ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію **Глови Тараса Ярославовича**
«Узагальнені шкали зростання аналітичних функцій»,
подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Описання зростання аналітичної в крузі чи в півплощині функції через послідовність модулів коефіцієнтів її розвинення в степеневий ряд або ряд Діріхле має давню історію.

Першими результатами в цьому напрямку є теореми Е. Бореля, Е. Ліндельофа, Ж. Валірона, Ж. Адамара, М. Фуджівари, Г. Мак-Лейна, О. Коші, Ж. Рітта, П. Бутру, та інш. Гнучку шкалу зростання цілих функцій, яка містила усі раніше відомі шкали, запропонував в 1967 році М. М. Шеремета. При її побудові М. М. Шеремета в якості функцій порівняння вибирались не конкретні елементарні функції чи їх композиції, а виділялись широкі класи функцій з мінімальними обмеженнями, достатніми для отримання формул типу Коші-Адамара (так звані α, β порядки цілих функцій). Пізніше згадані дослідження М. М. Шеремета разом зі своїми учнями переніс на абсолютно збіжні у півплощині $\operatorname{Re} z < A$, $-\infty < A \le +\infty$, ряди Діріхле $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \to +\infty$, $n \to +\infty$.

Ці результати можна інтерпретувати як такі, що визначають достатні умови на послідовність показників (λ_n) та функцій порівняння α і β, за яких узагальнений порядок ряду Діріхле можна зобразити через послідовність його коефіцієнтів $(|a_n|)$ за формулами типу Коші-Адамара. В дисертації Т. Глови досліджуються необхідні та достатні умови на послідовність (λ_n) та функції
α і β, за яких є правильними формули типу Коші-Адамара.

В 1932 році Р. Пелі показав, що для будь-якого $\rho > 0$ існує ціла функція порядку ρ, логарифм максимуму модуля якої на деякій послідовності зростає швидше за її характеристику Неванлінни. У цьому випадку кажуть, що ціла функція має ефект Пелі. У випадку $\rho \geq 1$ для заданої зростаючої до $+\infty$ послідовності (λ_n) А. А. Гольдберг і Й. В. Островський побудували такі приклади цілих функцій у вигляді ряду Діріхле з невід'ємними коефіцієнтами a_n і показниками λ_n. В дисертації Т. Глови розглядається задача про встановлення не лише достатніх, але й необхідних умов, за яких цілий ряд Діріхле вказаного вигляду має ефект Пелі. Вважаю, що досліджувані проблеми в даній дисертаційній роботі є актуальними, оскільки вони стосуються центральних задач теорії аналітичних функцій.

Дисертаційна робота містить усі необхідні структурні елементи. Вона складається зі вступу, розділу 1, в якому дається огляд літератури за темою дисертації, вибираються напрямки досліджень та сформульовані основні результати дисертації, розділів 2-4, в яких викладені результати автора, висновків та списку використаних джерел.

В розділі 2 досліджуються зростання рядів Діріхле в термінах послідовності модулів їх коефіцієнтів. Тут, зокрема, знайдено необхідну та достатню умову на послідовність показників (λ_n) і функцію порівняння Φ, за якої має місце формула типу Коші-Адамара для обчислення $\Phi-$типу ряду Діріхле абсолютно збіжного в півплощині (теорема 2.7).

Розділ 3 присвячено дослідженню зростання аналітичних функцій, зображених степеневими рядами, в термінах послідовності модулів їх коефіцієнтів. Зокрема, в ньому отримано необхідну та достатню умову на функцію порівняння Φ, за якої $\Phi-$тип кожної аналітичної в крузі функції f можна виразити через послідовність $(|a_n|)$ модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення (теорема 3.4).

В розділі 4 знайдено необхідні та достатні на коефіцієнти a_n та показники λ_n, за яких цілий ряд Діріхле F з деякого підкласу S, мав ефект Пелі. Ці результати істотно узагальнюють отримані раніше теореми А. А. Гольдберга і Й. В. Островського та П. В. Філевича стосовно ефекту Пелі для функцій F з невід'ємними коефіцієнтами a_n.

Аналіз результатів, поданих у дисертації, показує, що основною заслугою автора є отримання:

- необхідних та достатніх умов на послідовність показників абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле і функцію порівняння Φ, за яких Φ–тип цього ряду дорівнює типу логарифма його максимального члена;

- описання всіх функцій порівняння Φ, для яких Φ–порядок кожної цілої функції можна обчислити через послідовність модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення;

- критерію наявності ефекту Пелі для цілих рядів з невід'ємними коефіцієнтами.

До зауважень та побажань можна віднести такі:

а) на стор. 6 (1 стрічка знизу) невдале позначення $S(\sigma,F)$ для максимуму модуля F на колі $\{s:|s|=\sigma\}$. Краще позначення $M_0(\sigma,F)=\max\{F(s):|s|=\sigma\}$;

б) на стор. 24 (6 стрічка знизу) в означенні $\underline{\delta}(\lambda)$ замість $\overline{\lim}$ повинно бути $\underline{\lim}$;

в) в роботі вживаються терміни «справедлива теорема», «в певному сенсі», «можна виразити» та інші замість «правильна теорема», «в певному розумінні», «можна зобразити» (див. стор. 25, 26, 31, 39 і т. д.);

г) умова $T_n=0$ $(n<n_0)$ в теоремі 4.1 (див. стор. 44, 127 дисертації, стор. 15 автореферату) може виконуватись тільки для функції $f(z)\equiv 0$. Ця умова є зайвою і з'явилась як калька леми 4.1 $(a_n=0$ для $n<n_0)$, яка використовується при доведенні теореми 4.1.

Перейдемо до загальної оцінки дисертаційної роботи.

1) Тема дисертації є актуальною як з точки зору теорії зростання і розподілу значень аналітичних функцій, так і її застосувань.

2) У роботі отримані нові теоретичні результати, що в сукупності є певним досягненням для розвитку теорії цілих і аналітичних функцій. Основні теореми мають форму критеріїв.

3) Достовірність результатів роботи не викликає сумніву. Доведення сформульованих теорем повні та детальні.

4) Основні результати дисертації досить повно висвітлені в 7 журнальних статтях у виданнях з переліку, затвердженого МОН України, і в 6 тезах наукових конференцій.

5) Автореферат правильно відображає зміст дисертації.

6) Результати і методика роботи можуть бути використані для розвитку досліджень з теорії цілих та аналітичних функцій та їх застосувань. Результати дисертації можна рекомендувати для застосування в дослідженнях, які ведуться в Інститутах математики НАН України, Львівському, Харківському, Донецькому, Дрогобицькому університетах та зарубіжних наукових закладах.

Отже, є підстави зробити такий висновок.

Дисертація Т. Я. Глови «Узагальнені шкали зростання аналітичних функцій» є закінченою науково-дослідною роботою, яка вносить істотний вклад у теорію зростання та розподілу значень аналітичних функцій. Вона задовольняє вимоги щодо кандидатських дисертацій з математики, а її автор Т. Я. Глова заслуговує присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Доктор фізико-математичних наук,
професор, завідувач кафедри
математичного моделювання
Львівського національного університету
імені Івана Франка — Заболоцький М. В.

Підпис проф. Заболоцького М. В. засвідчую
Вчений секретар Грабовецька О. С.