неперервного дробу (1.2). Цей дріб збігається тоді і лише тоді, якщо x та y скінченні числа, які задовольняють одній з двох умов

$$x = y$$

або

$$|f_{p-1} - y| > |f_{p-1} - x|, \quad f_p \neq y, \quad k = \overline{0, p-1}.$$

Якщо p -періодичний неперервний дріб (1.2) збігається, то його значення рівне x .

При дослідженні збіжності періодичних неперервних дробів часто використовують властивості дробово-лінійного відображення

$$t(\omega) = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}, \quad \Delta = ad - bc \neq 0. \quad (1.9)$$

якщо $c = 0$ і $a \neq 0$, то це відображення має дві нерухомі точки

$$x, y = \frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c}, \quad \sqrt{1} = 1.$$

Нехай $k = (cy + d)/(cx + d)$, де x, y – нерухомі точки дробово-лінійного відображення (1.9). Якщо $|k| < 1$, то дробово-лінійне відображення $t(\omega)$ називають відображенням локсодромічного типу. Якщо $|k| = 1$ і $k \neq 1$, то $t(\omega)$ називають відображенням еліптичного типу, якщо $k = 1$, то дробово-лінійне відображення (1.9) – параболічного типу.

Більше того, x називають притягувальною (attracting) точкою, якщо $t^n(\omega) \rightarrow x$ для всіх $\omega \neq y$, y називають відштовхувальною (repelling) точкою.

У монографії Л. Лорентцен [104, с.102] наведена наступна теорема.

Теорема 1.8. Нехай $t(\omega)$ – дробово-лінійне відображення вигляду (1.9), яке має 2 нерухомі точки x, y .

1. Якщо $x = y$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} t^n(\omega) = x$ для всіх $\omega \in \widehat{\mathbb{C}}$.
2. Якщо $x \neq y$ і $|cx + d| = |cy + d|$ при $c \neq 0$ або $|a| = |d|$ при $c = 0$, то $t^n(\omega)$ розбігається (осцилює) для всіх $\omega \neq x, y$.
3. Якщо $x \neq y$ і $|cx + d| > |cy + d|$ при $c \neq 0$ або $|a| \neq |d|$ при $c = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} t^n(\omega) = x$ для всіх $\omega \neq y$. Якщо $c = 0$, тоді $x = \infty$, якщо $|d| < |a|$ і $y = \infty$ якщо $|d| > |a|$.

Для обчислення n -го підхідного дробу (1.8) встановлена формула [109]

$$f_n = \frac{x^{n+2} - y^{n+2}}{x^{n+1} - y^{n+1}}, \quad n \geq 0, \quad (1.10)$$

де

$$x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c}) - \quad (1.11)$$

притягувальна та

$$y = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4c}) - \quad (1.12)$$

відштовхувальна точки дробово-лінійного відображення $s(\omega) = 1 + c/\omega$.

Якщо $c = -1/4$, то $x = y = 1/2$ і значення n -го підхідного дробу знаходимо згідно з формулами (3.14)-(3.15) наведеними в [18]

$$f_n = \frac{n + 2}{2(n + 1)}, \quad n \geq 0. \quad (1.13)$$

Узагальненням p -періодичних неперервних дробів є гранично- p -періодичні неперервні дробби. Згідно з [109, с. 186] дріб вигляду $\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathcal{D}}}(a_k/b_k)$ називають гранично- p -періодичним неперервним дробом, якщо послідовності елементів є гранично p -періодичними, тобто виконуються умови

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{pn+m} &= \tilde{a}_m, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_{pn+m} &= \tilde{b}_m, \quad n \geq 0; \quad m = \overline{1, p}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Послідовністю зворотних дробів чи критичних залишків гранично-періодичного неперервного дробу $b_0 + \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k/b_k)$ називають послідовність скінченних дробів вигляду

$$h_n = \frac{B_n}{B_{n-1}} = b_n + \frac{a_n|}{|b_{n-1}|} + \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-2}|} + \dots + \frac{a_2|}{|b_1|}, \quad n \geq 1. \quad (1.15)$$

При дослідженні збіжності гранично- p -періодичного неперервного дробу розглядають відповідне йому дробово-лінійне відображення

$$S_p(\omega) = \frac{\tilde{a}_1|}{|\tilde{b}_1|} + \frac{\tilde{a}_2|}{|\tilde{b}_2|} + \dots + \frac{\tilde{a}_p|}{|\tilde{b}_p + \omega|}. \quad (1.16)$$

Позначимо $x^{(m)}, y^{(m)}, 1 \leq m \leq p$, притягувальні та відштовхувальні нерухомі точки дробово-лінійних відображень

$$\tilde{S}_p^{(m)}(\omega) = \frac{\tilde{a}_m|}{|\tilde{b}_m|} + \frac{\tilde{a}_{m+1}|}{|\tilde{b}_{m+1}|} + \dots + \frac{\tilde{a}_{m+p-1}|}{|\tilde{b}_{m+p-1} + \omega|} \quad 1 \leq m \leq p.$$

Теорема 1.9. [109, с.188] Нехай дріб $\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k/b_k)$ є гранично- p -періодичним неперервним дробом зі скінченними границями (1.14) його елементів, причому відображення (1.16) локсодромічного типу. Тоді

- 1) дріб збігається до скінченного значення f або нескінченного значення, якщо всі $y^{(m)} \neq 0, m = \overline{1, p}$;
- 2) для $m = \overline{1, p}$ справджуються співвідношення

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_{np+m} + \frac{a_{np+m}|}{|b_{np+m-1}|} + \frac{a_{np+m-1}|}{|b_{np+m-2}|} + \dots + \frac{a_1|}{|-t_0|} = \\ = \begin{cases} -x^{(m)}, & \text{якщо } t_0 = f, \\ -y^{(m)}, & \text{якщо } t_0 \neq f. \end{cases} \end{aligned}$$

Зауваження. Із теореми 1.9 для гранично-1-періодичного неперервного дробу $\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k/b_k)$, у якого $\tilde{a}$ і $\tilde{b}$ – скінченні границі, $\tilde{a} \neq 0$, і дробово-лінійного відображення $t(\omega) = \tilde{a}/(\tilde{b} + \omega)$ є локсодромічного типу, випливає, що виконується

співвідношення $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = -y$, де y – відштовхувальна точка дробово-лінійного відображення $t(\omega)$.

Теорема 1.10. [119, с. 47] Нехай для гранично-періодичного неперервного дробу $\overset{\infty}{D}(a_n/1)$, виконуються умови

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0, \quad |\arg(a + 1/4)| < \pi, \quad a \neq -1/4.$$

Тоді

- 1) існує така величина $d(a)$, що $d_n = \max_{m \geq n} |a_m - a| < d(a)$, $n \geq 1$;
- 2) $|h_n - (1 + x_1)| < K(a, p) \sum_{\nu=1}^n p^{n-\nu} d_\nu$ де $|x_1/(1 + x_1)| < p < 1$, $K(a, p)$ – деяка стала;
- 3) більше того, $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 1 + x_1$, $x_1 = (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2$, $\sqrt{1} = 1$.

В. Я. Скоробогатко у 1966 році запропонував нове узагальнення неперервних дробів на випадок функції багатьох змінних, яке отримало назву гіллястий ланцюговий дріб [58]. При цьому він використав інтерпретацію неперервного дробу у вигляді графа.

Нехай

$$\mathcal{L} = \{i(k) : i(k) = i_1 i_2 \dots i_k; \quad i_p = \overline{1, N}; \quad p = \overline{1, k}; \quad k = 1, 2, \dots\} -$$

множина мультиіндексів, N – фіксоване натуральне число. b_0 , $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$ — комплексні числа, $i(k) \in \mathcal{L}$. Гіллястим ланцюговим дробом (ГЛД) назвемо послідовність $\{F_n\}_{n=1}^\infty$, де $F_0 = b_0$ і

$$F_n = b_0 + \overset{n}{D} \sum_{i_k=1}^N \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} = b_0 + \sum_{i_1=1}^N \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)} + \sum_{i_2=1}^N \frac{a_{i(2)}}{b_{i(2)} + \dots + \sum_{i_n=1}^N \frac{a_{i(n)}}{b_{i(n)}}}} \quad n \geq 1.$$

Боднар Д. І., Недашковський М. О., Антонова Т. М., Дмитришин Р. І., Гладун В. Р., встановили багатовимірні аналоги ознак збіжності Зейделя, Ворпільського, Слешинського-Прінсгейма, Ван Флека, параболічних теорем та інших [1, 3, 18, 39, 49, 51, 54, 59, 82]. Різні класи функціональних ГЛД вивчалися

в роботах Боднара Д. І., Кучмінської Х. Й., Дмитришина Р. І., Гладуна В. Р., Гоєнко Н. П., Манзій О. С. [18, 41, 51, 52, 59].

Задача відповідності між подвійними степеневими рядами і функціональними ГЛД із два вітками розгалуження ($N = 2$) немає єдиного розв'язку без накладання додаткових умов на коефіцієнти цього дробу. Це сприяло появі в 1978 році двовимірних неперервних дробів (ДНД) у роботах Х. Й. Кучмінської, Дж. Мерфі та М. О'Доногое. Ці дроби мають наступний вигляд

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_{i,i}xy}{\Phi_i}, \quad \Phi_i = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j+i,j}x}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j}y}{1},$$

де $a_{i,j} \in \mathbb{C}$. Вони досліджувалися в роботах Кучмінської Х. Й., Сусь О. М., Антонової А. М., Коут А., Вердонк Б. [6, 8, 50, 51, 79, 80].

В 1980 році В. Семашко запропонував інше двовимірне узагальнення неперервного дробу

$$1 + F_{00} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{b_{i0}x}{1 + F_{i0}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{b_{0i}y}{1 + F_{0i}}; \quad F_{i0} = \mathop{\mathrm{D}}_{p=1}^{\infty} \frac{b_{p+i,p}xy}{1}; \quad F_{0i} = \mathop{\mathrm{D}}_{p=1}^{\infty} \frac{b_{p,p+i}xy}{1},$$

де $b_{i,j} \in \mathbb{C}$ [114–116].

N -вимірні ГЛД, відповідні N -кратним степеневим рядам, виявилися дуже громіздкими і складними для досліджень об'єктами. Це зумовило появу ГЛД з нерівнозначними змінними

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}z_{i_k}}{1} = b_0 + \sum_{i_1=1}^N \frac{a_{i(1)}z_{i_1}}{1 + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)}z_{i_2}}{1 + \dots}}, \quad (1.17)$$

де $b_0, a_{i(k)}, b_{i(k)} \in \mathbb{C}$; $i(k)$ – мультиіндекс, $i(k) \in \mathcal{I}$;

$$\mathcal{I} = \{i(k) : i(k) = i_1 i_2 \dots i_k; \quad i_p = \overline{1, i_{p-1}}; \quad p = \overline{1, k}; \quad k = 1, 2, \dots\};$$

$i_0 = N$, N – фіксоване натуральне число. Дріб (1.17) при фіксованих значеннях змінних отримав назву ГЛД спеціального вигляду

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}. \quad (1.18)$$

Для дробів (1.17)-(1.18) встановлено елементарні властивості, узагальнено ознаки збіжності. Побудовано інтерполяційні, відповідні та приєднані ГЛД з нерівнозначними змінними.

Важливим методом при дослідженні збіжності ГЛД (1.18) є використання областей значень та областей елементів.

У дисертації [16] Баран О. Є. навила наступні означення множин значень та елементів для ГЛД

$$a_0 / \left(b_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \right). \quad (1.19)$$

Послідовність $\{V_{i(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, $i(0) = 0$, непорожніх множин $V_{i(k)} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ називається послідовністю множин значень дробу (1.18), якщо

$$\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \in V_{i(k)}, \quad \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} V_{i(k+1)}} \subseteq V_{i(k)}, \quad k \geq 0, \quad i(k) \in \mathcal{I}, i(0) = 0. \quad (1.20)$$

Для заданої послідовності множин значень $\{V_{i(k)}\}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, $i(0) = 0$, де $V_{i(k)} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$, послідовність множин $\{\Omega_{i(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, які визначаються співвідношеннями

$$\Omega_{i(k)} := \left\{ (a, b) \in \mathbb{C}^2 : \frac{a}{b + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} V_{i(k+1)}} \subseteq V_{i(k)} \right\}, \quad (1.21)$$

де $k \geq 0$, $i(k) \in \mathcal{I}$, $i(0) = 0$, називається послідовністю множин елементів гіллястого ланцюгового дробу (1.19), яка відповідає $\{V_{i(k)}\}$. Якщо умова $(a_{i(k)}, b_{i(k)}) \in \Omega_{i(k)}$, $k \geq 0$, $i(k) \in \mathcal{I}$, $i(0) = 0$, гарантує збіжність цього дробу, то $\Omega_{i(k)}$ називають множинами його збіжності.

Баран О. Є. в [9] встановила формулу різниці двох підхідних дробів (1.18)

$$f_n - f_m = (-1)^n \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{i_{m-1}} \frac{\prod_{k=1}^m a_{i(k)}}{\prod_{k=1}^m \left(Q_{i(k)}^{(n-1)} Q_{i(k)}^{(m-1)} \right)}, \quad n > m > 0, \quad (1.22)$$

де $Q_{i(k)}^{(n)}$ – залишки ГЛД (1.18) і визначені на основі наступних співвідношень:

$$Q_s^{(s)} = b_{i(s)}, \quad Q_{i(k)}^{(s)} = b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{a_{i(k+1)}}{Q_{i(k+1)}^{(s)}}, \quad s = 1, 2, \dots; \quad k = s-1, s-2, \dots, 1;$$

$$Q_{i(k)}^{(s)} = 1, \text{ якщо } s = k+1.$$

Використовуючи цю формулу, було доведено багатовимірне узагальнення ознаки збіжності Ворпіцького для неперервних дробів.

Теорема 1.11. [9, с. 35] *Нехай $a_{i(k)}$ – комплексні функції, визначені в деякій області $G \subset \mathbb{C}^N$, $i(k) \in \mathcal{I}$, такі, що для кожного $x \in G$ і деякого дійсного t , $0 \leq t \leq 1/2$, виконуються умови*

$$|a_{i(k)}(x)| \leq \alpha_{i_{k-1}} = \frac{t(1-t)}{i_{k-1}}, \quad i(k) \in \mathcal{I}. \quad (1.23)$$

Тоді

1) ГЛД

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}(x)}{1}\right)^{-1} \quad (1.24)$$

є рівномірно збіжним в області G ;

2) справджуються оцінки швидкості збіжності

$$|f - f_m| \leq \frac{(1-2t)t^m}{(1-t)[(1-t)]^{m+1} - t^{m+1}}, \quad 0 \leq t < \frac{1}{2}$$

або

$$|f - f_m| \leq \frac{2}{m+1}, \quad t = \frac{1}{2};$$

де f – значення ГЛД (1.24), f_m – його m -підхідний дріб, $m = 1, 2, \dots$

3) найкращою областю значень для дробу (1.24) є круг

$$\left|z - \frac{1}{1-t^2}\right| \leq \frac{t}{1-t^2};$$

4) граничні сталі $\alpha_{i_{k-1}} = 1/(4i_{k-1})$ в нерівності (1.23) є найкращими, їх не можна одночасно збільшити, не порушуючи збіжності дробу.

Баран О.Є встановила також багатовимірні аналоги ознак збіжності Слешинського-Прінгстейма, параболічної теореми Трона, а також узагальнила теореми про спарені області Вишінські – Мак Лафліна, Лейтона – Уолла, Ланге та інших [10, 12–15].

Дмитришин Р.І. в своїх роботах досліджував питання відповідності між підхідними рядами і ГЛД з нерівнозначними змінними [48], алгоритм Бауера [49], функціональні багатовимірні g -дроби, j -дроби з нерівнозначними змінними [82, 83]. При доведенні параболічних теорем він застосував нерівність

$$\operatorname{Re} \frac{u + iv}{x + iy} \geq -\frac{\sqrt{u^2 + v^2} - u}{2x}, \quad (1.25)$$

де якщо $x \geq c > 0$, $\sqrt{u^2 + v^2} - u \leq 2p$, $0 < p < 1$. Ця нерівність узагальнює нерівність з леми 4.41 [92, с.100].

Нехай всі залишки дробу (1.18) відмінні від нуля, тобто $Q_{i(k)}^{(s)} \neq 0$, $k = \overline{1, s}$; $i(s) \in \mathcal{I}$. Для ГЛД (1.18) виконуються фундаментальні нерівності, якщо існують такі додатні сталі M і ρ_k , $k \geq 1$, що для довільних натуральних s , p , k , де $p > k$ справджуються нерівності [2, 18]

$$\left| \frac{a_{i_1}}{Q_{i_1}^{(s)}} \right| \leq M, \quad 1 \leq i_1 \leq i_0 \leq N, \quad (1.26)$$

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \left| \frac{a_{i(k+1)}}{Q_{i(k)}^{(p)} Q_{i(k+1)}^{(p)}} \right| \leq \rho_k, \quad i(k) \in \mathcal{I}. \quad (1.27)$$

Замість умови (1.27) розглядають також умови

$$\left| \frac{a_{i(k+1)}}{Q_{i(k)}^{(p)} Q_{i(k+1)}^{(p)}} \right| \leq \rho_k, \quad i(k) \in \mathcal{I}. \quad (1.28)$$

Метод фундаментальних нерівностей дає можливість встановити оцінку швидкості збіжності ГЛД (1.18).

Твердження 1 [2, с. 22]. Нехай для ГЛД (1.18) справджуються фундаментальні нерівності (1.26)-(1.27) і $\prod_{k=1}^{\infty} \rho_k = 0$. Тоді цей дріб збігається,

причому оцінка швидкості збіжності характеризується нерівністю

$$|F - F_n| \leq M \prod_{k=1}^n \rho_k.$$

Твердження 2 [2, с. 22]. Нехай для ГЛД (1.18) справджуються фундаментальні нерівності (1.26), (1.28) і

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \binom{N-1}{N+s} \prod_{k=1}^s \rho_k = 0.$$

Тоді цей дріб збігається, причому оцінка швидкості збіжності характеризується нерівністю

$$|F - F_n| \leq M \binom{N-1}{N+n} \prod_{k=1}^n \rho_k.$$

Антонова Т. М. довела ряд ознак збіжності для ГЛД спеціального вигляду. Зокрема, встановила критерій збіжності для дробу

$$\prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{-R}{1}, \quad R > 0. \quad (1.29)$$

Вона також встановила кутові, параболічні області збіжності для ГЛД (1.18) [1–5, 7].

Як і у випадку неперервного дробу, при дослідженні збіжності числових та функціональних ГЛД з нерівнозначними змінними часто використовують багатовимірний аналог теореми Стілтєса-Віталі.

Теорема 1.12. [18, с. 66] Нехай $F = \{f_m(z), z \in \mathcal{D}, m = 1, 2, \dots\}$ — послідовність голоморфних функцій в області $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^n$, які є рівномірно обмежені в середині $\mathcal{D}$. Якщо $f_m(z)$ збігається в кожній точці множини $\Delta \subset \mathcal{D}$, яка $2m$ -мірним оточує, m -мірного дійсного або m -мірного комплексного оточує точки $z_0 \in \mathcal{D}$, то $f_m(z)$ збігається рівномірно на будь-якому компактi K , $K \subset \mathcal{D}$, до голоморфної функції в $\mathcal{D}$.

1.2. Перелік основних результатів

У розділі 2 визначено періодичні гіллясті ланцюгові дроби спеціального вигляду, їх залишки та підхідні дроби, встановлено формули підхідних дробів.

Розглянемо гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду

$$\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \quad (1.30)$$

де $a_{i(k)} \in \mathbb{C}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ – множина мультиіндексів елементів,

$$\mathcal{I} = \{i(k) : i(k) = i_1 i_2 \dots i_k : 1 \leq i_p \leq i_{p-1}; p = \overline{1, k}; k \geq 1; i_0 = N\}, \quad (1.31)$$

де N – фіксоване натуральне число.

Неперервний дріб

$$1 + a_{i(k)} \left(1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{q=1}^{\infty} \frac{a_{i(k+q)}}{1}\right)^{-1},$$

де $i(k) \in \mathcal{I}$; $i_k = i_{k+q} = r$; $q = 1, 2, \dots$, назовемо $i(k)$ -ою віткою ГЛД (1.30).

Дріб (1.30) назовемо $\vec{p}$ -періодичним гіллястим ланцюговим дробом спеціального вигляду, де $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$, $p_j \in \mathbb{N}$; $j = \overline{1, N}$, якщо при кожному фіксованому i_m всі $i(m)$ -ті вітки є однаковими і p_{i_m} -періодичними неперервними дробами. Тоді елементи дроби (1.30) задовольняють умови

$$\begin{aligned} \underbrace{a_{r \dots r}}_q &= \underbrace{a_{r \dots r}}_s, \quad q \geq 1; \\ a_{i(m)} \underbrace{r \dots r}_q &= \underbrace{a_{r \dots r}}_s, \quad m \geq 1, i(m) \in \mathcal{I}, r < i_m, \end{aligned} \quad (1.32)$$

де $q = np_r + s$; $r = \overline{1, N}$; $1 \leq s \leq p_r$; $n \geq 0$.

Позначимо $\underbrace{a_{r \dots r}}_s = c_{r,s}$. Тоді $\vec{p}$ -періодичний ГЛД можна записати у вигляді

$$\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k,s}}{1}\right)^{-1}. \quad (1.33)$$

Причому індекс s залежать від поверху k та періоду p_{i_k} i_k -ої вітки, $1 \leq s \leq p_{i_k}$. Його значення одержуємо з наступних розкладів: $k = p_{i_k} n + s$, якщо $i_1 = i_2 =$

$\dots = i_k$, або $k - m = p_{i_k}n + s$, якщо $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_m > i_{m+1} = \dots = i_k$,
 $n \geq 0$.

$(1, 1, \dots, 1)$ -періодичний ГЛД будемо називати 1-періодичний ГЛД. Його можна записати у вигляді

$$\left(1 + \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1}, \quad (1.34)$$

де c_j – комплексні числа, $j = \overline{1, N}$, бо $c_{i_k, s} = c_{i_k, 1} = c_{i_k}$, $i_k = \overline{1, N}$.

Підхідним дробом n -го порядку ГЛД (1.33) називають вираз

$$F_n = \left(1 + \prod_{k=1}^n \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k, s}}{1}\right)^{-1}, \quad n \geq 1, \quad F_0 = 1.$$

Дріб (1.33) збігається (поточково збігається), якщо існує скінченна границя послідовності його підхідних дробів, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F$, $F \in \mathbb{C}$.

Дріб (1.33) збігається рівномірно на множинах $\Omega_{q, j}$; $q = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, p_q}$, якщо він збігається рівномірно до значення F , як функція від змінних $c_{q, j}$, $q = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, p_q}$, при умовах, що $c_{q, j} \in \Omega_{q, j}$, тобто, якщо існує послідовність додатних сталих $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка залежить від множин $\Omega_{q, j}$, і $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ та номер n_0 такий, що для всіх $n \geq n_0$ справджуються оцінки: $|F_n - F| < \varepsilon_n$.

Визначимо рекурентно для $n \geq 1$ залишки $\vec{p}$ -періодичного ГЛД (1.33)

$$\begin{aligned} R_n^{(1, s)} &= 1 + \frac{c_{1, s}}{R_{n-1}^{(1, s+1)}}, \quad 1 \leq s < p_1, \quad R_n^{(1, p_1)} = 1 + \frac{c_{1, p_1}}{R_{n-1}^{(1, 1)}}, \\ R_n^{(q, s)} &= 1 + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{c_{k, 1}}{R_{n-1}^{(k, 2)}} + \frac{c_{q, s}}{R_{n-1}^{(q, s+1)}}, \quad 1 \leq s < p_q, \\ R_n^{(q, p_q)} &= 1 + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{c_{k, 1}}{R_{n-1}^{(k, 2)}} + \frac{c_{q, p_q}}{R_{n-1}^{(q, 1)}}, \quad q = \overline{2, N}, \end{aligned}$$

при початкових умовах: $R_0^{(q, j)} = 1$, $q = \overline{1, N}$; $j \geq 1$.

Зауважимо, що $F_n = \left(R_n^{(N, 1)}\right)^{-1}$.

Для 1-періодичного ГЛД (1.34) залишки запишемо у вигляді

$$R_n^{(q, j)} = R_n^{(q, 1)} = R_n^{(q)}, \quad q = \overline{1, N}, \quad n \geq 0.$$

Визначимо множину індексів

$$\mathcal{I}_{n+1}^{(N)} = \left\{ k = (k_1, k_2, \dots, k_N) : k_l \geq 0; \quad l = \overline{1, N}; \quad \sum_{l=1}^N k_l = n+1 \right\}. \quad (1.35)$$

Якщо $k_i = r_i \cdot p_i + l_i$, $0 \leq l_i \leq p_i - 1$, $r_i \geq 0$, то

$$k_{i,s} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k_i = 0; \\ r_i + 1, & \text{якщо } 0 < l_i \leq p_i - 1 \text{ і } s \leq l_i; \\ r_i, & \text{якщо } l_i = 0 \text{ або } s > l_i. \end{cases} \quad (1.36)$$

Теорема 2.1. Якщо всі залишки ГЛД (1.33) відмінні від нуля, $R_n^{(q,j)} \neq 0$, $q = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, p_q}$, $n \geq 1$, то для різниці двох підхідних дробів справджується формула

$$F_{n+m} - F_n = \frac{(-1)^{n+1}}{R_{n+m}^{(N,1)} \cdot R_n^{(N,1)}} \sum_{k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(N)}} \prod_{i=1}^N \frac{c_{i,1}^{k_{i,1}} \dots c_{i,p_i}^{k_{i,p_i}}}{\prod_{j=1}^{k_i} \left(R_{m+l_i-j}^{(i,j+1)} \cdot R_{l_i-j}^{(i,j+1)} \right)},$$

де $n, m \geq 1$, $l_i = n - \sum_{t=i+1}^N k_t$, $R_{-1}^{(q,j)} = 1$, $q = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, p_q}$, множина мультиіндексів $\mathcal{I}_{n+1}^{(N)}$ визначається згідно з формулою (1.35), індекси $k_{i,s}$ – згідно з (1.36).

Теорема 2.3. Нехай $\vec{p}$ -періодичний дріб (1.33) збігається до значення F і

- 1) всі його залишки відмінні від нуля: $R_n^{(q,j)} \neq 0$, $q = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, p_q}$; $n \geq 1$;
- 2) існують границі $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^{(j,1)} = x_j$, $x_j \neq 0, \infty$; $j = \overline{1, N}$, де

$$h_n^{(j,1)} = 1 + \frac{c_{j,1}/(R_n^{(j-1,1)} R_{n-1}^{(j-1,1)})}{|1|} + \frac{c_{j,2}/(R_{n-1}^{(j-1,1)} R_{n-2}^{(j-1,1)})}{|1|} + \dots + \frac{c_{j,s}/(R_1^{(j-1,1)} R_0^{(j-1,1)})}{|1|},$$

де $n = r \cdot p_j + s$, $1 \leq s \leq p$. Тоді для будь-якого $n \geq 1$ справджується співвідношення

$$F_n - F = \frac{1}{R_n^{(N,1)}} \sum_{j=1}^N \frac{R_n^{(j-1,1)}}{X_j} \left(x_j - h_n^{(j,1)} \right), \quad (1.37)$$

де $X_j = \prod_{s=1}^j x_s$, $j = \overline{1, N}$.

У розділі 3 доведено багатовимірні узагальнення класичних ознак збіжності для 1- та $(2, 1, \dots, 1)$ -періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду.

У підрозділі 3.1 побудовано області поточної збіжності для 1-періодичного ГЛД та встановлено оцінки швидкості збіжності в них.

Побудуємо множини Ω_j , $j = \overline{1, N}$, для вибору елементів 1-періодичного гіллястого ланцюгового дроби (1.34). Покладемо

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + 1/4)| < \pi\}. \quad (1.38)$$

Виберемо елемент $c_1 \in \Omega_1$ і зафіксуємо його. Позначимо $\rho_1 = |y_1/x_1|$, де x_1, y_1 – нерухомі точки дробово-лінійного відображення $t(\omega) = 1 + c_1/\omega$. Зафіксуємо елемент c_2 з області

$$\Omega_2 = \Omega_2(c_1) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{r_1}{4} \right\}, \quad r_1 = |x_1|^2 \frac{1 - \rho_1^3}{1 + \rho_1}.$$

Нехай елементи $c_j \in \Omega_j(c_1, c_2, \dots, c_{j-1})$, $j = \overline{3, k}$ вибрані та зафіксовані. Тоді область $\Omega_{k+1}(c_1, c_2, \dots, c_k)$ визначимо наступним чином

$$\Omega_{k+1} = \Omega_{k+1}(c_1, c_2, \dots, c_k) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{4} \prod_{j=1}^k r_j \right\}, \quad k = \overline{1, N-1}, \quad (1.39)$$

$$r_j = \xi_j^2, \quad \xi_j = \frac{1 + d_j}{2}, \quad d_j = \sqrt{1 - 4|c_j| / \left(\prod_{s=1}^{j-1} r_s \right)}, \quad j = \overline{2, k}. \quad (1.40)$$

Теорема 3.1. *Нехай елементи 1-періодичного дроби (1.34) належать областям (1.38) і (1.39), тобто $c_j \in \Omega_j$, $j = \overline{1, N}$. Тоді*

- 1) *дріб (1.34) збігається;*
- 2) *справджується оцінка швидкості збіжності*

$$|F_n - F| \leq L \binom{N-1}{n+N-1} \rho^{n+1}, \quad n \geq 1,$$

$$\text{де } \rho = \max_{j=1, \overline{N}} \{\rho_j\}, \rho_1 = \left| \frac{1 - \sqrt{1 + 4c_1}}{1 + \sqrt{1 + 4c_1}} \right|, \rho_j = \frac{1}{(1 + d_j)^2}, j = \overline{2, N},$$

d_j визначаємо згідно з формулами (1.40), L – деяка додатна стала;

3) значення нескінченного дробу (1.34) рівне $F = \left(\prod_{j=1}^N x_j \right)^{-1}$, де

$$x_j = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4c_j / \prod_{p=1}^{j-1} x_p^2} \right), \quad j = \overline{2, N}, \quad \sqrt{1} = 1.$$

У цьому ж підрозділі доведено збіжність та встановлена оцінка швидкості збіжності ГЛД (1.34), якщо елемент c_1 належить Ω_1 і накладена умова на суму модулів всіх інших елементів цього дробу.

Теорема 3.2. *Нехай елементи c_j , $j = \overline{1, N}$, ГЛД (1.34) задовольняють умови: $c_1 \in \Omega_1$, де Ω_1 визначається згідно з формулою (1.38), $\sum_{j=2}^N |c_j| = C \leq \frac{\mu^2}{4}$, де $\mu = \frac{1}{2} (|1 + \sqrt{1 + 4c_1}| - |1 - \sqrt{1 + 4c_1}|)$.*

Тоді дріб (1.34) збігається і справджується оцінка швидкості збіжності:

$$1) |F - F_m| \leq L_1 \frac{\xi_1^{m+2} - \xi_2^{m+2}}{\xi_1 - \xi_2}, \quad m \geq 0, \text{ якщо } C < \mu^2/4 \text{ і } \xi_1 \neq \xi_2;$$

$$2) |F - F_m| \leq L_1(m+1)\xi^{m+1}, \quad m \geq 0, \text{ якщо } C < \mu^2/4 \text{ і } \xi_1 = \xi_2 = \xi;$$

$$3) |F - F_m| \leq L_2 \frac{1}{m+1}, \quad m \geq 0, \text{ якщо } C = \mu^2/4,$$

де $\xi_1 = \left| \frac{1 - \sqrt{1 + 4c_1}}{1 + \sqrt{1 + 4c_1}} \right|$, $\xi_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4C/\mu^2}}{1 + \sqrt{1 - 4C/\mu^2}}$, L_1, L_2 – деякі додатні сталі, F – значення дробу (1.34).

У підрозділі 3.2 доведено збіжність 1-періодичного ГЛД в деяких необмежених областях: параболічних та об'єднаннях параболічних областей.

Для розширення множин збіжності цього дробу використано наступну лему.

Лема 3.2. *Нехай l – довільне додатне число, таке що $0 < l < 1$, і $a \in G(l)$, де*

$$G(l) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + l)| < \pi\},$$

Тоді

- 1) якщо $\arg a = \pi$, то $a \in \mathcal{P}(\gamma)$ для будь-якого γ , $-\pi < \gamma < \pi$;
- 2) якщо $\arg a \neq \pi$, то $a \in \mathcal{P}(\gamma)$, якщо $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$, де

$$\gamma_1 = \begin{cases} \arccos\left(\frac{A+B}{C}\right), & \text{якщо } \cos \alpha \leq 1 - \frac{2l}{|a|}; \\ -\arccos\left(\frac{A+B}{C}\right), & \text{якщо } \cos \alpha > 1 - \frac{2l}{|a|}, \end{cases} \quad (1.41)$$

$$\gamma_2 = \arccos\left(\frac{A-B}{C}\right),$$

де

$$\mathcal{P}(\gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| - \operatorname{Re}(ze^{-i\gamma}) \leq 2l \cos^2 \frac{\gamma}{2} \right\}, \quad -\pi < \gamma < \pi,$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \arg a, & A &= (|a| - l)(l + |a| \cos \alpha), \\ B &= |a| |\sin \alpha| \sqrt{2|a|l(1 + \cos \alpha)}, & C &= l^2 + |a|^2 + 2|a|l \cos \alpha. \end{aligned}$$

Нехай

$$\mathcal{P}_k(\gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| - \operatorname{Re}(ze^{-i\gamma}) < 2l_k \cos^2 \frac{\gamma}{2} \right\}, \quad k = \overline{1, N}, -$$

деякі параболічні області, де $l_k = \frac{1}{2N} \left(1 - \frac{k}{2N}\right)$, $k = \overline{1, N}$, $-\pi < \gamma < \pi$. Позначимо

$$G_1 = \bigcup_{\gamma \in (-\pi, \pi)} \mathcal{P}_1(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + l_1)| < \pi\}. \quad (1.42)$$

Використовуючи лему 3.2, визначимо значення параметру γ , при яких $c_1 \in \mathcal{P}_1(\gamma)$. Одержимо, що $c_1 \in \mathcal{P}_1(\gamma)$, якщо $l = l_1$ і $\gamma \in [\gamma_1^1, \gamma_2^1]$, де $\gamma_1^1 = \gamma_1$ та $\gamma_2^1 = \gamma_2$, де γ_1, γ_2 визначаються згідно з формулами (1.41). Нехай c_1 – довільний, фіксований елемент з множини G_1 . Покладемо

$$G_2 = G_2(c_1) = \bigcup_{\gamma \in [\gamma_1^1, \gamma_2^1]} \mathcal{P}_2(\gamma).$$

Виберемо і зафіксуємо елемент $c_2 \in G_2$. Аналогічно побудуємо області G_k , $k \geq 3$ для вибору елементів 1-періодичного ГЛД (1.34). Нехай області

$G_1, G_2, \dots, G_{k-1}$ визначені, елементи $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$ вибрані з відповідних областей та зафіксовані. Покладемо

$$[\Gamma_1^{k-1}, \Gamma_2^{k-1}] = \bigcap_{j=1}^{k-1} [\gamma_1^j, \gamma_2^j] \quad (1.43)$$

і визначимо

$$G_k = G_k(c_1, c_2, \dots, c_{k-1}) = \bigcup_{\gamma \in [\Gamma_1^{k-1}, \Gamma_2^{k-1}]} \mathcal{P}_k(\gamma), \quad k = \overline{2, N}. \quad (1.44)$$

Виберемо довільний елемент $c_k \in G_k$. За побудовою маємо: $c_j \in \mathcal{P}_j(\gamma)$, $j = \overline{1, k}$, при умові, що $\gamma \in [\Gamma_1^k, \Gamma_2^k]$.

Теорема 3.4. *Нехай елементи c_k , $k = \overline{1, N}$, 1-періодичного дробу (1.34) належать областям G_k , тобто $c_k \in G_k$, $k = \overline{1, N}$, де G_k визначаються згідно з формулами (1.42)-(1.44). Тоді*

1) дріб (1.34) збігається;

2) множиною його значень є об'єднання кругів $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, де $\mathcal{B}_j$ – круг з центром у точці $\frac{\exp(-\Gamma_j^N i/2)}{\cos(\Gamma_j^N/2)}$ і радіусом $\frac{1}{\cos(\Gamma_j^N/2)}$, $j = \overline{1, 2}$; Γ_1^N, Γ_2^N визначаються згідно зі співвідношенням (1.43);

3) якщо $|c_j| < \nu_j$, $j = \overline{2, N}$, де $\nu_j = \left(\left(1 - \frac{j}{2N}\right) \min\{\cos(\Gamma_1^N/2); \cos(\Gamma_2^N/2)\} \right)^2$, то справджується оцінка швидкості збіжності ГЛД (1.34)

$$|F - F_n| \leq L \binom{N-1}{n+N-1} \xi^{n+1}, \quad n \geq 0,$$

де $\xi = \max_{j=1, N} \{\xi_j\}$; $\xi_1 = \left| \frac{1 - \sqrt{1 + 4c_1}}{1 + \sqrt{1 + 4c_1}} \right|$; $\xi_j = \frac{|c_j|}{\nu_j}$; $j = \overline{2, N}$; L – деяка стала, F – значення дробу (1.34).

При доведенні наступної теореми використано теорію зворотних дробів

Теорема 3.5. *Нехай елементи c_m дробу (1.34) належать відповідно областям G_m , $c_m \in G_m$, $m = \overline{1, N}$, де $G_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + 1/4)| < \pi\}$,*

$G_j = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + X_{j-1}^2/4)| < \pi\}$, $j = \overline{2, N}$, і X_j – притягувальні точки дробово-лінійних відображень $t_j(\omega) = X_{j-1} + c_j/\omega$, $j = \overline{1, N}$, $X_0 = 1$.

Тоді

- 1) залишки ГЛД (1.34) збігаються, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(m)} = X_m$ і $X_m \neq 0$, $m = \overline{1, N}$;
- 2) дріб (1.34) збігається і його значення рівне $F = (X_N)^{-1}$;
- 3) якщо $R_n^{(j)} \neq 0$, $j = \overline{2, N}$, $n \geq 0$, то $X_j = \prod_{k=1}^j x_k$, де

$$x_k = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4c_k/X_{k-1}^2} \right), \quad k = \overline{1, N}, \quad X_0 = 1.$$

У підрозділі 3.3, використовуючи оцінки для дійсних та уявних частин $\frac{c_m}{R_n^{(m)}}$, $m = \overline{1, N}$, $n \geq 0$, доведено збіжність та встановлено оцінку швидкості збіжності дробу (1.34).

Теорема 3.6. Нехай елементи c_j , $j = \overline{1, N}$, 1-періодичного ГЛД (1.34), $N > 1$, задовольняють умови

$$0 \leq \arg c_1 \leq \arg c_2 \leq \dots \leq \arg c_N \leq \pi/2$$

або

$$-\pi/2 \leq \arg c_N \leq \arg c_{N-1} \leq \dots \leq \arg c_1 \leq 0.$$

Тоді дріб (1.34) збігається і справджується оцінка швидкості збіжності

$$|F_{n+1} - F_n| \leq C \binom{N-1}{N+n-1} \xi^n, \quad n \geq 1,$$

$$\text{де } \xi = \frac{C}{\sqrt{1+C^2}}, \quad C = \max_{j=\overline{1, N}} \{|c_j|\}.$$

У підрозділі 3.4 доведено лему 3.4, у якій встановлено збіжність 2-періодичного неперервного дробу

$$1 + \frac{c_{1,1}}{|1|} + \frac{c_{1,2}}{|1|} + \frac{c_{1,1}}{|1|} + \frac{c_{1,2}}{|1|} + \dots \quad (1.45)$$

та оцінка швидкості збіжності цього дробу при додаткових умовах.

Використовуючи цю лему, доведено збіжність $(2, 1, \dots, 1)$ -періодичного ГЛД та встановлено оцінку швидкості збіжності, якщо елементи належать відповідним круговим областям.

Теорема 3.7. *Нехай елементи $(2, 1, \dots, 1)$ -періодичного ГЛД*

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k, s}}{1} \quad (1.46)$$

задовольняють умови: $\lambda := 1 + c_{1,1} + c_{1,2}$, $\lambda \neq 0$, i

$$-c_{1,1}c_{1,2}/\lambda^2 \in \Omega_1, \quad c_{j,1} \in \Omega_j, \quad j = \overline{2, N},$$

*де $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + 1/4)| < \pi\}$, $\Omega_j = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + X_{j-1}^2/4)| < \pi\}$, $j = \overline{2, N}$; X_j – притягувальні точки дробово-лінійних відображень $t_j(\omega) = X_{j-1} + c_{j,1}/\omega$, $j = \overline{2, N}$; $X_1 = \frac{1}{2}(\lambda - 2c_{1,2} + \lambda S)$, $S = \sqrt{1 - 4c_{1,1}c_{1,2}/\lambda^2}$, $\sqrt{1} = 1$.
Тоді*

1) дріб (1.46) збігається до значення F , причому $F = X_N$;

2) справджується оцінка швидкості збіжності

$$|F - F_n| \leq L \binom{N-1}{N+n-1} \frac{(\sqrt{\rho_1})^{n+1} - \rho^{n+1}}{\rho_1/\rho - \sqrt{\rho_1}}, \quad n \geq 3,$$

якщо ще виконуються додаткові умови:

а) існують додатні сталі γ_j , $j = \overline{1, 2}$, такі, що для будь-якого $k \geq 0$ справджуються нерівності: $|R_{2k+1}^{(1,j)}| \geq \gamma_j$, $j = \overline{1, 2}$;

б) $A := \inf_{k \geq 1} \left| \frac{-c_{1,1} + \lambda g_k}{-c_{1,1} + \lambda g_{k-1}} \right| > 0$ і $B := \inf_{k \geq 1} \left| \frac{-c_{1,2} + \lambda g_{k-1}}{-c_{1,1} + \lambda g_{k-1}} \right| > 0$, де g_k – k -ий підхідний дріб 1-періодичного неперервного дробу з елементом $-c_{1,1}c_{1,2}/\lambda^2$, $k \geq 0$;

в) елементи дробу (1.46) задовольняють нерівності

$$|c_{j,1}| < \frac{1}{4} \prod_{k=1}^{j-1} r_k, \quad j = \overline{2, N},$$

$$\text{де } r_1 = \frac{1}{2}|\lambda|(|1 + S| - |1 - S|) \min\{A, B\}, \quad r_k = (1 + d_k)^2/4, \\ d_k = \sqrt{1 - 4|c_{k,1}|/\prod_{m=1}^{k-1} r_m}, \quad k = \overline{2, N};$$

$$\text{де } \rho_1 = \left| \frac{1-S}{1+S} \right|, \rho = \max_{k=2, \overline{N}} \left\{ \frac{1}{(1+d_k)^2} \right\}, L - \text{деяка стала.}$$

У підрозділі 3.4 доведено необхідну умову збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду з дійсними елементами.

Теорема 3.8. *Якщо 1-періодичний ГЛД (1.34) з дійсними елементами збігається, тоді його елементи задовольняють умови: $c_q \geq -X_{q-1}^2/4$, де $X_q = \frac{1}{2}(X_{q-1} + \sqrt{X_{q-1}^2 + 4c_q})$, $X_0 = 1$, $q = \overline{1, N}$.*

Із теореми 3.5 випливає, що при виконанні умов: $c_q > -X_{q-1}^2/4$, $q = \overline{1, N}$, одержуємо збіжність 1-періодичного ГЛД (1.34).

У розділі 4 встановлено умови рівномірної збіжності та оцінки швидкості збіжності періодичних ГЛД.

У підрозділі 4.1 досліджено область рівномірної збіжності 1-періодичного неперервного дробу, використовуючи яку доведено рівномірну збіжність 1-періодичного ГЛД (1.34) у деяких областях.

Лема 4.1. *Нехай елемент c 1-періодичного неперервного дробу*

$$1 + \frac{c}{|1|} + \frac{c}{|1|} + \dots \quad (1.47)$$

належить області

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg \left(z + \frac{1}{4} \right) \right| \leq \pi - \theta, \delta \leq \left| z + \frac{1}{4} \right| \leq \Delta \right\} \quad (1.48)$$

при деяких значеннях θ , δ і Δ ; $0 < \theta < \pi$, $0 < \delta < \Delta$.

Тоді дріб (1.47) збігається до значення x , $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c})$, і справджується оцінка швидкості збіжності

$$|f_n - x| \leq L\rho^{n+1}, \quad n \geq 0,$$

де f_n – n -ий підхідний дріб (1.47), $L = \frac{2\sqrt{\Delta}}{1-\rho}$ і

$$\rho = \sqrt{\frac{1 - 4\sqrt{\Delta} \sin(\theta/2) + 4d}{1 + 4\sqrt{\Delta} \sin(\theta/2) + 4d}}, \quad (1.49)$$

де $d = \delta$, якщо $\delta\Delta \leq 1/16$ або $d = \Delta$, якщо $\delta\Delta > 1/16$.

Теорема 4.1. Нехай елементи c_j , $j = \overline{1, N}$, 1-періодичного ГЛД (1.34) належать областям $\mathcal{D}_j$, тобто $c_j \in \mathcal{D}_j$, $j = \overline{1, N}$, де область $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$, яка визначається згідно з формулою (1.48) при деяких значеннях δ , Δ , $0 < \theta < \pi$, $0 < \delta < \Delta$,

$$\mathcal{D}_j = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq C \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{1 + \sqrt{\varepsilon}}{2} \right)^{2(j-1)} \right\}, \quad j = \overline{2, N},$$

причому

$$C = \left(1/4 + \sqrt{\delta} \sin(\theta/2) + \delta \right) \frac{1 - \rho_1^3}{1 + \rho_1}, \quad (1.50)$$

де значення $\rho_1 = \rho$, задане формулою (1.49), $0 < \varepsilon < 1$. Тоді

1) дріб (1.34) рівномірно збігається на будь-якому компактї області

$$\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \dots \times \mathcal{D}_N;$$

2) справджується оцінка швидкості збіжності

$$|F - F_n| \leq L \binom{N-1}{n+N-1} \rho^{n+1}, \quad n \geq 1,$$

де $\rho = \max\{\rho_1, (1 - \sqrt{\varepsilon})/(1 + \sqrt{\varepsilon})\}$, F – значення цього дробу, L – деяка стала.

У підрозділі 4.2 встановлено багатовимірний аналог теореми Ворпіцького.

Теорема 4.2. Нехай частинними чисельниками $\vec{p}$ -періодичного ГЛД (1.33) є комплексні числа, які задовольняють умови: існує додатна стала C , $0 < C \leq 1/4$, така що

$$|c_{1,j}| \leq C, \quad j = \overline{2, p_1}; \quad \sum_{s=1}^{q-1} |c_{s,1}| + |c_{q,j}| \leq C, \quad q = \overline{2, N}, \quad j = \overline{1, p_q}.$$

Тоді справджується оцінка швидкості збіжності ГЛД (1.33)

$$|F - F_m| \leq \begin{cases} L \cdot \xi^{m+1}, & \text{якщо } 0 < C < 1/4; \\ \frac{2}{m+1}, & \text{якщо } C = 1/4; \end{cases} \quad m \geq 1,$$

де F_m – m -й підхідний дріб ГЛД (1.33), F – значення цього дроби, $\xi = \frac{1 - \sqrt{1 - 4C}}{1 + \sqrt{1 - 4C}}$, L – деяка додатна стала.

У підрозділі 4.2 доведено рівномірну збіжність дроби (1.34) в параболічних областях

$$\mathcal{P}_j(\gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| - \operatorname{Re}(ze^{-2i\gamma}) < 2v_j(1 - \sum_{s=1}^j v_s) \cos^2 \gamma \right\}, \quad (1.51)$$

де $-\pi/2 < \gamma < \pi/2$ і вектор вагових коефіцієнтів $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)$, $v_j > 0$, $j = \overline{1, N}$ і $\sum_{j=1}^N v_j < 1$.

Теорема 4.3. *Нехай елементи c_j , $j = \overline{1, N}$ 1-періодичного ГЛД (1.34) задовольняють умову*

$$(c_1, c_2, \dots, c_N) \in G = G_1 \times G_2,$$

де

$$G_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi - \varepsilon\},$$

$$G_2 = \left\{ (z_2, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^{N-1} : \bigcup_{\gamma \in I_\varepsilon} \left\{ \sum_{s=2}^N (|z_s| - \operatorname{Re}(z_s e^{-2i\gamma})) < l \sin^2(\varepsilon/2) \right\} \right\},$$

де $I_\varepsilon = [-\frac{\pi-\varepsilon}{2}, \frac{\pi-\varepsilon}{2}]$, l та ε – певні параметри такі, що $0 < \varepsilon < \pi/2$, $0 < l \leq 1/4$. Тоді

1) 1-періодичний ГЛД (1.34) рівномірно збігається на будь-якому компактній множині G ;

2) областю значень цього дроби є множина

$$\bigcup_{\gamma \in I_\varepsilon} \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{2e^{-i\gamma}}{\cos \gamma} \right| \leq \frac{2}{\cos \gamma} \right\}; \quad (1.52)$$

3) більше того, якщо

$$c_1 \in G_1 \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\},$$

$$(c_2, c_3, \dots, c_N) \in G_2 \cap \left\{ (z_2, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^{N-1} : \sum_{j=2}^N |z_j| \leq C \right\},$$

де R, C – деякі додатні сталі, $R > \frac{1}{4} \cos \varepsilon$, $C \leq \frac{1}{16}(1 + \sqrt{1 - 4l})^2 \sin^2(\varepsilon/2)$, то

а) справджується оцінка швидкості рівномірної збіжності цього дробу

$$|F - F_m| < L_1 \cdot \begin{cases} \frac{\rho_1^{m+2} - \rho_2^{m+2}}{\rho_1 - \rho_2}, & \text{якщо } \rho_1 \neq \rho_2, \\ (m+1)\rho^{m+1}, & \text{якщо } \rho_1 = \rho_2 = \rho, \end{cases}$$

при додаткових умовах: $l < 1/4$ і $C < \frac{1}{16}(1 + \sqrt{1 - 4l})^2 \sin^2(\varepsilon/2)$; де

$$\rho_1 = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - 4\sqrt{\delta} \sin(\theta/2) + 4\delta}{1 + 4\sqrt{\delta} \sin(\theta/2) + 4\delta}}, & \text{якщо } \sin \varepsilon \leq \frac{1}{1 + 4R}; \\ \sqrt{\frac{1 - 4\sqrt{\Delta} \sin(\theta/2) + 4\Delta}{1 + 4\sqrt{\Delta} \sin(\theta/2) + 4\Delta}}, & \text{якщо } \sin \varepsilon > \frac{1}{1 + 4R}, \end{cases}$$

$$\rho_2 = \frac{16C}{(1 + \sqrt{1 - 4l})^2 \sin^2(\varepsilon/2)}, \quad \theta = \arcsin \frac{R \sin \varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{16} + R^2 - \frac{1}{2}R \cos \varepsilon}}, \quad \delta = \frac{1}{4} \sin \varepsilon, \quad \Delta = \frac{1}{4} + R, \quad L_1 - \text{деяка стала.}$$

б) або оцінка швидкості збіжності цього дробу має вигляд

$$|F - F_m| < \begin{cases} L_1 \varrho^{m+1} \frac{(m+1)(m+2) + 1}{2(m+1)} & \text{якщо } C < \frac{\sin^2(\varepsilon/2)}{16}, \\ L_2 \frac{1}{m+1} & \text{якщо } C = \frac{\sin^2(\varepsilon/2)}{16}, \end{cases}$$

$$\text{якщо } l = 1/4; \text{ де } \varrho = \max \left\{ \rho_1; \frac{\sin^2(\varepsilon/2)}{16} \right\}, \quad L_2 - \text{деяка стала.}$$

Теорема 4.4. Нехай елементи s_j дробу (1.34) належать параболічним областям: $\mathcal{P}_j(\gamma)$, $j = \overline{1, N}$, які визначаються згідно з формулами (1.51). Тоді

- 1) 1-періодичний ГЛД (1.34) рівномірно збігається на будь-якому компактній області $\mathcal{P}$, де $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1(\gamma) \times \mathcal{P}_2(\gamma) \times \dots \times \mathcal{P}_N(\gamma)$;

2) областю значень цього дробу є круг

$$\mathcal{K} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{e^{-i\gamma}}{2(1 - \sum_{s=1}^N v_s) \cos \gamma} \right| < \frac{1}{2(1 - \sum_{s=1}^N v_s) \cos \gamma} \right\};$$

3) якщо $|c_j| < (1 - \sum_{s=1}^j v_s)^2 \cos^2 \gamma$, $j = \overline{2, N}$, то справджується оцінка швидкості збіжності дробу (1.34)

$$|F_{n+m} - F_n| \leq L \binom{N-1}{n+N-1} \xi^{n+1},$$

де $\xi = \max_{j=\overline{1, N}} \{\xi_j\}$, $\xi_1 = \left| \frac{1 - \sqrt{1 + 4c_1}}{1 + \sqrt{1 + 4c_1}} \right|$, $\xi_j = \frac{|c_j|}{(1 - \sum_{s=1}^j v_s)^2 \cos^2 \gamma}$, L – деяка додатна стала.

У підрозділі 4.3 доведено рівномірну збіжність $\vec{p}$ -періодичного ГЛД в овальних областях

$$\mathcal{O}_q = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - d_q| + |z| \frac{\rho_q^*}{|1 + \Gamma_q^*|} < \frac{\rho_q}{|\Gamma_q|} |d_q| \right\}, q = \overline{1, N}, \quad (1.53)$$

де $d_q = \Gamma_q(1 + \Gamma_q^*) \left(1 - \frac{\rho_q^{*2}}{|1 + \Gamma_q^*|^2} \right)$, $\Gamma_q^* = \sum_{j=1}^q \Gamma_j$, $\rho_q^* = \sum_{j=1}^q \rho_j$, $\rho_q^* < |1 + \Gamma_q^*|$, $q = \overline{1, N}$. Нехай існують скінченні границі залишків $\vec{p}$ -періодичного ГЛД (1.33), тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(q,1)} = Z^{(q)}$, $q = \overline{1, N}$. Розглянемо дробово-лінійні відображення: $s^{(q,j)}(\omega) = Z^{(q-1)} + c_{q,j}/\omega$ і $t^{(q,j)}(\omega) = c_{q,j}/(Z^{(q-1)} + \omega)$, $j = \overline{1, p_q}$; $Z^{(0)} = 1$ та їх композицію

$$S^{(q)}(\omega) = s^{(q,1)} \circ s^{(q,2)} \circ \dots \circ s^{(q,p_q)}(\omega),$$

$$T^{(q)}(\omega) = t^{(q,1)} \circ t^{(q,2)} \circ \dots \circ t^{(q,p_q)}(\omega), \quad q = \overline{1, N}.$$

Позначимо $X^{(1)}$ притягувальну нерухому точку дробово-лінійного відображення $S^{(1)}(\omega)$, $Y^{(q)}$, $q = \overline{2, N}$ – відштовхувальні нерухомі точки відображень $T^{(q)}(\omega)$.

Теорема 4.5. Нехай елементи $c_{q,j}$ $\vec{p}$ -періодичного ГЛД (1.33) належать овальним областям (1.53), тобто $c_{q,j} \in \overline{\mathcal{O}}_q$, $q = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, p_q}$. Тоді

- 1) послідовності залишків $\{R_n^{(q,1)}\}_{n=1}^\infty$, $q = \overline{1, N}$ цього дробу збігаються, зокрема, $\vec{p}$ -періодичний ГЛД (1.33) збігається;
- 2) якщо дробово-лінійні відображення $T^{(q)}(\omega)$, $q = \overline{2, N}$, – локсодромічного типу, і $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(q,1)} = Z^{(q)}$, $q = \overline{1, N}$, то

$$Z^{(q)} = \begin{cases} X^{(1)}, & \text{якщо } q = 1; \\ -Y^{(q)}, & \text{якщо } 2 \leq q \leq N; \end{cases}$$

$$\text{і } \lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F, \text{ де } F = (Z^{(N)})^{-1}.$$

- 3) n -ні підхідні дроби ГЛД (1.33) належать кругу

$$\mathcal{K} = \overline{\mathcal{B}} \left(\frac{1 + \overline{\Gamma}_N^*}{|1 + \Gamma_N^*|^2 - \rho_N^{*2}}, \frac{\rho_N^*}{|1 + \Gamma_N^*|^2 - \rho_N^{*2}} \right).$$

- 4) якщо крім цього виконуються умови: $\rho_q < (|1 + \Gamma_q^*| - |\Gamma_q| - \rho_{q-1}^*)/2$, $\rho_0^* = 0$, $q = \overline{1, N}$, то дріб (1.33) збігається і справджується оцінка швидкості збіжності

$$|F - F_n| \leq L \binom{N-1}{n+N-1} \zeta^{n+1}, \quad n \geq 1, \quad (1.54)$$

$$\text{де } \zeta = \max_{q=\overline{1, N}} \{\zeta_q\}, \quad \zeta_q = \frac{\rho_q + |\Gamma_q|}{|1 + \Gamma_q^*| - \rho_q^*}, \quad L - \text{деяка стала.}$$

Використовуючи овальну теорему, побудовано кругові області збіжності 1-періодичного ГЛД, що містять круги збіжності, які отримані з формулювання багатовимірного узагальнення теореми Ворпіцького для 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду.

1.3. Висновки до розділу 1

У розділі 1 наведено огляд літератури за темою дисертації. Проаналізовано роботи, що стосуються аналітичної теорії неперервних дробів та різних типів

гіллястих ланцюгових дробів. Особливий акцент зроблено на формулюванні тих результатів, які узагальнюються або використовуються у дисертаційному дослідженні.

Сформульовані основні поняття, що стосуються $\overrightarrow{p}$ -періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду, та зроблено перелік основних результатів дисертаційної роботи.

РОЗДІЛ 2

ОЗНАЧЕННЯ ТА ЕЛЕМЕНТАРНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРІОДИЧНИХ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

2.1. Означення періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду

Розглянемо гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду

$$\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \quad (2.1)$$

де $a_{i(k)} \in \mathbb{C}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ – множина мультиіндексів елементів,

$$\mathcal{I} = \{i(k) : i(k) = i_1 i_2 \dots i_k : 1 \leq i_p \leq i_{p-1}; p = \overline{1, k}; k \geq 1; i_0 = N\}, \quad (2.2)$$

де N – фіксоване натуральне число.

Неперервний дріб

$$1 + a_{i(k)} \left(1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{q=1}^{\infty} \frac{a_{i(k+q)}}{1}\right)^{-1},$$

де $i(k) \in \mathcal{I}$; $i_k = i_{k+q} = r$; $q = 1, 2, \dots$, назовемо $i(k)$ -ою віткою ГЛД (2.1).

Дріб (2.1) назовемо $\vec{p}$ -періодичним гіллястим ланцюговим дробом спеціального вигляду, де $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$, $p_j \in \mathbb{N}$; $j = \overline{1, N}$, якщо при кожному фіксованому i_m всі $i(m)$ -ті вітки є однаковими і p_{i_m} -періодичними неперервними дробами. Тоді елементи дробу (2.1) задовольняють умови:

$$\begin{aligned} \underbrace{a_r \dots r}_q &= \underbrace{a_r \dots r}_s, \quad q \geq 1; \\ a_{i(m)} \underbrace{r \dots r}_q &= \underbrace{a_r \dots r}_s, \quad m \geq 1, i(m) \in \mathcal{I}, r < i_m, \end{aligned} \quad (2.3)$$

де $q = np_r + s$; $r = \overline{1, N}$; $1 \leq s \leq p_r$; $n \geq 0$.

Позначимо $a_{\underbrace{r \dots r}_s} = c_{r,s}$. Тоді $\vec{p}$ -періодичний ГЛД можна записати у вигляді

$$\left(1 + \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k,s}}{1}\right)^{-1}. \quad (2.4)$$

Причому індекс s залежать від поверху k та періоду p_{i_k} i_k -ої вітки, $1 \leq s \leq p_{i_k}$. Його значення одержуємо з наступних розкладів:

$$k = p_{i_k} n + s, \text{ якщо } i_1 = i_2 = \dots = i_k,$$

$$\text{або } k - m = p_{i_k} n + s, \text{ якщо } i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_m > i_{m+1} = \dots = i_k, n \geq 0.$$

Кожну $i(m)r$ -у вітку $\vec{p}$ -періодичного ГЛД будемо називати r -ою віткою періодичного ГЛД. Запишемо r -ту вітку ГЛД (2.4) у вигляді

$$1 + \prod_{j=1}^{\infty} \frac{c_{r,j}}{1}, \quad (2.5)$$

де $c_{r,j} = c_{r,s}$, $r = \overline{1, N}$; $j = m \cdot p_r + s$; $1 \leq s \leq p_r$, $m \geq 0$.

Якщо всі $p_j = 1$, $j = \overline{1, N}$, то такий $\vec{p}$ -періодичний дріб назовемо 1-періодичним ГЛД спеціального вигляду. Враховуючи, що для будь-якого k , маємо: $k = 1 \cdot (k - 1) + 1$, то $n = k - 1$, $s = 1$. Отже, в 1-періодичному дробі $c_{i_k,s} = c_{i_k,1}$. Надалі 1-періодичний ГЛД будемо записувати у вигляді

$$\left(1 + \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1} = \left(1 + \sum_{i_1=1}^N \frac{c_{i_1}}{1 + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{c_{i_2}}{1 + \dots}}\right)^{-1}, \quad (2.6)$$

де $c_j = c_{j,1}$ – комплексні числа, $j = \overline{1, N}$, $i_0 = N$ – фіксоване натуральне число.

Зауваження. Поряд з дробом (2.4) будемо розглядати обернений до нього дріб

$$1 + \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k,s}}{1}, \quad (2.7)$$

де $c_{i_k,s}$ – комплексні числа $s = \overline{1, p_{i_k}}$, $k \geq 1$.

Приклад 2.1 Нехай $N = 2$. Тоді 1-періодичний ГЛД має вигляд

$$1 + \frac{c_1}{1 + \frac{c_1}{1 + \frac{c_1}{1 + \dots}}} + \frac{c_2}{1 + \frac{c_1}{1 + \frac{c_1}{1 + \dots}} + \frac{c_2}{1 + \frac{c_1}{1 + \dots} + \frac{c_2}{1 + \dots}}}.$$

Приклад 2.2 (p_1, p_2) -періодичний ГЛД можна записати таким чином

$$1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \frac{c_{1,2}}{1 + \dots + \frac{c_{1,p_1}}{1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \dots}}}} + \frac{c_{2,1}}{1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \frac{c_{1,2}}{1 + \dots + \frac{c_{1,p_1}}{1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \dots}}}} + \frac{c_{2,2}}{1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \frac{c_{1,2}}{1 + \dots + \frac{c_{1,p_1}}{1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \dots}}}} + \dots + \frac{c_{2,p_2}}{1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \dots} + \frac{c_{2,1}}{1 + \dots}}}.$$

Приклад 2.3 Запишемо $(2, 1, \dots, 1)$ -періодичний ГЛД з N вітками розгалуження

$$1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \frac{c_{1,2}}{1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \frac{c_{1,2}}{1 + \dots}}}} + \frac{c_{2,1}}{1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \frac{c_{1,2}}{1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \dots}}}} + \frac{c_{2,1}}{1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \frac{c_{1,2}}{1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \dots}}}} + \dots + \frac{c_{N,1}}{1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \frac{c_{1,2}}{1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \dots}}}} + \frac{c_{2,1}}{1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \frac{c_{1,2}}{1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \dots}}}} + \frac{c_{2,1}}{1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \frac{c_{1,2}}{1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \dots}}}} + \dots + \frac{c_{N,1}}{1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \frac{c_{1,2}}{1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \dots}}}}.$$

2.2. Підхідні дробы та залишки. Еквівалентні перетворення

Підхідним дробом n -го порядку ГЛД (2.4) називають вираз

$$F_n = \left(1 + \prod_{k=1}^n \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k, s}}{1} \right)^{-1}, \quad n \geq 1, \quad F_0 = 1.$$

Дріб (2.4) збігається (поточково збігається), якщо існує скінченна границя послідовності його підхідних дробів, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F$, $F \in \mathbb{C}$.

Дріб (2.4) збігається рівномірно на множинах $\Omega_{q,j}$, $q = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, p_q}$, якщо він збігається рівномірно до значення F , як функція від змінних $c_{q,j}$, $q = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, p_q}$, при умовах, що $c_{q,j} \in \Omega_{q,j}$, тобто, якщо існує послідовність додатних сталих $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка залежить від множин $\Omega_{q,j}$, і $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, та номер n_0 такий, що для всіх $n \geq n_0$ справджуються оцінки: $|F_n - F| < \varepsilon_n$.

Визначимо рекурентно для $n \geq 1$ залишки $\vec{p}$ -періодичного ГЛД (2.4)

$$\begin{aligned} R_n^{(1,s)} &= 1 + \frac{c_{1,s}}{R_{n-1}^{(1,s+1)}}, \quad 1 \leq s < p_1, \quad R_n^{(1,p_1)} = 1 + \frac{c_{1,p_1}}{R_{n-1}^{(1,1)}}, \\ R_n^{(q,s)} &= 1 + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{c_{k,1}}{R_{n-1}^{(k,2)}} + \frac{c_{q,s}}{R_{n-1}^{(q,s+1)}}, \quad 1 \leq s < p_q, \\ R_n^{(q,p_q)} &= 1 + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{c_{k,1}}{R_{n-1}^{(k,2)}} + \frac{c_{q,p_q}}{R_{n-1}^{(q,1)}}, \quad q = \overline{2, N}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

при початкових умовах: $R_0^{(q,j)} = 1$, $q = \overline{1, N}$; $j \geq 1$.

Зауважимо, що $F_n = \left(R_n^{(N,1)} \right)^{-1}$.

Залишки 1-періодичного ГЛД (2.6) запишемо у вигляді

$$R_n^{(q,j)} = R_n^{(q,1)} = R_n^{(q)}, \quad q = \overline{1, N}; \quad n \geq 0. \quad (2.9)$$

Для залишків $R_n^{(q,j)}$, $q = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, n}$, виконуються співвідношення

$$R_n^{(q,j)} = R_n^{(q,s)}, \quad j = m \cdot p_q + s; \quad 1 \leq s \leq p_q; \quad 1 \leq j \leq n; \quad m \geq 0. \quad (2.10)$$

Із визначення залишків дробу (2.4) також впливають рівності

$$\begin{aligned} R_n^{(q,m)} &= 1 + \sum_{k=1}^{q-2} \frac{c_{k,1}}{R_{n-1}^{(k,2)}} + \frac{c_{q-1,1}}{R_{n-1}^{(q-1,2)}} + \frac{c_{q,m}}{R_{n-1}^{(q,m+1)}} = \\ &= R_n^{(q-1,1)} + \frac{c_{q,m}}{R_{n-1}^{(q,m+1)}}, \quad m+1 \leq p_q. \end{aligned}$$

Отже,

$$R_n^{(q,m)} = R_n^{(q-1,1)} + \frac{c_{q,m}}{R_{n-1}^{(q,m+1)}}, \quad m+1 \leq p_q. \quad (2.11)$$

Лема 2.1. Якщо всі залишки дробу (2.4) відмінні від нуля: $R_n^{(q,j)} \neq 0$, $q = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, p_q}$; $n \geq 1$, то справджуються співвідношення

$$R_n^{(q,1)} = \prod_{j=1}^q h_n^{(j,1)}, \quad q = \overline{1, N}; n \geq 1, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} de \quad h_n^{(j,1)} &= 1 + \frac{c_{j,1}/(R_n^{(j-1,1)} R_{n-1}^{(j-1,1)})}{|1|} + \frac{c_{j,2}/(R_{n-1}^{(j-1,1)} R_{n-2}^{(j-1,1)})}{|1|} + \dots + \\ &\frac{c_{j,s}/(R_1^{(j-1,1)} R_0^{(j-1,1)})}{|1|}, \quad n = r \cdot p_j + s, \quad 1 \leq s \leq p, \quad r \geq 0. \end{aligned}$$

Доведення. Використаємо метод математичної індукції по q .

Якщо $q = 1$, то $R_n^{(1,1)} = h_n^{(1,1)}$, $n \geq 1$, – p_1 -періодичний неперервний дріб.

Припустивши правильність леми 2.1 при кожному $q = k$, $1 \leq q \leq k$, при $q = k+1$ маємо

$$\begin{aligned} R_n^{(k+1,1)} &= R_n^{(k,1)} + \frac{c_{k+1,1}}{R_{n-1}^{(k+1,2)}} = R_n^{(k,1)} + \frac{c_{k+1,1}}{|R_{n-1}^{(k,1)}|} + \dots + \frac{c_{k+1,p_{k+1}}}{|R_{n-p_{k+1}}^{(k,1)}|} + \\ &+ \frac{c_{k+1,1}}{|R_{n-p_{k+1}-1}^{(k,1)}|} + \dots + \frac{c_{k+1,s}}{|R_0^{(k,1)}|} = R_n^{(k,1)} \cdot h_n^{(k+1,1)} = \prod_{j=1}^{k+1} h_n^{(j,1)}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що за своєю структурою дробу $h_n^{(q,1)}$, $n \geq 1$; $q = \overline{1, N}$, є зворотними дробами вигляду (1.15). ■

ГЛД спеціального вигляду

$$\left(1 + \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{d_{i(k)}}\right)^{-1}, \quad i(k) \in \mathcal{I}. \quad (2.13)$$

з підхідними дробами G_n , $n \geq 1$, називають еквівалентним ГЛД (2.1), якщо виконуються рівності $F_n = G_n$, $n \geq 1$. Дріб (2.13) еквівалентний ГЛД (2.1) тоді і тільки тоді, коли

$$d_{i(k)} = \prod_{p=1}^k (a_{i(k)})^{(-1)^{k+p-1}}.$$

1-періодичний дріб (2.6) еквівалентний ГЛД (2.13), де $d_{i(k)} = \prod_{p=1}^k c_{i_p}^{(-1)^{k+p-1}}$ або $d_{i(k)} = \prod_{p=1}^k |c_{i_p}^{(-1)^{k+p-1}}| \exp \left\{ \sum_{p=1}^k (-1)^{k+p-1} \alpha_{i_p} \right\}$, де $\alpha_m = \arg c_m$, $m = \overline{1, N}$.

Еквівалентний до 1-періодичного неперервного дробу

$$1 + \frac{c|}{|1|} + \frac{c|}{|1|} + \frac{c|}{|1|} + \frac{c|}{|1|} + \dots$$

є 2-періодичний неперервний дріб

$$1 + \frac{1|}{|1/c|} + \frac{1|}{|1|} + \frac{1|}{|1/c|} + \frac{1|}{|1|} + \dots$$

При еквівалентних перетвореннях можлива втрата періодичності дробу.

Приклад 2.4 Розглянемо 2-періодичний неперервний дріб

$$1 + \frac{a|}{|1|} + \frac{b|}{|1|} + \frac{a|}{|1|} + \frac{b|}{|1|} + \dots$$

Еквівалентний дріб

$$1 + \frac{1|}{|d_1|} + \frac{1|}{|d_2|} + \dots$$

має елементи $d_{2k} = a^k/b^k$ і $d_{2k+1} = b^k/a^{k+1}$, $k \geq 0$.

Еквівалентний до 2-періодичного неперервний дріб не є періодичним.

Враховуючи співвідношення між $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, і $c_{q,j}$, $q = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, p_j}$ можна записати еквівалентні перетворення для $\vec{p}$ -періодичного ГЛД (2.4).

Ці формули є громісткими.

2.3. Формули різниці двох підхідних дробів

Розглянемо p_i -періодичний неперервний дріб, $1 \leq i \leq N$, який є i -ою віткою дробу (2.4)

$$1 + \frac{c_{i,1}}{|1|} + \frac{c_{i,2}}{|1|} + \dots + \frac{c_{i,p_i}}{|1|} + \frac{c_{i,1}}{|1|} + \dots \quad (2.14)$$

Нехай $k_{i,s}$ – кількість повторів елемента $c_{i,s}$, $1 \leq s \leq p_i$, в k_i -підхідному дробі неперервного дробу (2.14). Якщо $k_i = r_i \cdot p_i + l_i$, $0 \leq l_i \leq p_i - 1$, $r_i \geq 0$, то

$$k_{i,s} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k_i = 0; \\ r_i + 1, & \text{якщо } 0 < l_i \leq p_i - 1 \text{ і } s \leq l_i; \\ r_i, & \text{якщо } l_i = 0 \text{ або } s > l_i. \end{cases} \quad (2.15)$$

Враховуючи розвинення k_i і формули для $k_{i,s}$, маємо $k_i = \sum_{s=1}^{p_i} k_{i,s}$.

Визначимо множини мультиіндексів

$$\mathcal{I}_{n+1}^{(q)} = \left\{ k = (k_1, k_2, \dots, k_q) : k_l \geq 0; l = \overline{1, q}; \sum_{l=1}^q k_l = n + 1 \right\}, \quad (2.16)$$

$$\mathcal{I}_{n+1}^{(j,q)} = \left\{ k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(q)} : k_1, \dots, k_{j-1} \geq 0, k_j \geq 1; k_{j+1} = \dots = k_q = 0 \right\}, \quad (2.17)$$

де $1 \leq q \leq N$, $1 \leq j \leq q$, $n \geq 0$. Зауважимо, що $\mathcal{I}_{n+1}^{(q,q)} \neq \mathcal{I}_{n+1}^{(q)}$ і $\mathcal{I}_{n+1}^{(k,q)} \cap \mathcal{I}_{n+1}^{(l,q)} = \emptyset$, якщо $l \neq k$.

Лема 2.2. Нехай множини індексів $\mathcal{I}_{n+1}^{(q)}$ та $\mathcal{I}_{n+1}^{(j,q)}$, визначені співвідношеннями (2.16)-(2.17). Тоді

$$1) \mathcal{I}_{n+1}^{(q)} = \bigcup_{j=1}^q \mathcal{I}_{n+1}^{(j,q)}, \quad q = \overline{1, N}, n \geq 0;$$

$$2) \mathcal{I}_{n+1}^{(q+1,q+1)} = \bigcup_{s=1}^{n+1} (\mathcal{I}_{n+1-s}^{(q)} \times \{s\}), \quad 1 \leq q < N, n \geq 0.$$

Доведення. 1. Нехай q , $1 \leq q \leq N$, і n , $n \geq 0$, довільні. Мультиіндекс $k \in \bigcup_{j=1}^q \mathcal{I}_{n+1}^{(j,q)}$. Тоді існує єдиний індекс j , $1 \leq j \leq q$, такий, що $k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(j,q)}$, тобто $k = \underbrace{\{k_1, k_2, \dots, k_j, 0, \dots, 0\}}_q$, де $k_1, \dots, k_{j-1} \geq 0$, $k_j \geq 1$, $k_{j+1} = \dots = k_q = 0$

і $k_1 + k_2 + \dots + k_j = n + 1$. Отже, $k_j \geq 0$ і $k_1 + k_2 + \dots + k_q = n + 1$, тому $k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(q)}$.

Нехай $k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(q)}$, тобто $k = \{k_1, k_2, \dots, k_q\}$, де $k_j \geq 0$, $j = \overline{1, q}$, і $k_1 + k_2 + \dots + k_q = n + 1$. Покажемо, що існує індекс j , $1 \leq j \leq q$, такий що $k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(j, q)}$.

Якщо $k_q > 0$, тоді $k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(q, q)}$, тобто $j = q$.

Якщо $k_s = 0$ і $\exists m$ і $k_l > 0$, $m \leq l \leq q$ і $k_{m-1} \geq 1$, тоді $k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(m-1, q)}$, тобто $j = m - 1$. Отже, $\mathcal{I}_{n+1}^{(q)} \subset \bigcup_{j=1}^q \mathcal{I}_{n+1}^{(j, q)}$.

2. Нехай $k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(q+1, q+1)}$, тобто $k = \{k_1, k_2, \dots, k_{q+1}\}$ і $\sum_{j=1}^{q+1} k_j = n + 1$, $k_j \geq 0$, $1 \leq j \leq q$; $k_{q+1} \geq n + 1$. Тоді $k \in \mathcal{I}_{n+1-k_{q+1}}^{(q)} \times \{k_{q+1}\}$.

Якщо $k \in \bigcup_{s=1}^{n+1} (\mathcal{I}_{n+1-s}^{(q)} \times \{s\})$, то $\exists s$, $1 \leq s \leq n + 1$, що $k \in \mathcal{I}_{n+1-s}^{(q)} \times \{s\}$. Тому $\sum_{j=1}^{q+1} k_j = n + 1$ і $k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(q+1, q+1)}$. ■

Теорема 2.1. *Якщо всі залишки ГЛД (2.4) відмінні від нуля, $R_n^{(q, j)} \neq 0$, $q = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, p_q}$; $n \geq 1$, то для різниці двох підхідних дробів справеджується формула*

$$F_{n+m} - F_n = \frac{(-1)^{n+1}}{R_{n+m}^{(N, 1)} \cdot R_n^{(N, 1)}} \sum_{k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(N)}} \prod_{i=1}^N \frac{c_{i,1}^{k_{i,1}} \dots c_{i,p_i}^{k_{i,p_i}}}{\prod_{j=1}^{k_i} \left(R_{m+l_i-j}^{(i, j+1)} \cdot R_{l_i-j}^{(i, j+1)} \right)}, \quad (2.18)$$

де $n, m \geq 1$, $l_i = n - \sum_{t=i+1}^N k_t$, $R_{-1}^{(q, j)} = 1$, $q = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, p_q}$, множина мультиіндексів $\mathcal{I}_{n+1}^{(N)}$ визначається згідно з формулою (2.16), індекси $k_{i,s}$ – згідно з (2.15).

Доведення. Оскільки $F_n = 1/R_n^{(N, 1)}$, то

$$F_{n+m} - F_n = \frac{1}{R_{n+m}^{(N, 1)}} - \frac{1}{R_n^{(N, 1)}} = -\frac{R_{n+m}^{(N, 1)} - R_n^{(N, 1)}}{R_{n+m}^{(N, 1)} R_n^{(N, 1)}}.$$

Використовуючи метод математичної індукції по q , доведемо, що при будь-яких $m, n > 0$, справеджується формула

$$R_{n+m}^{(q, 1)} - R_n^{(q, 1)} = (-1)^n \sum_{k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(q)}} \prod_{i=1}^q \frac{c_{i,1}^{k_{i,1}} \dots c_{i,p_i}^{k_{i,p_i}}}{\prod_{j=1}^{k_i} \left(R_{m+l_i-j}^{(i, j+1)} \cdot R_{l_i-j}^{(i, j+1)} \right)}.$$

Нехай $q = 1$. Враховуючи, що $R_n^{(1,1)}$ – n -ий підхідний дріб p_1 -періодичного неперервного дробу і $k_{1,j}$ – кількість повторів елемента $c_{1,j}$, $j = \overline{1, p_1}$, в цьому дробі, маємо

$$R_{n+m}^{(1,1)} - R_n^{(1,1)} = (-1)^n \frac{c_{1,1}^{k_{1,1}} \cdots c_{1,p_1}^{k_{1,p_1}}}{\prod_{j=1}^{k_1} \left(R_{n+m-j}^{(1,j+1)} \cdot R_{n-j}^{(1,j+1)} \right)}, \quad n, m > 0; \quad k_1 = n + 1.$$

Зі співвідношення (2.11) випливає, що

$$\begin{aligned} R_{n+m-k}^{(\nu+1,j)} - R_{n-k}^{(\nu+1,j)} &= R_{n+m-k}^{(\nu,1)} - R_{n-k}^{(\nu,1)} \\ &+ \frac{-c_{\nu+1,j}}{R_{n+m-k-1}^{(\nu+1,j+1)} \cdot R_{n-k-1}^{(\nu+1,j+1)}} \left(R_{n+m-k-1}^{(\nu+1,j+1)} - R_{n-k-1}^{(\nu+1,j+1)} \right). \end{aligned}$$

Послідовно вкладаючи ці співвідношення і враховуючи останній крок

$$R_m^{(\nu+1,j+n-k)} - R_0^{(\nu+1,j+n-k)} = R_m^{(\nu,1)} - R_0^{(\nu,1)} + \frac{c_{\nu+1,j+n-k}}{R_{m-1}^{(\nu+1,j+n-k+1)}},$$

одержуємо формулу

$$\begin{aligned} R_{m+n-k}^{(\nu+1,j)} - R_{n-k}^{(\nu+1,j)} &= \sum_{q=0}^{n-k} \prod_{i=1}^q \frac{(-1)^i c_{\nu+1,j+i-1}}{R_{n+m-k-i}^{(\nu+1,j+i)} \cdot R_{n-k-i}^{(\nu+1,j+i)}} \left(R_{n+m-k-q}^{(\nu,1)} - R_{n-k-q}^{(\nu,1)} \right) + \\ &+ (-1)^{n-k+1} \prod_{i=1}^{n-k+1} \frac{c_{\nu+1,j+i-1}}{R_{n+m-k-i}^{(\nu+1,j+i)} \cdot R_{n-k-i}^{(\nu+1,j+i)}}, \quad (2.19) \end{aligned}$$

де $m > 0$, $n > 0$, $0 \leq k \leq n$; $j = \overline{1, n-k}$; $\nu = \overline{1, N-1}$. Враховуючи співвідношення (2.11) та (2.19), маємо

$$R_{n+m}^{(q+1,1)} - R_n^{(q+1,1)} = R_{n+m}^{(q,1)} - R_n^{(q,1)} + \frac{-c_{q+1,1}}{R_{n+m-1}^{(q+1,2)} R_{n-1}^{(q+1,2)}} \left(R_{n+m-1}^{(q+1,2)} - R_{n-1}^{(q+1,2)} \right)$$

i

$$\begin{aligned}
R_{n+m}^{(q+1,1)} - R_n^{(q+1,1)} &= R_{n+m}^{(q,1)} - R_n^{(q,1)} + \frac{(-1)^{c_{q+1,1}}}{R_{n+m-1}^{(q+1,2)} R_{n-1}^{(q+1,2)}} \left(R_{n+m-1}^{(q,1)} - R_{n-1}^{(q,1)} \right) + \\
&+ \frac{(-1)^2 c_{q+1,1} c_{q+1,2}}{R_{n+m-1}^{(q+1,2)} R_{n+m-2}^{(q+1,3)} R_{n-1}^{(q+1,2)} R_{n-2}^{(q+1,3)}} \left(R_{n+m-2}^{(q,1)} - R_{n-2}^{(q,1)} \right) + \\
&+ \dots + (-1)^n \prod_{s=1}^n \frac{c_{q+1,s}}{R_{n+m-s}^{(q+1,s+1)} R_{n-s}^{(q+1,s+1)}} \left(R_m^{(q,1)} - R_0^{(q,1)} \right).
\end{aligned}$$

Із періодичності ГЛД випливає, що $c_{q+1,k_{q+1}} = c_{q+1,s_{q+1}}$, де $k_{q+1} = r_{q+1} \cdot p_{q+1} + s_{q+1}$, $1 \leq s_{q+1} \leq p_{q+1}$.

Остаточнo маємо

$$\begin{aligned}
R_{n+m}^{(q+1,1)} - R_n^{(q+1,1)} &= (-1)^n \sum_{k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(q)}} \prod_{i=1}^q \frac{c_{i,1}^{k_{i,1}} \dots c_{i,p_q}^{k_{i,p_q}}}{\prod_{j=1}^{k_q} \left(R_{m+l_i-j}^{(q,j+1)} R_{l_i-j}^{(q,j+1)} \right)} + \\
&+ \frac{(-1)^n c_{q+1,1}}{R_{n+m-1}^{(q+1,2)} R_{n-1}^{(q+1,2)}} \sum_{k \in \mathcal{I}_n^{(q)}} \prod_{i=1}^q \frac{c_{i,1}^{k_{i,1}} \dots c_{i,p_q}^{k_{i,p_q}}}{\prod_{j=1}^{k_q} \left(R_{m+l_i-j}^{(q,j+1)} R_{l_i-j}^{(q,j+1)} \right)} + \\
&+ \dots + \\
&+ \frac{(-1)^n c_{q+1,1}^{k_{q+1,1}} \dots c_{q+1,p_{q+1}}^{k_{q+1,p_{q+1}}}}{\prod_{s=1}^n R_{n+m-s}^{(q+1,s+1)} \cdot R_{n-s}^{(q+1,s+1)}} \sum_{k \in \mathcal{I}_1^{(q)}} \prod_{i=1}^q \frac{c_{i,1}^{k_{i,1}} \dots c_{i,p_q}^{k_{i,p_q}}}{\prod_{j=1}^{k_q} \left(R_{m+l_i-j}^{(q,j+1)} R_{l_i-j}^{(q,j+1)} \right)} + \\
&+ \frac{(-1)^n c_{q+1,1}^{k_{q+1,1}} \dots c_{q+1,p_{q+1}}^{k_{q+1,p_{q+1}}}}{\prod_{s=1}^{n+1} R_{n+m-s}^{(q+1,s+1)} \cdot R_{n-s}^{(q+1,s+1)}}.
\end{aligned}$$

Внесемо множники $\frac{c_{q+1,1}^{k_{q+1,1}} \dots c_{q+1,p_{q+1}}^{k_{q+1,p_{q+1}}}}{\prod_{s=1}^{k_{q+1}} \left(R_{n+m-s}^{(q+1,s+1)} \cdot R_{n-s}^{(q+1,s+1)} \right)}$, $1 \leq k_{q+1} \leq n+1$ під знаки сум і, використовуючи лему 2.2, одержимо

$$R_{n+m}^{(q+1,1)} - R_n^{(q+1,1)} = (-1)^n \sum_{k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(q+1)}} \prod_{i=1}^{q+1} \frac{c_{i,1}^{k_{i,1}} \dots c_{i,p_q}^{k_{i,p_q}}}{\prod_{j=1}^{k_i} \left(R_{m+l_i-j}^{(i,j+1)} \cdot R_{l_i-j}^{(i,j+1)} \right)}.$$

Враховуючи, що $F_n = \left(R_n^{(N,1)} \right)^{-1}$, $n \geq 1$, одержимо формулу (2.18). ■

Зауважимо, що ця формула для 1-періодичного ГЛД (2.4) має вигляд

$$F_{n+m} - F_n = \frac{(-1)^{n+1}}{R_{n+m}^{(N)} \cdot R_n^{(N)}} \sum_{k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(N)}} \frac{c_1^{k_1} c_2^{k_2} \dots c_N^{k_N}}{\prod_{j=1}^N \prod_{r=1}^{k_j} \left(R_{s_j+m-r}^{(j)} \cdot R_{s_j-r}^{(j)} \right)}, \quad (2.20)$$

де $s_j = n - \sum_{l=j+1}^N k_l$, $R_{-1}^{(j)} = 1$; $j = \overline{1, N}$, $m \geq 1$.

Теорема 2.2. *Нехай існує послідовність додатних чисел $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, що залишки 1-періодичного ГЛД (2.6) задовольняють умови*

$$|R_n^{(q)}| \geq g_n, \quad n \geq 0; q = \overline{2, N}. \quad (2.21)$$

Тоді для модуля різниці підхідних дробів (2.6) справеджується оцінка

$$\begin{aligned} |F_n - F_m| &\leq \frac{1}{g_n \cdot g_m} \times \\ &\times \left[\sum_{k=0}^m \frac{\sum_{j_1=2}^N \sum_{j_2=2}^{j_1} \dots \sum_{j_{k-1}=2}^{j_{k-2}} |c_{j_1}| |c_{j_2}| \dots |c_{j_k}|}{\prod_{r=1}^k g_{n-k} \cdot g_{m-k}} \left| R_{n-k}^{(1)} - R_{m-k}^{(1)} \right| + \right. \\ &\left. + \frac{\sum_{j_1=2}^N \sum_{j_2=2}^{j_1} \dots \sum_{j_m=2}^{j_{m-1}} \sum_{j_{m+1}=2}^{j_m} |c_{j_1}| |c_{j_2}| \dots |c_{j_m}| |c_{j_{m+1}}|}{\prod_{r=1}^{m+1} g_{n-k} \cdot g_{m-k}} \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

де $n > m \geq 0$, $g_{-1} = 1$.

Доведення. З рекурентних співвідношень (2.11) та зауваження (2.9) випливає, що

$$R_k^{(q)} - R_l^{(q)} = R_k^{(1)} - R_l^{(1)} + \sum_{j=2}^q \frac{-c_j}{R_{k-1}^{(j)} \cdot R_{l-1}^{(j)}} \left(R_{k-1}^{(j)} - R_{l-1}^{(j)} \right), \quad (2.23)$$

де $n \geq k > l \geq 0$; $q = \overline{2, N}$. Враховуючи, що $F_n = \left(R_n^{(N)} \right)^{-1}$, $n \geq 0$, і умови

(2.21), маємо

$$\begin{aligned}
|F_n - F_m| &= \frac{1}{|R_n^{(N)}| \cdot |R_m^{(N)}|} \left| R_m^{(N)} - R_n^{(N)} \right| \\
&= \frac{1}{|R_n^{(N)}| \cdot |R_m^{(N)}|} \left| R_m^{(1)} + \sum_{j_1=2}^N \frac{c_{j_1}}{R_{m-1}^{(j_1)}} - R_n^{(1)} - \sum_{j_1=2}^N \frac{c_{j_1}}{R_{n-1}^{(j_1)}} \right| \\
&\leq \frac{1}{g_n \cdot g_m} \left[\left| R_m^{(1)} - R_n^{(1)} \right| + \frac{1}{g_{n-1} \cdot g_{m-1}} \sum_{j_1=2}^N |c_{j_1}| \left| R_{n-1}^{(j_1)} - R_{m-1}^{(j_1)} \right| \right].
\end{aligned}$$

Послідовно вкладаючи отримане співвідношення, з урахуванням (2.23), остаточно одержимо

$$\begin{aligned}
|F_n - F_m| &= \frac{1}{g_n \cdot g_m} \left[\left| R_m^{(1)} - R_n^{(1)} \right| + \frac{\sum_{j_1=2}^N |c_{j_1}|}{g_{n-1} \cdot g_{m-1}} \left| R_{n-1}^{(1)} - R_{m-1}^{(1)} \right| + \right. \\
&\quad \frac{\sum_{j_1=2}^N \sum_{j_2=2}^{j_1} |c_{j_1}| |c_{j_2}|}{g_{n-1} g_{n-2} \cdot g_{m-1} g_{m-2}} \left| R_{n-2}^{(1)} - R_{m-2}^{(1)} \right| + \dots + \\
&\quad \frac{\sum_{j_1=2}^N \sum_{j_2=2}^{j_1} \dots \sum_{j_m=2}^{j_{m-1}} |c_{j_1}| |c_{j_2}| \dots |c_{j_m}|}{\prod_{r=1}^m g_{m-r} g_{n-r}} \left| R_{n-m}^{(1)} - R_0^{(1)} \right| + \\
&\quad \left. \frac{\sum_{j_1=2}^N \sum_{j_2=2}^{j_1} \dots \sum_{j_m=2}^{j_{m-1}} \sum_{j_{m+1}=2}^{j_m} |c_{j_1}| |c_{j_2}| \dots |c_{j_m}| |c_{j_{m+1}}|}{\prod_{r=1}^{m+1} g_{m-r} \cdot g_{n-r}} \right].
\end{aligned}$$

Це еквівалентно оцінці (2.22). ■

Наслідок 2.1. Позначимо $C = \sum_{j=2}^N |c_j|$. Тоді справджується нерівність

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_1=2}^N \sum_{j_2=2}^{j_1} \dots \sum_{j_s=2}^{j_{s-1}} |c_{j_1}| |c_{j_2}| \dots |c_{j_s}| = \\
&\sum_{k_2+\dots+k_N=s} |c_2|^{k_2} \dots |c_N|^{k_N} \leq \left(\sum_{j=2}^N |c_j| \right)^s = C^s.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

При виконанні умов теореми 2.2 і нерівності (2.24) випливає, що

$$|F_n - F_m| \leq \frac{1}{g_n \cdot g_m} \left[\sum_{k=0}^m \frac{C^k}{\prod_{r=1}^k g_{n-k} \cdot g_{m-k}} \left| R_{n-k}^{(1)} - R_{m-k}^{(1)} \right| + \frac{C^{m+1}}{\prod_{r=1}^{m+1} g_{n-k} \cdot g_{m-k}} \right], \quad (2.25)$$

де $n > m \geq 0$, $g_{-1} = 1$.

Теорема 2.3. Нехай $\vec{p}$ -періодичний дріб (2.4) збігається до значення F і

- 1) всі його залишки відмінні від нуля: $R_n^{(q,j)} \neq 0$, $q = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, p_q}$; $n \geq 1$;
- 2) існують границі $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^{(j,1)} = x_j$, $x_j \neq 0, \infty$; $j = \overline{1, N}$, де

$$h_n^{(j,1)} = 1 + \frac{c_{j,1}/(R_n^{(j-1,1)} R_{n-1}^{(j-1,1)})}{|1|} + \frac{c_{j,2}/(R_{n-1}^{(j-1,1)} R_{n-2}^{(j-1,1)})}{|1|} + \dots +$$

$$+ \frac{c_{j,s}/(R_1^{(j-1,1)} R_0^{(j-1,1)})}{|1|},$$

де $n = r \cdot p_j + s$, $1 \leq s \leq p$. Тоді для будь-якого $n \geq 1$ справджується співвідношення

$$F_n - F = \frac{1}{R_n^{(N,1)}} \sum_{j=1}^N \frac{R_n^{(j-1,1)}}{X_j} \left(x_j - h_n^{(j,1)} \right), \quad (2.26)$$

де $X_j = \prod_{s=1}^j x_s$, $j = \overline{1, N}$.

Доведення. Оскільки $F_n = \left(R_n^{(N,1)} \right)^{-1}$ і $R_n^{(q,j)} \neq 0$, $q = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, p_q}$, то, враховуючи лему 2.1, маємо: $R_n^{(N,1)} = \prod_{j=1}^N h_n^{(j,1)}$. Зі збіжності зворотних дробів $h_n^{(j,1)}$, $j = \overline{1, N}$ одержуємо: $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{j=1}^N h_n^{(j,1)} \right)^{-1} = \left(\prod_{j=1}^N x_j \right)^{-1} = F$. Отже,

$$F_n - F = \frac{1}{R_n^{(N,1)}} - \frac{1}{\prod_{j=1}^N x_j} = \frac{\prod_{j=1}^N x_j - \prod_{j=1}^N h_n^{(j,1)}}{\prod_{j=1}^N x_j \cdot \prod_{j=1}^N h_n^{(j,1)}} =$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^N x_j - h_n^{(1,1)} \prod_{j=2}^N x_j + h_n^{(1,1)} \prod_{j=2}^N x_j - \prod_{j=1}^N h_n^{(j,1)}}{\prod_{j=1}^N x_j \cdot \prod_{j=1}^N h_n^{(j,1)}} =$$

$$= \frac{x_1 - h_n^{(1,1)}}{x_1 \cdot \prod_{j=1}^N h_n^{(j,1)}} + \frac{\prod_{j=2}^N x_j - \prod_{j=2}^N h_n^{(j,1)}}{\prod_{j=1}^N x_j \cdot \prod_{j=2}^N h_n^{(j,1)}}.$$

Повторюючи аналогічну процедуру в чисельнику останнього дробу, через $(N - 1)$ кроків одержимо

$$F_n - F = \sum_{j=1}^N \frac{x_j - h_n^{(j,1)}}{\prod_{k=1}^j x_k \cdot \prod_{k=j}^N h_n^{(k,1)}}.$$

Враховуючи, що $\frac{1}{\prod_{k=j}^N h_n^{(k,1)}} = \frac{\prod_{s=1}^{j-1} h_n^{(s,1)}}{\prod_{s=1}^N h_n^{(s,1)}} = \frac{R_n^{(j-1,1)}}{R_n^{(N,1)}}$, одержуємо співвідношення (2.26). ■

2.4. Висновки до розділу 2

У розділі 2 дано визначення $\vec{p}$ -періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду, їх підхідних дробів та залишків.

Встановлено рекурентні формули для залишків, використовуючи які обґрунтовано формулу різниці двох підхідних дробів $\vec{p}$ -періодичного ГЛД спеціального вигляду. Для 1-періодичного ГЛД одержано оцінку різниці двох підхідних дробів, яка виражається через суму модулів елементів ГЛД, починаючи з другого. У припущенні, що $\vec{p}$ -періодичний ГЛД збігається, всі його залишки відмінні від нуля, існують границі зворотних дробів, побудовані на основаних заданого ГЛД, встановлено формулу різниці між підхідними дробом та його значенням, яка виражається через нерухомі точки відповідних дробо-лінійних відображень.

Розглянуто питання про еквівалентні перетворення періодичних ГЛД. Показано, що це перетворення може порушувати періодичність дробу.

Матеріали цього розділу опубліковані в [22, 30, 31, 34].

РОЗДІЛ 3

ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ТА ОЦІНКИ ШВИДКОСТІ ПОТОЧКОВОЇ ЗБІЖНОСТІ ПЕРІОДИЧНИХ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

3.1. Обмежені множини збіжності 1-періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду

Побудуємо множини Ω_j , $j = \overline{1, N}$, для вибору елементів 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу вигляду

$$\left(1 + \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1}, \quad (3.1)$$

де $c_j \in \Omega_j$, $\Omega_j \subset \mathbb{C}$, $j = \overline{1, N}$.

Покладемо

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + 1/4)| < \pi\}. \quad (3.2)$$

Виберемо елемент $c_1 \in \Omega_1$ і зафіксуємо його. Позначимо $\rho_1 = |y_1/x_1|$, де x_1 , y_1 – нерухомі точки дробово-лінійного відображення $t(\omega) = 1 + c_1/\omega$ і

$$x_1 = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 + 4c_1}), \quad y_1 = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 + 4c_1}), \quad \sqrt{1} = 1. \quad (3.3)$$

Оскільки $c_1 \in \Omega_1$, то $\operatorname{Re} \sqrt{1 + 4c_1} > 0$. Отже, $\rho_1 < 1$ [109, 125].

Виберемо та зафіксуємо елемент c_2 з області

$$\Omega_2 = \Omega_2(c_1) = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{r_1}{4}\right\}, \quad r_1 = |x_1|^2 \frac{1 - \rho_1^3}{1 + \rho_1}. \quad (3.4)$$

Нехай елементи $c_j \in \Omega_j(c_1, c_2, \dots, c_{j-1})$, $j = \overline{3, k}$ вибрані та зафіксовані. Тоді область $\Omega_{k+1}(c_1, c_2, \dots, c_k)$ визначимо наступним чином

$$\Omega_{k+1} = \Omega_{k+1}(c_1, c_2, \dots, c_k) = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{4} \prod_{j=1}^k r_j\right\}, \quad k = \overline{1, N-1}, \quad (3.5)$$

$$r_j = \xi_j^2, \quad \xi_j = \frac{1 + d_j}{2}, \quad d_j = \sqrt{1 - 4|c_j| / \left(\prod_{s=1}^{j-1} r_s \right)}, \quad j = \overline{2, k}. \quad (3.6)$$

Для проведення оцінок знизу залишків ГЛД (3.1) буде використано наступну лему.

Лема 3.1. *Нехай $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ – послідовність зворотних дробів*

$$h_n = 1 + \frac{|a_n|}{|1|} + \frac{|a_{n-1}|}{|1|} + \dots + \frac{|a_1|}{|1|},$$

де $a_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, n}$, елементи яких задовольняють умови

$$|a_n| \leq |a| < 1/4, \quad n \geq 1.$$

Тоді виконуються нерівності

$$|h_n| > \xi, \quad \xi = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4|a|} \right), \quad n \geq 1.$$

Доведення. Покажемо, що мінімантою кожного дробу h_n є n -ий підхідний дріб 1-періодичного неперервного дробу

$$1 + \frac{-|a|}{1} + \frac{-|a|}{1} + \dots, \quad (3.7)$$

тобто $|h_n| \geq g_n$, $n \geq 1$, де g_n – n -ий підхідний дріб неперервного дробу (3.7). Очевидно, що $|h_1| = |1 + a_1| \geq 1 - |a_1| \geq 1 - |a| = g_1$. Припускаючи, що $|h_s| \geq g_s$, для $s = k + 1$ маємо

$$|h_{k+1}| = \left| 1 + \frac{a_{k+1}}{h_k} \right| \geq 1 - \frac{|a_{k+1}|}{g_k} \geq 1 - \frac{|a|}{g_k} = g_{k+1}.$$

Оскільки $|a| < 1/4$, то послідовність підхідних дробів мініманти $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ є монотонно спадною. Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \xi$, де ξ – притягувальна точка дробово-лінійного відображення $t(\omega) = 1 - |a|/\omega$. Враховуючи, що $0 < |a| < 1/4$ і $|h_n| \geq g_n > \xi$, одержимо $|h_n| > \xi$. ■

Теорема 3.1. *Нехай елементи 1-періодичного дробу (3.1) належать областям (3.2), (3.5), тобто $c_j \in \Omega_j$, $j = \overline{1, N}$. Тоді*

1) дріб (3.1) збігається;

2) справджується оцінка поточної швидкості збіжності

$$|F_n - F| \leq L \cdot \binom{N-1}{n+N-1} \cdot \rho^{n+1}, \quad n \geq 1,$$

$$\text{де } \rho = \max_{j=\overline{1,N}} \{\rho_j\}, \quad \rho_1 = \left| \frac{1 - \sqrt{1 + 4c_1}}{1 + \sqrt{1 + 4c_1}} \right|, \quad \rho_j = \frac{1}{(1 + d_j)^2}, \quad j = \overline{2, N},$$

d_j визначаємо згідно з формулами (3.6), L – деяка додатна стала;

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2} \arg c_1, & \arg c_1 \neq \pi; \\ 0, & \arg c_1 = \pi; \end{cases} \quad (3.8)$$

3) значення нескінченного дробу (3.1) рівне $F = \left(\prod_{j=1}^N x_j \right)^{-1}$, де

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c_1}), \quad x_j = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4c_j / \prod_{p=1}^{j-1} x_p^2} \right), \quad j = \overline{2, N}.$$

Доведення. Покажемо методом математичної індукції по q , $1 \leq q \leq N$, що для залишків $R_n^{(q)}$ дробу (3.1) справджуються оцінки

$$|R_n^{(q)}| \geq K_q, \quad n \geq 1,$$

де

$$K_1 = \frac{1}{2} \cos \alpha, \quad K_q = \frac{\cos \alpha}{2^q} \prod_{j=2}^q (1 + d_j), \quad q = \overline{2, N}.$$

Залишок $R_n^{(1)}$ є n -им підхідним дробом 1-періодичного неперервного дробу

$$1 + \frac{c_1}{|1|} + \frac{c_1}{|1|} + \dots \quad (3.9)$$

Для будь-якого $c_1 \in \Omega_1$, маємо $c_1 \in \mathcal{P}(\alpha)$, де $\mathcal{P}(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} : |z| - \operatorname{Re}(ze^{-2i\alpha}) \leq \frac{1}{2} \cos^2 \alpha\}$, $-\pi < 2\alpha < \pi$, кут α визначають згідно з формулою (3.8). Тому згідно з параболічною теоремою 1.4 [див. стр. 13],

$R_n^{(1)} \in \mathcal{V}(\alpha)$, де $\mathcal{V}(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(ze^{-i\alpha}) \geq \frac{1}{2} \cos \alpha\}$. Враховуючи, що $\operatorname{dist}(0; \partial \mathcal{V}(\alpha)) = K_1$, маємо: $|R_n^{(1)}| \geq K_1$, $n \geq 1$. Зі співвідношення (1.10) з урахуванням того, що $\rho_1 = |y_1/x_1| < 1$ і $x_1 \neq 0$, впливає оцінка

$$\left| R_n^{(1)} R_{n-1}^{(1)} \right| = \frac{|x_1|^{n+2}}{|x_1|^n} \left| \frac{1 - (y_1/x_1)^{n+2}}{1 - (y_1/x_1)^n} \right| \geq |x_1|^2 \frac{1 - \rho_1^3}{1 + \rho_1} = r_1, \quad n \geq 1.$$

Припустимо, що для будь-якого q , $2 \leq q \leq N - 1$, виконуються нерівності: $|R_n^{(q)}| \geq K_q$, $n \geq 0$. Застосовуючи лему 2.1 для 1-періодичного ГЛД (3.1), маємо: $R_n^{(q)} = \prod_{j=1}^q h_n^{(j)}$, де

$$h_n^{(j)} = 1 + \frac{c_j / R_n^{(j-1)} R_{n-1}^{(j-1)}}{|1|} + \frac{c_j / R_{n-1}^{(j-1)} R_{n-2}^{(j-1)}}{|1|} + \dots + \frac{c_j / R_1^{(j-1)} R_0^{(j-1)}}{|1|}. \quad (3.10)$$

Отже, $R_n^{(q+1)} = R_n^{(q)} h_n^{(q+1)}$. Оскільки $c_{q+1} \in \Omega_{q+1}$ і $|h_n^{(j)} h_{n-1}^{(j)}| > \xi_j^2 = r_j$, $j = \overline{2, q}$, то для елементів зворотних дробів справджуються оцінки

$$\frac{|c_{q+1}|}{|R_n^{(q)} R_{n-1}^{(q)}|} \leq \frac{|c_{q+1}|}{|R_n^{(1)} R_{n-1}^{(1)}| \prod_{j=2}^q |h_n^{(j)} h_{n-1}^{(j)}|} \leq \frac{|c_{q+1}|}{\prod_{j=1}^q r_j} < \frac{1}{4}.$$

Згідно з лемою 3.1 при $|a| = \frac{|c_{q+1}|}{\prod_{j=1}^q r_j} < \frac{1}{4}$ маємо оцінки: $|h_n^{(q+1)}| > \xi_{q+1}$, $n \geq 1$, де ξ_{q+1} визначаємо згідно з формулами (3.6). Отже, справджуються оцінки

$$|R_n^{(q+1)}| = \prod_{m=1}^{q+1} |h_n^{(m)}| \geq \frac{\cos \alpha}{2} \cdot \prod_{m=2}^{q+1} \xi_m > \frac{\cos \alpha}{2} \cdot \prod_{m=2}^{q+1} \left(\frac{1 + d_m}{2} \right) = K_{q+1}, \quad n \geq 0.$$

Для оцінки швидкості збіжності дробу (3.1) використаємо формулу (2.20) для різниці його підхідних дробів. Оцінимо множники

$$\frac{|c_j|^{k_j}}{\prod_{r=1}^{k_j} \left(|R_{s_j+m-r}^{(j)}| |R_{s_j-r}^{(j)}| \right)},$$

при $j = \overline{1, N}$; $s_j = n - \sum_{l=j+1}^N k_l$.

Нехай $j = 1$. Враховуючи, що $R_n^{(1)}$ – n -підхідний дріб (3.9), значення якого знаходимо згідно з формулою (1.10), при $m \geq 1$, $1 \leq k_1 \leq n$ маємо оцінку

$$\begin{aligned} \prod_{r=1}^{k_1} |R_{s_1+m-r}^{(1)}| &= \prod_{r=1}^{k_1} \left| \frac{x_1^{s_1+m+2-r} - y_1^{s_1+m+2-r}}{x_1^{s_1+m+1-r} - y_1^{s_1+m+1-r}} \right| = \left| \frac{x_1^{s_1+m+1} - y_1^{s_1+m+1}}{x_1^{s_1+m-k_1+1} - y_1^{s_1+m-k_1+1}} \right| = \\ &= |x_1|^{k_1} \left| \frac{1 - (y_1/x_1)^{m+k_1}}{1 - (y_1/x_1)^m} \right| \geq |x_1|^{k_1} \frac{1 - \rho_1^2}{1 + \rho_1} = |x_1|^{k_1} (1 - \rho_1), \end{aligned}$$

оскільки $s_1 = k_1 - 1$, бо $s_1 = n - \sum_{l=2}^N k_l$ і $\sum_{j=1}^N k_j = n + 1$. Аналогічно, маємо

$$\prod_{r=1}^{k_1} |R_{s_1-r}^{(1)}| = |x_1|^{k_1} \left| \frac{1 - (y_1/x_1)^{k_1}}{1 - (y_1/x_1)^{s_1-k_1+1}} \right| \geq |x_1|^{k_1} \frac{1 - \rho_1^2}{1 + \rho_1} = |x_1|^{k_1} (1 - \rho_1),$$

Отже,

$$\frac{|c_1|^{k_1}}{\prod_{r=1}^{k_1} (|R_{s_1+m-r}^{(1)}| |R_{s_1-r}^{(1)}|)} \leq \frac{1}{(1 - \rho_1)^2} \left(\frac{|c_1|}{|x_1|^2} \right)^{k_1}, \quad 1 \leq k_1 \leq n.$$

Для $k_1 = n + 1$ і $m \geq 1$, враховуючи, що $x_1 + y_1 = 1$, $x_1 - y_1 = \sqrt{1 + 4c_1}$, маємо

$$\begin{aligned} \frac{|c_1|^{n+1}}{\prod_{r=1}^{n+1} |R_{s_1+m-r}^{(1)}| \prod_{r=1}^n |R_{s_1-r}^{(1)}|} &= \frac{|c_1|^{n+1}}{\left| \frac{x_1^{n+m+1} - y_1^{n+m+1}}{x_1^m - y_1^m} \right| \cdot \left| \frac{x_1^{n+1} - y_1^{n+1}}{x_1^2 - y_1^2} \right|} \\ &= \frac{|c_1|^{n+1} |x_1^m - y_1^m| |x_1 - y_1|}{|x_1^{n+m+1} - y_1^{n+m+1}| |x_1^{n+1} - y_1^{n+1}|} \leq \left(\frac{|c_1|}{|x_1|^2} \right)^{n+1} \frac{|\sqrt{1 + 4c_1}| (1 + \rho_1)}{(1 - \rho_1^3)(1 - \rho_1^2)} \\ &= \frac{|\sqrt{1 + 4c_1}|}{(1 - \rho_1)^2} \left(\frac{|c_1|}{|x_1|^2} \right)^{n+1} = M_1 \left(\frac{|c_1|}{|x_1|^2} \right)^{n+1}, \end{aligned}$$

де $M_1 = \frac{|\sqrt{1 + 4c_1}|}{(1 - \rho_1)^2(1 + \rho_1 + \rho_1^2)}$. Оскільки x_1, y_1 – розв’язки рівняння $\omega^2 - \omega -$

$c_1 = 0$, то: $|c_1| = |x_1| \cdot |y_1|$. Отже, $\frac{|c_1|}{|x_1|^2} = \frac{|x_1| \cdot |y_1|}{|x_1|^2} = \rho_1$ і

$$\frac{|c_1|^{k_1}}{\prod_{r=1}^{k_1} |R_{s_1+m-r}^{(1)}| |R_{s_1-r}^{(1)}|} \leq M_1 \rho_1^{k_1}, \quad 1 \leq k_1 \leq n+1. \quad (3.11)$$

Враховуючи рівність $|R_n^{(j)}| = |R_n^{(j-1)}| |h_n^{(j)}|$, оцінимо зверху множники $\frac{|c_j|^{k_j}}{\prod_{r=1}^{k_j} (|R_{s_j+m-r}^{(j)}| |R_{s_j-r}^{(j)}|)}$, $j = \overline{2, N}$. Елементи зворотних дробів (3.10) $h_n^{(j)}$ за-

довольняють нерівності: $\frac{|c_j|}{|R_n^{(j-1)} R_{n-1}^{(j-1)}|} \leq \frac{|c_j|}{\prod_{m=1}^{j-1} r_j} < \frac{1}{4}$, $n \geq 1$; $j = \overline{2, N}$.

Отже, враховуючи лему 3.1, маємо

$$\frac{|c_j|}{|R_n^{(j)} R_{n-1}^{(j)}|} = \frac{|c_j| / |R_n^{(j-1)} R_{n-1}^{(j-1)}|}{|h_n^{(j)} h_{n-1}^{(j)}|} < \frac{1/4}{\xi_j^2} = \frac{1}{(1+d_j)^2} = \rho_j.$$

Нехай $1 \leq k_j \leq n+1$. Оцінимо зверху добуток

$$\begin{aligned} & \prod_{r=1}^{k_j} \frac{|c_j|}{|R_{s_j+m-r}^{(j)} R_{s_j-r}^{(j)}|} = \\ & = M_j \prod_{r=1}^{[k_j/2]} \frac{|c_j|}{|R_{s_j+m-2r+1}^{(j)} R_{s_j+m-2r}^{(j)}|} \cdot \prod_{r=1}^{[k_j/2]} \frac{|c_j|}{|R_{s_j-2r+1}^{(j)} R_{s_j-2r}^{(j)}|} \leq M_j \rho_j^{k_j}, \end{aligned}$$

$$\text{де } M_j = \max \left\{ 1; \frac{|c_j| 4^j}{\rho_j \cos^2 \alpha \prod_{m=2}^j (1+d_m)^2} \right\} = \max \left\{ 1; \frac{1}{4\rho_j} \right\}.$$

Тому,

$$\begin{aligned} & \frac{|c_1|^{k_1} |c_2|^{k_2} \dots |c_N|^{k_N}}{\prod_{j=1}^N \prod_{r=1}^{k_j} (|R_{s_j+m-r}^{(j)}| |R_{s_j-r}^{(j)}|)} = \prod_{j=1}^N \prod_{r=1}^{k_j} \frac{|c_j|}{|R_{s_j+m-r}^{(j)}| |R_{s_j-r}^{(j)}|} \\ & = \prod_{j=1}^N M_j \rho_j^{k_j} \leq \prod_{j=1}^N M_j \rho^{k_1+k_2+\dots+k_N} = \prod_{j=1}^N M_j \rho^{n+1}, \end{aligned}$$

де $\rho = \max_{j=\overline{1, N}} \{\rho_j\}$. Отже, для ГЛД (3.9) виконуються фундаментальні нерівності (1.28), тому згідно з твердженням 3[див. стр. 23], маємо оцінку

$$\begin{aligned} |F_{n+m} - F_n| &\leq \frac{1}{|R_{n+m}^{(N)}| \cdot |R_n^{(N)}|} \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_N=n+1 \\ k_j \geq 0}} \frac{|c_1|^{k_1} |c_2|^{k_2} \dots |c_N|^{k_N}}{\prod_{j=1}^N \prod_{r=1}^{k_j} \left(|R_{s_j+m-r}^{(j)}| \cdot |R_{s_j-r}^{(j)}| \right)} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^N M_j}{K_N^2} \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_N=n+1 \\ k_j \geq 0}} \rho^{n+1} = L \cdot \binom{N-1}{n+N-1} \cdot \rho^{n+1}. \end{aligned}$$

Перейдемо в останній нерівності до границі при $m \rightarrow \infty$ і, враховуючи, що $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F$, одержуємо оцінку

$$|F_n - F| \leq L \cdot \binom{N-1}{n+N-1} \cdot \rho^{n+1},$$

$$\text{де } L = \frac{1}{K_N^2} \prod_{j=1}^N M_j = \frac{4^N}{\cos^2 \alpha (1 - \rho_1)^2 (1 + \rho_1 + \rho_1^2)} \prod_{j=2}^N \max \left\{ 1; \frac{1}{4\rho_j} \right\}.$$

Знайдемо значення F дробу (3.1) у випадку його збіжності. Оскільки всі залишки 1-періодичного ГЛД відмінні від нуля $R_n^{(q)} \neq 0$, $n \geq 0$; $q = \overline{1, N}$, то, використовуючи лему 2.1, маємо

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{R_n^{(N)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n^{(1)} h_n^{(2)} \dots h_n^{(N)}}.$$

Доведемо методом математичної індукції, що $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^{(q)} = x_q$, де

$$x_1 = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 + 4c_1}), \quad x_q = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4c_q / \prod_{p=1}^{q-1} x_p^2} \right), \quad q = \overline{2, N}.$$

Якщо $c_1 \in \Omega_1$, то 1-періодичний неперервний дріб (3.9) збігається до притягувальної точки x_1 дробово-лінійного відображення $t_1(\omega) = 1 + c_1/\omega$. Тобто, $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^{(1)} = x_1$.

Припустимо, що виконуються співвідношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^{(s)} = x_s, \quad x_s = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4c_s / \prod_{j=1}^{s-1} x_j^2} \right), \quad 1 \leq s \leq q.$$

Для зворотних дробів $h_n^{(s)}$, $s = \overline{2, q}$, $n \geq 1$, згідно з лемою 3.1 при $|a| = |c_s| \prod_{j=1}^{s-1} r_j^{-1}$ маємо оцінки: $|h_n^{(s)}| > \xi_s$, де ξ_s визначаємо згідно з формулами (3.6). Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} |h_n^{(s)}| = |x_s| \geq \xi_s$, $1 \leq s \leq q$.

Розглянемо послідовність зворотних дробів $\{h_n^{(q+1)}\}_{n=1}^{\infty}$. Границя послідовності їх елементів рівна

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{q+1}}{R_n^{(q)} R_{n-1}^{(q)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{q+1}}{\prod_{j=1}^q h_n^{(j)} h_{n-1}^{(j)}} = \frac{c_{q+1}}{\prod_{j=1}^q x_j^2}.$$

Враховуючи умови (3.5)-(3.6), маємо

$$\frac{|c_{q+1}|}{\prod_{j=1}^q |x_j|^2} < \frac{\prod_{j=1}^{q+1} r_j}{4 \prod_{j=1}^{q+1} |x_j|^2} \leq \frac{r_{q+1} r_1 \prod_{j=2}^q \xi_j^2}{4 |x_1|^2 \prod_{j=2}^q \xi_j^2} = \frac{(1 - \rho_1^3) r_{q+1}}{4(1 + \rho_1)} < \frac{1}{4}.$$

Послідовність зворотних дробів $\{h_n^{(q+1)}\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняє умову теореми 1.10 [див. стр. 18]. Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^{(q+1)} = x_{q+1},$$

де $x_{q+1} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4c_{q+1} / \prod_{j=1}^q x_j^2} \right)$. Тому

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} (h_n^{(1)})^{-1} (h_n^{(2)})^{-1} \dots (h_n^{(N)})^{-1} = \left(\prod_{j=1}^N x_j \right)^{-1}.$$

■

Теорема 3.2. Нехай елементи c_j , $j = \overline{1, N}$, ГЛД (3.1) задовольняють умови

$$c_1 \in \Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + 1/4)| < \pi\},$$

$$\sum_{j=2}^N |c_j| = C \leq \frac{\mu^2}{4}, \text{ де } \mu = \frac{1}{2} (|1 + \sqrt{1 + 4c_1}| - |1 - \sqrt{1 + 4c_1}|).$$

Тоді дріб (3.1) збігається і справджується оцінка швидкості збіжності:

$$1) |F - F_m| \leq L_1 \frac{\xi_1^{m+2} - \xi_2^{m+2}}{\xi_1 - \xi_2}, \quad m \geq 0, \text{ якщо } C < \mu^2/4 \text{ і } \xi_1 \neq \xi_2;$$

$$2) |F - F_m| \leq L_1 (m+1) \xi^{m+1}, \quad m \geq 0, \text{ якщо } C < \mu^2/4 \text{ і } \xi_1 = \xi_2 = \xi;$$

$$3) |F - F_m| \leq L_2 \frac{1}{m+1}, \quad m \geq 0, \text{ якщо } C = \mu^2/4,$$

де $\xi_1 = \left| \frac{1 - \sqrt{1 + 4c_1}}{1 + \sqrt{1 + 4c_1}} \right|$, $\xi_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4C/\mu^2}}{1 + \sqrt{1 - 4C/\mu^2}}$, L_j – деякі додатні сталі, $j = \overline{1, 2}$, F – значення дробу (3.1).

Доведення. Встановимо оцінки знизу для модулів залишків $|R_n^{(q)}|$ 1-періодичного ГЛД (3.1), $n \geq 0$; $q = \overline{1, N}$.

Враховуючи, що $c_1 \in \Omega$, маємо

$$\begin{aligned} |R_n^{(1)}| &= \left| \frac{x_1^{n+2} - y_1^{n+2}}{x_1^{n+1} - y_1^{n+1}} \right| = |x_1| \left| \frac{1 - (y_1/x_1)^{n+2}}{1 - (y_1/x_1)^{n+1}} \right| \geq |x_1| \frac{1 - \xi_1^2}{1 + \xi_1} = |x|(1 - \xi_1) = \\ &= \frac{1}{2} (|1 + \sqrt{1 + 4c_1}| - |1 - \sqrt{1 + 4c_1}|) = \mu. \end{aligned}$$

Якщо $c_1 \in \Omega$, то $\sqrt{1 + 4c_1} > 0$. Покладемо $\sqrt{1 + 4c_1} = x + iy$. Тоді $|1 + x + iy| > |1 - x - iy|$, бо $x > 0$. Отже, $\mu > 0$. Оскільки див. [63] стр. 174

$$\begin{aligned} |1 + x + iy| - |1 - x - iy| &= \sqrt{(1 + x)^2 + y^2} - \sqrt{(1 - x)^2 + y^2} \leq \\ &\leq ||1 + x| - |1 - x|| \leq 2, \end{aligned}$$

то $\mu \leq 1$. Отже, $0 < \mu \leq 1$.

Доведемо методом математичної індукції по n , що для будь-якого фіксованого q , $q = \overline{2, N}$, справджуються оцінки

$$|R_n^{(q)}| \geq g_n, \quad n \geq 0, \quad (3.12)$$

де g_n – n -ий підхідний дріб 1-періодичного неперервного дробу

$$\mu + \frac{-C|}{|\mu|} + \frac{-C|}{|\mu|} + \dots$$

При $n = 0$ маємо: $R_0^{(q)} = 1 \geq \mu = g_0$.

Нехай нерівності (3.12) виконуються для кожного n , $2 \leq n \leq k$. Тоді, використовуючи співвідношення (2.11), при $n = k + 1$ маємо

$$|R_{k+1}^{(q)}| = \left| R_{k+1}^{(1)} + \sum_{j=2}^q \frac{c_j}{R_k^{(j)}} \right| \geq \mu - \sum_{j=2}^q \frac{|c_j|}{|R_k^{(j)}|} \geq \mu - \frac{\sum_{j=2}^q |c_j|}{g_k} = \mu - \frac{C}{g_k} = g_{k+1}.$$

Для оцінки швидкості збіжності ГЛД (3.1) використаємо оцінку (2.25).

Оскільки $c_1 \in \Omega$, то для $n > m \geq 0$, $0 \leq k \leq m$

$$\begin{aligned} |R_{n-k}^{(1)} - R_{m-k}^{(1)}| &= \left| \frac{x_1^{n-k+2} - y_1^{n-k+2}}{x_1^{n-k+1} - y_1^{n-k+1}} - \frac{x_1^{m-k+2} - y_1^{m-k+2}}{x_1^{m-k+1} - y_1^{m-k+1}} \right| = \\ &= \frac{|x_1|^{n-k+1} |y_1|^{m-k+1} |y_1 - x_1 + x(y_1/x_1)^{n-m} - y_1(y_1/x_1)^{n-m}|}{|x_1|^{n-k+1} |x_1|^{m-k+1} |1 - (y_1/x_1)^{n-k+1}| |1 - (y_1/x_1)^{m-k+1}|} \leq \\ &\leq \xi_1^{m-k+1} \frac{|y_1 - x_1|(1 + \xi_1^{n-m})}{(1 - \xi_1^{n-k+1})(1 - \xi_1^{m-k+1})} = M_1 \xi_1^{m-k+1}, \end{aligned}$$

де $M_1 = \frac{|\sqrt{1 + 4c_1}|}{(1 - \xi_1)^2}$.

Позначимо через f_n n -ий підхідний дріб 1-періодичного неперервного дробу

$$1 + \frac{-C/\mu^2}{|1|} + \frac{-C/\mu^2}{|1|} + \dots, \quad (3.13)$$

$x_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4C/\mu^2})$, $y_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4C/\mu^2})$ – притягувальну та відштовхувальну точки дробово-лінійного відображення $t(\omega) = 1 + \frac{-C/\mu^2}{\omega}$.

Очевидно, що $g_n = \mu \cdot f_n$, $n \geq 0$, і $x_2 \cdot y_2 = C/\mu^2$.

Оцінимо вирази $\frac{C^k}{\prod_{r=1}^k g_{n-r} \cdot g_{m-r}}$ зверху при $k = \overline{1, m+1}$.

Нехай $1 \leq k \leq m$, тоді

$$\begin{aligned} \frac{C^k}{\prod_{r=1}^k (g_{n-r} \cdot g_{m-r})} &= \frac{C^k}{\mu^{2k} \prod_{r=1}^k (f_{n-r} \cdot f_{m-r})} = \frac{(C/\mu^2)^k}{\prod_{r=1}^k (f_{n-r} \cdot f_{m-r})} = \\ &= \frac{(x_2 \cdot y_2)^k}{\frac{x_2^{n+1} - y_2^{n+1}}{x_2^{n-k+1} - y_2^{n-k+1}} \cdot \frac{x_2^{m+1} - y_2^{m+1}}{x_2^{m-k+1} - y_2^{m-k+1}}} = \\ &= \left(\frac{y_2}{x_2} \right)^k \frac{(1 - (y_2/x_2)^{n-k+1})(1 - (y_2/x_2)^{m-k+1})}{(1 - (y_2/x_2)^{n+1})(1 - (y_2/x_2)^{m+1})} \leq \frac{\xi_2^k}{(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_2)}. \end{aligned}$$

Покладаючи $g_{-1} = 1$, оцінимо вираз

$$\begin{aligned}
 \frac{C^{m+1}}{\prod_{r=1}^{m+1} (g_{n-r} \cdot g_{m-r})} &= \frac{\mu(C/\mu^2)^{m+1}}{\prod_{r=1}^{m+1} f_{n-r} \cdot \prod_{r=1}^m f_{m-r}} = \\
 &= \frac{\mu(x_2 \cdot y_2)^{m+1}}{\frac{x_2^{n+1} - y_2^{n+1}}{x_2^{n-(m+1)+1} - y_2^{n-(m+1)+1}} \cdot \frac{x_2^{m+1} - y_2^{m+1}}{x_2^2 - y_2^2}} = \\
 &= \left(\frac{y_2}{x_2} \right)^{m+1} \frac{\mu x_2^2 (1 - (y_2/x_2)^{n-m}) (1 - (y_2/x_2)^2)}{(1 - (y_2/x_2)^{n+1}) (1 - (y_2/x_2)^{m+1})} \leq \xi_2^{m+1} \frac{\mu x_2^2}{(1 - \xi_2)}.
 \end{aligned}$$

Отже, маємо оцінки

$$\frac{C^k}{\prod_{r=1}^k (g_{n-r} \cdot g_{m-r})} \leq M_2 \xi_2^k, \quad k = \overline{1, m+1},$$

Позначимо $M_2 = \max \left\{ \frac{1}{(1 - \xi_2)(1 - \xi_2^2)}, \frac{\mu x_2^2}{1 - \xi_2} \right\} = \frac{1}{(1 - \xi_2)(1 - \xi_2^2)}.$

З теореми 1.1 [див. стр. 12] випливає, що $f_n \geq 1/2$, $n \geq 0$. Тоді одержимо:
 $g_n = \mu f_n \geq \mu/2$, $n \geq 0$.

1. Якщо $\xi_1 \neq \xi_2$, то, враховуючи оцінку (2.25), маємо

$$\begin{aligned}
 |F_n - F_m| &\leq \frac{4}{\mu^2} \left(\sum_{k=0}^m M_2 \xi_2^k \cdot M_1 \xi_1^{m-k+1} + M_2 \xi_2^{m+1} \right) \\
 &\leq \frac{4M_1 M_2}{\mu^2 (\xi_1 - \xi_2)} \cdot (\xi_1^{m+2} - \xi_2^{m+2}) = \frac{L_1}{\xi_1 - \xi_2} (\xi_1^{m+2} - \xi_2^{m+2}).
 \end{aligned}$$

При $n \rightarrow \infty$ отримуємо оцінку 1.

2. Якщо $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, то

$$\begin{aligned}
 |F_n - F_m| &\leq \frac{4}{\mu^2} \left(\sum_{k=0}^m M_2 \xi^k \cdot M_1 \xi^{m-k+1} + M_2 \xi^{m+1} \right) \\
 &\leq \frac{4M_1 M_2}{\mu^2} (m+1) \xi^{m+1} = L_1 (m+1) \xi^{m+1},
 \end{aligned}$$

де $L_1 = \frac{4|\sqrt{1+4c_1}|}{\mu^2(1-\xi_1)^2(1-\xi_2^2)(1-\xi_2)}$. Умова $\xi_1 = \xi_2$ виконується, наприклад, якщо $c_1 = -C/\mu^2$.

3. Нехай $\frac{C}{\mu^2} = \frac{1}{4}$. Тоді, згідно з формулою (1.13), запишемо n -ий підхідний

дріб 1-періодичного неперервного дробу (3.13) у вигляді: $f_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$. Для кожного k , $1 \leq k \leq m$, оцінимо вирази

$$\begin{aligned} \frac{C^k}{\prod_{r=1}^k (g_{n-r} \cdot g_{m-r})} &= \frac{(C/\mu^2)^k}{f_{n-1} \cdots f_{n-k} \cdot f_{m-1} \cdots f_{m-k}} = \\ &= \frac{(1/4)^k}{\frac{1}{2^k} \cdot \frac{n+1}{n-k+1} \cdot \frac{1}{2^k} \cdot \frac{m+1}{m-k+1}} = \frac{(n-k+1)(m-k+1)}{(n+1)(m+1)}. \end{aligned}$$

Аналогічно при $k = m+1$ одержимо

$$\frac{C^{m+1}}{\prod_{r=1}^{m+1} (g_{n-r} \cdot g_{m-r})} = \frac{1}{2} \frac{(n-m)\mu}{(n+1)(m+1)}.$$

Отже, враховуючи, що $\mu \leq 1$, оцінимо

$$\begin{aligned} |F_n - F_m| &\leq \frac{4}{\mu^2} \left(\sum_{k=0}^m M_1 \xi_1^{m-k+1} \frac{(n-k+1)(m-k+1)}{(n+1)(m+1)} + \frac{\mu}{2} \frac{n-m}{(n+1)(m+1)} \right) \\ &\leq \frac{4M_1}{\mu^2} \cdot \frac{\sum_{k=0}^m \xi_1^{m-k+1} (n-k+1)(m-k+1) + (n-m)}{(n+1)(m+1)}. \end{aligned}$$

При $n \rightarrow \infty$ отримаємо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^m \xi_1^{m-k+1} (n-k+1)(m-k+1) + (n-m)}{(n+1)(m+1)} &= \\ &= \frac{\sum_{k=0}^m \xi_1^{m-k+1} (m-k+1) + 1}{m+1}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що $0 < \xi_1 < 1$, маємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \xi_1^{m-k+1} (m-k+1) &= \xi_1 + 2\xi_1^2 + \dots + (m+1)\xi_1^{m+1} = \xi_1 \left(\sum_{k=1}^{m+1} \xi_1^k \right)' \\ &= \xi_1 \left(\frac{\xi_1 - \xi_1^{m+2}}{1 - \xi_1} \right)' = \xi_1 \frac{-(m+2)\xi_1^m + (m+1)\xi_1^{m+2} + 1}{(1 - \xi_1)^2} < \frac{\xi_1}{(1 - \xi_1)^2}, \end{aligned}$$

остаточно одержимо

$$|F - F_m| \leq \frac{4M_1}{\mu^2} \cdot \frac{\frac{\xi_1}{(1 - \xi_1)^2} + 1}{m+1} = \frac{L_2}{m+1},$$

де $L_2 = \frac{4M_1 M_2 (\xi_1 + (1 - \xi_1)^2)}{\mu^2 (1 - \xi_1)^2} = \frac{4|\sqrt{1 + 4c_1}|(\xi_1 + (1 - \xi_1)^2)}{\mu^2 (1 - \xi_1)^4}$. ■

3.2. Необмежені множини збіжності та оцінки швидкості збіжності 1-періодичних ГЛД

Теорема 3.3. *Нехай елементи 1-періодичного дробу (3.1) належать параболічним областям, $c_j \in \mathcal{P}_j(\gamma)$, $j = \overline{1, N}$, при деякому γ , $-\pi < \gamma < \pi$, де*

$$\mathcal{P}_j(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} : |z| - \operatorname{Re}(ze^{-i\gamma}) < 2l_j \cos^2(\gamma/2)\}, \quad (3.14)$$

$$l_j = \frac{1}{2N} \left(1 - \frac{j}{2N} \right), \quad j = \overline{1, N}. \quad (3.15)$$

Тоді ГЛД (3.1) збігається і множиною його значень є круг

$$\mathcal{B} \left(\frac{e^{-(\gamma/2)i}}{\cos(\gamma/2)}, \frac{1}{\cos(\gamma/2)} \right), \quad (3.16)$$

де $\mathcal{B}(c, \rho) = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < \rho\}$.

Більше того, якщо $|c_j| < (1 - \frac{j}{2N})^2 \cos^2(\gamma/2)$, $j = \overline{2, N}$, то справджується оцінка швидкості збіжності

$$|F - F_n| \leq L \binom{N-1}{n+N-1} \xi^{m+1}, \quad n \geq 0, \quad (3.17)$$

де $\xi = \max_{j=1, \overline{N}} \{\xi_j\}$; $\xi_1 = \left| \frac{1 - \sqrt{1 + 4c_1}}{1 + \sqrt{1 + 4c_1}} \right|$; $\xi_j = \frac{|c_j|}{\left(1 - \frac{j}{2N}\right)^2 \cos^2(\gamma/2)}$, $j = \overline{2, N}$; L – деяка додатна стала, F – значення дробу (3.1).

Доведення. Покажемо, що круг (3.16) є множиною значень дробу (3.1), тобто, якщо $c_j \in \mathcal{P}_j(\gamma)$, $j = \overline{1, N}$, то його підхідні дроби F_n , $n \geq 1$, належать області (3.16). Розглянемо півплощину

$$\mathcal{V}(\gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \left(z e^{-i(\gamma/2)} \right) \geq -\frac{1}{2N} \cos(\gamma/2) \right\}.$$

Нехай $\mathcal{H}_j(\gamma) = 1 + j\mathcal{V}(\gamma)$, тобто

$$\mathcal{H}_j(\gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \left(z e^{-i(\gamma/2)} \right) \geq \left(1 - \frac{j}{2N} \right) \cos(\gamma/2) \right\}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (3.18)$$

Оскільки $0 \in \mathcal{H}_j(\gamma)$, $j = \overline{1, N}$, то при відображенні $s_j(\omega) = c_j/\omega$ півплощина $\mathcal{H}_j(\gamma)$ переходить в круг

$$\mathcal{B} \left(\frac{c_j e^{-i(\gamma/2)}}{2 \left(1 - \frac{j}{2N} \right) \cos(\gamma/2)}, \frac{|c_j|}{2 \left(1 - \frac{j}{2N} \right) \cos(\gamma/2)} \right), \quad 1 \leq j \leq N.$$

Включення $c_j/\mathcal{H}_j(\gamma) \subset \mathcal{V}(\gamma)$, $j = \overline{1, N}$, рівносильне умові

$$\frac{1}{2N} \cos(\gamma/2) + \operatorname{Re} \left(\frac{c_j e^{-i\gamma}}{2 \left(1 - \frac{j}{2N} \right) \cos(\gamma/2)} \right) > \frac{|c_j|}{2 \left(1 - \frac{j}{2N} \right) \cos(\gamma/2)},$$

що еквівалентно умовам: $c_j \in \mathcal{P}_j(\gamma)$, $j = \overline{1, N}$. Із включення $\frac{c_j}{1 + j\mathcal{V}(\gamma)} \subset \mathcal{V}(\gamma)$, $j = \overline{1, N}$, випливає, що $R_n^{(N)} \in \mathcal{H}_N(\gamma)$, тобто $F_n = 1/R_n^{(N)}$, $n \geq 1$, належать кругу (3.16).

Розглянемо функціональний ГЛД

$$\left(1 + \bigvee_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{z_{i_k}}{1} \right)^{-1}. \quad (3.19)$$

Позначимо $F_n(z)$, $n \geq 0$, $z = (z_1, \dots, z_N)$, його n -й підхідний дріб. Доведемо збіжність послідовності підхідних дробів $\{F_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$. Оскільки $z_j \in \mathcal{P}_j(\gamma)$, $j =$

$\overline{1, N}$, то $F_n(z)$, $n \geq 1$, належать області (3.16). Отже, послідовність $\{F_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ є рівномірно обмеженою для будь-якому компактї множини $\mathcal{P}(\gamma)$, де

$$\mathcal{P}(\gamma) = \mathcal{P}_1(\gamma) \times \dots \times \mathcal{P}_N(\gamma). \quad (3.20)$$

Згідно з теоремою 1.11 [див. стр. 21] ГЛД (3.1) збігається, якщо $z_j \in \Delta_j$, де $\Delta_j = \{z \in \mathbb{C} : |z_j| \leq \min\{1/(4N); l_j \cos(\gamma/2)^2\}\}$, $j = \overline{1, N}$. Отже, згідно з багатовимірним аналогом теореми Стілтєса-Віталі [див. стр. 23] послідовність $\{F_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ рівномірно збігається на будь-якому компактї множини $\mathcal{P}(\gamma)$, зокрема, в точці $z = C$, де $C = (c_1, c_2, \dots, c_N)$.

Встановимо оцінки знизу для модулів залишків $|R_n^{(j)}|$, $n \geq 0$; $j = \overline{1, N}$. Оскільки $c_j \in \mathcal{P}_j(\gamma)$, $j = \overline{1, N}$, то $R_n^{(j)} \in \mathcal{H}_j(\gamma)$, де $\mathcal{H}_j(\gamma)$ визначаємо згідно з формулою (3.18). Отже, для $n \geq 0$ маємо

$$\left| R_n^{(j)} \right| \geq \text{dist}(0; \partial \mathcal{H}_j) = \left(1 - \frac{j}{2N} \right) \cos(\gamma/2), \quad j = \overline{1, N}. \quad (3.21)$$

Оскільки $R_n^{(j)} \neq 0$, $n \geq 0$; $j = \overline{1, N}$, то для оцінки швидкості збіжності дробу (3.1) використаємо формулу (2.20). Маємо

$$|F_{n+m} - F_n| \leq \frac{1}{\left| R_{n+m}^{(N)} \right| \cdot \left| R_n^{(N)} \right|} \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_N=n+1, \\ k_j \geq 0}} \frac{|c_1|^{k_1} |c_2|^{k_2} \dots |c_N|^{k_N}}{\prod_{j=1}^N \prod_{r=1}^{k_j} \left(\left| R_{m+s_j-r}^{(j)} \right| \cdot \left| R_{s_j-r}^{(j)} \right| \right)},$$

де $s_j = n - \sum_{l=j+1}^N k_l$, $R_{-1}^{(j)} = 1$, $j = \overline{1, N}$.

Враховуючи, що $c_1 \in \mathcal{P}_1(\gamma) \subset G$, де $G = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + 1/4)| < \pi\}$ і оцінку (3.11) отриману при доведенні теореми 3.1, запишемо

$$\frac{|c_1|^{k_1}}{\prod_{r=1}^{k_1} \left| R_{s_1+m-r}^{(1)} \right| \cdot \left| R_{s_1-r}^{(1)} \right|} \leq M \xi_1^{k_1}, \quad 1 \leq k_1 \leq n+1, \quad M = \frac{|\sqrt{1+4c_1}|}{(1-\xi_1)^2(1+\xi_1+\xi_1^2)}.$$

З умови теореми та оцінок (3.21) випливає, що

$$\frac{|c_j|}{\left| R_{s_j+m-r}^{(j)} \right| \cdot \left| R_{s_j-r}^{(j)} \right|} \leq \frac{|c_j|}{\left(1 - \frac{j}{2N} \right)^2 \cos^2(\gamma/2)} = \xi_j, \quad j = \overline{2, N}.$$

Отже,

$$\prod_{r=1}^{k_j} \frac{|c_j|}{\left| R_{s_j+m-r}^{(j)} \right| \cdot \left| R_{s_j-r}^{(j)} \right|} \leq \xi_j^{k_j}, \quad 1 \leq k_j \leq n,$$

i

$$\prod_{r=1}^{m+1} \frac{|c_j|}{\left| R_{s_j+m-r}^{(j)} \right| \cdot \left| R_{s_j-r}^{(j)} \right|} \leq \left(1 - \frac{j}{2N} \right) \cos(\gamma/2) \cdot \xi_j^{m+1} < \xi_j^{m+1}, \quad k_j = n+1.$$

Враховуючи, що $|R_n^{(N)}| \geq \frac{1}{2} \cos(\gamma/2)$, $n \geq 0$, отримаємо оцінку

$$|F_{n+m} - F_n| \leq \frac{4}{\cos^2(\gamma/2)} \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_N=n+1, \\ k_j \geq 0}} M \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \dots \xi_N^{k_N} \leq L \binom{N-1}{n+N-1} \xi^{n+1},$$

Перейшовши до границі при $m \rightarrow \infty$, одержимо оцінку (3.17). $\blacksquare$

Для розширення множин збіжності 1-періодичного ГЛД (3.1) використаємо наступну лему.

Лема 3.2. *Нехай l – довільне додатне число, таке що $0 < l < 1$, і $a \in G(l)$, де*

$$G(l) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z+l)| < \pi\}.$$

Тоді

- 1) якщо $\arg a = \pi$, то $a \in \mathcal{P}(\gamma)$ для будь-якого γ , $-\pi < \gamma < \pi$;
- 2) якщо $\arg a \neq \pi$, то $a \in \mathcal{P}(\gamma)$, якщо $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$, де

$$\gamma_1 = \begin{cases} \arccos\left(\frac{A+B}{C}\right), & \text{якщо } \cos \alpha \leq 1 - \frac{2l}{|a|}; \\ -\arccos\left(\frac{A+B}{C}\right), & \text{якщо } \cos \alpha > 1 - \frac{2l}{|a|}, \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\gamma_2 = \arccos\left(\frac{A-B}{C}\right),$$

де

$$\mathcal{P}(\gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| - \operatorname{Re}(ze^{-i\gamma}) \leq 2l \cos^2 \frac{\gamma}{2} \right\}, \quad -\pi < \gamma < \pi.$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \arg a, & A &= (|a| - l)(l + |a| \cos \alpha), \\ B &= |a| |\sin \alpha| \sqrt{2|a|l(1 + \cos \alpha)}, & C &= l^2 + |a|^2 + 2|a|l \cos \alpha.\end{aligned}$$

Доведення. Нехай $\arg a = \pi$. Оскільки $a \in G(l)$, то $|a| \leq l$. Отже, $a \in \mathcal{P}(\gamma)$, $-\pi < \gamma < \pi$.

Опишемо множину парабол, яким належить фіксований елемент $a = |a|e^{i\alpha}$. Якщо $a \in \mathcal{P}(\gamma)$, то

$$|a| - \operatorname{Re}(|a|e^{i(\alpha-\gamma)}) \leq l(1 + \cos \gamma).$$

Після елементарних перетворень маємо

$$(l + |a| \cos \alpha) \cos \gamma + |a| \sin \alpha \sin \gamma \geq |a| - l.$$

Розв'язуючи цю тригонометричну нерівність відносно γ , $-\pi < \gamma < \pi$, отримуємо

$$-\arccos \frac{|a| - l}{\sqrt{C}} + \arccos \frac{l + |a| \cos \alpha}{\sqrt{C}} \leq \gamma \leq \arccos \frac{|a| - l}{\sqrt{C}} + \arccos \frac{l + |a| \cos \alpha}{\sqrt{C}}.$$

Введемо позначення

$$u = \frac{|a| - l}{\sqrt{l^2 + |a|^2 + 2l|a| \cos \alpha}}, \quad v = \frac{l + |a| \cos \alpha}{\sqrt{l^2 + |a|^2 + 2l|a| \cos \alpha}}. \quad (3.23)$$

Тоді

$$\gamma_1 = \arccos v - \arccos u = \begin{cases} \arccos(uv + \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}), & \text{якщо } v \leq u; \\ -\arccos(uv + \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}), & \text{якщо } v > u. \end{cases}$$

Після елементарних перетворень маємо

$$\begin{aligned}\arccos(uv + \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}) &= \\ &= \arccos \left(\frac{(|a| - l)(l + |a| \cos \alpha + |a| \sin \alpha \sqrt{2|a|l(1 + \cos \alpha)})}{l^2 + |a|^2 + 2l|a| \cos \alpha} \right).\end{aligned}$$

Умову $v \leq u$ запишемо у вигляді $\cos \alpha \leq 1 - 2l/|a|$. Звідси одержимо значення параметра γ_1 в (3.22).

Аналогічно, враховуючи, що

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \arccos v + \arccos u = \\ &= \begin{cases} \arccos (uv - \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}), & \text{якщо } v+u \geq 0; \\ 2\pi - \arccos (uv - \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}), & \text{якщо } v+u < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

і, що умова $v+u \geq 0$ еквівалентна нерівності $|a|(1+\cos \alpha) \geq 0$, маємо вираз для знаходження кута γ_2 в (3.22).

Покажемо, що $-\pi < \gamma_1 \leq \gamma_2 < \pi$. Умови $\gamma_1 = -\pi$ або $\gamma_2 = \pi$ еквівалентні співвідношенню $uv = -1$. Враховуючи позначення (3.23), маємо $uv \neq -1$. Оскільки функція $f(x) = \arccos x$ спадна на проміжку $[0; \pi]$, то $\gamma_1 \leq \gamma_2$. ■

Нехай

$$\mathcal{P}_k(\gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| - \operatorname{Re}(ze^{-i\gamma}) < 2l_k \cos^2 \frac{\gamma}{2} \right\}, \quad k = \overline{1, N},$$

– деякі параболічні області, де $l_k = \frac{1}{2N} \left(1 - \frac{k}{2N}\right)$, $k = \overline{1, N}$, $-\pi < \gamma < \pi$.

Позначимо

$$G_1 = \bigcup_{\gamma \in (-\pi, \pi)} \mathcal{P}_1(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + l_1)| < \pi\}. \quad (3.24)$$

Визначимо всі значення параметру γ при яких $c_1 \in \mathcal{P}_1(\gamma)$, використовуючи лему 3.2. Одержимо, що $c_1 \in \mathcal{P}_1(\gamma)$, якщо $l = l_1$ і $\gamma \in [\gamma_1^1, \gamma_2^1]$, де $\gamma_1^1 = \gamma_1$ та $\gamma_2^1 = \gamma_2$ і γ_1, γ_2 визначаються згідно з формулами (3.22). Нехай c_1 – довільний, фіксований елемент з множини G_1 .

Покладемо

$$G_2 = G_2(c_1) = \bigcup_{\gamma \in [\gamma_1^1, \gamma_2^1]} \mathcal{P}_2(\gamma).$$

Виберемо і зафіксуємо елемент $c_2 \in G_2$ [див. рис. 3.1].

Для побудови G_3 використовуємо лему 3.2, де $l = l_2$. Маємо, що $c_2 \in \mathcal{P}_2(\gamma)$, якщо $\gamma \in [\gamma_1^2, \gamma_2^2]$, де $l = l_2$, $\gamma_1^2 = \gamma_1$ і $\gamma_2^2 = \gamma_2$. Позначимо $[\Gamma_1^2, \Gamma_2^2] =$

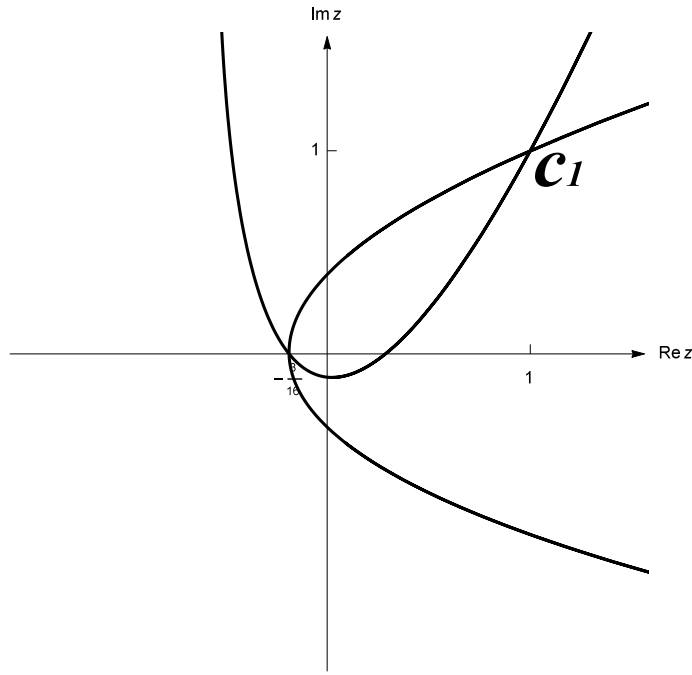


Рис. 3.1. Область G_2 для вибору елемента c_2 .

$[\gamma_1^1, \gamma_2^1] \cap [\gamma_1^2, \gamma_2^2]$ і визначимо

$$G_3 = G_3(c_1, c_2) = \bigcup_{\gamma \in [\Gamma_1^2, \Gamma_2^2]} \mathcal{P}_3(\gamma).$$

Нехай області $G_1, G_2, \dots, G_{k-1}$ визначені, елементи $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$ вибрані з відповідних областей та зафіксовані.

Покладемо

$$[\Gamma_1^{k-1}, \Gamma_2^{k-1}] = \bigcap_{j=1}^{k-1} [\gamma_1^j, \gamma_2^j] \quad (3.25)$$

і визначимо

$$G_k = G_k(c_1, c_2, \dots, c_{k-1}) = \bigcup_{\gamma \in [\Gamma_1^{k-1}, \Gamma_2^{k-1}]} \mathcal{P}_k(\gamma), \quad k = \overline{2, N}. \quad (3.26)$$

Виберемо довільний елемент $c_k \in G_k$. За побудовою маємо: $c_j \in \mathcal{P}_j(\gamma)$, $j = \overline{1, k}$, при умові, що $\gamma \in [\Gamma_1^k, \Gamma_2^k]$.

Теорема 3.4. *Нехай елементи c_k , $k = \overline{1, N}$, 1-періодичного дробу (3.1) належать областям G_k , тобто $c_k \in G_k$, $k = \overline{1, N}$, де G_k визначаються згідно з формулами (3.24)-(3.26). Тоді*

- 1) дріб (3.1) збігається;
 2) множиною його значень є об'єднання кругів

$$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \quad (3.27)$$

де $\mathcal{B}_j = \mathcal{B} \left(\frac{\exp(-\Gamma_j^N i/2)}{\cos(\Gamma_j^N/2)}, \frac{1}{\cos(\Gamma_j^N/2)} \right)$, $j = \overline{1, 2}$; Γ_1^N, Γ_2^N визначаються згідно співвідношення (3.25);

- 3) якщо $|c_j| < \nu_j$, $j = \overline{2, N}$, де $\nu_j = (1 - \frac{j}{2N})^2 \min^2\{\cos(\Gamma_1^N/2); \cos(\Gamma_2^N/2)\}$, то справджується оцінка швидкості збіжності ГЛД (3.1)

$$|F - F_n| \leq L \binom{N-1}{n+N-1} \xi^{n+1}, \quad n \geq 0, \quad (3.28)$$

де $\xi = \max_{j=\overline{1, N}} \{\xi_j\}$; $\xi_1 = \left| \frac{1 - \sqrt{1 + 4c_1}}{1 + \sqrt{1 + 4c_1}} \right|$; $\xi_j = \frac{|c_j|}{\nu_j}$; $j = \overline{2, N}$; L - деяка додатна стала, F - значення дробу (3.1).

Доведення. 1. За побудовою області G_k , $k = \overline{1, N}$, та відрізки $[\Gamma_1^N, \Gamma_2^N]$ не порожні. Отже, для будь-якого $\gamma \in [\Gamma_1^N, \Gamma_2^N]$ виконуються умови: $c_k \in \mathcal{P}_k(\gamma)$, $k = \overline{1, N}$, тому згідно з теоремою 3.3 дріб (3.1) збіжний.

2. Покажемо, що множиною значень цього дробу є об'єднання (3.27) [див. рис 3.2]. Оскільки $c_k \in G_k$, то $c_k \in \mathcal{P}_k(\gamma)$, $k = \overline{1, N}$ при умові $\Gamma_1^N \leq \gamma \leq \Gamma_2^N$. Отже, множиною значень 1-періодичного ГЛД є

$$\bigcup_{\gamma \in [\Gamma_1^N, \Gamma_2^N]} \mathcal{B}(\gamma).$$

Покажемо, що для кожного $\gamma \in [\Gamma_1^N, \Gamma_2^N]$ круг $\mathcal{B}(\gamma) \subset \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

Точка $(x, y) \in \mathcal{B}(\gamma)$ тоді і тільки тоді, коли

$$(x-1)^2 + (y + tg(\gamma/2))^2 < \frac{1}{\cos^2(\gamma/2)}$$

або

$$(x-1)^2 + y^2 + 2y tg(\gamma/2) < 1.$$

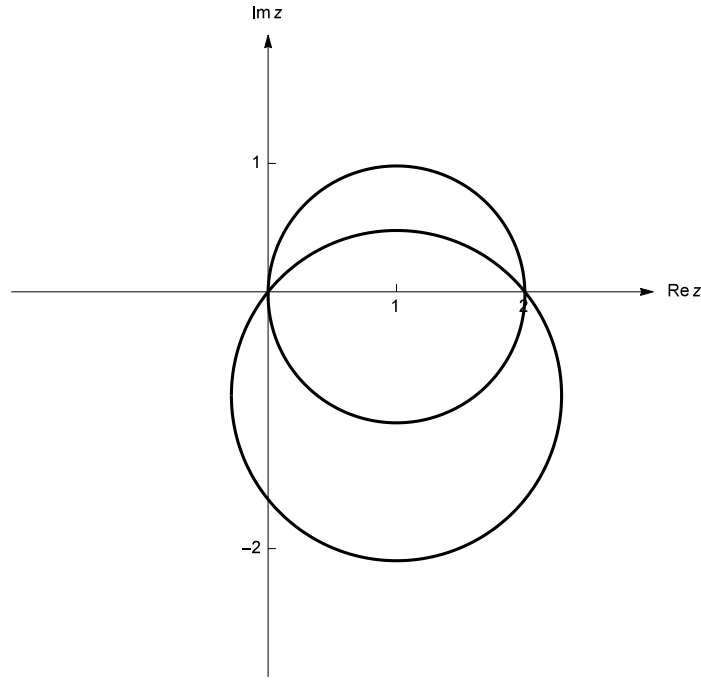


Рис. 3.2. Множина значень 1-періодичного ГЛД.

Аналогічно, якщо $(x, y) \in \mathcal{B}_i(\gamma)$ тоді

$$(x - 1)^2 + y^2 + 2ytg(\Gamma_i/2) < 1, \quad i = 1, 2.$$

Якщо $(x, y) \in \mathcal{B}(\gamma)$ і $y \geq 0$, то

$$(x - 1)^2 + y^2 + 2ytg(\Gamma_1/2) \leq (x - 1)^2 + y^2 + 2ytg(\gamma/2) < 1.$$

Тому $(x, y) \in \mathcal{B}_1(\gamma)$. Якщо $(x, y) \in \mathcal{B}(\gamma)$ і $y < 0$, то

$$1 > (x - 1)^2 + y^2 + 2ytg(\gamma/2) \geq (x - 1)^2 + y^2 + 2ytg(\Gamma_2/2).$$

Тому $(x, y) \in \mathcal{B}_2$.

Отже, $\mathcal{B}(\gamma) \subset \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ і множина (3.27) є множиною значень 1-періодичного ГЛД (3.1).

3. Встановимо оцінки знизу для модулів залишків $|R_n^{(j)}|$, $n \geq 0$, $j = \overline{1, N}$, дробу (3.1). Оскільки $c_j \in G_j$, $j = \overline{1, N}$, то $R_n^{(j)} \in \bigcup_{\gamma \in [\Gamma_1^N; \Gamma_2^N]} \mathcal{H}_j(\gamma)$, де

$$\mathcal{H}_j(\gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \left(z e^{-\gamma i/2} \right) \geq \left(1 - \frac{j}{2N} \right) \cos \frac{\gamma}{2} \right\}.$$

Отже, справджуються оцінки

$$|R_n^{(j)}| \geq \min_{\gamma \in [\Gamma_1^N; \Gamma_2^N]} \{dist(0; \partial \mathcal{H}_j(\gamma))\} = \left(1 - \frac{j}{2N}\right) \min \{\cos(\Gamma_1^N/2); \cos(\Gamma_2^N/2)\},$$

$$n \geq 0; j = \overline{1, N}.$$

Аналогічно, як у попередній теоремі, використаємо формулу (2.20) для оцінки швидкості збіжності дробу (3.1). Враховуючи, що

$$\frac{|c_1|^{k_1}}{\prod_{r=1}^{k_1} |R_{s_1+m-r}^{(1)}| \cdot |R_{s_1-r}^{(1)}|} \leq M \xi_1^{k_1}, \quad 1 \leq k_1 \leq n+1,$$

$$\frac{|c_j|}{|R_{s_j+m-r}^{(j)}| \cdot |R_{s_j-r}^{(j)}|} \leq \frac{|c_j|}{\nu_j}, \quad j = \overline{2, N}.$$

Враховуючи, що $|R_n^{(N)}| |R_{n+m}^{(N)}| \geq \nu_N$, маємо

$$|F_{n+m} - F_n| \leq \frac{1}{\nu_N} \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_N=n+1, \\ k_j \geq 0}} M \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \dots \xi_N^{k_N} \leq L \binom{N-1}{n+N-1} \xi^{n+1},$$

де $L = \frac{M}{\nu_N} = \frac{|\sqrt{1+4c_1}|}{(1-\xi_1)^2}$. Перейшовши до границі при $m \rightarrow \infty$, одержимо оцінку (3.28). $\blacksquare$

Доведемо збіжність 1-періодичного ГЛД в інших областях, використовуючи зворотні неперервні дробу.

Теорема 3.5. *Нехай елементи c_m дробу (3.1) належать відповідно областям G_m , $c_m \in G_m$, $m = \overline{1, N}$, де*

$$G_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + 1/4)| < \pi\}, \quad (3.29)$$

$$G_j = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + X_{j-1}^2/4)| < \pi\}, \quad j = \overline{2, N}, \quad (3.30)$$

і X_j – притягувальні точки дробово-лінійних відображень $t_j(\omega) = X_{j-1} + c_j/\omega$, $j = \overline{1, N}$, $X_0 = 1$. Тоді

1) залишки ГЛД (3.1) збігаються, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(m)} = X_m$ і $X_m \neq 0$, $m = \overline{1, N}$.

2) дріб (3.1) збігається і його значення рівне $F = (X_N)^{-1}$;

3) якщо $R_n^{(j)} \neq 0$, $j = \overline{2, N}$, $n \geq 0$, то $X_j = \prod_{k=1}^j x_k$, де $x_k = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c_k/X_{k-1}^2})$, $k = \overline{1, N}$, $X_0 = 1$.

Доведення. Використовуючи метод математичної індукції, доведемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(m)} = X_m$, $X_m \neq 0$, $m = \overline{1, N}$.

Нехай елемент c_1 належить області (3.29). Оскільки залишок $R_n^{(1)}$ рівний n -му підхідному дробу 1-періодичного неперервного дробу

$$1 + \frac{c_1}{1} + \frac{c_1}{1} + \dots,$$

то $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(1)} = X_1$ і $X_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c_1})$. Очевидно, що $X_1 \neq 0$.

Припускаючи, що $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(m-1)} = X_{m-1}$ і $X_{m-1} \neq 0$. Запишемо m -ий залишок n -го порядку у вигляді

$$R_n^{(m)} = R_n^{(m-1)} + \frac{c_m}{|R_{n-1}^{(m-1)}|} + \dots + \frac{c_m}{|R_0^{(m-1)}|}.$$

Зашишки $R_n^{(m)}$ – зворотні дроби гранично-1-періодичного неперервного дробу. Йому відповідає дробово-лінійне відображення $\hat{t}_m(\omega) = c_m/(X_{m-1} + \omega)$. З рівняння

$$\omega^2 + X_{m-1}\omega - c_m = 0$$

знаходимо нерухомі точки цього відображення

$$\frac{1}{2} \left(-X_{m-1} \pm \sqrt{X_{m-1}^2 + 4c_m} \right), \sqrt{1} = 1.$$

Позначимо

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} \left(-X_{m-1} + \sqrt{X_{m-1}^2 + 4c_m} \right), \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} \left(-X_{m-1} - \sqrt{X_{m-1}^2 + 4c_m} \right). \end{aligned}$$

Доведемо, що $\hat{t}_m(\omega)$ є локсодромічного типу. Для цього достатньо показати, що $\omega_1 \neq \omega_2$. Оскільки $c_m \in G_m$, то справджується співвідношення

$$\left| -1 + \sqrt{1 + 4c_m/X_{m-1}^2} \right| \neq \left| -1 - \sqrt{1 + 4c_m/X_{m-1}^2} \right|.$$

Враховуючи припущення індукції $X_{m-1} \neq 0$, маємо

$$\left| -X_{m-1} + \sqrt{X_{m-1}^2 + 4c_m} \right| \neq \left| -X_{m-1} - \sqrt{X_{m-1}^2 + 4c_m} \right|. \quad (3.31)$$

Отже, $\omega_1 \neq \omega_2$. Згідно з класифікацією типів дробово-лінійних відображень на стр. 15 робимо висновок, що дробово-лінійне відображення $\hat{t}_m(\omega)$ є локсодромічного типу. Враховуючи зауваження до теореми 1.9 [див. стр. 17], одержимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(m)} = -y,$$

де y – відштовхувальна точка дробово-лінійного відображення $\hat{t}_m(\omega)$ ($y = \omega_1$ або $y = \omega_2$).

Умова (3.31) еквівалентна нерівності

$$\left| X_{m-1} + \sqrt{X_{m-1}^2 + 4c_m} \right| > \left| X_{m-1} - \sqrt{X_{m-1}^2 + 4c_m} \right| \quad (3.32)$$

або

$$\left| X_{m-1} + \sqrt{X_{m-1}^2 + 4c_m} \right| < \left| X_{m-1} - \sqrt{X_{m-1}^2 + 4c_m} \right|. \quad (3.33)$$

У першому випадку, згідно з теоремою 1.8 [див. стр. 16], відштовхувальна точка y дробово-лінійного відображення $\hat{t}_m(\omega)$ рівна ω_2 , бо нерівність (3.32) еквівалентна $|\omega_1 + X_{m-1}| > |\omega_2 + X_{m-1}|$. Отже,

$$y = \frac{1}{2} \left(-X_{m-1} - \sqrt{X_{m-1}^2 + 4c_m} \right) = \omega_2.$$

Аналогічно, при виконанні нерівності (3.33) маємо

$$y = \frac{1}{2} \left(-X_{m-1} + \sqrt{X_{m-1}^2 + 4c_m} \right) = \omega_1.$$

Покажемо, що $y = -X_m$ і $X_m \neq 0$, X_m – притягувальна точка дробово-лінійного відображення $t_m(\omega) = X_{m-1} + c_m/\omega$. Нерухомі точки дробово-лінійного відображення $t_m(\omega)$ рівні

$$z_1 = \frac{1}{2} \left(X_{m-1} + \sqrt{X_{m-1}^2 + 4c_m} \right), \quad z_2 = \frac{1}{2} \left(X_{m-1} - \sqrt{X_{m-1}^2 + 4c_m} \right).$$

Очевидно, що $t_m(\omega)$ – локсодромічного типу. З теореми 1.8 при $c = 1$, $d = 0$ маємо, що виконуються умови (3.32), що еквівалентно, що $|z_1| > |z_2|$. Отже, $X_m = z_1 = -y$. Якщо ж $|z_2| > |z_1|$, то аналогічно $X_m = z_2 = -y$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(m)} = X_m,$$

Доведемо, що $X_m \neq 0$. Оскільки $\operatorname{Re} \sqrt{1 + 4c_m/X_{m-1}^2} > 0$, $\operatorname{Re} \sqrt{1 + 4c_m/X_{m-1}^2} \neq 1$ і $X_{m-1} \neq 0$, то $X_m \neq 0$.

2. Враховуючи, що $F_n = R_n^{(N)}$, маємо $F = (X_N)^{-1}$.

У пункті 1 важко записати явний вигляд нерухомої точки X_N , бо є певні труднощі в ідентифікації відштовхувальних та притягувальних точок дробово-лінійних відображень $t_m(\omega)$, $m = \overline{2, N}$. У пункті 3 при виконанні додаткових умов вказано рекурентний алгоритм знаходження X_N .

3. Покажемо, що $R_n^{(1)} \neq 0$, $n \geq 1$. Оскільки $c_1 \in G_1$ і $G_1 = \bigcup_{\gamma \in (-\pi; \pi)} \mathcal{P}(\gamma)$,

$$\mathcal{P}(\gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| - \operatorname{Re}(ze^{-i\gamma}) \leq \frac{1}{2} \cos^2(\gamma/2) \right\},$$

то існує таке γ , $\gamma \in (-\pi, \pi)$, що $c_1 \in \mathcal{P}(\gamma)$. Оскільки елементи дробу (3.9) належать параболі $\mathcal{P}(\gamma)$, то згідно з теоремою 1.4 [див. стр. 13], областю значень цього дробу є півплощина

$$\mathcal{H}(\gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(ze^{-i\gamma/2}) \geq \frac{1}{2} \cos(\gamma/2) \right\}.$$

Із умов $R_n^{(1)} \in \mathcal{H}(\gamma)$ і $\operatorname{dist}(0; \partial \mathcal{H}) = \frac{1}{2} \cos(\gamma/2) > 0$ випливає, що $R_n^{(1)} \neq 0$, $n \geq 1$.

Нехай $R_n^{(j)} \neq 0$, $j = \overline{2, N}$, $n \geq 0$. Покажемо методом математичної індукції по m , що $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(m)} = X_m$ і $X_m \neq 0$, де $X_m = \prod_{j=1}^m x_j$, $m = \overline{1, N}$. Згідно з лемою 2.1, маємо $R_n^{(m)} = R_n^{(m-1)} h_n^{(m)}$, $n \geq 0$, де

$$h_n^{(m)} = 1 + \frac{c_m/R_n^{(m-1)} R_{n-1}^{(m-1)}}{1} + \dots + \frac{c_m/R_1^{(m-1)} R_0^{(m-1)}}{1}.$$

При $m = 1$ маємо: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(1)} = X_1$, $X_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c_1})$.

Припустимо, що для довільного s , $2 \leq s \leq m-1$, справджуються співвідношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(s)} = X_s, \quad X_s \neq 0.$$

Використовуючи припущення індукції, одержимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_m}{R_n^{(m-1)} R_{n-1}^{(m-1)}} = \frac{c_m}{X_{m-1}^2}.$$

Розглянемо зворотні дробу $h_n^{(m)}$, $n \geq 1$. Область G_m при відображенні $w = z/X_{m-1}^2$ переходить в область $\{w \in \mathbb{C} : |\arg(w + 1/4)| < \pi\}$. Оскільки $c_m/X_{m-1}^2 \in G_1$, то згідно з теоремою 1.10 [див. стр. 18] одержуємо, що послідовність зворотних дробів $\{h_n^{(m)}\}_{n=1}^\infty$ збігається до значення $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c_m/X_{m-1}^2})$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^{(m)} = x_m$. Більше того, $x_m \neq 0$.

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(m)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^m h_n^{(j)} = \prod_{j=1}^m x_j = X_m$ і $X_m \neq 0$. ■

3.3. Кутові множини збіжності

Дослідимо збіжність 1-періодичного ГЛД (3.1) у кутових областях. Покажемо, що для його залишків справджуються співвідношення

$$\begin{aligned} |R_n^{(m)}|^2 &= 1 + 2 \sum_{k=1}^m \operatorname{Re} \frac{c_k}{R_{n-1}^{(k)}} + \\ &+ 2 \sum_{\substack{j,k=1; \\ k < j}}^m \left(\operatorname{Re} \frac{c_k}{R_{n-1}^{(k)}} \operatorname{Re} \frac{c_j}{R_{n-1}^{(j)}} + \operatorname{Im} \frac{c_k}{R_{n-1}^{(k)}} \operatorname{Im} \frac{c_j}{R_{n-1}^{(j)}} \right) + \sum_{k=1}^m \frac{|c_k|^2}{|R_{n-1}^{(k)}|^2}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

де $n \geq 1$, $m = \overline{1, N}$. Нехай $R_n^{(m)} = u_n^{(m)} + i v_n^{(m)}$, $m = \overline{1, N}$; $n \geq 0$. Використовуючи визначення залишків, маємо

$$\begin{aligned} R_n^{(m)} &= 1 + \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{R_{n-1}^{(k)}} = 1 + \sum_{k=1}^m \frac{c_k (u_{n-1}^{(k)} - i v_{n-1}^{(k)})}{|R_{n-1}^{(k)}|^2} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^m \frac{|c_k| (\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k) (u_{n-1}^{(k)} - i v_{n-1}^{(k)})}{|R_{n-1}^{(k)}|^2}, \end{aligned}$$

де $\alpha_m = \arg c_m$, $m = \overline{1, N}$. Запишемо формули для дійсної та уявної частин залишку $R_n^{(m)}$

$$u_n^{(m)} = 1 + \sum_{k=1}^m \frac{|c_k| \left(u_{n-1}^{(k)} \cos \alpha_k + v_{n-1}^{(k)} \sin \alpha_k \right)}{|R_{n-1}^{(k)}|^2},$$

$$v_n^{(m)} = \sum_{k=1}^m \frac{|c_k| \left(u_{n-1}^{(k)} \sin \alpha_k - v_{n-1}^{(k)} \cos \alpha_k \right)}{|R_{n-1}^{(k)}|^2}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} |R_n^{(m)}|^2 &= \left(u_n^{(m)} \right)^2 + \left(v_n^{(m)} \right)^2 = 1 + 2 \sum_{k=1}^m \frac{|c_k| \left(u_{n-1}^{(k)} \cos \alpha_k + v_{n-1}^{(k)} \sin \alpha_k \right)}{|R_{n-1}^{(k)}|^2} + \\ &+ \sum_{k=1}^m \frac{|c_k|^2 \left(u_{n-1}^{(k)} \cos \alpha_k + v_{n-1}^{(k)} \sin \alpha_k \right)^2}{|R_{n-1}^{(k)}|^4} + \\ &+ 2 \sum_{\substack{j,k=1; \\ k < j}}^m \frac{|c_k| |c_j| \left(u_{n-1}^{(k)} \cos \alpha_k + v_{n-1}^{(k)} \sin \alpha_k \right) \left(u_{n-1}^{(j)} \cos \alpha_j + v_{n-1}^{(j)} \sin \alpha_j \right)}{|R_{n-1}^{(j)}|^2 |R_{n-1}^{(k)}|^2} + \\ &+ \sum_{k=1}^m \frac{|c_k|^2 \left(u_{n-1}^{(k)} \sin \alpha_k - v_{n-1}^{(k)} \cos \alpha_k \right)^2}{|R_{n-1}^{(k)}|^4} + \\ &+ 2 \sum_{\substack{j,k=1; \\ k < j}}^m \frac{|c_k| |c_j| \left(u_{n-1}^{(k)} \sin \alpha_k - v_{n-1}^{(k)} \cos \alpha_k \right) \left(u_{n-1}^{(j)} \sin \alpha_j - v_{n-1}^{(j)} \cos \alpha_j \right)}{|R_{n-1}^{(j)}|^2 |R_{n-1}^{(k)}|^2}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned} |R_n^{(m)}|^2 &= 1 + 2 \sum_{k=1}^m Re \frac{c_k}{R_{n-1}^{(k)}} \\ &+ \sum_{k=1}^m \frac{|c_k|^2}{|R_{n-1}^{(k)}|^4} \left(u_{n-1}^{(k)2} \cos^2 \alpha_k + 2 u_{n-1}^{(k)} v_{n-1}^{(k)} \cos \alpha_k \sin \alpha_k + v_{n-1}^{(k)2} \sin^2 \alpha_k \right. \\ &\left. + u_{n-1}^{(k)2} \sin^2 \alpha_k - 2 u_{n-1}^{(k)} v_{n-1}^{(k)} \cos \alpha_k \sin \alpha_k + v_{n-1}^{(k)2} \cos^2 \alpha_k \right) \\ &+ 2 \sum_{\substack{j,k=1; \\ k < j}}^m \left(Re \frac{c_k}{R_{n-1}^{(k)}} Re \frac{c_j}{R_{n-1}^{(j)}} + Im \frac{c_k}{R_{n-1}^{(k)}} Im \frac{c_j}{R_{n-1}^{(j)}} \right), \end{aligned}$$

після елементарних перетворень маємо формулу (3.34).

Використовуючи схему доведення формул для дійсних та уявних частин залишків ГЛД (2.1), запропоновану в роботі [1], встановимо аналогічні формули для дійсних та уявних частин 1-періодичного ГЛД (3.1).

Лема 3.3. Для дійсної та уявної частини $\frac{c_m}{R_n^{(m)}}$, $m = \overline{1, N}$, $n \geq 0$, 1-періодичного ГЛД (3.1) справджуються співвідношення

$$\begin{aligned} Re \frac{c_m}{R_n^{(m)}} &= \frac{Rec_m}{|R_n^{(m)}|^2} + \sum_{i_n=1}^m \frac{Rec_m \bar{c}_{i_n}}{|R_n^{(m)}|^2 |R_{n-1}^{(i_n)}|^2} + \dots + \\ &+ \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{i_n=1}^m \sum_{i_{n-1}=1}^{i_n} \dots \sum_{i_{n-r}=1}^{i_{n-r+1}} \frac{Rec_m \prod_{k=0}^r \tilde{c}_{i_{n-k}}}{|R_n^{(m)}|^2 \prod_{r=1}^n |R_{n-r}^{(i_{n+1-r})}|^2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} Im \frac{c_m}{R_n^{(m)}} &= \frac{Imc_m}{|R_n^{(m)}|^2} + \sum_{i_n=1}^m \frac{Imc_m \bar{c}_{i_n}}{|R_n^{(m)}|^2 |R_{n-1}^{(i_n)}|^2} + \dots + \\ &+ \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{i_n=1}^m \sum_{i_{n-1}=1}^{i_n} \dots \sum_{i_{n-r}=1}^{i_{n-r+1}} \frac{Imc_m \prod_{k=0}^r \tilde{c}_{i_{n-k}}}{|R_n^{(m)}|^2 \prod_{r=1}^n |R_{n-r}^{(i_{n+1-r})}|^2}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

де $m = \overline{1, N}$, $n \geq 1$ і

$$\tilde{c}_{i_k} = \begin{cases} c_{i_k}, & \text{якщо } k = n-1, n-3, \dots; \\ \bar{c}_{i_k}, & \text{якщо } k = n, n-2, \dots \end{cases}$$

Доведення. Формули (3.35)-(3.36) доведемо методом математичної індукції по n . При $n = 1$, враховуючи, що $R_1^{(m)} = 1 + \sum_{j=1}^m c_j$, маємо

$$Re \frac{c_m}{R_1^{(m)}} = \frac{Rec_m}{|R_1^{(m)}|^2} + \sum_{j=1}^m \frac{Rec_m \bar{c}_j}{|R_1^{(m)}|^2} \text{ і } Im \frac{c_m}{R_1^{(m)}} = \frac{Imc_m}{|R_1^{(m)}|^2} + \sum_{j=1}^m \frac{Imc_m \bar{c}_j}{|R_1^{(m)}|^2}.$$

Припустимо, що для будь-якого n , виконуються співвідношення (3.35)-(3.36). Тоді, враховуючи припущення індукції і те, що

$$\frac{c_m}{R_{n+1}^{(m)}} = \frac{Rec_m u_{n+1}^{(m)} + Imc_m v_{n+1}^{(m)}}{|R_{n+1}^{(m)}|^2} + i \frac{Imc_m u_{n+1}^{(m)} - Rec_m v_{n+1}^{(m)}}{|R_{n+1}^{(m)}|^2},$$

MæMO

$$\begin{aligned}
Re \frac{c_m}{R_{n+1}^{(m)}} &= \frac{Rec_m}{|R_{n+1}^{(m)}|^2} \left(1 + \sum_{i_{n+1}=1}^m Re \frac{c_{i_{n+1}}}{R_n^{(i_{n+1})}} \right) + \frac{Imc_m}{|R_{n+1}^{(m)}|^2} \left(\sum_{i_{n+1}=1}^m Im \frac{c_{i_{n+1}}}{R_n^{(i_{n+1})}} \right) = \\
&= \frac{Rec_m}{|R_{n+1}^{(m)}|^2} + \frac{Rec_m}{|R_{n+1}^{(m)}|^2} \sum_{i_{n+1}=1}^m \left[\frac{Rec_{i_{n+1}}}{|R_n^{(i_{n+1})}|^2} + \sum_{i_n=1}^{i_{n+1}} \frac{Rec_{i_{n+1}} \bar{c}_{i_n}}{|R_n^{(i_{n+1})}|^2 |R_{n-1}^{(i_n)}|^2} + \dots + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{i_n=1}^m \dots \sum_{i_{n-r}=1}^{i_{n-r+1}} \frac{Rec_{i_{n+1}} \prod_{k=0}^r \tilde{c}_{i_{n-k}}}{|R_n^{(i_{n+1})}|^2 \prod_{r=1}^n |R_{n-r}^{(i_{n+1-r})}|^2} \right] + \\
&\quad + \frac{Imc_m}{|R_{n+1}^{(m)}|^2} \sum_{i_{n+1}=1}^m \left[\frac{Imc_{i_{n+1}}}{|R_n^{(i_{n+1})}|^2} + \sum_{i_n=1}^{i_{n+1}} \frac{Imc_{i_{n+1}} \bar{c}_{i_n}}{|R_n^{(i_{n+1})}|^2 |R_{n-1}^{(i_n)}|^2} + \dots + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{i_n=1}^m \dots \sum_{i_{n-r}=1}^{i_{n-r+1}} \frac{Imc_{i_{n+1}} \prod_{k=0}^r \tilde{c}_{i_{n-k}}}{|R_n^{(i_{n+1})}|^2 \prod_{r=1}^n |R_{n-r}^{(i_{n+1-r})}|^2} \right] = \\
&= \frac{Rec_m}{|R_{n+1}^{(m)}|^2} + \sum_{i_{n+1}=1}^m \frac{Rec_m Rec_{i_{n+1}} + Imc_m Imc_{i_{n+1}}}{|R_{n+1}^{(m)}|^2 |R_n^{(i_{n+1})}|^2} + \\
&\quad + \sum_{i_{n+1}=1}^m \sum_{i_n=1}^{i_{n+1}} \frac{Rec_m Rec_{i_{n+1}} \bar{c}_{i_n} + Imc_m Imc_{i_{n+1}} \bar{c}_{i_n}}{|R_{n+1}^{(m)}|^2 |R_n^{(i_{n+1})}|^2 |R_{n-1}^{(i_n)}|^2} + \dots + \\
&\quad + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{i_n=1}^m \dots \sum_{i_{n-r}=1}^{i_{n-r+1}} \frac{Rec_m Rec_{i_{n+1}} \prod_{k=0}^n \tilde{c}_{i_{n-k}} + Imc_m Imc_{i_{n+1}} \prod_{k=0}^n \tilde{c}_{i_{n-k}}}{|R_{n+1}^{(m)}|^2 |R_n^{(i_{n+1})}|^2 \prod_{r=1}^n |R_{n-r}^{(i_{n+1-r})}|^2} = \\
&= \frac{Rec_m}{|R_{n+1}^{(m)}|^2} + \sum_{i_{n+1}=1}^m \frac{Rec_m \bar{c}_{i_{n+1}}}{|R_{n+1}^{(m)}|^2 |R_n^{(i_{n+1})}|^2} + \\
&\quad + \sum_{r=1}^n \sum_{i_{n+1}=1}^m \dots \sum_{i_{n+1-r}=1}^{i_{n-r+2}} \frac{Rec_m \bar{c}_{i_{n+1}} \prod_{k=1}^r \tilde{c}_{i_{n+1-k}}}{|R_{n+1}^{(m)}|^2 \prod_{r=1}^n |R_{n+1-r}^{(i_{n+1-r})}|^2}.
\end{aligned}$$

Аналогічно, для уявної частини одержимо

$$\begin{aligned}
Im \frac{c_m}{R_{n+1}^{(m)}} &= \frac{Im c_m}{|R_{n+1}^{(m)}|^2} \left(1 + \sum_{i_{n+1}=1}^m Re \frac{c_{i_{n+1}}}{R_n^{(i_{n+1})}} \right) - \frac{Rec_m}{|R_{n+1}^{(m)}|^2} \left(\sum_{i_{n+1}=1}^m Im \frac{c_{i_{n+1}}}{R_n^{(i_{n+1})}} \right) = \\
&= \frac{Im c_m}{|R_{n+1}^{(m)}|^2} + \frac{Im c_m}{|R_{n+1}^{(m)}|^2} \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} \left[\frac{Rec_{i_{n+1}}}{|R_n^{(i_{n+1})}|^2} + \sum_{i_n=1}^{i_{n+1}} \frac{Rec_{i_{n+1}} \bar{c}_{i_n}}{|R_n^{(i_{n+1})}|^2 |R_{n-1}^{(i_n)}|^2} + \dots + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{i_n=1}^m \dots \sum_{i_{n-r}=1}^{i_{n-r+1}} \frac{Rec_{i_{n+1}} \prod_{k=0}^r \tilde{c}_{i_{n-k}}}{|R_n^{(i_{n+1})}|^2 \prod_{r=0}^n |R_{n-r}^{(i_{n+1}-r)}|^2} \right] - \\
&\quad - \frac{Rec_m}{|R_{n+1}^{(m)}|^2} \sum_{i_{n+1}=1}^m \left[\frac{Im c_{i_{n+1}}}{|R_n^{(i_{n+1})}|^2} + \sum_{i_n=1}^{i_{n+1}} \frac{Im c_{i_{n+1}} \bar{c}_{i_n}}{|R_n^{(i_{n+1})}|^2 |R_{n-1}^{(i_n)}|^2} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{i_n=1}^m \dots \sum_{i_{n-r}=1}^{i_{n-r+1}} \frac{Im c_{i_n} \prod_{k=0}^r \tilde{c}_{i_{n-k}}}{\prod_{r=0}^n |R_{n-r}^{(i_{n+1}-r)}|^2} \right] = \\
&= \frac{Im c_m}{|R_{n+1}^{(m)}|^2} + \sum_{i_{n+1}=1}^m \frac{Im c_m Rec_{i_{n+1}} - Rec_m Im c_{i_{n+1}}}{|R_{n+1}^{(m)}|^2 |R_n^{(i_{n+1})}|^2} + \\
&\quad + \sum_{i_{n+1}=1}^m \sum_{i_n=1}^{i_{n+1}} \frac{Im c_m Rec_{i_{n+1}} \bar{c}_{i_n} - Rec_m Im c_{i_{n+1}} \bar{c}_{i_n}}{|R_{n+1}^{(m)}|^2 |R_n^{(i_{n+1})}|^2 |R_{n-1}^{(i_n)}|^2} + \dots + \\
&\quad + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{i_n=1}^m \dots \sum_{i_{n-r}=1}^{i_{n-r+1}} \frac{Im c_m Rec_{i_{n+1}} \prod_{k=0}^r \tilde{c}_{i_{n-k}} - Rec_m Im c_{i_{n+1}} \prod_{k=0}^r \tilde{c}_{i_{n-k}}}{\prod_{r=0}^n |R_{n-r}^{(i_{n+1}-r)}|^2} \\
&= \frac{Im c_m}{|R_{n+1}^{(m)}|^2} + \sum_{i_{n+1}=1}^m \frac{Im c_m \bar{c}_{i_{n+1}}}{|R_{n+1}^{(m)}|^2 |R_n^{(i_{n+1})}|^2} + \\
&\quad + \sum_{r=1}^n \sum_{i_{n+1}=1}^m \dots \sum_{i_{n+1-r}=1}^{i_{n-r+2}} \frac{Im c_m \bar{c}_{i_{n+1}} \prod_{k=1}^r \tilde{c}_{i_{n+1-k}}}{|R_{n+1}^{(m)}|^2 \prod_{r=0}^{n+1} |R_{n+1-r}^{(i_{n+1}-r)}|^2}.
\end{aligned}$$

Це еквівалентно формулам (3.35)-(3.36), якщо замість n взяти $n+1$. ■

Наслідок 3.1. Враховуючи тригонометричну форму запису чисел c_m , $m =$

$\overline{1, N}$, формули (3.35)-(3.36) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{c_m}{R_n^{(m)}} &= \frac{|c_m| \cos \alpha_m}{|R_n^{(m)}|^2} + \sum_{i_n=1}^m \frac{|c_m| |c_{i_n}| \cos(\alpha_m - \alpha_{i_n})}{|R_n^{(m)}|^2 |R_{n-1}^{(i_n)}|^2} + \\ &+ \dots + \sum_{i_n=1}^m \sum_{i_{n-1}=1}^{i_n} \dots \sum_{i_1=1}^{i_2} \frac{|c_m| \prod_{r=1}^n |c_{i_r}| \cos(\alpha_m + \sum_{j=1}^r (-1)^j \alpha_{i_{n+1-j}})}{|R_n^{(m)}|^2 \prod_{r=1}^n |R_{n-r}^{(i_{n+1-r})}|^2}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \frac{c_m}{R_n^{(m)}} &= \frac{|c_m| \sin \alpha_m}{|R_n^{(m)}|^2} + \sum_{i_n=1}^m \frac{|c_m| |c_{i_n}| \sin(\alpha_m - \alpha_{i_n})}{|R_n^{(m)}|^2 |R_{n-1}^{(i_n)}|^2} + \\ &+ \dots + \sum_{i_n=1}^m \sum_{i_{n-1}=1}^{i_n} \dots \sum_{i_1=1}^{i_2} \frac{|c_m| \prod_{r=1}^n |c_{i_r}| \sin(\alpha_m + \sum_{j=1}^r (-1)^j \alpha_{i_{n+1-j}})}{|R_n^{(m)}|^2 \prod_{r=1}^n |R_{n-r}^{(i_{n+1-r})}|^2}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Теорема 3.6. Нехай елементи c_j , $j = \overline{1, N}$, $N > 1$, 1-періодичного ГЛД (3.1) задовольняють умови

$$0 \leq \arg c_1 \leq \arg c_2 \leq \dots \leq \arg c_N \leq \pi/2 \quad (3.39)$$

або

$$-\pi/2 \leq \arg c_N \leq \arg c_{N-1} \leq \dots \leq \arg c_1 \leq 0. \quad (3.40)$$

Тоді дріб (3.1) збігається і справджується оцінка

$$|F_{n+1} - F_n| \leq C \binom{N-1}{N+n-1} \xi^n, \quad n \geq 1, \quad (3.41)$$

де $\xi = \frac{C}{\sqrt{1+C^2}}$, $C = \max_{j=\overline{1, N}} \{|c_j|\}$.

Кутові області збіжності дробу (3.1) зображені на рис. 3.3.

Доведення. Для оцінки швидкості збіжності 1-періодичного дробу (3.1) використаємо формулу (2.20). Маємо:

$$\begin{aligned} |F_{n+1} - F_n| &\leq \frac{1}{|R_{n+1}^{(N)}| \cdot |R_n^{(N)}|} \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_n=n+1, \\ k_j \geq 0}} \prod_{j=1}^N \prod_{r=1}^{k_j} \frac{|c_j|}{|R_{s_j+1-r}^{(j)}| |R_{s_j-r}^{(j)}|} = \\ &\leq \frac{1}{|R_{n+1}^{(N)}| \cdot |R_n^{(N)}|} \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_n=n+1, \\ k_j \geq 0}} \prod_{j=1}^N \prod_{r=1}^{k_j} \omega_{s_j-r}^{(j)} \end{aligned}$$

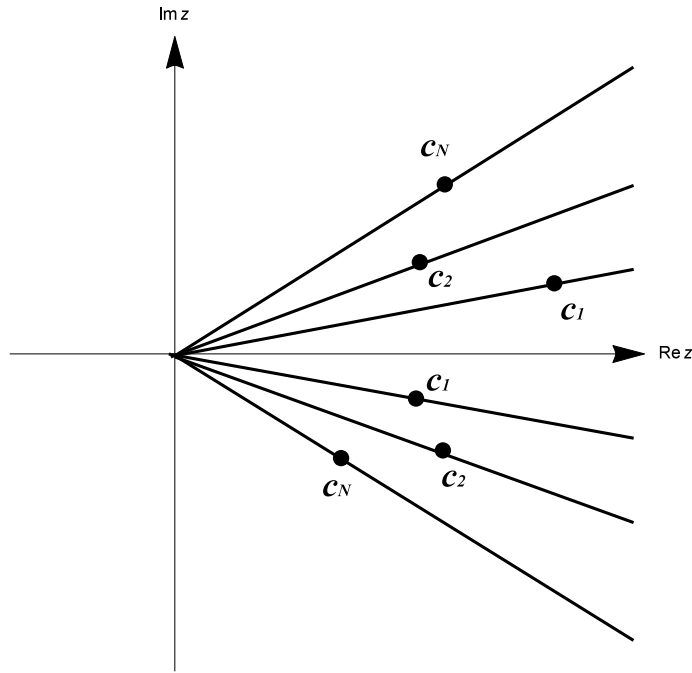


Рис. 3.3. Кутові області збіжності для 1-періодичного ГЛД.

де $s_j = n - \sum_{l=j+1}^N k_l$, $R_{-1}^{(j)} = 1$, $\omega_m^{(j)} = \frac{|c_j|/|R_m^{(j)}|}{|R_{m+1}^{(j)}|}$, $j = \overline{1, N}$; $1 \leq m \leq n-1$.

Доведемо, що при виконанні умов (3.39), справджуються нерівності:

$Re \frac{c_q}{R_n^{(q)}} \geq 0$ і $Im \frac{c_q}{R_n^{(q)}} \geq 0$, $q = \overline{1, N}$; $n \geq 0$. Для цього достатньо показати, що $0 \leq \alpha_m + \sum_{j=1}^r (-1)^j \alpha_{i_{n+1-j}} \leq \pi/2$. Враховуючи визначення (2.2) множини індексів $\mathcal{I}$, маємо

$$1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{n+1-r} \leq i_{n+2-r} \leq \dots \leq i_n \leq m \leq N.$$

З умови (3.39) випливає, що

$$0 \leq \alpha_{i_1} \leq \dots \leq \alpha_{i_{n+1-r}} \leq \dots \leq \alpha_{i_n} \leq \alpha_m \leq \pi/2.$$

Враховуючи оцінки

$$\alpha_m - \alpha_{i_n} + \alpha_{i_{n-1}} + \dots + (-1)^r \alpha_{i_{n+1-r}} \leq \alpha_m - (\alpha_{i_n} - \alpha_{i_{n-1}}) - \dots \leq \pi/2.$$

$$\alpha_m - \alpha_{i_n} + \alpha_{i_{n-1}} + \dots + (-1)^r \alpha_{i_{n+1-r}} \geq (\alpha_m - \alpha_{i_n}) + (\alpha_{i_{n-1}} - \alpha_{i_{n-2}}) + \dots \geq 0.$$

Отже, $0 \leq \alpha_m + \sum_{j=1}^r (-1)^j \alpha_{i_{n+1-j}} \leq \pi/2$. Згідно з формулами (3.37)-(3.38)

маємо: $\operatorname{Re} \frac{c_q}{R_n^{(q)}} \geq 0$ та $\operatorname{Im} \frac{c_q}{R_n^{(q)}} \geq 0$, $n \geq 0$; $q = \overline{1, N}$.

Аналогічно з умов (3.40) випливає, що $-\pi/2 \leq \alpha_m \leq \alpha_{i_k} \leq \alpha_{i_{k+1}} \leq \dots \leq \alpha_{i_{k+n}} \leq 0$. Звідки

$$-\pi/2 \leq \alpha_m \leq \alpha_{i_n} \leq \alpha_{i_{n-1}} \leq \dots \leq \alpha_{i_{n+1-r}} \leq \dots \leq \alpha_{i_1} \leq 0.$$

Отже, $-\pi/2 \leq \alpha_m + \sum_{j=1}^r (-1)^j \alpha_{i_{n+1-j}} \leq 0$. З формул (3.37)-(3.38) випливає,

що $\operatorname{Re} \frac{c_q}{R_m^{(q)}} \geq 0$ і $\operatorname{Im} \frac{c_q}{R_m^{(q)}} \leq 0$, $m \geq 0$; $q = \overline{1, N}$.

Оскільки $\operatorname{Re} R_m^{(q)} = 1 + \sum_{j=1}^q \operatorname{Re} \frac{c_j}{R_{m-1}^{(j)}} \geq 1$, $q = \overline{1, N}$; $m \geq 0$, то справджу-

ються оцінки: $\frac{|c_q|}{|R_m^{(q)}|} \leq \frac{|c_q|}{\operatorname{Re} R_m^{(q)}} \leq C$. Враховуючи, що максимальне значення функція $f(x) = x/\sqrt{1+x^2}$, $0 < x \leq C$, набуває при $x = C$, маємо наступну оцінку

$$\omega_m^{(q)} = \frac{|c_q|/|R_m^{(q)}|}{|R_{m+1}^{(q)}|} \leq \frac{|c_q|/|R_m^{(q)}|}{\sqrt{1+|c_q|^2/|R_m^{(q)}|^2}} \leq \frac{C}{\sqrt{1+C^2}} = \xi, \quad 1 \leq m \leq n-1.$$

Тому, враховуючи, що $|R_n^{(N)}| \geq \operatorname{Re} R_n^{(N)} \geq 1$, отримаємо оцінку (3.41). $\blacksquare$

Умови (3.39) співпадають з умовами в твердженні 7 [2] для 1-періодичного дробу (3.1). Умови (3.40) розширюють область збіжності для цього дробу.

Наслідок 3.2. *Нехай елементи c_j , $j = \overline{1, N}$, 1-періодичного ГЛД (3.1) задовольняють умови: $\alpha_j = \alpha$, $j = \overline{1, N}$, $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$, тоді цей дріб збігається і справджується оцінка швидкості збіжності (3.41).*

3.4. Збіжність $(2,1,\dots,1)$ -періодичного ГЛД спеціального вигляду

Розглянемо p -періодичний неперервний дріб, $p \in \mathbb{N}$

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1}, \text{ де } a_{pn+s} = a_s, \quad n \geq 0; 1 \leq s \leq p. \quad (3.42)$$

Нехай f_n – n -ий підхідний дріб (3.42) та $f_n^{(s)}$ – n -ий залишок s -го порядку цього дробу

$$f_n^{(s)} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=s}^{n+s-1} \frac{a_k}{1} = 1 + \frac{a_s}{|1|} + \dots + \frac{a_{s+n-1}}{|1|}, \quad n \geq 0; s \geq 1.$$

Очевидно, що виконуються наступні співвідношення

$$f_n^{(s)} = 1 + \frac{a_s}{f_{n-1}^{(s+1)}}, \quad f_n^{(1)} = f_n, \quad (3.43)$$

$$f_n^{(rp+s)} = f_n^{(s)}, r \geq 0; \quad f_n^{(p)} = 1 + \frac{a_p}{f_{n-1}^{(1)}}, n \geq 1.$$

Розглянемо 2-періодичний неперервний дріб

$$1 + \frac{a}{|1|} + \frac{b}{|1|} + \frac{a}{|1|} + \frac{b}{|1|} + \dots \quad (3.44)$$

Нехай, як і раніше, f_n – його n -ий підхідний дріб, $f_n^{(j)}$ – n -ий залишок j -го порядку, $j = 1, 2$. Припускаючи, що $1 + a + b \neq 0$, запишемо парну та непарну частини дробу (3.44) див. стр. 11. Парна та непарна частини відповідно мають вигляд [111, 125]

$$1 + a / \left(1 + b + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \frac{c_k}{d_k} \right), \quad 1 + a + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{d_k},$$

де $c_k = -ab$, $d_k = 1 + a + b$.

Позначимо P_ν , Q_ν – ν -підхідний дріб, ν -ий чисельник і знаменник 1-періодичного неперервного дробу

$$1 + \frac{-ab/(1+a+b)^2}{|1|} + \frac{-ab/(1+a+b)^2}{|1|} + \dots \quad (3.45)$$

Нехай $\lambda = 1 + a + b$. Тоді для залишків 1-го та 2-го порядків дробу (3.44) справджуються співвідношення

$$f_{2\nu}^{(1)} = 1 + \frac{a}{-a + \lambda \frac{P_{\nu-1}}{Q_{\nu-1}}} = \frac{\lambda P_{\nu-1}}{-a Q_{\nu-1} + \lambda P_{\nu-1}}, \quad \nu > 0, \quad (3.46)$$

$$f_{2\nu+1}^{(1)} = -b + \lambda \frac{P_\nu}{Q_\nu} = \frac{-b Q_\nu + \lambda P_\nu}{Q_\nu}, \quad \nu \geq 0.$$

Аналогічно

$$f_{2\nu}^{(2)} = 1 + \frac{b}{-b + \lambda \frac{P_{\nu-1}}{Q_{\nu-1}}} = \frac{\lambda P_{\nu-1}}{-b Q_{\nu-1} + \lambda P_{\nu-1}}, \quad \nu > 0, \quad (3.47)$$

$$f_{2\nu+1}^{(2)} = -a + \lambda \frac{P_\nu}{Q_\nu} = \frac{-a Q_\nu + \lambda P_\nu}{Q_\nu}, \quad \nu \geq 0.$$

Лема 3.4. *Нехай елементи 2-періодичного неперервного дробу (3.44) задовольняють умову: $-ab/\lambda^2 \in \Omega$, де $\lambda = 1 + a + b$, $\lambda \neq 0$, і $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + 1/4)| < \pi\}$. Тоді*

- 1) дріб (3.44) збігається і $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = x$, де $x = \frac{1}{2}(1 + a - b + \lambda \sqrt{1 - 4ab/\lambda^2})$;
- 2) крім цього, якщо для залишків виконуються умови: $f_{2k-1}^{(1)} \neq 0$ і $|f_{2k-1}^{(2)}| \geq \varepsilon > 0$ при деяком додатному ε і довільному натуральному k , то справджується оцінка швидкості збіжності

$$|f_n - x| \leq C q^{[(n+1)/2]}, \quad n \geq 0, \quad (3.48)$$

$$\text{де } q = \left| \frac{1 - \sqrt{1 - 4ab/\lambda^2}}{1 + \sqrt{1 - 4ab/\lambda^2}} \right| < 1, \text{ } C - \text{деяка додатна стала.}$$

Доведення. 1. Нехай $s = -ab/\lambda^2$ і g_n – n -ий підхідний дріб (3.45). Оскільки $s \in \Omega$, то згідно з [104, 109] 1-періодичний дріб (3.45) збігається і вико-

нуються наступні співвідношення

$$P_k = \frac{\tilde{x}^{k+2} - \tilde{y}^{k+2}}{\tilde{x} - \tilde{y}}, \quad Q_k = \frac{\tilde{x}^{k+1} - \tilde{y}^{k+1}}{\tilde{x} - \tilde{y}}, \quad k \geq 0;$$

$$\tilde{x} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4ab/\lambda^2}), \quad \tilde{y} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4ab/\lambda^2}), \quad |\tilde{x}| > |\tilde{y}|; \quad (3.49)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \tilde{x}.$$

Оскільки $\lambda \neq 0$, то для непарної та парної частин 2-періодичного неперервного дробу маємо: $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_{2\nu+1} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_{2\nu+1}^{(1)} = -b + \lambda\tilde{x} = x$ та $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_{2\nu} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_{2\nu}^{(1)} = 1 + a/(-a + \lambda\tilde{x}) = x$. Отже, 2-періодичний неперервний дріб збігається і $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu = x$.

2. Якщо $c \in \Omega$, то $g_n \neq 0$ і $P_n \neq 0$, $n > 0$. Отже, $f_{2n}^{(j)} \neq 0$, $n \geq 1$; $j = 1, 2$.
Із формули (2.18) при $n > 0$, $m > 0$ для 2-періодичного неперервного дробу одержимо оцінку

$$|f_{n+2m} - f_n| = \frac{|a|^{k_1} |b|^{k_2}}{\prod_{j=1}^{n+1} (|f_{n+2m-j}^{(j+1)}| |f_{n+2m-j}^{(j+1)}|)} =$$

$$= \frac{|a|^{k_1} |b|^{k_2}}{\prod_{q=1}^{k_1} (|f_{n+2m-2q+1}^{(2)}| |f_{n-2q+1}^{(2)}|) \prod_{q=1}^{k_2} (|f_{n+2m-2q}^{(1)}| |f_{n-2q}^{(1)}|)},$$

де $k_1 = k_2 = (n+1)/2$, якщо $n+1$ – парне, або $k_1 = n/2 + 1$, $k_2 = n/2$, якщо $n+1$ – непарне; $f_{-1}^{(j)} = 1$, $j = \overline{1, 2}$.

Для оцінок добутоків залишків дробу в знаменнику розглянемо 2 випадки в залежності парності чи непарності індексу n .

Нехай $n = 2r + 1$, тоді $n + 2m = 2k + 1$, де $k = r + m$, $r \geq 0$, $m > 0$, і

$$|f_{2k+1} - f_{2r+1}| = \frac{|a|^{r+1} |b|^{r+1}}{\prod_{q=1}^{r+1} (|f_{2k-2q+2}^{(2)}| |f_{2k-2q+1}^{(1)}| |f_{2r+1-2q+1}^{(2)}| |f_{2r+1-2q}^{(1)}|)}.$$

Враховуючи, що $Q_m = P_{m-1}$, $m = \overline{1, k-1}$, оцінимо добутки

$$\begin{aligned} \prod_{q=1}^{r+1} \left| f_{2(k-q+1)}^{(2)} \cdot f_{2(k-q)+1}^{(1)} \right| &= \left| f_{2k}^{(2)} f_{2(k-1)+1}^{(1)} \cdots f_{2(k-r)}^{(2)} f_{2(k-r-1)+1}^{(1)} \right| \\ &= \left| \frac{\lambda P_{k-1}}{-bQ_{k-1} + \lambda P_{k-1}} \frac{-bQ_{k-1} + \lambda P_{k-1}}{Q_{k-1}} \cdots \frac{-bQ_{k-r-1} + \lambda P_{k-r-1}}{Q_{k-r-1}} \right| = \\ &= |\lambda|^{r+1} \left| \frac{P_{k-1}}{Q_{k-r-1}} \right| \geq |\lambda|^{r+1} |\tilde{x}|^{r+1} \frac{1 - |\tilde{y}/\tilde{x}|^{k+1}}{1 + |\tilde{y}/\tilde{x}|^{k-r}} \geq |\lambda|^{r+1} |\tilde{x}|^{r+1} \frac{(1-q)}{(1+q)}. \end{aligned}$$

Аналогічно маємо

$$\begin{aligned} \prod_{q=1}^{r+1} \left| f_{2(r-q+1)}^{(2)} \cdot f_{2(r-q)+1}^{(1)} \right| &= \left| f_{2r}^{(2)} f_{2(r-1)+1}^{(1)} \cdots f_0^{(2)} f_{-1}^{(1)} \right| = \\ &= \left| \frac{\lambda P_{r-1}}{-bQ_{r-1} + \lambda P_{r-1}} \frac{-bQ_{r-1} + \lambda P_{r-1}}{Q_{r-1}} \cdots \frac{-bQ_0 + \lambda P_0}{Q_0} \cdot 1 \cdot 1 \right| = \\ &= |\lambda|^r |P_{r-1}| \geq |\lambda|^r |\tilde{x}|^r \frac{1 - |\tilde{y}/\tilde{x}|^{r+1}}{1 + |\tilde{y}/\tilde{x}|} \geq |\lambda|^r |\tilde{x}|^r \frac{1-q}{1+q}. \end{aligned}$$

Оскільки $|\tilde{x}||\tilde{y}| = |ab/\lambda^2|$, то справджується оцінка

$$|f_{2k+1} - f_{2r+1}| \leq \frac{|ab/\lambda^2|^{r+1} |\lambda|(1+q)^2}{|\tilde{x}|^{2r}(1-q)^2} = \frac{|\tilde{y}|^{r+1} |\tilde{x}|^{r+1} |\tilde{x}|^2 |\lambda|(1+q)^2}{|\tilde{x}|^{2r+1}(1-q)^2} \leq C \left| \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}} \right|^{r+1},$$

$$\text{де } C = \frac{|\tilde{x}|^2 |\lambda|(1+q)^2}{(1-q)^2}.$$

Нехай $n = 2r$, $r \geq 1$, і $n + 2m = 2k$. Тоді $k_1 = r + 1$, $k_2 = r$ і

$$|f_{2k} - f_{2r}| \leq \frac{|a|^{r+1} |b|^r}{\prod_{q=1}^r \left(|f_{2k-2q+1}^{(2)}| |f_{2k-2q}^{(1)}| |f_{2r-2q+1}^{(2)}| |f_{2r-2q}^{(1)}| \right) |f_{2(k-r)-1}^{(2)}|}.$$

Оцінимо знизу добутки

$$\begin{aligned}
& \left(\prod_{q=1}^r \left| f_{2(k-q)+1}^{(2)} f_{2(k-q)}^{(1)} \right| \right) |f_{2(k-r)-1}^{(2)}| = \left| f_{2(k-1)+1}^{(2)} f_{2(k-1)}^{(1)} \cdots f_{2(k-r-1)+1}^{(2)} \right| = \\
& = \left| \frac{-aQ_{k-1} + \lambda P_{k-1}}{Q_{k-1}} \frac{\lambda P_{k-2}}{-aQ_{k-2} + \lambda P_{k-2}} \cdots \frac{-aQ_{k-r-1} + \lambda P_{k-r-1}}{Q_{k-r-1}} \right| = \\
& = |\lambda|^r \left| \frac{-aQ_{k-1} + \lambda P_{k-1}}{Q_{k-r-1}} \right| \geq |\lambda|^r |\tilde{x}|^r \varepsilon \frac{1 - |\tilde{y}/\tilde{x}|^k}{1 + |\tilde{y}/\tilde{x}|^{k-r}} \\
& \geq |\lambda|^r |\tilde{x}|^r \varepsilon \frac{1 - q^2}{(1 + q)} = |\lambda|^r |\tilde{x}|^r \varepsilon (1 - q),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \prod_{q=1}^r \left| f_{2(r-q)+1}^{(2)} \cdot f_{2(r-q)}^{(1)} \right| = \left| f_{2(r-1)+1}^{(2)} f_{2(r-1)}^{(1)} \cdots f_1^{(2)} f_0^{(1)} \right| \\
& = \left| \frac{-aQ_{r-1} + \lambda P_{r-1}}{Q_{r-1}} \frac{\lambda P_{r-2}}{-aQ_{r-2} + \lambda P_{r-2}} \cdots \frac{-aQ_0 + \lambda P_0}{Q_0} \right| \\
& = |\lambda|^{r-1} |-aQ_{r-1} + \lambda P_{r-1}| \\
& \geq |\lambda|^{r-1} |\tilde{x}|^{r-1} \varepsilon \frac{1 - |\tilde{y}/\tilde{x}|^r}{1 + |\tilde{y}/\tilde{x}|} \geq |\lambda|^{r-1} |x|^{r-1} \frac{\varepsilon(1 - q)}{1 + q}.
\end{aligned}$$

Отже, маємо

$$|f_{2k} - f_{2r}| \leq \frac{|a|^{r+1} |b|^r (1 + q)}{|\lambda|^{2r-1} |\tilde{x}|^{2r-1} (1 - q)^2 \varepsilon^2} \leq C \left| \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}} \right|^r$$

Нехай $m \rightarrow \infty$, тоді $\lim_{m \rightarrow \infty} f_{n+2m} = x$ і маємо оцінку (3.48). ■

Теорема 3.7. *Нехай елементи $(2, 1, \dots, 1)$ -періодичного ГЛД*

$$1 + \bigvee_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k, s}}{1} \quad (3.50)$$

задовольняють умови: $\lambda := 1 + c_{1,1} + c_{1,2}$, $\lambda \neq 0$, i

$$-c_{1,1}c_{1,2}/\lambda^2 \in \Omega_1, \quad c_{j,1} \in \Omega_j, \quad j = \overline{2, N},$$

де $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z+1/4)| < \pi\}$, $\Omega_j = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z+X_{j-1}^2/4)| < \pi\}$, X_j – притягувальні точки дробово-лінійних відображень $t_j(\omega) = X_{j-1} + c_{j,1}/\omega$, $j = \overline{2, N}$; $X_1 = \frac{1}{2}(\lambda - 2c_{1,2} + \lambda S)$, $S = \sqrt{1 - 4c_{1,1}c_{1,2}/\lambda^2}$, $\sqrt{1} = 1$.

Тоді

1) дріб (3.50) збігається до значення F , причому $F = X_N$;

2) справджується оцінка швидкості збіжності цього дробу

$$|F - F_n| \leq L \binom{N-1}{N+n-1} \frac{(\sqrt{\rho_1})^{n+1} - \rho^{n+1}}{\rho_1/\rho - \sqrt{\rho_1}}, \quad n \geq 3, \quad (3.51)$$

якщо виконуються ще такі додаткові умови:

а) існують додатні сталі γ_j такі, що для будь-якого $k \geq 0$ справджуються нерівності: $|R_{2k+1}^{(1,j)}| \geq \gamma_j$, $j = 1, 2$;

б) $A := \inf_{k \geq 1} \left| \frac{-c_{1,2} + \lambda g_k}{-c_{1,1} + \lambda g_{k-1}} \right| > 0$ і $B := \inf_{k \geq 1} \left| \frac{-c_{1,2} + \lambda g_{k-1}}{-c_{1,1} + \lambda g_{k-1}} \right| > 0$, де g_k – k -ий підхідний дріб 1-періодичного неперервного дробу (3.45), $k \geq 0$, у якого $a = c_{1,1}$, $b = c_{1,2}$;

в) елементи дробу (3.50) задовольняють нерівності

$$|c_{j,1}| < \frac{1}{4} \prod_{k=1}^{j-1} r_k, \quad j = \overline{2, N},$$

де $r_k = (1 + d_k)^2/4$, $d_k = \sqrt{1 - 4|c_{k,1}| / \prod_{m=1}^{k-1} r_m}$, $k = \overline{2, N}$,

$$\rho_1 = \left| \frac{1 - S}{1 + S} \right|, \quad \rho = \max_{k=\overline{2, N}} \left\{ \frac{1}{(1 + d_k)^2} \right\},$$

$r_1 = \frac{1}{2}|\lambda|(|1 + S| - |1 - S|) \min\{A, B\}$, L – деяка стала.

Доведення. 1. Методом математичної індукції по q доведемо, що послідовності залишків $\{R_n^{(q,1)}\}_{n=1}^\infty$, $q = \overline{1, N}$, збігаються, більше того, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(q,1)} = X_q$, $X_q \neq 0$, де X_q – притягувальні точки дробово-лінійних відображень $t_q(\omega) = X_{q-1} + c_{q,1}/\omega$, $q = \overline{2, N}$, X_1 – притягувальна точка відображення

$$t_1(\omega) = 1 + \frac{c_{1,1}}{1 + \frac{c_{1,2}}{\omega}}.$$

Нехай $q = 1$. Залишок $R_n^{(1,1)}$ є n -им підхідним дробом 2-періодичного неперервного дробу

$$1 + \frac{c_{1,1}|}{|1|} + \frac{c_{1,2}|}{|1|} + \frac{c_{1,1}|}{|1|} + \frac{c_{1,2}|}{|1|} + \dots \quad (3.52)$$

Збіжність послідовності $\{R_n^{(1,1)}\}_{n=1}^{\infty}$ впливає з леми 3.4, більше того $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(1,1)} = X_1$, де X_1 – притягувальна точка дробово-лінійного відображення $t_1(\omega)$ та

$$X_1 = \frac{1}{2}(\lambda - 2c_{1,2} + \lambda S). \quad (3.53)$$

Оскільки, $\omega = 0$ не є нерухомою точкою дробово-лінійного відображення $t_1(\omega)$, то $X_1 \neq 0$.

Припустимо, що для довільного $k > 1$ справджуються співвідношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(s,1)} = X_s, \quad X_s \neq 0, \quad 2 \leq s \leq k.$$

При $q = k + 1$ залишки $R_n^{(k+1,1)}$ запишемо у вигляді

$$R_n^{(k+1,1)} = R_n^{(k,1)} + \frac{c_{k+1,1}|}{|R_{n-1}^{(k,1)}|} + \dots + \frac{c_{k+1,1}|}{|R_0^{(k,1)}|}.$$

Залишок $R_n^{(k+1,1)}$ є зворотним неперервним дробом гранично-1-періодичного неперервного дробу $\overset{\infty}{\underset{j=0}{D}}(c_{k+1,1}/R_j^{(k,1)})$, у якого $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(k,1)} = X_k$ і $X_k \neq 0$, згідно з припущенням індукції. Цьому дробу відповідає дробово-лінійне відображення $\hat{t}_{k+1}(\omega) = c_{k+1,1}/(X_k + \omega)$. Аналогічно, як у теоремі 3.5, можна показати, що з умови $c_{k+1,1} \in \Omega_{k+1}$ випливає, що дробово-лінійне відображення $\hat{t}_{k+1}(\omega)$ – локсодромічного типу. Із зауваження до теореми 1.9 [див. стр. 17] випливає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(k+1,1)} = -y_{k+1}$, де y_{k+1} є відштовхувальна точка дробово-лінійного відображення $\hat{t}_{k+1}(\omega)$. Більше того, $y_{k+1} = -X_{k+1}$, де X_{k+1} – притягувальна точка дробово-лінійного відображення $t_{k+1}(\omega) = X_k + c_{k+1,1}/\omega$. З умови $c_{k+1,1} \in \Omega_{k+1}$ випливає, що $\operatorname{Re} \sqrt{1 + 4c_{k+1,1}/X_k^2} > 0$. Якщо ж $c_{k+1,1} \neq 0$, то $\operatorname{Re} \sqrt{1 + 4c_{k+1,1}/X_k^2} \neq 1$. Отже, враховуючи, що

$$X_{k+1}, Y_{k+1} = \frac{1}{2} \left(X_k \pm \sqrt{X_k^2 + 4c_{k+1,1}} \right),$$

маємо $X_{k+1} \neq 0$.

Отже, остаточно одержимо, що значення дробу (3.50) рівне $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = X_N$.

2. Із формули (2.18) при умові, що всі залишки відмінні від нуля, для $(2, 1, \dots, 1)$ -періодичного ГЛД впливає, що

$$|F_{n+2m} - F_n| \leq \sum_{k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(N)}} \frac{|c_{1,1}|^{k_{1,1}} |c_{1,2}|^{k_{1,2}} |c_{2,1}|^{k_{2,1}} \dots |c_{N,1}|^{k_{N,1}}}{\prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{k_i} \left(|R_{2m+l_i-j}^{(i,j+1)}| |R_{l_i-j}^{(i,j+1)}| \right)}, \quad n > 0, m > 0, \quad (3.54)$$

де $l_i = n - \sum_{t=i+1}^N k_t$, $R_{-1}^{(q,j)} = 1$, $q = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, p_q}$; множину індексів $\mathcal{I}_{n+1}^{(N)}$ визначається згідно з (2.16), індекс $k_{i,s}$ – згідно з (2.15).

Оцінимо знизу добуток модулів залишків 1-ої вітки в знаменнику нерівності (3.54), де $i = 1$. Враховуючи, що $\lambda \neq 0$, маємо: $R_n^{(1,2)} = f_n^{(2)}$ і $R_n^{(1,1)} = f_n^{(1)}$, $n \geq 1$, де $f_n^{(2)}$, $f_n^{(1)}$ – залишки неперервного дробу (3.52). Оскільки $l_1 = n - \sum_{t=2}^N k_t = k_1 - 1$, то $\prod_{j=1}^{k_1} R_{2m+l_1-j}^{(1,j+1)} R_{l_1-j}^{(1,j+1)} = \prod_{j=1}^{k_1} R_{2m+k_1-j-1}^{(1,j+1)} R_{k_1-j-1}^{(1,j+1)}$.

Нехай $k_1 = 2\nu$, тоді

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{2\nu} R_{2m+2\nu-j-1}^{(1,j+1)} R_{2\nu-j-1}^{(1,j+1)} &= \prod_{j=1}^{\nu} \left(R_{2(m+\nu-j)}^{(1,2)} R_{2(m+\nu-j)-1}^{(1,1)} \right) \prod_{j=1}^{\nu} \left(R_{2(\nu-j)}^{(1,2)} R_{2(\nu-j)-1}^{(1,1)} \right) = \\ &= \prod_{j=1}^{\nu} \left(f_{2(m+\nu-j)}^{(2)} f_{2(m+\nu-j)-1}^{(1)} \right) \prod_{j=1}^{\nu} \left(f_{2(\nu-j)}^{(2)} f_{2(\nu-j)-1}^{(1)} \right). \end{aligned}$$

Значення залишків знаходимо згідно з формулами (3.46)-(3.47), значення P_ν , Q_ν , $\nu \geq 1$, нерухомих точок $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ – згідно з (3.49). Отже, маємо

$$\begin{aligned} f_{2(m+\nu-j)}^{(2)} f_{2(m+\nu-j)-1}^{(1)} &= \\ &= \frac{\lambda P_{m+\nu-j-1}}{-c_{1,2} Q_{m+\nu-j-1} + \lambda P_{m+\nu-j-1}} \frac{-c_{1,2} Q_{m+\nu-j-1} + \lambda P_{m+\nu-j-1}}{Q_{m+\nu-j-1}} = \\ &= \frac{\lambda P_{m+\nu-j-1}}{Q_{m+\nu-j-1}} = \frac{\lambda Q_{m+\nu-j}}{Q_{m+\nu-j-1}} \end{aligned}$$

і

$$\prod_{j=1}^{\nu} f_{2(m+\nu-j)}^{(2)} f_{2(m+\nu-j)-1}^{(1)} \geq \lambda^\nu \prod_{j=1}^{\nu} \frac{Q_{m+\nu-j}}{Q_{m+\nu-j-1}} = \lambda^\nu \frac{Q_{m+\nu-1}}{Q_{m-1}} = \lambda^\nu \frac{\tilde{x}^{m+\nu} - \tilde{y}^{m+\nu}}{\tilde{x}^m - \tilde{y}^m}.$$

Аналогічно отримаємо

$$f_{2(\nu-j)}^{(2)} f_{2(\nu-j)-1}^{(1)} = \frac{\lambda Q_{m+\nu-j}}{Q_{m+\nu-j-1}} \text{ i } \prod_{j=1}^{\nu} f_{2(\nu-j)}^{(2)} f_{2(\nu-j)-1}^{(1)} = \lambda^{\nu} \frac{\tilde{x}^{\nu} - \tilde{y}^{\nu}}{\tilde{x} - \tilde{y}}.$$

Отже, враховуючи, що $m > 1$, $1 \leq \nu \leq k_1/2$, $\tilde{x} - \tilde{y} = \sqrt{1 - 4c_{1,1}c_{1,2}/\lambda^2}$, одержимо оцінку знизу

$$\prod_{j=1}^{k_1} \left| R_{2m+l_1-j}^{(1,j+1)} \right| \left| R_{l_1-j}^{(1,j+1)} \right| \geq |\lambda|^{2\nu} |\tilde{x}|^{2\nu} \frac{(1 - \rho_1)^2}{|S|} \geq |\lambda|^{k_1} |\tilde{x}|^{k_1} \frac{(1 - \rho_1)^2}{|S|}.$$

Нехай $k_1 = 2\nu + 1$, тоді аналогічно отримаємо

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{2\nu+1} (R_{2m+2\nu-j}^{(1,j+1)} R_{2\nu-j}^{(1,j+1)}) &= \prod_{j=1}^{2\nu} \left(R_{2m+2\nu-j}^{(1,j+1)} R_{2\nu-j}^{(1,j+1)} \right) R_{2m-1}^{2(\nu+1)} = \\ &= \prod_{j=1}^{\nu} \left(f_{2(m+\nu-j)+1}^{(2)} f_{2(m+\nu-j)}^{(1)} \right) f_{2m-1}^{(2)} \prod_{j=1}^{\nu} \left(f_{2(\nu-j)+1}^{(2)} f_{2(\nu-j)}^{(1)} \right). \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned} f_{2(\nu-j)+1}^{(2)} f_{2(\nu-j)}^{(1)} &= \frac{-c_{1,1}Q_{\nu-j} + \lambda P_{\nu-j}}{Q_{\nu-j}} \frac{\lambda P_{\nu-j-1}}{-c_{1,1}Q_{\nu-j-1} + \lambda P_{\nu-j-1}} \\ &= \lambda \frac{Q_{\nu-j} \delta_{\nu-j}}{Q_{\nu-j-1} \delta_{\nu-j-1}}, \end{aligned}$$

де $\delta_k = -c_{1,1} + \lambda P_k/Q_k$, $k \geq 0$,

$$\prod_{j=1}^{\nu} f_{2(\nu-j)+1}^{(2)} f_{2(\nu-j)}^{(1)} = \lambda^{\nu-1} \frac{Q_{\nu-1}}{Q_0} (-c_{1,1} + \lambda P_{\nu-1}/Q_{\nu-1}) = \lambda^{\nu-1} Q_{\nu-1} R_{2\nu-1}^{(1,2)},$$

$$\prod_{j=1}^{\nu} \left| f_{2(\nu-j)+1}^{(2)} f_{2(\nu-j)}^{(1)} \right| \geq |\lambda|^{\nu-1} |\tilde{x}|^{\nu} \frac{(1 - \rho_1)^{\gamma_2}}{|S|} = |\lambda|^{[k_1/2]} |\tilde{x}|^{[k_1/2]} \frac{(1 - \rho_1)^{\gamma_2}}{|\lambda||S|}.$$

Аналогічно, отримаємо

$$\prod_{j=1}^{\nu} \left(f_{2(m+\nu-j)+1}^{(2)} f_{2(m+\nu-j)}^{(1)} \right) f_{2m-1}^{(2)} = \lambda^{\nu} \frac{Q_{m+\nu-1}}{Q_{\nu-1}} (-c_{1,1} + \lambda P_{m+\nu-1}/Q_{m+\nu-1}),$$

$$\prod_{j=1}^{\nu} \left(\left| f_{2(m+\nu-j)+1}^{(2)} f_{2(m+\nu-j)}^{(1)} \right| \right) |f_{2m-1}^{(2)}| \geq |\lambda|^{\nu} |\tilde{x}|^{\nu} (1 - \rho_1) \gamma_2.$$

Остаточню при непарному k_1 маємо

$$\prod_{j=1}^{k_1} \left| R_{2m+l_1-j}^{(1,j+1)} \right| \left| R_{l_1-j}^{(1,j+1)} \right| \geq |\lambda|^{2\nu} |\tilde{x}|^{2\nu} \frac{(1 - \rho_1)^2 \gamma_2^2}{|\lambda| |S|}.$$

Для довільного k_1 , $1 \leq k_1 \leq n + 1$, справджується оцінка знизу

$$\prod_{j=1}^{k_1} \left| R_{2m+l_1-j}^{(1,j+1)} \right| \left| R_{l_1-j}^{(1,j+1)} \right| \geq C |\lambda|^{2[k_1/2]} |\tilde{x}|^{2[k_1/2]},$$

$$\text{де } C = \frac{(1 - \rho_1)^2}{|S|} \min \left\{ 1; \frac{\gamma_2^2}{|\lambda|} \right\}.$$

Враховуючи, що $\tilde{x}\tilde{y} = -c_{1,1}c_{1,2}/\lambda^2$, для 1 вітки справджується оцінка

$$\frac{|c_{1,1}|^{k_{1,1}} |c_{1,2}|^{k_{1,2}}}{\prod_{j=1}^{k_1} |R_{m+l_1-j}^{(1,j+1)}| |R_{l_1-j}^{(1,j+1)}|} \leq M_1 \left(\frac{|c_{1,1}c_{1,2}/\lambda^2|}{|\tilde{x}|^2} \right)^{[k_1/2]} = M_1 \rho_1^{[k_1/2]}, \quad (3.55)$$

де $k_{1,1} + k_{1,2} = k_1$, $M_1 = \min\{1; |c_{1,1}|\}/C$.

Оцінимо знизу залишки 1-ої вітки $R_n^{(1,1)}$, $n \geq 1$.

Нехай $n = 2\nu$, $\nu \geq 1$, тоді

$$|R_{2\nu}^{(1,1)}| = |f_{2\nu}^{(1)}| = \left| \frac{\lambda P_{\nu-1}}{-c_{1,1}Q_{\nu-1} + \lambda P_{\nu-1}} \right| \geq |\lambda| |\tilde{x}| (1 - \rho_1) / D,$$

де $D = |c_{1,1}| + |\lambda| |\tilde{x}| (1 + \rho_1^2) / (1 - \rho_1)$.

Нехай $n = 2\nu + 1$, $\nu \geq 0$, тоді справджуються оцінки

$$|R_{2\nu+1}^{(1,1)}| = |f_{2\nu+1}^{(1)}| = |-c_{1,2} + \lambda P_{\nu}/Q_{\nu}| \geq \gamma_1.$$

Отже, $|R_n^{(1,1)}| \geq \nu_1$, $n \geq 1$, де $\nu_1 = \min\{|\lambda| |\tilde{x}| (1 - \rho_1) / D; \gamma_1\}$ і $\nu_1 \neq 0$.

Доведемо методом математичної індукції по q , $q \geq 2$, що для довільного натурального n справджуються нерівності

$$|R_n^{(q,1)}| \geq \prod_{j=1}^q \nu_j. \quad (3.56)$$

При $q = 2$ залишки $R_n^{(2,1)}$ запишемо у вигляді

$$R_n^{(2,1)} = R_n^{(1,1)} + \frac{c_{2,1}|}{|R_{n-1}^{(1,1)}|} + \dots + \frac{c_{2,1}|}{|R_0^{(1,1)}|} = R_n^{(1,1)} h_n^{(2,1)}, \quad n \geq 1,$$

де

$$h_n^{(2,1)} = 1 + \frac{c_{2,1}/R_n^{(1,1)} R_{n-1}^{(1,1)}|}{|1|} + \frac{c_{2,1}/R_{n-1}^{(1,1)} R_{n-2}^{(1,1)}|}{|1|} + \dots + \frac{c_{2,1}/R_1^{(1,1)} R_0^{(1,1)}|}{|1|}.$$

Оцінимо модулі добутків $R_n^{(1,1)} R_{n-1}^{(1,1)}$, $n \geq 1$, знизу.

Нехай $n = 2\nu$, тоді

$$|R_{2\nu}^{(1,1)} R_{2\nu-1}^{(1,1)}| = |f_{2\nu}^{(1)} f_{2\nu-1}^{(1)}| \geq |\lambda| |\tilde{x}| (1 - \rho_1) \frac{|-c_{1,2} + \lambda g_{\nu-1}|}{|-c_{1,1} + \lambda g_{\nu-1}|} \geq |\lambda| |\tilde{x}| (1 - \rho_1) B.$$

Нехай $n = 2\nu + 1$, $\nu \geq 1$, тоді

$$|R_{2\nu+1}^{(1,1)} R_{2\nu}^{(1,1)}| = |f_{2\nu+1}^{(1)} f_{2\nu}^{(1)}| \geq |\lambda| |\tilde{x}| (1 - \rho_1) \frac{|-c_{1,2} + \lambda g_{\nu}|}{|-c_{1,1} + \lambda g_{\nu-1}|} \geq |\lambda| |\tilde{x}| (1 - \rho_1) A.$$

Згідно з лемою 3.1, враховуючи, що для довільного n справджуються оцінки:

$$\left| R_n^{(1,1)} \right| \left| R_{n-1}^{(1,1)} \right| \geq r_1, \quad r_1 = |\lambda| |\tilde{x}| (1 - \rho_1) \min\{A, B\}. \quad \text{Отже,}$$

$$\left| \frac{c_{2,1}}{R_n^{(1,1)} R_{n-1}^{(1,1)}} \right| < \frac{|c_{2,1}|}{r_1} < \frac{1}{4}.$$

одержимо оцінку: $|h_n^{(2,1)}| > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - |c_{2,1}|/r_1}) = \nu_2$. Отже, маємо: $|R_n^{(2,1)}| = |R_n^{(1,1)}| |h_n^{(2,1)}| \geq \nu_1 \nu_2$, $\nu_2 = (1 + d_2)/2$.

Припускаючи, що виконуються нерівності (3.56) для довільного s , де $3 \leq s \leq N - 1$, запишемо залишки $R_n^{(q,1)}$ при $q = s + 1$ у вигляді

$$R_n^{(s+1,1)} = R_n^{(s,1)} + \frac{c_{s+1,1}|}{|R_{n-1}^{(s,1)}|} + \dots + \frac{c_{s+1,1}|}{|R_0^{(s+1,1)}|} = R_n^{(s,1)} h_n^{(s+1,1)}, \quad n \geq 1,$$

де

$$h_n^{(s+1,1)} = 1 + \frac{c_{s+1,1}/R_n^{(s,1)} R_{n-1}^{(s,1)}|}{|1|} + \frac{c_{s+1,1}/R_{n-1}^{(s,1)} R_{n-2}^{(s,1)}|}{|1|} + \dots + \frac{c_{s+1,1}/R_1^{(s,1)} R_0^{(s,1)}|}{|1|}.$$

Елементи цього дробу задовольняють нерівності

$$\left| \frac{c_{s+1,1}}{R_n^{(s,1)} R_{n-1}^{(s,1)}} \right| < \frac{|c_{s+1,1}|}{\prod_{j=1}^s r_j} < \frac{1}{4}, \quad r_j = \nu_j^2, \quad j = \overline{2, N}.$$

Отже, маємо: $|h_n^{(s+1,1)}| > \nu_{s+1}$, $\nu_{s+1} = (1 + d_{s+1})/2$. Більше того, справджуються наступні оцінки

$$\left| R_n^{(s+1,1)} \right| = \left| R_n^{(s,1)} \right| |h_n^{(s+1,1)}| > \prod_{j=1}^{s+1} \nu_j, \quad n \geq 1.$$

Встановимо оцінку (3.51). Маємо

$$\prod_{r=1}^{k_j} \frac{|c_{j,1}|}{|R_{l_j+2m-r}^{(j,1)} R_{l_j-r}^{(j,1)}|} \leq M_j \prod_{r=1}^{[k_j/2]} \frac{|c_{j,1}|}{|R_{l_j+2m-2r+1}^{(j,1)} R_{l_j+2m-2r}^{(j,1)}|} \cdot \prod_{r=1}^{[k_j/2]} \frac{|c_{j,1}|}{|R_{l_j-2r+1}^{(j,1)} R_{l_j-2r}^{(j,1)}|},$$

де $j = \overline{2, N}$; $M_j = \max \left\{ 1; \frac{|c_{j,1}| 4^{j-1}}{\rho_j r_1 \prod_{m=2}^j (1 + d_m)^2} \right\} = \max\{1; 1/(4\rho_j)\}$, $k_j = k_{j,1}$, $j = \overline{2, N}$ визначаються згідно з формулою (2.18).

Отже, для довільного натурального n і $j = \overline{2, N}$ маємо

$$\frac{|c_{j,1}|}{|R_n^{(j,1)} R_{n-1}^{(j,1)}|} = \frac{|c_{j,1}| / |R_n^{(j-1,1)} R_{n-1}^{(j-1,1)}|}{|h_n^{(j,1)} h_{n-1}^{(j,1)}|} < \frac{1/4}{\nu_j^2} = \frac{1}{(1 + d_j)^2} = \rho_j,$$

$$\prod_{j=1}^{k_i} \frac{|c_{i,1}|}{|R_{l_i+2m-j}^{(j,1)} R_{l_i+2m-j}^{(j,1)}|} \leq M_j \rho_j^{k_j}. \quad (3.57)$$

Остаточно для $n \geq 1$, $m \geq 1$, враховуючи оцінки (3.55), (3.57) з нерівності (3.54) випливає, що

$$|F_{n+2m} - F_n| \leq L \sum_{k_1=0}^{n+1} \rho_1^{[k_1/2]} \rho^{n+1-k_1} \leq L \binom{N-1}{N+n-1} \frac{(\sqrt{\rho_1})^{n+1} - \rho^{n+1}}{\rho_1/\rho - \sqrt{\rho_1}},$$

де $L = \prod_{j=1}^N M_j / (\prod_{j=1}^N \nu_j^2)$.

Переходячи до границі при $m \rightarrow \infty$, одержимо співвідношення (3.51). ■

3.5. Необхідна умова збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду з дійсними елементами

Розглянемо 1-періодичний ГЛД (3.50) з дійсними елементами. У теоремі 3.5 показано, що з умов: $c_q > -X_{q-1}^2/4$, $q = \overline{1, N}$, випливає збіжність цього дробу. Доведемо необхідну умову збіжності 1-періодичного ГЛД з дійсними елементами.

Теорема 3.8. *Якщо 1-періодичний ГЛД з дійсними елементами*

$$1 + \overset{\infty}{D} \sum_{k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k}}{1} \quad (3.58)$$

збігається, то його елементи задовольняють умови: $c_q \geq -X_{q-1}^2/4$, де $X_q = \frac{1}{2}(X_{q-1} + \sqrt{X_{q-1}^2 + 4c_q})$, $X_0 = 1$, $q = \overline{1, N}$.

Доведення. Нехай дріб (3.58) збігається, тобто існує скінченна границя $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(N)} = Z_N$. Розглянемо послідовності його залишків $\{R_n^{(q)}\}_{n=1}^{\infty}$, $q = \overline{1, N}$. Покажемо, що якщо існують границі цих послідовностей, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(q)} = Z_q$, $q = \overline{1, N}$, то $Z_q \neq 0, \infty$. З визначення збіжності дробу випливає, що $Z_N \neq \infty$. Припустимо, що $Z_N = 0$. Тоді зі співвідношення

$$R_n^{(k)} = R_n^{(k-1)} + \frac{c_k}{R_{n-1}^{(k)}} \quad (3.59)$$

при $k = N$ випливає, що $Z_{N-1} = \infty$. На основі таких самих міркувань маємо: $Z_q = \infty$, $q = \overline{1, N-1}$. Оскільки $R_n^{(1)}$ – n -ий підхідний дріб 1-періодичного неперервного дробу, то Z_1 – нерухома точка дробово-лінійного відображення $s_1(\omega) = 1 + c_1/\omega$. Однак $Z_1 = \infty$ не є нерухомою точкою дробово-лінійного відображення $s_1(\omega)$. Отже, ми прийшли до суперечності. Тому $Z_N \neq 0$ і $Z_q \neq \infty$, $q = \overline{1, N-1}$. Повторюючи ці самі міркування, маємо: $Z_q \neq 0$, $q = \overline{1, N-1}$.

Доведемо, що зі збіжності послідовності $\{R_n^{(N)}\}_{n=1}^{\infty}$ випливає збіжність всіх послідовностей $\{R_n^{(q)}\}_{n=1}^{\infty}$, $q = \overline{1, N-1}$. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(N)} = Z_N$ і $Z_N \neq 0, \infty$,

то $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(N-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(N)} - \frac{c_{N-1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n-1}^{(N)}} = Z_{N-1}$ і $Z_{N-1} \neq 0, \infty$. Повторюючи ці міркування маємо: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(q)} = Z_q$ і $Z_q \neq 0, \infty$; $1 \leq q \leq N$.

Знайдемо границі Z_q , $q = \overline{1, N}$, і доведемо методом математичної індукції по q , що $Z_q > 0$ і $Z_q = X_q$, де $X_q = \frac{1}{2}(X_{q-1} + \sqrt{X_{q-1}^2 + 4c_q})$, $q = \overline{1, N}$. Нехай

Z_1 – границя збіжного 1-періодичного неперервного дробу $1 + \frac{c_1}{|1|} + \frac{c_1}{|1|} + \dots$

Відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(1)} = Z_1$, де $Z_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c_1})$. Оскільки $Z_1 \in \mathbb{R}$, то $Z_1 > 0$ і $Z_1 = X_1$.

Припустимо, що для деякого k виконуються співвідношення: $Z_s = \frac{1}{2}(Z_{s-1} + \sqrt{Z_{s-1}^2 + 4c_s})$, $2 \leq s \leq k$, і $Z_s > 0$. Розглянемо послідовність $\{R_n^{(k+1)}\}_{n=1}^{\infty}$, де

$$R_n^{(k+1)} = R_n^{(k)} + \frac{c_{k+1}}{|R_{n-1}^{(k)}|} + \frac{c_{k+1}}{|R_{n-2}^{(k)}|} + \dots + \frac{c_{k+1}}{|R_0^{(k)}|}$$

– зворотний дріб гранично-періодичного неперервного дробу. Зворотному дробу $R_n^{(k+1)}$ відповідає дробово-лінійне відображення $t_{k+1}(\omega) = Z_k + c_{k+1}/\omega$. Якщо послідовність $\{R_n^{(k+1)}\}_{n=1}^{\infty}$ збігається, то із зауваження до теореми 1.9 [див. стр. 17] маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(k+1)} = -y_{k+1}$, де y_{k+1} – відштовхувальна точка дробово-лінійне відображення $\hat{t}_{k+1}(\omega) = c_{k+1,1}/(Z_k + \omega)$. Нерухомі точки $\hat{t}_{k+1}(\omega)$ рівні $\omega_{1,2} = \frac{1}{2}(-Z_k \pm \sqrt{Z_k^2 + 4c_{k+1,1}})$. Із пункту 3 теореми 1.8 [див. стр. 16] при $c = 1$, $d = Z_{k+1}$ і умови $|Z_k + \sqrt{Z_k^2 + 4c_{k+1,1}}| > |Z_k - \sqrt{Z_k^2 + 4c_{k+1,1}}|$ знаходимо, що $y_{k+1} = \frac{1}{2}(-Z_k - \sqrt{Z_k^2 + 4c_{k+1,1}})$. Отже, $Z_{k+1} = \frac{1}{2}(Z_k + \sqrt{Z_k^2 + 4c_{k+1,1}}) = X_{k+1}$. Більше того, $Z_{k+1} > 0$. ■

Зауваження. Перша частина доведення теореми 3.8 переноситься на випадок коли $c_q \in \mathbb{C}$, $q = \overline{1, N}$. Зокрема, зі збіжності дробу (3.58) з комплексними елементами впливає існування і відмінність від нуля границь послідовностей всіх залишків $\{R_n^{(q)}\}_{n=1}^{\infty}$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(q)} = Z_q$, $Z_q \neq 0, \infty$, $q = \overline{1, N}$.

3.6. Висновки до розділу 3

У розділі 3 доведено поточкову збіжність періодичних ГЛД на різних множинах: кругових, параболічних, кутових та інших. Встановлено оцінки швидкості збіжності в кругових областях при додаткових умовах на елементи або суму елементів. Використовуючи рекурентні співвідношення для залишків та періодичність 1-періодичного ГЛД, одержані формули для дійсної та уявної частин їх залишків та встановлено збіжність, оцінку швидкості збіжності цього дробу в кутових областях. Доведено збіжність 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду в об'єднанні параболічних областей.

Для 2-періодичного неперервного дробу досліджена область збіжності та встановлена оцінка швидкості збіжності цього дробу. Використовуючи цю лему, доведена збіжність $(2,1,\dots,1)$ -періодичного ГЛД спеціального вигляду та встановлено оцінку швидкості його збіжності.

Для 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду з дійсними елементами доведена необхідна умова збіжності.

Результати цього розділу опубліковані в [22, 25, 30, 34, 36, 78].

РОЗДІЛ 4

ОЗНАКИ РІВНОМІРНОЇ ЗБІЖНОСТІ ПЕРІОДИЧНИХ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

4.1. Рівномірна збіжність 1-періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду

Для дослідження рівномірної збіжності 1-періодичного ГЛД будемо використовувати оцінку швидкості збіжності 1-періодичного неперервного дробу встановлену в наступній лемі.

Лема 4.1. *Нехай елемент c 1-періодичного неперервного дробу*

$$1 + \frac{c|}{|1} + \frac{c|}{|1} + \dots \quad (4.1)$$

належить області $\mathcal{D}$, $c \in \mathcal{D}$, де

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg \left(z + \frac{1}{4} \right) \right| \leq \pi - \theta, \delta \leq \left| z + \frac{1}{4} \right| \leq \Delta \right\} \quad (4.2)$$

при деяких значеннях θ , δ і Δ ; $0 < \theta < \pi$, $0 < \delta < \Delta$.

Тоді дріб (4.1) збігається до значення x , $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c})$, і справджується оцінка швидкості збіжності

$$|f_n - x| \leq L\rho^{n+1}, \quad n \geq 0, \quad (4.3)$$

де f_n – n -ий підхідний дріб (4.1), $L = \frac{2\sqrt{\Delta}}{1 - \rho}$ і

$$\rho = \sqrt{\frac{1 - 4\sqrt{d}\sin(\theta/2) + 4d}{1 + 4\sqrt{d}\sin(\theta/2) + 4d}}, \quad (4.4)$$

де $d = \delta$, якщо $\delta\Delta \leq 1/16$ або $d = \Delta$, якщо $\delta\Delta > 1/16$.

Доведення. Оскільки елемент $c \in \mathcal{D}$ і $\mathcal{D} \subset \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + 1/4)| < \pi\}$, то n -підхідний дріб f_n можна записати у вигляді

$$f_n = \frac{x^{n+2} - y^{n+2}}{x^{n+1} - y^{n+1}}, \quad n \geq 0,$$

де $y = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4c})$. Збіжність 1-періодичного неперервного дробу (4.1) до значення x впливає з теореми 1.6 [див. стр. 14]. Отже,

$$\begin{aligned} |f_n - x| &= \left| \frac{x^{n+2} - y^{n+2}}{x^{n+1} - y^{n+1}} - x \right| = \frac{|y^{n+1}|}{|x^{n+1}|} \left| \frac{x - y}{1 - y^{n+1}/x^{n+1}} \right| \leq \\ &\leq \frac{|\sqrt{1 + 4c}|}{1 - |y/x|} \left| \frac{1 - \sqrt{1 + 4c}}{1 + \sqrt{1 + 4c}} \right|^{n+1}. \end{aligned}$$

Знайдемо максимальне значення $\left| \frac{1 - \sqrt{1 + 4c}}{1 + \sqrt{1 + 4c}} \right|$ при умові $c \in \mathcal{D}$. Нехай $1 + 4c = r^2 e^{2i\alpha}$, де $-\pi + \theta < 2\alpha < \pi - \theta$, $4\delta < r^2 < 4\Delta$, тоді $\sqrt{1 + 4c} = r \cdot e^{i\alpha}$, де $-\frac{\pi - \theta}{2} < \alpha < \frac{\pi - \theta}{2}$, $2\sqrt{\delta} < r < 2\sqrt{\Delta}$. Позначимо $\hat{\delta} = 2\sqrt{\delta}$, $\hat{\Delta} = 2\sqrt{\Delta}$. Легко бачити, що

$$\rho = \left| \frac{1 - \sqrt{1 + 4c}}{1 + \sqrt{1 + 4c}} \right| = \sqrt{\frac{1 - 2r \cos \alpha + r^2}{1 + 2r \cos \alpha + r^2}}.$$

Знайдемо максимальне значення виразу $f(\alpha, r) = \sqrt{\frac{1 - 2r \cos \alpha + r^2}{1 + 2r \cos \alpha + r^2}}$ у прямокутнику $[-(\pi - \theta)/2; (\pi - \theta)/2] \times [\hat{\delta}; \hat{\Delta}]$. Критичні точки знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} r \sin \alpha (1 + r^2) = 0 \\ \cos \alpha (r^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Точка $(0; 1)$ – критична точка, якщо $\hat{\delta} < 1 < \hat{\Delta}$.

Нехай $\alpha = \pm(\pi - \theta)/2$. Дослідимо на екстремум функцію

$$f_1(r) = \frac{1 - 2r \sin(\theta/2) + r^2}{1 + 2r \sin(\theta/2) + r^2}.$$

Оскільки $f'_1(r) > 0$, то функція $f_1(r)$ на інтервалі $\widehat{\delta} < r < \widehat{\Delta}$ екстремуму немає.

Розглянемо функцію

$$f_2(\alpha) = \frac{1 - 2d \cos \alpha + d^2}{1 + 2d \cos \alpha + d^2},$$

де $d = \widehat{\delta}$ або $d = \widehat{\Delta}$, $-(\pi - \theta)/2 < \alpha < (\pi - \theta)/2$. Оскільки

$$f'_2 = \frac{4d^2 \sin \alpha (1 + d^2)}{(1 + 2d \cos \alpha + d^2)^2},$$

то точки $M_1(0; \widehat{\delta})$ і $M_2(0; \widehat{\Delta})$ є критичними.

Функція $f(\alpha, r)$ є парною по α . Отже, максимальне значення може досягатися в таких точках: $M_1(0; \widehat{\delta})$, $M_2(0; \widehat{\Delta})$, $M_3((\pi - \theta)/2; \widehat{\delta})$ і $M_4((\pi - \theta)/2; \widehat{\Delta})$.

Очевидно, що при виконанні умови $\widehat{\Delta}\widehat{\delta} < 1$ справджуються наступні нерівності

$$\left(\frac{1 - \widehat{\delta}}{1 + \widehat{\delta}} \right)^2 > \left(\frac{1 - \widehat{\Delta}}{1 + \widehat{\Delta}} \right)^2,$$

$$\frac{1 - 2\widehat{\delta} \sin(\theta/2) + \widehat{\delta}^2}{1 + 2\widehat{\delta} \sin(\theta/2) + \widehat{\delta}^2} > \frac{1 - 2\widehat{\Delta} \sin(\theta/2) + \widehat{\Delta}^2}{1 + 2\widehat{\Delta} \sin(\theta/2) + \widehat{\Delta}^2}.$$

В будь-якому випадку справджуються наступні нерівності

$$\left(\frac{1 - d}{1 + d} \right)^2 < \frac{1 - 2d \sin(\theta/2) + d^2}{1 + 2d \sin(\theta/2) + d^2},$$

де $d = \widehat{\delta}$ або $d = \widehat{\Delta}$.

$$\text{Отже, якщо } \widehat{\Delta}\widehat{\delta} \leq 1, \text{ то } f_{\max}(\alpha; r) = \sqrt{\frac{1 - 4\sqrt{\delta} \sin(\theta/2) + 4\delta}{1 + 4\sqrt{\delta} \sin(\theta/2) + 4\delta}}.$$

Якщо ж $\widehat{\Delta}\widehat{\delta} > 1$, тоді аналогічним чином можна показати, що $f_{\max}(\alpha; r) = \sqrt{\frac{1 - 4\sqrt{\Delta} \sin(\theta/2) + 4\Delta}{1 + 4\sqrt{\Delta} \sin(\theta/2) + 4\Delta}}$. ■

Нехай K – довільний компакт з області G , де $G = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + 1/4)| < \pi\}$. Оскільки $\text{dist}(\partial G; \partial K) > 0$, то існує кут

θ , $0 < \theta < \pi$, такий, що $K \subset \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + 1/4)| < \pi - \theta\}$. Нехай $\delta = \min_{z \in \partial K} |z + 1/4| = \text{dist}(-1/4; \partial K)$, $\Delta = \max_{z \in \partial K} |z + 1/4|$.

Побудуємо область

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg \left(z + \frac{1}{4} \right) \right| \leq \pi - \theta; \delta \leq \left| z + \frac{1}{4} \right| \leq \Delta \right\} \quad (4.5)$$

із заданими вище параметрами. Очевидно, що $K \subseteq \mathcal{D}_1$.

Теорема 4.1. Нехай елементи c_j , $j = \overline{1, N}$, 1-періодичного ГЛД

$$\left(1 + \overset{\infty}{D} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k}}{1} \right)^{-1}, \quad (4.6)$$

належать областям $\mathcal{D}_j$, тобто $c_j \in \mathcal{D}_j$, $j = \overline{1, N}$, де область $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$, яка визначається згідно з формулою (4.5) при деяких значеннях θ , δ , Δ : $0 < \theta < \pi$, $0 < \delta < \Delta$,

$$\mathcal{D}_j = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq C \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{1 + \sqrt{\varepsilon}}{2} \right)^{2(j-1)} \right\}, \quad j = \overline{2, N},$$

причому

$$C = \left(1/4 + \sqrt{\delta} \sin(\theta/2) + \delta \right) \frac{1 - \rho_1^3}{1 + \rho_1}, \quad (4.7)$$

де значення ρ_1 , задане формулою (4.4), $0 < \varepsilon < 1$. Тоді

1) дріб (4.6) рівномірно збігається на будь-якому компактї області $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \dots \times \mathcal{D}_N$;

2) справджується оцінка швидкості збіжності

$$|F - F_n| \leq L \binom{N-1}{n+N-1} \rho^{n+1}, \quad n \geq 1, \quad (4.8)$$

де $\rho = \max\{\rho_1, (1 - \sqrt{\varepsilon})/(1 + \sqrt{\varepsilon})\}$, F – значення ГЛД (4.6), L – деяка стала.

Доведення. Оскільки $R_n^{(1)}$ – n -ий підхідний дріб 1-періодичного неперервного дробу, то справджуються оцінки

$$|R_n^{(1)} R_{n-1}^{(1)}| = \left| \frac{x_1^{n+2} - y_1^{n+2}}{x_1^n - y_1^n} \right| = \left| \frac{x_1^{n+2}}{x_1^n} \right| \left| \frac{1 - (y_1/x_1)^{n+2}}{1 - (y_1/x_1)^n} \right| \geq |x_1|^2 \frac{1 - \rho_1^3}{1 + \rho_1}, \quad n \geq 1,$$

де x_1, y_1, ρ_1 знаходимо згідно з формулами (1.11), (1.12), (4.4) відповідно. Встановимо оцінку знизу для $|x_1|$. Враховуючи, що $c_1 \in \mathcal{D}_1$, аналогічно, як у доведенні леми 4.1 маємо: $|x_1| = \frac{1}{2}|1 + re^{i\alpha}|$, де $-(\pi - \theta)/2 < \alpha < (\pi - \theta)/2$, $2\sqrt{\delta} < r < 2\sqrt{\Delta}$. Розглянемо функцію

$$f(\alpha, r) = \sqrt{1 + 2r \cos \alpha + r^2}. \quad (4.9)$$

Її мінімальне значення рівне

$$f_{\min} = f((\pi - \theta)/2, 2\sqrt{\delta}) = \sqrt{1 + 4\sqrt{\delta} \sin(\theta/2) + 4\delta}.$$

Отже, маємо оцінку знизу

$$|R_n^{(1)} R_{n-1}^{(1)}| \geq C, \quad n \geq 1.$$

де C визначаємо згідно з формулою (4.7).

Аналогічно маємо при $n \geq 0$

$$|R_n^{(1)}| = \left| \frac{x_1^{n+2} - y_1^{n+2}}{x_1^{n+1} - y_1^{n+1}} \right| = \left| \frac{x_1^{n+2}}{x_1^{n+1}} \right| \left| \frac{1 - (y_1/x_1)^{n+2}}{1 - (y_1/x_1)^{n+1}} \right| \geq |x_1| \frac{1 - \rho_1^2}{1 - \rho_1} = |x_1|(1 - \rho_1).$$

Звідси маємо: $|R_n^{(1)}| = |x_1|(1 - \rho_1) \geq (1 - \rho_1)\sqrt{1/4 + \sqrt{\delta} \sin(\theta/2) + \delta}$. Позначимо $m_1 = (1 - \rho_1)\sqrt{1/4 + \sqrt{\delta} \sin(\theta/2) + \delta}$.

Доведемо методом математичної індукції по q , $q = \overline{2, N}$, що для залишків $R_n^{(q)}$ справджуються нерівності

$$|R_n^{(q)} R_{n-1}^{(q)}| > C \left(\frac{1 + \sqrt{\varepsilon}}{2} \right)^{2(q-1)}, \quad |R_n^{(q)}| > m_1 \left(\frac{1 + \sqrt{\varepsilon}}{2} \right)^{q-1}, \quad n \geq 1.$$

При $q = 2$ залишки $R_n^{(2)}$, $n \geq 1$, запишемо у вигляді

$$R_n^{(2)} = R_n^{(1)} \cdot h_n^{(2)},$$

де $h_n^{(2)} = 1 + \frac{c_2/R_n^{(1)} R_{n-1}^{(1)}}{|1|} + \frac{c_2/R_{n-1}^{(1)} R_{n-2}^{(1)}}{|1|} + \dots + \frac{c_2/R_1^{(1)} R_0^{(1)}}{|1|}$. Оскільки $c_2 \in \mathcal{D}_2$,

то елементи зворотних дробів $h_n^{(2)}$, $n \geq 1$, задовольняють умови

$$\frac{|c_2|}{|R_n^{(1)} R_{n-1}^{(1)}|} \leq \frac{|c_2|}{C} \leq \frac{1 - \varepsilon}{4}.$$

Згідно з лемою 3.1 при $|a| = (1 - \varepsilon)/4$ одержимо оцінки

$$|h_n^{(2)}| > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4|c_2|/C}) \geq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\varepsilon}), \quad n \geq 1.$$

Отже, маємо

$$|R_n^{(2)} R_{n-1}^{(2)}| = |R_n^{(1)} R_{n-1}^{(1)}| |h_n^{(2)} h_{n-1}^{(2)}| > C \left(\frac{1 + \sqrt{\varepsilon}}{2} \right)^2,$$

$$|R_n^{(2)}| = |R_n^{(1)} h_n^{(2)}| > m_1 \frac{1 + \sqrt{\varepsilon}}{2}.$$

Припустимо, що для будь-якого s , $3 \leq s \leq q$, справджуються оцінки

$$|R_n^{(s)} R_{n-1}^{(s)}| \geq C \left(\frac{1 + \sqrt{\varepsilon}}{2} \right)^{2(s-1)}, \quad |R_n^{(s)}| \geq m_1 \left(\frac{1 + \sqrt{\varepsilon}}{2} \right)^{s-1}, \quad n \geq 1.$$

Запишемо залишки $R_n^{(q+1)}$ у вигляді: $R_n^{(q+1)} = R_n^{(q)} h_n^{(q+1)}$, $n \geq 1$, де

$$h_n^{(q+1)} = 1 + \frac{c_{q+1}/R_n^{(q)} R_{n-1}^{(q)}}{|1|} + \frac{c_{q+1}/R_{n-1}^{(q)} R_{n-2}^{(q)}}{|1|} + \dots + \frac{c_{q+1}/R_1^{(q)} R_0^{(q)}}{|1|}.$$

Якщо елемент $c_{q+1} \in \mathcal{D}_{q+1}$, то

$$\frac{|c_{q+1}|}{|R_n^{(q)} R_{n-1}^{(q)}|} < \frac{|c_{q+1}| 4^{q-1}}{C(1 + \sqrt{\varepsilon})^{2(q-1)}} \leq \frac{1 - \varepsilon}{4}.$$

Отже, згідно з лемою 3.1 справджуються оцінки

$$|h_n^{(q+1)}| > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\varepsilon}), \quad n \geq 1.$$

$$|R_n^{(q+1)} R_{n-1}^{(q+1)}| = |R_n^{(q)} R_{n-1}^{(q)}| |h_n^{(q+1)} h_{n-1}^{(q+1)}| > C \left(\frac{1 + \sqrt{\varepsilon}}{2} \right)^{2q},$$

$$|R_n^{(q+1)}| = |R_n^{(q)} \cdot h_n^{(q+1)}| > m_1 \left(\frac{1 + \sqrt{\varepsilon}}{2} \right)^q.$$

Отже маємо, оцінки: $|R_n^{(q)} R_{n-1}^{(q)}| > C \left(\frac{1 + \sqrt{\varepsilon}}{2} \right)^{2(q-1)}, \quad |R_n^{(q)}| >$

$m_1 \left(\frac{1 + \sqrt{\varepsilon}}{2} \right)^{q-1}, \quad n \geq 1$, виконуються для будь-якого $q, 1 \leq q \leq N$.

Для встановлення оцінки швидкості збіжності дробу (4.6) використаємо формулу (2.20). Оцінимо множники $\frac{|c_j|^{k_j}}{\prod_{r=1}^{k_j} (|R_{s_j+m-r}^{(j)}| |R_{s_j-r}^{(j)}|)}, \quad j = \overline{1, N}; \quad s_j =$

$$n - \sum_{l=j+1}^N k_l.$$

При $j = 1$, використаємо оцінку (3.11), де $M_1 = \frac{|\sqrt{1 + 4c_1}|}{(1 + \rho_1 + \rho_1^2)(1 - \rho_1)^2}$.
Максимальне значення величини $\left| \frac{y_1}{x_1} \right| = \left| \frac{1 - \sqrt{1 + 4c_1}}{1 + \sqrt{1 + 4c_1}} \right|$, згідно з лемою 4.1, рівне ρ_1 , де ρ_1 знаходимо згідно з формулою (4.4).

Враховуючи, що максимальне значення функції (4.9) рівне $f_{max} = f(0, 2\sqrt{\Delta}) = (1 + 2\sqrt{\Delta})$, остаточно маємо сталу $M_1 = \frac{|1 + 2\sqrt{\Delta}|}{(1 + \rho_1 + \rho_1^2)(1 - \rho_1)^2}$.

Оцінимо множники $\frac{|c_j|^{k_j}}{\prod_{r=1}^{k_j} (|R_{s_j+m-r}^{(j)}| |R_{s_j-r}^{(j)}|)}, \quad j = \overline{2, N}$. Враховуючи, що

$$\left| \frac{c_j}{R_n^{(j-1)} R_{n-1}^{(j-1)}} \right| < \frac{1 - \varepsilon}{4} \text{ і } |h_n^{(j)}| > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\varepsilon}),$$

де $n \geq 1; j = \overline{2, N}$, одержимо

$$\frac{|c_j|}{|R_n^{(j)} R_{n-1}^{(j)}|} = \frac{|c_j| / |R_n^{(j-1)} R_{n-1}^{(j-1)}|}{|h_n^{(j)} h_{n-1}^{(j)}|} \leq \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}}.$$

Позначимо $\rho_2 = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}}$. При $1 \leq k_j \leq n + 1$ маємо

$$\begin{aligned} & \prod_{r=1}^{k_j} \frac{|c_j|}{|R_{s_j+m-r}^{(j)} R_{s_j-r}^{(j)}|} \leq \\ & = M_j \prod_{r=1}^{[k_j/2]} \frac{|c_j|}{|R_{s_j+m-2r+1}^{(j)} R_{s_j+m-2r}^{(j)}|} \cdot \prod_{r=1}^{[k_j/2]} \frac{|c_j|}{|R_{s_j-2r+1}^{(j)} R_{s_j-2r}^{(j)}|} \leq \rho_2^{k_j}. \end{aligned}$$

Остаточна оцінка для доданків має вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{|c_1|^{k_1} |c_2|^{k_2} \dots |c_N|^{k_N}}{\prod_{j=1}^N \prod_{r=1}^{k_j} \left(|R_{s_j+m-r}^{(j)}| |R_{s_j-r}^{(j)}| \right)} = \prod_{j=1}^N \prod_{r=1}^{k_j} \frac{|c_j|}{|R_{s_j+m-r}^{(j)}| |R_{s_j-r}^{(j)}|} \\ & = M_1 \prod_{j=1}^N \rho_j^{k_j} \leq M_1 \prod_{j=1}^N \rho^{k_1+k_2+\dots+k_N} = M_1 \prod_{j=1}^N \rho^{n+1}, \end{aligned}$$

де $\rho = \max\{\rho_1, (1 - \sqrt{\varepsilon})/(1 + \sqrt{\varepsilon})\}$.

Отже, одержуємо оцінку

$$\begin{aligned} |F_{n+m} - F_n| & \leq \frac{1}{|R_{n+m}^{(N)}| \cdot |R_n^{(N)}|} \sum_{k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(N)}} \frac{|c_1|^{k_1} |c_2|^{k_2} \dots |c_N|^{k_N}}{\prod_{j=1}^N \prod_{r=1}^{k_j} \left(|R_{s_j+m-r}^{(j)}| \cdot |R_{s_j-r}^{(j)}| \right)} \\ & \leq \frac{1}{m_N^2} \sum_{k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(N)}} M_1 \prod_{j=1}^N \rho^{n+1} = \frac{M_1}{m_N^2} \sum_{k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(N)}} \rho^{n+1} \\ & = L \binom{N-1}{n+N-1} \rho^{n+1}, \end{aligned}$$

$$\text{де } L = \frac{M_1}{m_N^2} = \frac{M_1 4^{N-1}}{m_1^2 (1 + \sqrt{\varepsilon})^{2(N-1)}}.$$

Переходячи до границі при $m \rightarrow \infty$, одержимо оцінку (4.8). ■

Теорема 4.2. Нехай частинними чисельниками $\vec{p}$ -періодичного ГЛД

$$\left(1 + \frac{\infty}{D} \sum_{k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k, s}}{1} \right)^{-1} \quad (4.10)$$

є комплексні числа, які задовольняють умови: існує додатна стала C , $0 < C \leq 1/4$, така що

$$|c_{1,j}| \leq C, \quad j = \overline{2, p_1}; \quad \sum_{s=1}^{q-1} |c_{s,1}| + |c_{q,j}| \leq C, \quad q = \overline{2, N}, \quad j = \overline{1, p_q}. \quad (4.11)$$

Тоді справджується оцінка швидкості збіжності ГЛД (4.10)

$$|F - F_m| \leq \begin{cases} L \cdot \xi^{m+1}, & \text{якщо } 0 < C < 1/4; \\ \frac{2}{m+1}, & \text{якщо } C = 1/4; \end{cases} \quad m \geq 1, \quad (4.12)$$

де F_m – m -й підхідний дріб ГЛД (4.10), F – значення цього дробу, $\xi = \frac{1 - \sqrt{1-4C}}{1 + \sqrt{1-4C}}$, $L = \frac{(1 + \sqrt{1-4C})^2}{1 - \xi^3}$.

Доведення. Для встановлення оцінки швидкості збіжності дробу (4.10) використаємо формулу (1.22) різниці двох підхідних дробів ГЛД (2.1)

$$f_n - f_m = \frac{(-1)^{m+1}}{Q_{i(0)}^{(n)} Q_{i(0)}^{(m)}} \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_{m+1}=1}^{i_m} \frac{\prod_{k=1}^{m+1} a_{i(k)}}{\prod_{k=1}^{m+1} Q_{i(k)}^{(n)} Q_{i(k)}^{(m)}}, \quad (4.13)$$

де де $n > m > 0$, $Q_{i(s)}^{(s)} = 1$, $Q_{i(m+1)}^{(m)} = 1$, $s = n, m$; $Q_{i(k)}^{(s)} = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{a_{i(k+1)}}{Q_{i(k+1)}^{(s)}}$; $1 \leq k < s$, $Q_{i(0)}^{(n)} = f_n^{-1}$.

Нехай дріб (2.1) є $\vec{p}$ -періодичним і тотожним ГЛД (4.10), тоді $F_n = f_n$, $n \geq 1$, згідно з визначенням періодичного ГЛД маємо: $a_{i(k)} = c_{i_k, s}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, $k \geq 1$, де множина мультиіндексів $\mathcal{I}$ визначена згідно з формулою (2.2), індекс s – згідно з (2.3). Зі співвідношень (2.8) для залишків дробу (4.10) одержимо: $Q_{i(k)}^{(n)} = R_{n-k}^{(i_k, k)}$, $1 \leq k \leq n-1$, $i(k) \in \mathcal{I}$.

Якщо $s < i_{k-1}$, то $a_{i(k-1)s} = c_{s,1}$, $s = \overline{1, i_{k-1}}$. Якщо ж $s = i_{k-1}$, то $a_{i(k-1)i_{k-1}} = c_{i_{k-1}, k} = c_{i_{k-1}, j}$ і $k = np_{i_{k-1}} + j$, $1 \leq j \leq p_{i_{k-1}}$. Отже, з умов теореми випливає

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} |a_{i(k)}| = |c_{1,1}| + |c_{2,1}| + \dots + |c_{i_{k-1}-1,1}| + |c_{i_{k-1},k}| \leq C, \quad k \geq 1.$$

Покажемо методом математичної індукції по n , що з рекурентних співвідношень (2.11) та умов теореми випливають оцінки: $|R_n^{(q,j)}| \geq g_n$, $n \geq 0$, $q = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, p_q}$, де g_n – n -ий підхідний дріб 1-періодичного неперервного дробу

$$1 + \frac{-C|}{|1} + \frac{-C|}{|1} + \dots$$

Якщо $n = 1$, то $|R_1^{(q,j)}| = |1 + \sum_{s=1}^{q-1} c_{s,1} + c_{q,j}| \geq 1 - C$. Припустимо, що для будь-якого n виконуються оцінки

$$|R_k^{(q,j)}| \geq g_k, \quad k = \overline{2, n}.$$

Для залишків $R_{n+1}^{(q,j)}$, $q = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, p_q}$, справджуються оцінки знизу

$$|R_{n+1}^{(q,j)}| = \left| 1 + \sum_{s=1}^{q-1} \frac{c_{s,1}}{R_n^{(s,2)}} + \frac{c_{q,j}}{R_n^{(q,j+1)}} \right| \geq 1 - \sum_{s=1}^{q-1} \frac{|c_{s,1}|}{g_n} - \frac{|c_{q,j}|}{g_n} \geq 1 - \frac{C}{g_n} = g_{n+1}.$$

Нехай $C < 1/4$. Відомо, що $g_n = \frac{x^{n+2} - y^{n+2}}{x^{n+1} - y^{n+1}}$, $n \geq 0$, де $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4C})$, $y = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4C})$ [див. стр. 16]. Отже, для $n \geq 2$, $m \geq 1$,

маємо

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{m+1} (|R_{n-k}^{(i_k,k)}| |R_{m-k}^{(i_k,k)}|) &\geq \prod_{k=1}^{m+1} (g_{n-k} g_{m-k}) = (g_{n-1} \dots g_{n-m-1}) \cdot (g_{m-1} \dots g_1) = \\ &= \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x^{n-m} - y^{n-m}} \cdot \frac{x^{m+1} - y^{m+1}}{x^2 - y^2} = x^{m+1} \frac{1 - (y/x)^{n+1}}{1 - (y/x)^{n-m}} \cdot x^{m-1} \frac{1 - (y/x)^{m+1}}{1 - (y/x)^2} \geq \\ &\geq x^{2(m+1)} \frac{1 - \xi^3}{x^2}, \end{aligned}$$

де $\xi = y/x$, $g_{-1} = 1$. Враховуючи, що $C = x \cdot y$ і

$$\sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^{i_1} \dots \sum_{i_{m+1}=1}^{i_m} \prod_{r=1}^{m+1} |a_{i(r)}| = \sum_{i_1=1}^N |a_{i(1)}| \sum_{i_2=1}^{i_1} |a_{i(2)}| \dots \sum_{i_{m+1}=1}^{i_m} |a_{i(m+1)}| \leq \dots \leq C^{m+1},$$

маємо оцінку

$$|F_n - F_m| \leq \frac{1}{g_n \cdot g_m} \frac{x^2 C^{m+1}}{(1 - \xi^3) x^{2(m+1)}} \leq \frac{4x^2}{1 - \xi^3} \xi^{m+1},$$

оскільки $g_n \geq 1/2$, $n \geq 0$. Переходячи до границі при $m \rightarrow \infty$ маємо оцінку (4.12).

Якщо $C = 1/4$, то $g_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$ [див. стр. 16] і

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^m (g_{n-k} g_{m-k}) &= \\ &= \left(\frac{n+1}{2n} \frac{n}{2(n-1)} \cdots \frac{n-m+1}{2(n-m)} \right) \left(\frac{m+1}{2m} \frac{m}{2(m-1)} \cdots \frac{3}{2 \cdot 2} \right) = \\ &= \frac{2(n+1)(m+1)}{4^{m+1}(n-m)}. \end{aligned}$$

Враховуючи умови теореми, маємо

$$\sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_{m+1}=1}^{i_m} \prod_{r=1}^{m+1} |a_{i(r)}| \leq 1/4^{m+1}$$

і

$$|F_n - F_m| \leq \frac{1}{g_n \cdot g_m} \cdot \frac{1}{4^{m+1}} \cdot \frac{4^{m+1}(n-m)}{2(n+1)(m+1)} = 2 \frac{n-m}{(n+1)(m+1)}.$$

Переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$, одержуємо оцінку (4.12). ■

4.2. Багатовимірне узагальнення параболічної теореми для 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду

Теорема 4.3. *Нехай елементи c_j , $j = \overline{1, N}$, 1-періодичного ГЛД (4.6) задовольняють умову*

$$(c_1, c_2, \dots, c_N) \in G = G_1 \times G_2,$$

де

$$G_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi - \varepsilon\},$$

$$G_2 = \left\{ (z_2, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^{N-1} : \bigcup_{\gamma \in I_\varepsilon} \left\{ \sum_{s=2}^N (|z_s| - \operatorname{Re}(z_s e^{-2i\gamma})) < l \sin^2(\varepsilon/2) \right\} \right\},$$

де $I_\varepsilon = \left[-\frac{\pi-\varepsilon}{2}, \frac{\pi-\varepsilon}{2}\right]$, l та ε – певні параметри такі, що $0 < \varepsilon < \pi/2$, $0 < l \leq 1/4$. Тоді

1) 1-періодичний ГЛД (4.6) рівномірно збігається на будь-якому компактній множини G ;

2) областю значень цього дробу є множина

$$\bigcup_{\gamma \in I_\varepsilon} \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{2e^{-i\gamma}}{\cos \gamma} \right| \leq \frac{2}{\cos \gamma} \right\}; \quad (4.14)$$

3) більше того, якщо

$$c_1 \in G_1 \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\},$$

$$(c_2, c_3, \dots, c_N) \in G_2 \cap \left\{ (z_2, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^{N-1} : \sum_{j=2}^N |z_j| \leq C \right\},$$

де R, C – деякі додатні сталі, $R > \frac{1}{4} \cos \varepsilon$, $C \leq \frac{1}{16}(1 + \sqrt{1-4l})^2 \sin^2(\varepsilon/2)$, то

а) справджується оцінка швидкості рівномірної збіжності цього дробу

$$|F - F_m| < L_1 \cdot \begin{cases} \frac{\rho_1^{m+2} - \rho_2^{m+2}}{\rho_1 - \rho_2}, & \text{якщо } \rho_1 \neq \rho_2, \\ (m+1)\rho^{m+1}, & \text{якщо } \rho_1 = \rho_2 = \rho, \end{cases}$$

при додаткових умовах: $l < 1/4$ і $C < \frac{1}{16}(1 + \sqrt{1-4l})^2 \sin^2(\varepsilon/2)$; де

$$\rho_1 = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - 4\sqrt{\delta} \sin(\theta/2) + 4\delta}{1 + 4\sqrt{\delta} \sin(\theta/2) + 4\delta}}, & \text{якщо } \sin \varepsilon \leq \frac{1}{1 + 4R}; \\ \sqrt{\frac{1 - 4\sqrt{\Delta} \sin(\theta/2) + 4\Delta}{1 + 4\sqrt{\Delta} \sin(\theta/2) + 4\Delta}}, & \text{якщо } \sin \varepsilon > \frac{1}{1 + 4R}, \end{cases}$$

$$\rho_2 = \frac{16C}{(1 + \sqrt{1-4l})^2 \sin^2(\varepsilon/2)}, \quad \theta = \arcsin \frac{R \sin \varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{16} + R^2 - \frac{1}{2}R \cos \varepsilon}}, \quad \delta = \frac{1}{4} \sin \varepsilon, \quad \Delta = \frac{1}{4} + R, \quad L_1 - \text{деяка стала.}$$

б) або оцінка швидкості збіжності цього дробу має вигляд

$$|F - F_m| < \begin{cases} L_1 \varrho^{m+1} \frac{(m+1)(m+2)+1}{2(m+1)} & \text{якщо } C < \frac{\sin^2(\varepsilon/2)}{16}, \\ L_2 \frac{1}{m+1} & \text{якщо } C = \frac{\sin^2(\varepsilon/2)}{16}, \end{cases}$$

$$\text{якщо } l = 1/4; \text{ де } \varrho = \max \left\{ \rho_1; \frac{\sin^2(\varepsilon/2)}{16} \right\}, L_2 - \text{деяка стала.}$$

Доведення. 1. Використаємо багатовимірний аналог теореми Стілтєса-Віталі 1.12 [див. стр. 23]. Розглянемо функціональний гіллястий ланцюговий дріб вигляду

$$\left(1 + \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{z_{i_k}}{1} \right)^{-1} \quad (4.15)$$

та відповідну йому послідовність n -их підхідних дробів $\{F_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)$. Доведемо рівномірну обмеженість цієї послідовності, якщо $z \in G$. Для цього встановимо оцінки знизу модулів залишків $R_n^{(j)}(z)$ функціонального дробу (4.15), $n \geq 0$, $j = \overline{1, N}$. Враховуючи, що $z_1 \in G_1$ і $\gamma \in I_\varepsilon$, згідно з параболічною теоремою 1.4 [див. стр. 13] при $2\gamma = \arg z_1$ маємо

$$\operatorname{Re} (R_n^{(1)}(z) e^{-i\gamma}) \geq \frac{1}{2} \cos \gamma \geq \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi - \varepsilon}{2} \right) = \frac{1}{2} \sin(\varepsilon/2), \quad n \geq 1.$$

Розглянемо неперервний 1-періодичний дріб

$$1 + \frac{-l|}{|1|} + \frac{-l|}{|1|} + \dots \quad (4.16)$$

і позначимо f_n – його n -ий підхідний дріб, $n \geq 1$. Із теореми Ворпіцкого випливає, що $f_n \geq 1/2$.

Доведемо методом математичної індукції по n , $n \geq 1$, що для кожного j виконуються співвідношення

$$\operatorname{Re} (R_n^{(j)}(z) e^{-i\gamma}) \geq \frac{1}{2} \sin(\varepsilon/2) f_n, \quad 2 \leq j \leq N. \quad (4.17)$$

При $n = 1$, враховуючи, що $R_1^{(j)}(z) = 1 + z_1 + z_2 + \dots + z_j$ і нерівність (1.25), див. стр. 22, одержимо

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(R_1^{(j)}(z)e^{-i\gamma}) &= \operatorname{Re}(R_1^{(1)}(z)e^{-i\gamma}) + \sum_{s=2}^j \operatorname{Re}(z_s e^{-i\gamma}) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \sin(\varepsilon/2) + \sum_{s=2}^j \operatorname{Re} \left(\frac{z_s e^{-2i\gamma}}{e^{-i\gamma}} \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \sin(\varepsilon/2) - \sum_{s=2}^j \frac{(|z_s| - \operatorname{Re}(z_s e^{-2i\gamma}))}{2 \operatorname{Re} e^{-i\gamma}} \geq \\ &= \frac{1}{2} \sin(\varepsilon/2)(1 - l) = \frac{1}{2} \sin(\varepsilon/2) f_1, \end{aligned}$$

бо умови виконання нерівності (1.25) справджуються.

Припустимо, що для деякого натурального k виконуються нерівності

$$\operatorname{Re} \left(R_m^{(j)}(z) e^{-i\gamma} \right) \geq \frac{1}{2} \sin(\varepsilon/2) f_m, \quad 2 \leq j \leq N, \quad 1 \leq m \leq k.$$

Враховуючи рекурентні співвідношення (2.8) та припущення індукції, при $m = k - 1$ одержимо

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(R_{k+1}^{(j)}(z)e^{-i\gamma}) &= \operatorname{Re}(R_{k+1}^{(1)}(z)e^{-i\gamma}) + \sum_{s=2}^j \operatorname{Re} \left(\frac{z_s e^{-2i\gamma}}{R_k^{(s)}(z) e^{-i\gamma}} \right) \geq \\ &\frac{1}{2} \sin \frac{\varepsilon}{2} - \sum_{s=2}^j \frac{(|z_s| - \operatorname{Re}(z_s e^{-2i\gamma}))}{2 \operatorname{Re}(R_k^{(s)}(z) e^{-i\gamma})} \geq \frac{1}{2} \sin \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\sum_{s=2}^j (|z_s| - \operatorname{Re}(z_s e^{-2i\gamma}))}{\sin(\varepsilon/2) f_k} \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \sin \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{-l}{f_k} \right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\varepsilon}{2} f_{k+1}. \end{aligned}$$

Оскільки $f_n \geq 1/2$, то справджуються оцінки

$$\left| R_n^{(j)}(z) \right| \geq \operatorname{Re} \left(R_n^{(j)}(z) e^{-i\gamma} \right) \geq \frac{1}{4} \sin(\varepsilon/2)$$

для будь-якого $\gamma \in I_\varepsilon$. Враховуючи, що $F_n(z) = \left(R_n^{(N)}(z) \right)^{-1}$, маємо

$$F_n(z) \in \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{4}{\sin(\varepsilon/2)} \right\}.$$

Отже, послідовність підхідних дробів $\{F_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ є рівномірно обмеженою в області G .

Доведемо збіжність цієї послідовності на компактi $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \dots \times \mathcal{D}_N$ множини G , де $\mathcal{D}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{1}{4N}, |\arg z| \leq \pi - \varepsilon\}$ і

$$\mathcal{D}_j = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{l \sin^2(\varepsilon/2)}{2N} \right\}, \quad j = \overline{2, N}.$$

Якщо $z_j \in \mathcal{D}_j$, $j = \overline{1, N}$, то справджується оцінка

$$\sum_{s=2}^N (|z_s| - \operatorname{Re}(z_s e^{-2i\gamma})) \leq \sum_{s=2}^N 2 \cdot \frac{l \sin^2(\varepsilon/2)}{2N} < l \sin^2(\varepsilon/2),$$

тобто $\mathcal{D} \subset G$. Збіжність послідовності підхідних дробів $\{F_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ на компактi $\mathcal{D}$ випливає з теореми 1.11 [див. стр. 21] оскільки $|z_1| \leq 1/(4N)$, $|z_s| \leq 1/(8N)$, $s = \overline{2, N}$.

Отже, рівномірна збіжність дробу (4.6) на будь-якому компактi множини G випливає з багатовимірного аналогу теореми Стілтєса-Віталі.

2. Доведемо, що множиною значень дробу (4.6) є об'єднання кругів (4.14).

Розглянемо 1-періодичний неперерний дріб

$$1 + \frac{-l \sin^2(\varepsilon/2)/\cos^2 \gamma}{|1|} + \frac{-l \sin^2(\varepsilon/2)/\cos^2 \gamma}{|1|} + \dots$$

Позначимо h_n його n -ий підхідний дріб, $n \geq 0$.

Методом математичної індукції по n для кожного j , $2 \leq j \leq N$, і $\gamma \in I_\varepsilon$ доведемо, що

$$\operatorname{Re}(R_n^{(j)} e^{-i\gamma}) \geq \frac{1}{2} \cos(\gamma) h_n, \quad 2 \leq j \leq N.$$

Аналогічно, як у пункті 2 маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(R_1^{(j)}(z) e^{-i\gamma}) &= \operatorname{Re}(R_1^{(1)}(z) e^{-i\gamma}) + \sum_{s=2}^j \operatorname{Re}(z_s e^{-i\gamma}) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \cos(\gamma) + \sum_{s=2}^j \operatorname{Re} \left(\frac{z_s e^{-2i\gamma}}{e^{-i\gamma}} \right) \geq \\ &= \frac{1}{2} \cos(\gamma) \left(1 - l \frac{\sin^2(\varepsilon/2)}{\cos^2 \gamma} \right) = \frac{1}{2} \cos(\gamma) h_1 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(R_{k+1}^{(j)}(z)e^{-i\gamma}) &= \operatorname{Re}(R_{k+1}^{(1)}(z)e^{-i\gamma}) + \sum_{s=2}^j \operatorname{Re}\left(\frac{z_s e^{-2i\gamma}}{R_k^{(s)}(z)e^{-i\gamma}}\right) \geq \\
&\geq \frac{1}{2} \cos \gamma - \sum_{s=2}^j \frac{(|z_s| - \operatorname{Re}(z_s e^{-2i\gamma}))}{2 \operatorname{Re}(R_k^{(s)}(z)e^{-i\gamma})} \geq \frac{1}{2} \cos \gamma - \frac{\sum_{s=2}^j (|z_s| - \operatorname{Re}(z_s e^{-2i\gamma}))}{\cos(\gamma) h_k} \geq \\
&\geq \frac{1}{2} \cos \gamma \left(1 + \frac{-l \sin^2(\varepsilon/2)/\cos^2 \gamma}{h_k}\right) = \frac{1}{2} \cos(\gamma) h_{k+1}.
\end{aligned}$$

Елементи n -го підхідного дробу h_n , $n \geq 1$, задовольняють умову

$$\frac{l \sin^2(\varepsilon/2)}{\cos^2 \gamma} = \frac{l \cos^2(\pi - \varepsilon)/2}{\cos^2 \gamma} \leq l \leq \frac{1}{4}.$$

Згідно з лемою 3.1 маємо: $\inf_{n \in \mathbb{N}} h_n = \frac{1}{2}$. Отже, $\operatorname{Re}(R_n^{(j)} e^{-i\gamma}) \geq \frac{1}{4} \cos \gamma$, $\gamma \in I_\varepsilon$. Враховуючи, що $F_n = (R_n^{(N)})^{-1}$ і $|R_n^{(N)}| \geq \operatorname{Re}(R_n^{(N)} e^{-i\gamma}) \geq \frac{1}{4} \cos \gamma$, маємо

$$F_n \in \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{2e^{-i\gamma}}{\cos \gamma} \right| \leq \frac{2}{\cos \gamma} \right\}.$$

Оскільки $\gamma \in I_\varepsilon$, то значення n -го підхідного дробу F_n , $n \geq 1$, належать множині (4.14).

3. Встановимо оцінку швидкості збіжності 1-періодичного ГЛД (4.6) використовуючи оцінку (2.25). Враховуючи, що дріб (4.6) рівномірно збігається на будь-якому компактній області G і встановлена оцінка швидкості збіжності 1-ої вітки на множині $\mathcal{E}$, яка означена в лемі 4.1, де θ , δ , Δ – довільні параметри такі, що $0 < \delta < \Delta$, $0 < \theta < \pi$. Встановимо оцінку швидкості рівномірної збіжності ГЛД (4.6) в області

$$S \times \left(G_2 \cap \left\{ (z_2, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^{N-1} : \sum_{j=2}^N |z_j| \leq C \right\} \right),$$

де $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R; |\arg z| < \pi - \varepsilon\}$. Виберемо параметр R максимально можливим з умови: $S \subseteq \mathcal{E}$ (рис. 4.1). Маємо: $\delta = \frac{1}{4} \sin \varepsilon$, $\Delta = \frac{1}{4} + R$, $\theta =$

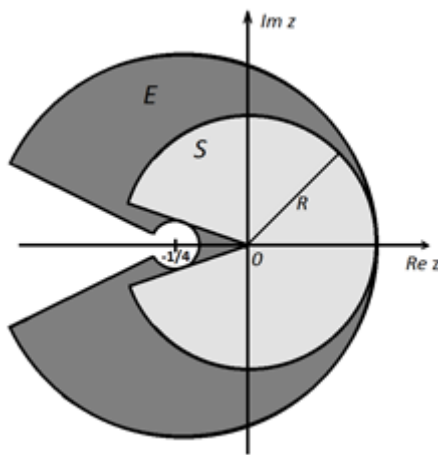


Рис. 4.1. Вигляд області S при умові, що $S \subset \mathcal{E}$

$\arcsin \frac{R \sin \varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{16} + R^2 - \frac{1}{2}R \cos \varepsilon}}$. Умову $\delta \Delta \leq 1/16$ запишемо у вигляді $\sin \varepsilon \leq 1/(1 + 4R)$. Вона враховується при обчисленні ρ_1 .

Для оцінки модуля різниці залишків $|R_n^{(1)} - R_m^{(1)}|$ дробу (4.6), при $c_1 \in \mathcal{E}$ і

$$\mathcal{E} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg \left(z + \frac{1}{4} \right) \right| \leq \pi - \theta, \delta \leq \left| z + \frac{1}{4} \right| \leq \Delta \right\}$$

використаємо нерівність (4.3). Маємо

$$|R_n^{(1)} - R_m^{(1)}| \leq |R_n^{(1)} - x| + |R_m^{(1)} - x| \leq M_1 \rho_1^{m+1}, \quad n > m \geq 0,$$

де $M_1 = \frac{4\sqrt{\Delta}}{1 - \rho_1}$ і $\rho_1 = \rho$, де ρ визначається згідно з формулою (4.4).

3. Нехай $l < 1/4$. Позначимо f_n – n -ий підхідний дріб 1-періодичного неперевного дробу (4.16). Його значення рівне $f_n = \frac{x^{n+2} - y^{n+2}}{x^{n+1} - y^{n+1}}$, $n \geq 0$, де $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4l})$, $y = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4l})$ – притягувальна та відштовхувальна точки дробово-лінійного відображення $s(\omega) = 1 - l/\omega$. Використаємо оцінку (4.17)

і в якості g_n візьмемо $g_n = \frac{1}{2} \sin(\varepsilon/2) f_n$. Отже, при $1 \leq k \leq m+1$ маємо

$$\begin{aligned} \frac{C^k}{\prod_{r=1}^k (g_{n-r} \cdot g_{m-r})} &= \frac{(4C/\sin^2(\varepsilon/2))^k}{\prod_{r=1}^k (f_{n-r} \cdot f_{m-r})} = \frac{(4C/\sin^2(\varepsilon/2))^k}{\frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x^{n-k+1} - y^{n-k+1}} \cdot \frac{x^{m+1} - y^{m+1}}{x^{m-k+1} - y^{m-k+1}}} \\ &= \left(\frac{4C}{x^2 \sin^2(\varepsilon/2)} \right)^k \frac{1 - (y/x)^{n-k+1}}{1 - (y/x)^{n+1}} \frac{1 - (y/x)^{m-k+1}}{1 - (y/x)^{m+1}} \leq M_2 \rho_2^k, \end{aligned}$$

де $M_2 = \frac{1}{(1 - \rho_1)^2}$, $\rho_2 = \frac{4C}{x^2 \sin^2(\varepsilon/2)}$, $\rho_2 < 1$.

За. Нехай $C < \frac{(1-4l)\sin^2(\varepsilon/2)}{16}$. Використовуючи нерівність (2.25), перейдемо до границі $n \rightarrow \infty$ і одержимо оцінку швидкості збіжності дробу (4.6)

$$\begin{aligned} |F - F_m| &\leq \frac{16}{\sin^2(\varepsilon/2)} \left(M_1 \rho_1^{m+1} + M_1 M_2 \sum_{k=1}^m \rho_1^{m-k+1} \cdot \rho_2^k + M_2 \rho_2^{m+1} \right) \\ &< L_1 \cdot \begin{cases} \frac{\rho_1^{m+2} - \rho_2^{m+2}}{\rho_1 - \rho_2}, & \text{якщо } \rho_1 \neq \rho_2, \\ (m+1)\rho^{m+1}, & \text{якщо } \rho_1 = \rho_2 = \rho, \end{cases} \end{aligned}$$

де $L_1 = \frac{16M_1M_2}{\sin^2(\varepsilon/2)} = \frac{64\sqrt{\Delta}}{\sin^2(\varepsilon/2)(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)^2}$.

Зб. Нехай $l = \frac{1}{4}$. Позначимо $\hat{f}_n$ – n -підхідний дріб 1-періодичного неперервного дробу (4.16), де $l = 1/4$. Використовуючи формулу (1.13), маємо

$\hat{f}_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$. Отже, $\prod_{r=1}^k \hat{f}_{n-r} = \frac{n+1}{2^k(n-k+1)}$. При $1 \leq k \leq m$ оцінимо вира-

зи

$$\begin{aligned} \frac{C^k}{\prod_{r=1}^k (g_{n-r} \cdot g_{m-r})} &= \left(\frac{4C}{\sin^2(\varepsilon/2)} \right)^k \frac{1}{\prod_{r=1}^k (\hat{f}_{n-r} \cdot \hat{f}_{m-r})} = \\ &= \left(\frac{16C}{\sin^2(\varepsilon/2)} \right)^k \frac{(n-k+1)(m-k+1)}{(n+1)(m+1)}, \end{aligned}$$

та при $k = m + 1$ –

$$\frac{C^{m+1}}{\prod_{r=1}^{m+1} (g_{n-k} \cdot g_{m-k})} = \frac{\sin(\varepsilon/2)}{4} \left(\frac{16C}{\sin^2(\varepsilon/2)} \right)^{m+1} \times \\ \times \frac{n-m}{(n+1)(m+1)} < \left(\frac{16C}{\sin^2(\varepsilon/2)} \right)^{m+1} \frac{n-m}{(n+1)(m+1)}.$$

Нехай $C < \frac{\sin^2(\varepsilon/2)}{16}$, тоді перейдемо до границі $n \rightarrow \infty$ і, враховуючи, що $\sum_{k=0}^m (m-k+1) = (m+1)(2+m)/2$, маємо оцінку

$$|F - F_m| \leq \frac{16M_1}{\sin^2(\varepsilon/2)} \cdot \frac{\sum_{k=0}^m \rho_1^{m-k+1} \rho_2^k (m-k+1) + \rho_2^{m+1}}{(m+1)} \\ < L_1 \varrho^{m+1} \frac{(m+1)(m+2) + 2}{2(m+1)},$$

де $\varrho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$, $L_1 = 16M_1/\sin^2(\varepsilon/2)$.

Нехай $C = \frac{\sin^2(\varepsilon/2)}{16}$, тоді

$$\frac{C^k}{\prod_{r=1}^k (g_{n-r} \cdot g_{m-r})} = \frac{(n-k+1)(m-k+1)}{(n+1)(m+1)}, \quad 1 \leq k \leq m$$

і

$$\frac{C^{m+1}}{\prod_{r=1}^{m+1} (g_{n-r} \cdot g_{m-r})} < \frac{n-m}{(n+1)(m+1)}.$$

При переході до границі $n \rightarrow \infty$, враховуючи, що $\sum_{k=0}^m \rho_1^{m-k+1} (m-k+1) \leq$

$\frac{\rho_1}{(1-\rho_1)^2}$, маємо

$$|F - F_m| < L_2 \frac{1}{m+1},$$

де $L_2 = \frac{64\sqrt{\Delta}(1-2\rho_1+2\rho_1^2)}{\sin^2(\varepsilon/2)(1-\rho_1)^3}$. ■

Встановимо параболічні області збіжності для 1-періодичного ГЛД. Нехай задано вектор вагових коефіцієнтів $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)$, де $v_j > 0$, $j = \overline{1, N}$, і $\sum_{j=1}^N v_j < 1$.

Лема 4.2. Нехай елементи c_j , $j = \overline{1, N}$, 1-періодичного дробу (4.6) задовольняють умови: $c_j \in \mathcal{P}_j(\gamma)$, $-\pi/2 < \gamma < \pi/2$, де

$$\mathcal{P}_j(\gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| - \operatorname{Re}(ze^{-2i\gamma}) < 2v_j(1 - \sum_{s=1}^j v_s) \cos^2 \gamma \right\}. \quad (4.18)$$

Тоді залишки $R_n^{(j)}$, $n \geq 0$, $j = \overline{1, N}$, ГЛД (4.6) належать півплощинам $\mathcal{H}(1 - \sum_{s=1}^j v_s; \gamma)$, де

$$\mathcal{H}(b, \gamma) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(ze^{-i\gamma}) \geq b \cos \gamma\}. \quad (4.19)$$

Доведення. Розглянемо півплощини

$$1 + \sum_{s=1}^j \mathcal{H}(-v_s, \gamma) = \mathcal{H}(1 - \sum_{s=1}^j v_s, \gamma), \quad j = \overline{1, N}.$$

Оскільки $\sum_{j=1}^N v_j < 1$, то виконуються умови: $0 \notin \mathcal{H}(1 - \sum_{s=1}^j v_s, \gamma)$, $j = \overline{1, N}$. При відображенні $\omega = c_j/z$ півплощини $\mathcal{H}(1 - \sum_{s=1}^j v_s, \gamma)$, $j = \overline{1, N}$, переходить у круги

$$\mathcal{B}_j = \mathcal{B} \left(\frac{c_j e^{-i\gamma}}{2(1 - \sum_{s=1}^j v_s) \cos \gamma}, \frac{|c_j|}{2(1 - \sum_{s=1}^j v_s) \cos \gamma} \right), \quad j = \overline{1, N}.$$

Згідно з означенням (1.20)-(1.21) множини $\mathcal{H}(1 - \sum_{s=1}^j v_s, \gamma)$ є множинами значень дробу оберненого до (4.6), а $\mathcal{P}_j(\gamma)$ – множинами елементів, якщо для будь-якого $c_j \in \mathcal{P}_j(\gamma)$, $j = \overline{1, N}$, виконуються умови

$$\frac{c_j}{1 + \sum_{s=1}^j \mathcal{H}(-v_s, \gamma)} \subset \mathcal{H}(-v_j, \gamma), \quad j = \overline{1, N}.$$

Це рівносильно включенню $\mathcal{B}_j \subset \mathcal{H}(-v_j, \gamma)$, $j = \overline{1, N}$, або виконанню нерівностей

$$\frac{|c_j|}{2(1 - \sum_{s=1}^j v_s) \cos \gamma} \leq v_j \cos \gamma + \operatorname{Re} \left(\frac{c_j e^{-2i\gamma}}{2(1 - \sum_{s=1}^j v_s) \cos \gamma} \right),$$

що еквівалентно умовам: $c_j \in \mathcal{P}_j(\gamma)$, $j = \overline{1, N}$. ■

Теорема 4.4. Нехай елементи c_j дробу (4.6) належать параболічним областям $\mathcal{P}_j(\gamma)$, $j = \overline{1, N}$, які визначаються згідно з формулами (4.18) при деякому γ , $-\pi/2 < \gamma < \pi/2$. Тоді

- 1) 1-періодичний ГЛД (4.6) рівномірно збігається на будь-якому компактній області $\mathcal{P}$, де $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1(\gamma) \times \mathcal{P}_2(\gamma) \times \dots \times \mathcal{P}_N(\gamma)$;
- 2) областю значень цього дробу є круг

$$\mathcal{B}_N = \mathcal{B} \left(\frac{e^{-i\gamma}}{2(1 - \sum_{s=1}^N v_s) \cos \gamma}, \frac{1}{2(1 - \sum_{s=1}^N v_s) \cos \gamma} \right),$$

де $v_j > 0$, $j = \overline{1, N}$, $\sum_{j=1}^N v_j < 1$, v_j – деякі сталі;

- 3) а) справджується оцінка швидкості збіжності дробу (4.6)

$$|F_{n+m} - F_n| \leq L_1 \binom{N-1}{n+N-1} \xi^{n+1}, \quad (4.20)$$

якщо $|c_j| < (1 - \sum_{s=1}^j v_s)^2 \cos^2 \gamma$, $j = \overline{2, N}$, де $\xi = \max_{j=\overline{1, N}} \{\xi_j\}$, $\xi_1 =$

$$\left| \frac{1 - \sqrt{1 + 4c_1}}{1 + \sqrt{1 + 4c_1}} \right|, \quad \xi_j = \frac{|c_j|}{(1 - \sum_{s=1}^j v_s)^2 \cos^2 \gamma}, \quad L_1 - \text{деяка стала};$$

- б) справджується оцінка рівномірної збіжності дробу (4.6)

$$|F_{n+m} - F_n| \leq L_2 \binom{N-1}{n+N-1} \rho^{n+1}, \quad (4.21)$$

якщо $v_1 < 1/2$, $c_1 \in \Omega_1$, де $\Omega_1 = P_1(\gamma) \cap \{|z| \leq R_1\}$, і $|c_j| \leq R_2 < \mu$,

де $\mu = (1 - \sum_{s=1}^N v_s)^2 \cos^2 \gamma$, де $\rho = \max\{\rho_1; R_2/\mu\}$,

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{1 - 4\sqrt{d} \sin(\theta/2) + 4d}{1 + 4\sqrt{d} \sin(\theta/2) + 4d}},$$

де $d = \delta$, якщо $\delta\Delta \leq 1/16$ або $d = \Delta$, якщо $\delta\Delta > 1/16$; L_2 –

деяка стала. Значення θ , δ , Δ знаходимо з умови: $\Omega_1 \subset \mathcal{D}_1$, де

$\mathcal{D}_1$ визначається згідно з формулою (4.5).

Доведення. 1. Використаємо багатовимірний аналог теореми Стілтєса-Віталі для доведення рівномірної збіжності послідовності підхідних дробів

$\{F_n(z)\}_{n=1}^\infty$, де $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)$ функціонального дробу (4.15). Згідно з лемою 4.2 маємо: $R_n^{(N)}(z) \in \mathcal{H}(1 - \sum_{s=1}^N v_s, \gamma)$. Оскільки $F_n(z) = (R_n^{(N)}(z))^{-1}$, то $F_n(z) \in \mathcal{B}_N(\gamma)$, тобто послідовність підхідних дробів $F_n(z)$ є рівномірно обмеженою в $\overline{\mathcal{P}}$. Покладемо $R = \min\{\frac{1}{4N}; v_j(1 - \sum_{s=1}^j v_s) \cos^2 \gamma, j = \overline{1, N}\}$ і розглянемо полікруг $\mathcal{K}_{\mathcal{R}}$, де $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^N : |z_j| \leq R\}$ на множині $\mathcal{P}$. Якщо $z \in \mathcal{K}_{\mathcal{R}}$, то для будь-якого $j, j = \overline{1, N}$, справджуються нерівності

$$|z_j| - Re(z_j e^{-2i\gamma}) \leq 2|z_j| \leq 2R \leq 2v_j(1 - \sum_{s=1}^j v_s) \cos^2 \gamma.$$

Отже, $z_j \in P_j(\gamma), j = \overline{1, N}$, і $z \in \mathcal{P}, \mathcal{K}_{\mathcal{R}} \subset \mathcal{P}$. На основі теореми 1.11 [див. стр. 21] функціональний дріб (4.15) збігається, якщо $z \in \mathcal{K}_{\mathcal{R}}$. Це доводить рівномірну збіжність 1-періодичного ГЛД (4.6) на будь-якому компактї області $\mathcal{P}$.

2. Оскільки $F_n = F_n(C) = (R_n^{(N)}(C))^{-1}, C = (c_1, c_2, \dots, c_N)$, то згідно з лемою 4.2 круг $\mathcal{B}_N(\gamma)$ є областю значень ГЛД (4.6).

3а. Для оцінки швидкості збіжності 1-періодичного ГЛД використаємо формулу (2.20) і одержимо оцінку

$$|F_{n+m} - F_n| \leq \frac{1}{|R_{n+m}^{(N)}| \cdot |R_n^{(N)}|} \sum_{k \in \mathcal{I}_{n+1}^N} \frac{|c_1|^{k_1} |c_2|^{k_2} \dots |c_N|^{k_N}}{\prod_{j=1}^N \prod_{r=1}^{k_j} \left(|R_{m+s_j-r}^{(j)}| \cdot |R_{s_j-r}^{(j)}| \right)},$$

де $s_j = n - \sum_{l=j+1}^N k_l, R_{-1}^{(j)} = 1, j = \overline{1, N}$.

Оскільки $c_1 \in \mathcal{P}_1(\gamma), \mathcal{P}_1(\gamma) \subset \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + 1/4)| < \pi\}$, то значення залишків 1-ої вітки знаходимо згідно з формулою $R_n^{(1)} = \frac{x^{n+2} - y^{n+2}}{x^{n+1} - y^{n+1}}, n \geq 0$, де $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c_1}), y = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4c_1})$ – притягувальна та відштовхувальна точки дробово-лінійного відображення $s(\omega) = 1 + c_1/\omega$. Крім цього, $c_1 = x \cdot y$. Отже, аналогічно як у теоремі 3.1 для $k_1, 1 \leq k_1 \leq n + 1$ маємо

$$\frac{|c_1|^{k_1}}{\prod_{r=1}^{k_1} |R_{s_1+m-r}^{(1)}| \cdot |R_{s_1-r}^{(1)}|} \leq M_1 \left(\frac{|c_1|}{|x|^2} \right)^{k_1} \leq M_1 \left(\frac{|y|}{|x|} \right)^{k_1} = M_1 \xi_1^{k_1},$$

$$\text{де } M_1 = \frac{|\sqrt{1+4c_1}|}{(1+\xi_1+\xi_1^2)(1-\xi_1)^2}, \quad \xi_1 = \left| \frac{1-\sqrt{1+4c_1}}{1+\sqrt{1+4c_1}} \right|, \quad \xi_1 < 1.$$

Згідно з лемою 4.2 для модулів залишків справджуються оцінки: $|R_n^{(j)}| \geq \operatorname{Re}(R_n^{(j)} e^{-i\gamma}) \geq (1 - \sum_{s=1}^j v_s) \cos \gamma$. Враховуючи нерівності

$$\frac{|c_j|}{\left| R_{s_j+m-r}^{(j)} \right| \cdot \left| R_{s_j-r}^{(j)} \right|} \leq \frac{|c_j|}{(1 - \sum_{s=1}^j v_s)^2 \cos^2 \gamma},$$

одержимо оцінку

$$\prod_{r=1}^{k+1} \frac{|c_j|}{\left| R_{s_j+m-r}^{(j)} \right| \cdot \left| R_{s_j-r}^{(j)} \right|} \leq \xi_j^{k+1}, \quad 1 \leq k \leq n+1,$$

де $\xi_j = \frac{|c_j|}{(1 - \sum_{s=1}^j v_s)^2 \cos^2 \gamma}$. Позначимо $\xi = \max_{j=1, N} \{\xi_j\}$ і одержимо оцінку швидкості збіжності дробу (4.6)

$$|F_{n+m} - F_n| \leq \frac{1}{\left| R_{n+m}^{(N)} \right| \cdot \left| R_n^{(N)} \right|} \sum_{k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(N)}} M_1 \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \dots \xi_N^{k_N} \leq L_1 \binom{N-1}{n+N-1} \xi^{n+1},$$

де $L_1 = M_1 / (1 - \sum_{s=1}^N v_s)^2 \cos^2 \gamma$. Перейшовши до границі при $m \rightarrow \infty$, одержимо оцінку (4.20).

Пункт 3б. Встановимо оцінку рівномірної збіжності дробу (4.6). Для цього використаємо лему 4.1. Значення параметрів θ , δ , Δ знайдемо з умови $\Omega_1 \subset \mathcal{D}$, де Ω_1 визначена в умові теореми, а множина $\mathcal{D}$ визначається згідно з формулою (4.5). Отже, згідно з лемою 4.1 маємо оцінки

$$\frac{|c_1|^{k_1}}{\prod_{r=1}^{k_1} \left| R_{s_1+m-r}^{(1)} \right| \cdot \left| R_{s_1-r}^{(1)} \right|} \leq C \left(\frac{|c_1|}{|x|^2} \right)^{k_1} \leq C \left(\frac{|y|}{|x|} \right)^{k_1} = C \xi_1^{k_1},$$

де $C = \frac{2\sqrt{\Delta}}{(1 - \rho_1)^2}$, $\xi_1 \leq \rho_1$, де ρ_1 визначається згідно з формулою (4.4).

Враховуючи оцінку: $\operatorname{Re}(R_n^j e^{-i\gamma}) \geq (1 - \sum_{s=1}^j v_s) \cos \gamma > \sqrt{\mu}$, маємо

$$\frac{|c_j|}{\left| R_{s_j+m-r}^{(j)} \right| \cdot \left| R_{s_j-r}^{(j)} \right|} \leq \frac{|c_j|}{(1 - \sum_{s=1}^j v_s)^2 \cos^2 \gamma} \leq \frac{R_2}{\mu} = \rho_2, \quad j = \overline{2, N},$$

$$\prod_{r=1}^{k_j} \frac{|c_j|}{\left| R_{s_j+m-r}^{(j)} \right| \cdot \left| R_{s_j-r}^{(j)} \right|} \leq \rho_2^{k_j}, \quad 1 \leq k_j \leq n+1,$$

Отже, одержимо оцінку швидкості рівномірної збіжності дробу (4.6)

$$|F_{n+m} - F_n| \leq \frac{1}{\left| R_{n+m}^{(N)} \right| \cdot \left| R_n^{(N)} \right|} \sum_{k \in \mathcal{I}_{n+1}^N} \rho_1^{k_1} \rho_2^{k_2} \dots \rho^{k_N} \leq L_2 \binom{N-1}{n+N-1} \rho^{n+1},$$

де $\rho = \max\{\rho_1; R_2/\mu\}$, $L_2 = \frac{2\sqrt{\Delta}}{(1-\rho_1)^2(1-\sum_{s=1}^N v_s)^2 \cos^2 \gamma}$. Перейшовши до границі при $m \rightarrow \infty$, одержимо оцінку (4.21). ■

У формулюванні цієї теореми можна послабити умови на елемент c_1 припустивши, що $c_1 \in \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + 1/4)| < \pi\}$, а для областей $\mathcal{P}_2(\gamma)$, ..., $\mathcal{P}_N(\gamma)$ покласти $\gamma = \frac{1}{2} \arg c_1$. Отримаємо рівномірну збіжність по c_2 , ..., c_N при фіксованому елементі c_1 .

Наслідок 4.1. *Нехай $N > 1$ і елементи c_j дробу (4.6) задовольняють умови*

$$c_1 \in \Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z + 1/4)| < \pi\},$$

$c_j \in \mathcal{P}_j(\alpha_1)$, де

$$\mathcal{P}_j(\alpha_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| - \operatorname{Re}(ze^{-2i\alpha_1}) \leq 2l_j \cos^2 \alpha_1\},$$

де $\alpha_1 = \frac{1}{2} \arg c_1$, $l_j = \frac{1-\varepsilon}{2(N-1)} \left(\frac{1}{2} - \frac{(1-\varepsilon)(j-1)}{2(N-1)} \right)$, ε – деякий параметр такий, що $0 < \varepsilon < 1$. Тоді

- 1) 1-періодичний ГЛД збігається рівномірно по c_2 , ..., c_N на будь-якому компактї множини $\mathcal{P}_2(\alpha_1) \times \mathcal{P}_3(\alpha_1) \dots \mathcal{P}_N(\alpha_1)$ при фіксованому елементі c_1 ;
- 2) множиною значень цього дробу є круг

$$\mathcal{B} = \mathcal{B} \left(\frac{e^{-i\alpha_1}}{\varepsilon \cos \alpha_1}, \frac{1}{\varepsilon \cos \alpha_1} \right).$$

Доведення. 1. У теоремі 4.4 виберемо вектор вагових коефіцієнтів $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1-\varepsilon}{2(N-1)}, \dots, \frac{1-\varepsilon}{2(N-1)} \right)$. Оскільки $c_1 \in \Omega_1$ і $\Omega_1 = \bigcup_{(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})} \mathcal{P}_1(\gamma)$, $l_1 = 1/4$, тоді існує α_1 , такий що $c_1 \in \mathcal{P}_1(\alpha_1)$. Вибираємо і фіксуємо елемент c_1 . Використовуючи теорему 4.4 при умовах: $c_j \in \mathcal{P}_j(\alpha_1)$, $j = \overline{1, N}$, одержимо, що 1-періодичний дріб (4.6) рівномірно збігається на будь-якому компактї множини $\mathcal{P}$. Якщо $\mathcal{K}$ – довільний компакт з $\mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_3 \times \dots \times \mathcal{P}_N$, то $\{c_1\} \times \mathcal{K}$ – компакт з $\mathcal{P}$. Отже, маємо рівномірну збіжність дробу (4.6) на будь-якому компактї з множини $\mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_3 \times \dots \times \mathcal{P}_N$ при фіксованому $c_1 \in \Omega_1$.

2. Враховуючи, що $1 - \sum_{j=1}^N v_j = \varepsilon/2$, то згідно з пунктом 2 теореми 4.4 областю значень цього дробу є круг $\mathcal{B}$. ■

4.3. Багатовимірне узагальнення овальної теореми для періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду

Встановимо області елементів $\vec{p}$ -періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду, які відповідають заданим круговим областям значень.

Лема 4.3. Нехай $\mathcal{B}(\Gamma, \rho) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \Gamma_q| < \rho_q\}$ – задані круги, де $\Gamma_q \in \mathbb{C}$, $\rho_q > 0$, $|\Gamma_q| < \rho_q$, $q = \overline{1, N}$. Причому $\rho_q^* < |1 + \Gamma_q^*|$, де $\Gamma_q^* = \sum_{j=1}^q \Gamma_j$, $\rho_q^* = \sum_{j=1}^q \rho_j$, $q = \overline{1, N}$. Якщо множини $\mathcal{V}_{q,j} = \mathcal{V}_q = \overline{\mathcal{B}}(\Gamma_q, \rho_q)$, $q = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, p_q}$, є множинами значень дробу

$$c_0 \left(1 + \overset{\infty}{\underset{i_k=1}{\overset{i_{k-1}}{D}}} \sum \frac{c_{i_k, s}}{1} \right)^{-1}, \quad (4.22)$$

то множини

$$\Omega_{q,j} = \Omega_q = \mathcal{O}_q = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - d_q| + |z| \frac{\rho_q^*}{|1 + \overline{\Gamma}_q^*|} < \frac{\rho_q}{|\Gamma_q|} |d_q| \right\}, \quad (4.23)$$

де $d_q = \Gamma_q(1 + \Gamma_q^*) \left(1 - \frac{\rho_q^{*2}}{|1 + \Gamma_q^*|^2}\right)$, є множинами елементів цього дробу, тобто $c_{i_k, s} \in \mathcal{O}_{i_k}$, $i_k = \overline{1, i_{k-1}}$, $1 \leq s \leq p_{i_k}$. Більше того, залишки $R_n^{(q, j)}$ належать кругам $\overline{\mathcal{B}}(1 + \Gamma_q^*, \rho_q^*)$, $q = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, p_q}$, $n \geq 1$.

Доведення. Очевидно, що $1 + \sum_{j=1}^q \mathcal{B}(\Gamma_j, \rho_j) = \mathcal{B}(1 + \Gamma_q^*, \rho_q^*)$, $q = \overline{1, N}$, і $0 \in \mathcal{B}(1 + \Gamma_q^*, \rho_q^*)$. При відображенні $\omega = 1/z$ круг $\mathcal{B}(1 + \Gamma_q^*, \rho_q^*)$ переходить в круг $\mathcal{B}\left(\frac{1 + \overline{\Gamma}_q^*}{|1 + \Gamma_q^*|^2 - \rho_q^{*2}}, \frac{\rho_q^*}{|1 + \Gamma_q^*|^2 - \rho_q^{*2}}\right)$. Позначимо через C та R відповідно

центр та радіус круга $\frac{c_{q, j}}{\mathcal{B}(1 + \Gamma_q^*, \rho_q^*)}$, $q = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, p_q}$ відповідно. Згідно з означенням (1.20)-(1.21) круги $\mathcal{B}(\Gamma_q, \rho_q)$ є множинами значень і $\mathcal{O}_q$ – множинами елементів, якщо для будь-якого $c_{q, j} \in \mathcal{O}_q$, $q = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, p_q}$, тобто

виконуються умови: $\frac{c_{q, j}}{\mathcal{B}(1 + \Gamma_q^*, \rho_q^*)} \subset \mathcal{B}(\Gamma_q, \rho_q)$, $q = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, p_q}$. Вони еквівалентні виконанню нерівностей: $|\Gamma_q - C| + R \leq \rho_q$, $q = \overline{1, N}$. Це рівносильно:

$$\left| \frac{c_{q, j}(1 + \overline{\Gamma}_q^*)}{|1 + \Gamma_q^*|^2 - \rho_q^{*2}} - \Gamma_q \right| + \frac{|c_{q, j}| \rho_q^*}{|1 + \Gamma_q^*|^2 - \rho_q^{*2}} \leq \rho_q.$$

Враховуючи рекурентні співвідношення (2.11) для залишків і те, що $c_{q, j} \in \mathcal{O}_q$, $q = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, p_q}$, маємо: $R_n^{(q, j)} \in \mathcal{B}(1 + \Gamma_q^*, \rho_q^*)$, $n \geq 0$, $q = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, p_q}$.

■

Зауваження 4.1. В [109] показано, що $\partial \mathcal{O}_q$ – це овал, який є симетричний відносно прямої $e^{\alpha_q i} \mathbb{R}$, де $\alpha_q = \arg \Gamma_q(1 + \Gamma_q^*)$. Точки перетину овалу $\partial \mathcal{O}_q$ з прямою $e^{\alpha_q i} \mathbb{R}$ позначимо $v_{1, q}$ і $v_{2, q}$:

$$\begin{aligned} v_{1, q} &= (|\Gamma_q| - \rho_q)(|1 + \Gamma_q^*| - \rho_q^*)e^{\arg \alpha_q}, \\ v_{2, q} &= (|\Gamma_q| + \rho_q)(|1 + \Gamma_q^*| - \rho_q^*)e^{\arg \alpha_q}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Віддалі від початку координат до цих точок називають малою та великою осями овалу $\partial \mathcal{O}_q$ відповідно, див. рис. 4.2. Очевидно, що $\mathcal{B}(0, |v_{1, q}|) \subset \mathcal{O}_q \subset \mathcal{B}(0, |v_{2, q}|)$ і $\mathcal{B}(d_q, |v_{2, q}| - |d_q|) \subset \mathcal{O}_q \subset \mathcal{B}(d_q, |v_{1, q}| + |d_q|)$.

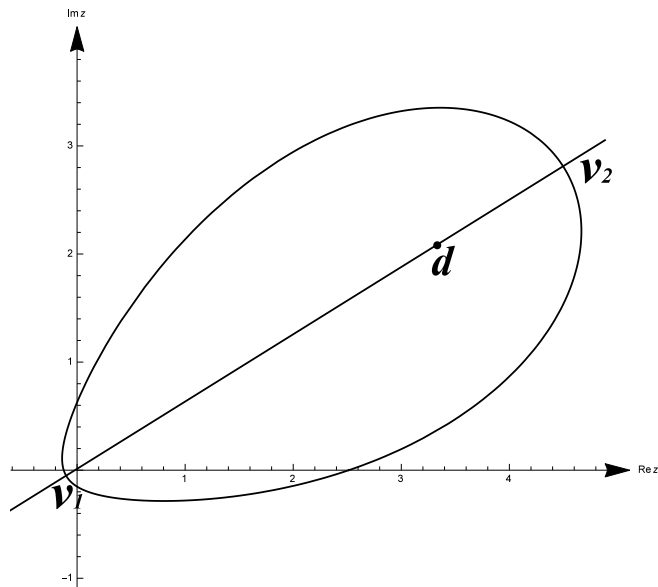


Рис. 4.2. Овальна область.

Нехай існують скінчення границі залишків $\vec{p}$ -періодичного ГЛД (4.22), тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(q,1)} = Z^{(q)}$, $q = \overline{1, N}$. Розглянемо дробово-лінійні відображення: $s^{(q,j)}(\omega) = Z^{(q-1)} + c_{q,j}/\omega$ і $t^{(q,j)}(\omega) = c_{q,j}/(Z^{(q-1)} + \omega)$, $j = \overline{1, p_q}$; $Z^{(0)} = 1$ та їх композицію

$$S^{(q)}(\omega) = s^{(q,1)} \circ s^{(q,2)} \circ \dots \circ s^{(q,p_q)}(\omega),$$

$$T^{(q)}(\omega) = t^{(q,1)} \circ t^{(q,2)} \circ \dots \circ t^{(q,p_q)}(\omega), \quad q = \overline{1, N}. \quad (4.25)$$

Позначимо $X^{(1)}$ притягувальну нерухому точку дробово-лінійного відображення $S^{(1)}(\omega)$, $Y^{(q)}$, $q = \overline{2, N}$ – відштовхувальні нерухомі точки відображень $T^{(q)}(\omega)$.

Теорема 4.5. *Нехай елементи $c_{q,j}$ $\vec{p}$ -періодичного ГЛД (4.10) належать овальним областям (4.23), тобто $c_{q,j} \in \overline{\mathcal{O}}_q$, $j = \overline{1, p_q}$, $q = \overline{1, N}$. Тоді*

- 1) *послідовності залишків $\{R_n^{(q,1)}\}_{n=1}^{\infty}$, $q = \overline{1, N}$ цього дробу збігаються, зокрема, $\vec{p}$ -періодичного ГЛД (4.10) збігається;*
- 2) *якщо дробово-лінійні відображення $T^{(q)}(\omega)$, $q = \overline{2, N}$, – локсодромічного типу, і $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(q,1)} = Z^{(q)}$, $q = \overline{1, N}$, то*

$$Z^{(q)} = \begin{cases} X^{(1)}, & \text{якщо } q = 1; \\ -Y^{(q)}, & \text{якщо } 2 \leq q \leq N; \end{cases}$$

$$i \lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F, \quad \partial e F = (Z^{(N)})^{-1};$$

3) n -ні підхідні дроби ГЛД (4.10) належать кругу

$$\mathcal{K} = \overline{\mathcal{B}} \left(\frac{1 + \overline{\Gamma}_N^*}{|1 + \Gamma_N^*|^2 - \rho_N^{*2}}, \frac{\rho_N^*}{|1 + \Gamma_N^*|^2 - \rho_N^{*2}} \right).$$

4) якщо крім цього виконуються умови: $\rho_q < (|1 + \Gamma_q^*| - |\Gamma_q| - \rho_{q-1}^*)/2$, $\rho_0^* = 0$, $q = \overline{1, N}$, то дріб (4.10) збігається і справджується оцінка швидкості збіжності

$$|F - F_n| \leq L \binom{N-1}{n+N-1} \zeta^{n+1}, \quad n \geq 1, \quad (4.26)$$

$$\text{де } \zeta = \max_{q=\overline{1, N}} \{\zeta_q\}, \quad \zeta_q = \frac{\rho_q + |\Gamma_q|}{|1 + \Gamma_q^*| - \rho_q^*}, \quad L - \text{деяка стала.}$$

Доведення. 1-3. Використовуючи метод математичної індукції по q , покажемо, що послідовності залишків $\{R_n^{(q,1)}\}_{n=1}^\infty$, $q = \overline{1, N}$ збігаються і їх границі відмінні від нуля.

Оскільки $c_{1,j} \in \mathcal{O}_1$, $j = \overline{1, p_1}$, то згідно з овальною теоремою 1.5 [див. стр. 14], послідовність $\{R_n^{(1,1)}\}_{n=1}^\infty$ збігається, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(1,1)} = Z^{(1)}$. Згідно лемою 4.3 $R_n^{(1,1)} \in \mathcal{B}(1 + \Gamma_1, \rho_1)$, $n \geq 1$. Оскільки $\text{dist}(0, \partial \mathcal{B}(1 + \Gamma_1, \rho_1)) = |1 + \Gamma_1| - \rho_1 > 0$, то $Z^{(1)} \neq 0$.

Припустимо, що для деякого k послідовності $\{R_n^{(s,1)}\}_{n=1}^\infty$, $2 \leq s \leq k$ збігаються, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(s,1)} = Z^{(s)}$, і $Z^{(s)} \neq 0$, $2 \leq s \leq k$.

Залишки $R_n^{(k+1,1)}$ запишемо у вигляді

$$R_n^{(k+1,1)} = R_n^{(k,1)} + \frac{c_{k+1,1}}{|R_{n-1}^{(k,1)}|} + \dots + \frac{c_{k+1,n}}{|R_0^{(k,1)}|}, \quad n \geq 1.$$

Отже, $R_n^{(k+1,1)}$ – зворотний неперервний дріб гранично- p_{k+1} -періодичного неперервного дроби $\bigvee_{n=1}^\infty (c_{k+1,n}/R_{n-1}^{(k,1)})$, у якого $c_{i_{k+1},n} = c_{i_{k+1},s}$, де $n = mp_{k+1} + s$, $m \geq 0$, $1 \leq s \leq p_{k+1}$. Йому відповідає дробово-лінійне відображення (4.25) $T^{(k+1)}(\omega)$ локсодромічного типу. Згідно з пунктом 2 теореми 1.9 [див. стр. 17]

маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(k+1,1)} = Z^{(k+1)}.$$

З леми 4.3 випливає, що залишки $R_n^{(k+1,1)} \in \overline{\mathcal{B}}(1 + \Gamma_{k+1}^*, \rho_{k+1}^*)$, $n \geq 1$. Отже, $Z^{(k+1)} \neq \infty$. Більше того, $\text{dist}(0, \partial \mathcal{B}(1 + \Gamma_{k+1}^*, \rho_{k+1}^*)) = |1 + \Gamma_{k+1}^*| - \rho_{k+1}^* > 0$ і $Z^{(k+1)} \neq 0$.

Оскільки, $F_n = 1/R_n^{(N,1)}$ і $|R_n^{(N,1)}| > \delta$, де $\delta = |1 + \Gamma_N^*| - \rho_N^*$, $n > 0$, тоді послідовність $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ збігається, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F$ і $F = (Z^{(N)})^{-1}$. Оскільки $R_n^{(N,1)} \in \overline{\mathcal{B}}(1 + \Gamma_N^*, \rho_N^*)$, то $F_n \in \mathcal{K}$, $n > 1$.

4. Для оцінок швидкості збіжності дробу (4.10) використаємо формулу (2.18). Якщо $c_{q,j} \in \mathcal{O}_q$, $j = \overline{1, p_q}$, $q = \overline{1, N}$, то залишки $R_n^{(q,j)}$ належать відповідним кругам $\overline{\mathcal{B}}(1 + \Gamma_q^*, \rho_q^*)$ і справджуються оцінки знизу: $|R_n^{(q,j)}| \geq |1 + \Gamma_q^*| - \rho_q^*$, $q = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, p_q}$. Оскільки $c_{q,j} \in \overline{\mathcal{O}}_q$, то $|c_{q,j}| \leq |v_{2,q}|$, де $|v_{2,q}| = (\rho_q + |\Gamma_q|)(|1 + \Gamma_q^*| - \rho_q^*)$, $q = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, p_q}$. Отже, для $j = \overline{1, p_q}$, $1 \leq r \leq n + 1$ маємо

$$\frac{|c_{q,j}|}{|R_{n+m-r}^{(q,j+1)}| |R_{n-r}^{(q,j+1)}|} \leq \frac{(\rho_q + |\Gamma_q|)(|1 + \Gamma_q^*| - \rho_q^*)}{(|1 + \Gamma_q^*| - \rho_q^*)^2} = \zeta_q.$$

Враховуючи умови на радіуси ρ_q , $q = \overline{1, N}$, маємо: $\zeta_q = (\rho_q + |\Gamma_q|)/(|1 + \Gamma_q^*| - \rho_q^*) < 1$, $q = \overline{1, N}$.

Остаточнo одержуємо

$$|F_{m+n} - F_n| \leq \frac{1}{(|1 + \Gamma_N^*| - \rho_N^*)^2} \sum_{k \in \mathcal{I}_{n+1}^{(N)}} \zeta_1^{k_1} \zeta_2^{k_2} \dots \zeta_N^{k_N} \leq L \binom{N-1}{n+N-1} \zeta^{n+1}.$$

При $m \rightarrow \infty$ отримаємо оцінку (4.26), $L = 1/(|1 + \Gamma_N^*| - \rho_N^*)^2$. ■

Зауваження 4.2. Залишок $R_n^{(q,j)}$ – це зворотний гранично- p_{k+1} -періодичний неперервний дріб, $q = \overline{2, N}$. Оскільки послідовності $\{R_n^{(q,1)}\}_{n=1}^\infty$ збігаються, то послідовності $\{R_n^{(q,j)}\}_{n=1}^\infty$ також збіжні, $j = \overline{2, p_q}$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(q,j)} = Z^{(q,j)}$. Границя $Z^{(q,j)} = -Y^{(q,j)}$, де $Y^{(q,j)}$ – відштовхувальна

точка дробово-лінійного відображення

$$t^{(q,j)}(\omega) = \frac{c_{q,j}|}{|Z^{(q-1)}|} + \dots + \frac{c_{q,j+p_q-1}|}{|Z^{(q-1)}|} + \frac{c_{q,j+p_q}|}{|Z^{(q-1)} + \omega|}.$$

Крім цього, згідно з лемою 4.3, маємо: $R_n^{(q,j)} \in \overline{\mathcal{B}}(1 + \Gamma_q^*, \rho_q^*)$, $q = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, p_q}$. Оскільки $0 \notin \overline{\mathcal{B}}(1 + \Gamma_q^*, \rho_q^*)$, то $Z^{(q,j)} \neq 0$.

Запишемо овальні області (4.23) у вигляді

$$\mathcal{O}_q = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - d_q| + |z| \frac{\rho_q^*}{|1 + \overline{\Gamma}_q^*|} < \rho_q(1 + \Gamma_q^*) \left(1 - \frac{\rho_q^{*2}}{|1 + \Gamma_q^*|^2} \right) \right\},$$

Якщо $\Gamma_q = 0$, $q = \overline{1, N}$, то $\mathcal{O}_q$ вироджуються в круги $\mathcal{B}(0, \rho_q(1 - \rho_q^*))$, для запису якого будемо використовувати позначення $\mathcal{W}_q$.

Розглянемо 1-періодичний ГЛД вигляду

$$\left(1 + \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k}}{1} \right)^{-1}, \quad (4.27)$$

де $c_q \in \mathbb{C}$, $q = \overline{1, N}$.

Дослідимо кругові області збіжності цього дробу, які можна одержати з овальної теореми 4.5. Нехай α_q , $q = \overline{1, N}$, – радіуси кругів $\mathcal{W}_q$, $q = \overline{1, N}$. Із теореми 4.5 випливає, що параметри ρ_q , $q = \overline{1, N}$, повинні задовольняти рівняння

$$\rho_q(1 - \rho_q^*) = \alpha_q, \quad q = \overline{1, N}. \quad (4.28)$$

і умови: $\rho_q > 0$, $\rho_q^* < 1$, $q = \overline{1, N}$.

Із багатовимірною аналогу теореми Ворпіцького [див. стр. 21] для дробу (1.24) випливає, що $|a_{i(1)}| \leq 1/(4N)$. Ця умова для 1-періодичного ГЛД (4.27) має вигляд: $|c_q| \leq 1/(4N)$, $q = \overline{1, N}$. Застосуємо овальну теорему для розширення кругових областей збіжності дробу (4.27).

Покладемо $\alpha_q = 1/(4N)$, $q = \overline{1, N-1}$, виберемо ρ_N так, щоб вираз $\rho_N(1 - \rho_N^*)$ досягав максимального значення.

Нехай $N = 2$. Тоді $\alpha_1 = 1/8$. Значення ρ_1 знайдемо з рівняння $\rho_1(1 - \rho_1) = 1/8$, а ρ_2 – з умови $\rho_2(1 - \rho_1 - \rho_2) \rightarrow \max$. Маємо: $\rho_1 = (2 - \sqrt{2})/4$, $\rho_2 = (2 + \sqrt{2})/8$. Тоді одержимо круги: $\mathcal{W}_1 = \overline{\mathcal{B}}(0, 1/8)$ і $\mathcal{W}_2 = \overline{\mathcal{B}}(0, (3 + 2\sqrt{2})/32) \supset \overline{\mathcal{B}}(0, 1/8)$.

Нехай $N = 3$, тоді з системи рівнянь

$$\begin{cases} \rho_1(1 - \rho_1) = 1/12 \\ \rho_2(1 - \rho_1 - \rho_2) = 1/12 \end{cases}$$

маємо: $\rho_1 = (3 - \sqrt{6})/6$, $\rho_2 = (3 + \sqrt{6} - \sqrt{3 + 6\sqrt{6}})/12$. З умови

$$\rho_3(1 - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3) \rightarrow \max.$$

одержуємо $\rho_3 = (3 + \sqrt{6} + \sqrt{3 + 6\sqrt{6}})/24$. Отже, маємо: $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_2 = \overline{\mathcal{B}}(0, 1/12)$ і $\mathcal{W}_3 = \overline{\mathcal{B}}(0, 0.161881) \supset \overline{\mathcal{B}}(0; 1/12)$.

Розглянемо аналогічну задачу побудова кругових областей збіжності дробу (4.27) таких, щоб радіуси всіх кругів $\mathcal{W}_q$, $q = \overline{1, N}$, досягають максимального значення. Із умов $\rho_q(1 - \rho_q^*) \rightarrow \max$, $q = \overline{1, N}$, одержимо $\rho_q = 1/2^q$ і $\alpha_q = 1/4^q$. Тоді одержимо круги $\mathcal{W}_q = \overline{\mathcal{B}}(0, 1/4^q)$, $q = \overline{1, N}$.

Теорема 4.6. *Нехай елементи $\vec{p}$ -періодичного ГЛД (4.10) належать овальним областям $\mathcal{O}_{q,j}$, тобто $c_{q,j} \in \mathcal{O}_{q,j}$, $q = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, p_q}$, де*

$$\mathcal{O}_{q,j} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - d_{q,j}| + |z| \frac{\rho_{q,j+1}^*}{|1 + \overline{\Gamma}_{q,j}^*|} < \frac{\rho_{q,j}}{|\Gamma_{q,j}|} |d_{q,j}| \right\} \quad (4.29)$$

$$i \quad |1 + \Gamma_{q,j}^*| > \rho_{q,j}^*, \quad q = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, p_q},$$

$$де \quad d_{q,j} = \Gamma_{q,j}(1 + \Gamma_{q,j+1}^*) \left(1 - \frac{\rho_{q,j+1}^{*2}}{|1 + \Gamma_{q,j+1}^*|^2} \right), \quad \Gamma_{q,j}^* = \sum_{s=1}^{q-1} \Gamma_{s,1} + \Gamma_{q,j}, \quad \rho_q^* = \sum_{s=1}^{q-1} \rho_{s,1} + \rho_{q,j}, \quad \Gamma_{q,p_q+1} = \Gamma_{q,1}, \quad \rho_{q,p_q+1} = \rho_{q,1}, \quad q = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, p_q}. \quad Тоді$$

1) *дріб (4.10) та послідовності його залишків $\{R_n^{(q,1)}\}_{n=1}^\infty$, $q = \overline{1, N}$, рівномірно збігаються на будь-якому компактї множини*

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{1,1} \times \dots \times \mathcal{O}_{1,p_1} \times \dots \times \mathcal{O}_{N,1} \times \dots \times \mathcal{O}_{N,p_N};$$

2) залишки цього дробу належать кругам: $R_n^{(q,j)} \in \overline{\mathcal{B}}(1 + \Gamma_{q,j}^*, \rho_{q,j}^*)$, $q = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, p_q}$, і n -ні підхідні дроби $F_n \in \mathcal{K}$, $n \geq 1$, де

$$\mathcal{K} = \overline{\mathcal{B}} \left(\frac{1 + \overline{\Gamma}_{N,1}^*}{|1 + \Gamma_{N,1}^*|^2 - \rho_{N,1}^{*2}}, \frac{\rho_{N,1}^*}{|1 + \Gamma_{N,1}^*|^2 - \rho_{N,1}^{*2}} \right).$$

Доведення. Аналогічно як у попередній теоремі, можна показати, що $R_n^{(q,j)} \in \overline{\mathcal{B}}(1 + \Gamma_{q,j+1}^*, \rho_{q,j+1}^*)$, якщо мають місце включення

$$\frac{c_{q,j}}{\mathcal{B}(1 + \Gamma_{q,j+1}^*; \rho_{q,j+1}^*)} \subset \mathcal{B}(\Gamma_{q,j}, \rho_{q,j}), \quad q = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, p_q}. \quad (4.30)$$

Очевидно, що $0 \in \overline{\mathcal{B}}(1 + \Gamma_{q,j}^*, \rho_{q,j}^*)$. Позначимо через $C_{q,j}$ та $R_{q,j}$ відповідно центр

та радіус круга $\frac{c_{q,j}}{\mathcal{B}(1 + \Gamma_{q,j+1}^*, \rho_{q,j+1}^*)}$. Включення (4.30) еквівалентне виконанню нерівності: $|C_{q,j} - \Gamma_{q,j}| + R_{q,j} \leq \rho_{q,j}$, що рівносильно умові:

$$\left| \frac{c_{q,j}(1 + \overline{\Gamma}_{q,j+1}^*)}{|1 + \Gamma_{q,j+1}^*|^2 - \rho_{q,j+1}^{*2}} - \Gamma_{q,j} \right| + \frac{|c_{q,j}| \rho_{q,j+1}^*}{|1 + \Gamma_{q,j+1}^*|^2 - \rho_{q,j+1}^{*2}} \leq \rho_{q,j}$$

або $c_{q,j} \in \mathcal{O}_{q,j}$. Враховуючи рекурентні співвідношення (2.10), маємо: $R_n^{(q,j)} \in \overline{\mathcal{B}}(1 + \Gamma_{q,j}^*, \rho_{q,j}^*)$, де $n \geq 1$; $q = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, p_q}$.

Для доведення збіжності дробу (4.10) використаємо багатовимірне узагальнення теореми Стілтєса-Віталі. Для цього побудуємо функціональні гіллясті ланцюгові дроби

$$1 + \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{j_k=1}^{j_{k-1}} \frac{z_{j_k, s}}{1}, \quad j_0 = \overline{1, N}.$$

Нехай $j_0 = q$, $1 \leq q \leq N$, тоді $R_n^{(q,1)}(z^{\sigma_q})$ – n -ий залишок цього дробу, де $\sigma_q = \sum_{j=1}^q p_j$, $z^{(\sigma_q)} = (z_{1,1}, z_{1,2}, \dots, z_{1,p_1}, \dots, z_{q,1}, z_{q,2}, \dots, z_{q,p_q})$, $q = \overline{1, N}$. Доведемо, що існують границі $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(q,1)}(z^{\sigma_q})$.

Визначимо множину

$$\mathcal{O}^{(q)} = \mathcal{O}_{1,1} \times \dots \times \mathcal{O}_{1,p_1} \times \dots \times \mathcal{O}_{q,1} \times \dots \times \mathcal{O}_{q,p_q}.$$

Нехай $\mathcal{D} = \{z^{(\sigma_q)} \in \mathbb{C}^{\sigma_q} : |z_k| \leq r < r_q, k = \overline{1, \sigma_q}\}$ – замкнений полікруг, який міститься у множині $\mathcal{O}^{(q)}$, де

$$r_q = \min\{1/(4N), |v_{s,m}| : s = \overline{1, q}; m = \overline{1, p_q}\}$$

і $|v_{q,j}|$ – мала вісь овалу $\mathcal{O}_{q,j}$, яку знаходимо за формулою $|v_{q,j}| = (|\Gamma_{q,j}| - \rho_{q,j})(|1 + \Gamma_{q,j}^*| - \rho_{q,j}^*)$, $q = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, p_q}$. Збіжність $R_n^{(q,1)}(z^{\sigma_q})$ на компактті $\mathcal{D}$ множини $\mathcal{O}^{(q)}$ впливає з теореми 1.11 для ГЛД спеціального вигляду. Зокрема, одержуємо збіжність послідовності залишків $R_n^{(N,1)}(z^{\sigma_N})$ в точці $M \in \mathcal{O}^{(N)}$ з координатами $z_{q,j} = c_{q,j}$, $q = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, p_q}$.

Оскільки $F_n = \left(R_n^{(N,1)}\right)^{-1}$ і $|R_n^{(q,j)}| > \delta$, де $\delta = \min(|1 + \Gamma_{q,j}^*| - \rho_{q,j}^*) > 0$, де $q = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, p_q}$, то існує границя послідовності n -х підхідних дробів $\{F_n\}_{n=1}^\infty$. Враховуючи, що $R_n^{(N,1)} \in \overline{\mathcal{B}}(1 + \Gamma_{N,1}^*, \rho_{N,1}^*)$, маємо $F_n \in \mathcal{K}$, $n \geq 1$. ■

Зауваження 4.3. У теоремі 4.5, використовуючи схему доведення теореми 4.6 можна довести рівномірну збіжність $\vec{p}$ -періодичного ГЛД (4.10) на будь-якому компактті області $\widehat{\mathcal{O}}$, де

$$\widehat{\mathcal{O}} = \mathcal{O}_1^{p_1} \times \dots \times \mathcal{O}_N^{p_N},$$

де $\mathcal{O}_q^{p_q} = \underbrace{\mathcal{O}_q \times \dots \times \mathcal{O}_q}_{p_q}$, $q = \overline{1, N}$.

Використовуючи техніку доведення теореми 4.5 можна довести збіжність на множинах $\mathcal{O}_{q,j}$, $q = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, p_q}$. Більше того, якщо відповідні дробово-лінійні відображення (4.25) $T^{(q)}(\omega)$, $q = \overline{2, N}$, локсодромічного типу, то можна знайти значення границь послідовностей $\{R_n^{(q,1)}\}_{n=1}^\infty$, $q = \overline{1, N}$.

4.4. Висновки до розділу 4

У розділі 4 досліджено різні області рівномірної збіжності періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду.

Доведено рівномірну збіжність та встановлено оцінку швидкості збіжності 1-періодичного неперервного дробу. Використовуючи цю оцінку, дослі-

джено швидкість збіжності в кругових та параболічних областях збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду.

Досліджено рівномірну збіжність 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу на будь-якому компактї параболічних областей, які задаються через вагові коефіцієнти.

Доведено рівномірну збіжність 1-періодичного ГЛД при умовах, що елемент 1-ої вітки належить кутовій області, а всі інші – деякій багатовимірній області, та встановлені оцінки швидкості збіжності при накладанні додаткових обмежень.

Досліджено овальні області збіжності та області рівномірної збіжності для $\vec{p}$ -періодичного ГЛД спеціального вигляду. Встановлено оцінки швидкості рівномірної збіжності при додаткових умовах на параметри овальних областей. Розглянуто можливість використання овальних теорем для розширення кругових областей збіжності, які визначені з багатовимірному аналозі теореми Ворпіцького.

Матеріали цього розділу опубліковано в [30, 31, 36, 75, 76].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена подальшому розвитку аналітичної теорії гіллястих ланцюгових дробів. Побудовано та досліджено важливий підклас гіллястих ланцюгових дробів – періодичні гіллясті ланцюгові дроби спеціального вигляду. Отримано наступні результати:

- визначено $\overrightarrow{p}$ -періодичні гіллясті ланцюгові дроби спеціального вигляду; встановлено формули різниці двох підхідних дробів, а також формулу різниці між підхідним дробом $\overrightarrow{p}$ -періодичного гіллястого ланцюгового дроби спеціального вигляду та його значенням, що виражається через нерухомі точки відповідних дробово-лінійних відображень; встановлено оцінку модуля різниці підхідних дробів 1-періодичного гіллястого ланцюгового дроби;
- для 1-періодичного гіллястого ланцюгового дроби спеціального вигляду встановлено поточкову збіжність при умовах, що частинний чисельник 1-ої вітки належить площині з розрізом, а всі інші елементи – або круговим областям, або об'єднанням параболічних областей, або площинам з розрізами; досліджено кутові області збіжності та доведено необхідну ознаку збіжності;
- доведено багатомірні узагальнення овальної теореми для $\overrightarrow{p}$ -періодичного гіллястого ланцюгового дроби спеціального вигляду, які використано для розширення кругових областей збіжності;
- досліджено множини значень та множини елементів, які їм відповідають, для $\overrightarrow{p}$ -періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду; встановлено умови поточної та рівномірної збіжності цих дробів; одержано оцінки похибок апроксимацій 1-періодичних та $(2,1,\dots,1)$ -періодичних гіллястих ланцюгових дробів у деяких обмежених областях.

Результати дисертації є багатовимірними узагальненнями відомих результатів, встановлених для неперервних дробів, і супроводжуються повними доведеннями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Антонова Т. М. Багатовимірне узагальнення теореми про параболічні області збіжності неперервних дробів / Т. М. Антонова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1999. — Т. 42, № 4. — С. 7–12.
2. Антонова Т. М. Области збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду / Т. М. Антонова, Д. І. Боднар // Теорія наближення функцій та її застосування. Праці Ін-ту математики НАН України. — 2000. — Т. 31. — С. 19–32.
3. Антонова Т. М. Деякі властивості гіллястих ланцюгових дробів з недодатними частинними чисельниками / Т. М. Антонова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2002. — Т. 45, № 1. — С. 11–15.
4. Антонова Т. М. Збіжність гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами та їх парних частин / Т. М. Антонова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2003. — Т. 46, № 4. — С. 7–15.
5. Антонова Т. М. Деякі достатні умови збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів зі знакозмінними частинними чисельниками / Т. М. Антонова, В. Р. Гладун // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2004. — Т. 47, № 4. — С. 27–35.
6. Антонова Т. М. Про парні множини збіжності для двовимірних неперервних дробів із комплексними елементами / Т. М. Антонова, О. М. Сусь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2007. — Т. 50, № 3. — С. 94–101.
7. Антонова Т. М. Про прості кругові множини абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду / Т. М. Антонова // Карпат. мат. публікації. — 2012. — Т. 4, № 2. — С. 165–174.
8. Антонова Т. М. Необхідні умови збіжності для одного класу двовимірних неперервних дробів з комплексними елементами / Т. М. Антонова, О. М. Сусь // Збірник праць Інституту НАН України. — 2015. — Т. 12, № 4. — С. 8–28.
9. Баран О. Є. Аналог ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду / О. Є. Баран // Мат. методи та

- фіз.-мех. поля. — 1996. — Т. 39, № 2. — С. 35–38. (Переклад: Baran O. E. An analog of the Vorpits'kii convergence criterion for branched continued fractions of special form / O. E. Baran // Journal of Mathematical Sciences. — 1998. — Vol. 90, № 5. — P. 2348–2351.)
10. Баран О. Є. Деякі ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними / О. Є. Баран // Вісн. Держ. ун-ту "Львів. політехніка". Прикладна Математика. — 1998. — № 341. — С. 18–23.
 11. Баран О. Є. Розвинення кратного степеневого ряду у багатовимірний C -дріб з нерівнозначними змінними / О. Є. Баран, Д. І. Боднар // Волинський математичний вісник. — 1999. — Вип. 6. — С. 15–20.
 12. Баран О. Є. Парні кругові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними / О. Є. Баран // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2009. — Т. 52, № 4. — С. 73–80. (Переклад: Baran O. E. Twin circular domains of convergence of branched continued fractions with inequivalent variables / O. E. Baran // Journal of Mathematical Sciences. — 2011. — Vol. 174, № 2. — P. 209–218).
 13. Баран О. Є. Деякі властивості спарених множин значень та спарених множин елементів для гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду / О. Є. Баран // Мат. вісник НТШ. — 2012. — Т. 9. — С. 5–14.
 14. Баран О. Є. Деякі кругові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду / О. Є. Баран // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — Т. 56, № 3. — С. 7–14.
 15. Баран О. Є. Деякі області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду / О. Є. Баран // Карпатські мат. публікації. — 2013. — Т. 5, № 1. — С. 4–13.
 16. Баран О. Є. Наближення функцій багатьох змінних гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними : дисертація кандидата фіз.-мат. наук : 01.01.01 / Баран Оксана Євгеніївна. — Івано-Франківськ, 2014. — 148 с.
 17. Боднар Д. І. Багатовимірні C -дроби / Д. І. Боднар // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1996. — Т. 39, № 2. — С. 39–46.

18. Боднар Д. И. Ветвящиеся цепные дроби / Д. И. Боднар. — К : Наукова думка, 1986. — 176 с.
19. Боднар Д. И. Соответствующие ветвящиеся цепные дроби с линейными частными числителями для двойного степенного ряда / Д. И. Боднар // Укр. мат. журнал. — 1991. — Т. 43, № 4. — С. 474–482.
20. Боднар Д. І. Параболічна область збіжності для двовимірних неперервних дробів / Д. І. Боднар, Х. Й. Кучмінська // Мат. студії. — 1995. — Т. 4. — С. 29–36.
21. Боднар Д. І. Наближення відношення функцій Лаурічелли F_D гіллястим ланцюговим дробом / Д. І. Боднар, Н. П. Гоєнко // Мат. студії. — 2003. — Т. 20, № 2. — С. 210–214.
22. Боднар Д. І. Про збіжність 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду / Д. І. Боднар, М. М. Бубняк // Мат. вісник НТШ. — 2011. — Т. 8. — С. 5–16.
23. Боднар Д. І. Узагальнення ланцюгових дробів. І. / Д. І. Боднар, Р. А. Заторський // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2011. — 54, № 1, — С. 57–64.
24. Боднар Д. І. Узагальнення ланцюгових дробів. ІІ. / Д. І. Боднар, Р. А. Заторський // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2011. — 54, № 2, — С. 1–8.
25. Боднар Д. І. Деякі параболічні області збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду / Д. І. Боднар, М. М. Бубняк // Комп'ютерно-інтегровані технології : освіта, наука, виробництво. — 2012. — № 9. — С. 4–8.
26. Боднар Д. І. Оцінка швидкості збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду / Д. І. Боднар, М. М. Бубняк, О. Я. Ковальчук // Міжнародна наукова конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 70-річчю з дня членкоресподента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007), 28 травня – 3 червня 2012, Кам'янець-Подільський, Україна : тези доповідей. — Київ : Інститут математики НАН України, 2012. — С. 24.

27. Боднар Д. І. Поточкова та рівномірна збіжність 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду / Д. І. Боднар, М. М. Бубняк, Р. І. Михайльчук // "Сучасні проблеми механіки та математики": в 3-х т. / Під заг. ред. Р. М. Кушніра, Б. Й. Пташника, 21–23 травня 2013, Львів / Національна академія наук України — Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. — Т. 3. — С. 81-82.
28. Боднар Д. І. Оцінки швидкості збіжності 1-періодичного гіллястого дробу спеціального вигляду / Д. І. Боднар, М. М. Бубняк, О. Я. Ковальчук // Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF-2013. "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, 23–30 червня 2013, Севастополь, Україна : тези доповідей. — Київ : Інститут математики НАН України, 2013. — С. 220.
29. Боднар Д. І. Про збіжність 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду / Д. І. Боднар, М. М. Бубняк, Р. І. Михайльчук // V Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу", 19-20 вересня 2013, Івано-Франківськ : тези доповідей. — Івано-Франківськ : Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2013. — С. 12.
30. Боднар Д. І. Оцінки швидкості поточної та рівномірної збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду / Д. І. Боднар, М. М. Бубняк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — Т. 56, № 4. — С. 24–32. (Переклад: Bodnar D. I. Estimates of the rate of pointwise and uniform convergence for one-periodic branched continued fractions of a special form / D.I. Bodnar, M.M. Bubnyak // Journal of Mathematical Sciences. — 2015. — Vol. 208, № 3. — P. 289–300 DOI 10.1007/s10958-015-2446-x.).
31. Боднар Д. І. Багатовимірне узагальнення овальної теореми для періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду / Д. І. Боднар, М. М. Бубняк // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики / Відп. ред. І. О. Луковський, В. Л. Макаров.

- Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 4. — С. 54–67.
32. Bodnar D. I. On Convergence of Periodic Branched Continued Fractions of the Special Form / D. I. Bodnar, M. M. Bubniak // Міжнародна наукова конференція з нагоди 75-річчя В. П. Моторного, 8–11 жовтня 2015, Дніпропетровськ, Україна : тези доповідей. — Дніпропетровськ : Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, 2015. — С. 15.
 33. Бубняк М. М. Граничне значення 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду / М. М. Бубняк, О. Г. Возняк // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатка, 19 – 23 вересня 2011, Дрогобич, Україна : тези доповідей. — Львів : Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача. — 2011. — С. 25.
 34. Бубняк М. М. Оцінки швидкості збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду / М. М. Бубняк // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т. 5, № 2. — С. 187–195.
 35. Бубняк М. М. Про рівномірну збіжність 1-періодичного ланцюгового спеціального вигляду в параболічних областях / М. М. Бубняк, О. Г. Возняк, Р. І. Михайльчук // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 24 лютого — 2 березня 2014, Ворохта, Україна : тези доповідей. — Івано-Франківськ : Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2014. — С. 44–45.
 36. Бубняк М. М. Ознаки збіжності періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду / М. М. Бубняк // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред. А. С. Романюк. Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 4. — С. 54–66.
 37. Бубняк М. М. Багатовимірне узагальнення овальної теореми для періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду / М. М. Бубняк, О. Г. Возняк // Міжнародна конференція молодих ма-

- тематиків, 3–6 червня 2015, Київ, Україна : тези доповідей. — Київ : Інститут математики НАН України, 2015. — С. 61.
38. Боднарчук П. І. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування / П. І. Боднарчук, В. Я. Скоробогатько. — К. : Наук. думка, 1974. — 272 с.
 39. Гладун В. Р. Умови збіжності та стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів із від'ємними частинними чисельниками / В. Р. Гладун // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2003. — Т. 46, № 4. — С. 16–26.
 40. Гладун В. Р. Множини абсолютної стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з дійсними елементами / В. Р. Гладун // Вісник Національного Університету "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. — 2013. — № 768. — С. 63–70.
 41. Гладун В. Р. Відносна стійкість до збурень багатовимірних регулярних - дробів / В. Р. Гладун, К. В. Матулка, О. С. Манзій, В. В. Пабірівський // Вісник Національного Університету "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. — 2014. — № 804. — С. 112–119.
 42. Гоєнко Н. П. Принцип відповідності та збіжність послідовностей аналітичних функцій багатьох змінних / Н. П. Гоєнко // Мат. вісник НТШ. — 2007. — 4. — С. 42–48.
 43. Голуб А. П. Метод узагальнених моментних зображень в теорії раціональної апроксимації. Огляд / А. П. Голуб // Укр. мат. журн. — 2003. — 55, № 3. — С. 307–359.
 44. Голуб А. П. Узагальнені моментні зображення та багатоточкові апроксимації Паде / А. П. Голуб // Укр. мат. журн. — 2004. — 56, № 7. — С. 991–995.
 45. Голуб А. П. Про асимптотику апроксимацій Паде функцій типу Міттаг-Леффлера / А. П. Голуб // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Інституту математики НАН України. — К. : Ін-т матем. НАН України. — 2008. — 5, № 1. — С. 92–103.
 46. Голуб А. П. Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних / А. П. Голуб, Л. О. Чернецька // Укр. мат. журн. — 2013. — 65, № 8. — С. 1035–1058.

47. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г. М. Голузин. — Москва : Наука, 1969. — 628 с.
48. Дмитришин Р. І. Деякі типи гіллястих ланцюгових дробів, відповідних до кратних степеневих рядів / Р. І. Дмитришин, О. Є. Баран // Теорія наближення функцій та її застосування. Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2000. — Т. 31. — С. 82–92.
49. Дмитришин Р. І. Багатовимірне узагальнення g -алгоритму Бауера / Р. І. Дмитришин // Карпат. мат. публікації. — 2012. — Т. 4, № 2. — С. 247–260.
50. Кучмінська Х. Й. Області елементів і області значень для двовимірних неперервних дробів / Х. Й. Кучмінська // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1996. — Т. 39, № 2. — С. 55–61.
51. Кучмінська Х. Й. Двовимірні неперервні дробі / Х. Й. Кучмінська. — Львів : Інститут прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. — 218 с.
52. Манзій О. С. Про збіжність розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля F_3 у гіллястий ланцюговий дріб у деякій необмеженій області / О. С. Манзій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1999. — Т. 42, № 2. — С. 7–11.
53. Монтель П. Нормальные семейства аналитических функций П. Монтель; пер. с франц. проф. В. М. Шепелева. — Москва, Ленинград : ОНТИ, 1936. — 240 с.
54. Недашковський М. О. Збіжність і обчислювальна стійкість гіллястих ланцюгових дробів з елементами, що задовільняють умовам типу Прінгсгейма / М. О. Недашковський // В кн. : Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. — К. : ІМ АН УРСР. — 1978. — С. 43–44.
55. Недашковський М. О. Обчислення з λ -матрицями / М. О. Недашковський, О. Я. Ковальчук. — Київ : Наукова думка, 2007. — 294 с.
56. Пагіря М. М. Інтерполювання функцій ланцюговим дробом та його узагальненнями у випадку функцій багатьох змінних / М. М. Пагіря // На-

- ук. Вісник Ужгород. ун-ту. "Математика" — 1998. — Вип. 3. — С. 155–164.
57. Пекарский А. А. Наилучшие рациональные приближения в комплексной области / А. А. Пекарский // Труды Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — Т. 190. — С. 222–233.
 58. Скоробогатько В. Я. Гіллясті ланцюгові дробі та їх застосування / В. Я. Скоробогатько, Н. С. Дронюк, О. І. Бобик, Б. Й. Пташник // II наук. конф. молодих математиків України. — К.: Наук. думка, 1966. — С. 561–565.
 59. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике / В. Я. Скоробогатько — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 312 с.
 60. Слешинский И. В. О сходимости непрерывных дробей / И. В. Слешинский // Зап. мат. отделения Новорос. об-ва естествоиспытателей. — 1889. — X. — С. 201–255.
 61. Стилтьес Т. И. Исследования о непрерывных дробях / Т. И. Стилтьес ; пер. с франц. под редакцией Н. И. Ахиезера. — Харьков, Киев: ОНТИ, 1936. — 155 с.
 62. Терских В. П. Метод цепных дробей в применении к исследованию колебаний механических систем / В. П. Терских. — Л.: Судпромгиз, — Т. 2 — 1955. — 331 с.
 63. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : у 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Наука, 1966. т. 2: Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 810 с.
 64. Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа / А. Н. Хованский. — М.: Гостехиздат, 1956. — 203 с.
 65. Beardon A. F. Continued Fractions, Discrete Groups and Complex Dynamics / A. F. Beardon // Computational Methods and Function Theory. — 2001. — Vol. 1, Num. 2. — P. 535–594.

66. Beardon A. F. Worpitzky's Theorem on continued fractions / A. F. Beardon // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2001. — 131. — P. 143–148.
67. Beardon A. F. Approximants of Śleszyński-Pringsheim continued fractions / A. F. Beardon, L. Lorentzen // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2001. — 132. — P. 467–477.
68. Beardon A. F. Continued Fractions and Restrained Sequences of Möbius Maps / A. F. Beardon, L. Lorentzen // Rocky Mountain Journal of Mathematics. — 2004. — Vol. 34. (2) — P. 441–466.
69. Beardon A. F. The Seidel, Stern, Stolz and Van Vleck Theorems on continued fractions / A. F. Beardon, I. Short // Bulletin of the London Mathematical Society. — 2010. — 422 (3) — P. 457–466.
70. Beardon A. F. Möbius Maps and Periodic Continued Fractions / A. F. Beardon // Mathematics Magazine. — 2015. — Vol. 88, Num. 4 — P. 272–277. doi: 10.4169/math.mag.88.4.272.
71. Bodnar D. The parabolic convergence region for two-dimensional continued fractions / D. Bodnar, Kh. Kuchminska // Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions. — 1994. — Vol. 3. — P. 80–87.
72. Bodnar D. Truncation error bound for 1-periodic branched continued fraction / D. Bodnar, M. Bubniak, O. Kovalchuk // International conference dedicated to the 120-th anniversary of Stefan Banach, September 17–21, 2012, Lviv : book of abstracts. — Lviv : Ivan Franko National University of Lviv, 2012. — P. 123–124.
73. Bodnar D. Convergence of $(2,1,\dots,1)$ -periodic branched continued fractions of special form / D. Bodnar, M. Bubniak // International Conference "Complex Analysis and Related Topics", Lviv, September 23–28, 2013, Ukraine : book of abstracts. — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv Mathematical Society, 2013. — P. 11.
74. Brezinski C. History of continued fraction and Padé approximants / C. Brezinski. — Berlin : Springer-Verlag, 1991. — 547 p.

75. Bodnar D. I. The Convergence of 1-periodic Branched Continued Fractions of the Special Form in Parabolic Regions / D. I. Bodnar, M. M. Bubniak // Journal of Mathematics and System Science. — 2014. — Num. 4(26). — P. 269–274.
76. Bodnar D. I. On Convergence and Truncation Error Bounds of 1-periodic Branched Continued Fraction of the Special Form / D. I. Bodnar, M. M. Bubniak // Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions. — 2014. — Vol. 20. http://www.coloradomesa.edu/math-stat/documents/Bodnar_Bubniak_CATCF.pdf.
77. Bubniak M. The angle regions of convergence for 1-periodic branched continued fraction of the special form / M. Bubnyak, R. Mychalchuk, O. Kovalchuk // International V. Skorobohatko Mathematical Conference : Abstracts, August 25–28, 2015, Drogobych, Ukraine / Ukrainian National Academy of Sciences. — Lviv : Pidstryhach Institute for Applied problems of Mechanics and Mathematics, 2015. — P. 20.
78. Bodnar D. I. On Convergence $(2, 1, \dots, 1)$ -periodic Branched Continued Fraction of the Special Form / D. I. Bodnar, M. M. Bubniak // Carpathian Mathematical Publications. — 2015. — Vol. 7, Num. 2. — 148–154.
79. Cuyt A. A review of branched continued fraction theory for the construction of multivariate rational approximations / A. Cuyt, B. Verdonk // Appl. Numerical Mathematics. — 1988. — 4. — P. 263–271.
80. Cuyt A. Multivariate rational interpolation / A. Cuyt, B. Verdonk // Computing. — 1985. — 34. — P. 41–61.
81. Dmytryshyn R. The two-dimensional g -fraction with independent variables for double power series / R. Dmytryshyn // Journal of Approximation Theory. — 2012. — 164, Num. 12. — P. 1520–1539.
82. Dmytryshyn R. I. The multidimensional generalization of g -fractions and their application. / R. I. Dmytryshyn // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2014. — 164–165 — P. 265–284. [http://dx.doi.org/10.1016/S0377-0427\(03\)00642-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0377-0427(03)00642-3).

83. Dmytryshyn R. I. Some properties of branched continued fractions of special form. Carpathian Math. Publ. — 2015.— Vol. 7, Num. 1. — P. 72–77. DOI: 10.15330/cmp.7.1.72-77.
84. Gragg W.B. Two Constructive Results in Continued Fractions / W. B. Gragg, D. D. Warner // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1983. — 20 (6). — P. 1187–1197.
85. Gragg W.B. Truncation Error Bounds for g -Fractions / W. B. Gragg // Numerische Mathematik. — 1968. — 11. — P. 370–379.
86. Jacobsen L. Some Periodic Sequences of Circular Convergence Regions / L. Jacobsen, W. B. Jones, W. J. Thron, H. Waadeland // Analytic Theory of Continued Fractions, Lecture Notes in Mathematics. — 1982. — 932. — P. 87–98.
87. Jacobsen L. Oval Convergence Regions and Circular Limit Regions for Continued Fractions $K(a_n/1)$ / L. Jacobsen, W. J. Thron // Analytic Theory of Continued Fractions II, Lecture Notes in Mathematics. — 1986. — 1199. — P. 90–126.
88. Jacobsen L. Nearness of Continued Fractions / L. Jacobsen // Math. Scand. — 1987. — 60. — P. 129–147.
89. Jacobsen L. An Asymptotic Property for Tails of Limit Periodic Continued Fractions / L. Jacobsen, H. Waadeland // Rocky Mountain Journal of Mathematics. — 1990. — 20(1). — P. 151–163.
90. Jones W. B. Truncation Error Bounds for Continued Fractions / W. B. Jones, R. I. Snell // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1969. — 6 (2). — P. 210–221.
91. Jones W. B. Twin-Convergence Regions for Continued Fractions $K(a_n/1)$ / W. B. Jones, W. J. Thron // Transactions of the American Mathematical Society. — 1970. — 150. — P. 93–119.
92. Jones W. B., Thron W. J., Continued Fractions : Analytic Theory and Applications, Encyclopedia of Mathematics and its Applications / W. B. Jones, W. J. Thron Addison-Wesley Publishing Company, New York. — 1980. — 428 p.

93. Hardy G.H. An Introduction to the Theory of Numbers. Forth edition.
/ G.H. Hardy, E.M. Wright. — Oxford : Oxford Science Pub., Clarendon
Press. — 1959. — 438 p.
94. Haydon T.L. Continued Fraction Approximation to Functions / T.L.
Haydon // Numerische Mathematik. — 1965. — 7. — P. 292–309.
95. Hildebrand F.B. Introduction to Numerical Analysis / F.B. Hildebrand. —
N.Y. — L.: McGraw-Hill, 1956. — 480 p.
96. Kuchminskaya Kh. On approximation of function by two-dimensional conti-
nued fractions / Kh.Kuchminskaya // Rational Approximation and its
Applications in Mathematics and Physics. Lecture Notes in Math. Ed. by
J. Gilewicz, M. Pindor, W. Siemaszko. — Springer : Verlag. — 1987. — 1237. —
P. 205–216.
97. Lange L. J. Convergence region inclusion theorems for Continued fractions
 $K(a_n/1)$ / L. J. Lange // Constr. Approx. 11, 1992. — P. 321–329.
98. Lange L.J. A Generalization of Van Vleck's Theorem and More on Complex
Continued Fractions / L. J. Lange // Contemporary Mathematics, 1999. —
Vol. 236. — P. 179–192.
99. Lange L. J. A two-parameter family of best twin convergence regions for
continued fractions / L. J. Lange, W. Thron. // Math. Zeitschr. — 1960. —
73. — P. 295–311.
100. Lange L. J. On a family of twin convergence regions for continued fractions
/ L. J. Lange // Illinois J. Math. — 1966. — 10. — P. 97–108.
101. Lange L. J. Strip convergence regions for continued fractions / L. J. Lange
// Continued Fractions and Orthogonal Functions. Lecture Notes in Pure
and Applied Mathematics. Ed. by S. Clement Cooper and W. J. Thron. —
Marcel – Dekker. — 1994. — 154. — P. 211–231.
102. Leighton W. On the transformation and convergence of continued fractions
/ W. Leighton, H. Wall // Amer. J. Math. — 1936. — 58. — P. 267–281.
103. Lorentzen L. Bestness of the parabola theorem for continued fractions /
L. Lorentzen // Journal of Computational and Applied Mathematics. —
1992. — 40. — P. 297–304.

104. Lorentzen L. Continued fractions with applications / L. Lorentzen, H. Waadeland. — Amsterdam: Elsevier Publishers B. V., 1992. — 606 p.
105. Lorentzen L. Simple convergence sets for continued fractions $K(a_n/1)$ / L. Lorentzen, St. Ruscheweyh // Math. Anal. and Appl. — 1993. — 179 (2). — P. 349–370.
106. Lorentzen L. Convergence criteria for continued fractions $K(a_n/1)$ based on value sets / L. Lorentzen // Contemporary Mathematics. — 1999. — 236. — P. 205–255.
107. Lorentzen L. A Priori Truncation Error Bounds for Continued Fractions / L. Lorentzen // Rocky Mountain Journal of Mathematics. — 2003. — 22 (2). — P. 409–474.
108. Lorentzen L. Continued fractions with circular twin value sets / L. Lorentzen // Trans. Amer. Math. Soc. — 2008. — 360. — P. 4287–4304.
109. Lorentzen L. Continued fractions. Volume 1: Convergence theory / L. Lorentzen, H. Waadeland. — Amsterdam – Paris: Atlantis Press/World Scientific, 2008. — 308 p.
110. Murphy J. A. A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions / J. A. Murphy, M. R. O'Donohoe // J. Comp. and Appl. Math. — 1978. — Num. 4. — P. 181–190.
111. Perron O., Die Lehre von den Kettenbrüchen / O. Perron // Stuttgart: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1957. — Band 2. — 316 p.
112. Scott W. A Convergence Theorem for Continued Fractions / W. Scott, H. Wall // Trans. Amer. Math. Soc. — 1940. — 47. — P. 155–172.
113. Scott W. T. Value regions for continued fractions / W. T. Scott, H. S. Wall // Proc. Amer. Math. Soc. — 1941. — 47. — P. 580–585.
114. Siemaszko W. Branched continued fractions for double power series / W. Siemaszko // J. Comp. and Appl. Math. — 1980. — 6, Num. 2. — P. 121–125.
115. Siemaszko W. On some conditions for convergence of branched continued fractions / W. Siemaszko // Lecture Notes in Math. — 1981. — 888. — P. 363–370.

116. Siemaszko W. Thiele-type branched continued fractions for two-variable functions / W. Siemaszko // Journal of Computational and Applied Mathematics. Noth-Holland. — 1983. — 9. — P. 137–153.
117. Thron W. J. Two families of twin convergence regions for continued fractions / W. J. Thron // Duke Math. J. — 1943. — 10. — P. 677–685.
118. Thron W. Convergence regions for the general continued fraction / W. Thron // Bull. Amer. Math. Soc. — 1943. — 49. — P. 913–916.
119. Thron W. J. Modifications of continued fractions / W. J. Thron, H. Waadeland // Lecture Notes in Mathematics. Analytic Theory of Continued fractions. — 1981. — 932. — P. 38–66.
120. Thron W. J. Convergence Questions for Limit Periodic Continued Fractions / W. J. Thron, H. Waadeland // Rocky Mountain Journal of Mathematics. — 1981. — 11 (4). — P. 641–657.
121. Thron W. J. Truncation Error Bounds for Limit Periodic Continued Fractions, / W. J. Thron, H. Waadeland // Mathematics of Computation. — 1983. — 40 (162). — P. 589–597.
122. Voll N. G. Convergence properties of 3-periodic continued fractions / N. G. Voll // Communications in the analytic theory of continued fractions. — 2007. — XV. — P. 40–49.
123. Waadeland H. Tales about Tails / H. Waadeland // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1984. — 90 (1). — P. 57–64.
124. Waadeland H. Worpitzky boundary theorem for N -branched continued fractions / H. Waadeland // Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions. — 1993. — 2. — P. 24–29.
125. Wall H. S. Analytic theory of continued fractions / H. S. Wall. — New York : Van Nostrand, 1948. — 433 p.