

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

На правах рукопису

СТОЙКА МИРОСЛАВ ВІКТОРОВИЧ

УДК 512.547.25

МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ГРУП ТА СХРЕЩЕНИХ ГРУПОВИХ  
КІЛЕЦЬ НАД ЛОКАЛЬНИМИ КОМУТАТИВНИМИ КІЛЬЦЯМИ

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Дисертація на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:  
Бондаренко Віталій Михайлович  
доктор фізико-математичних наук,  
професор

УЖГОРОД – 2015

# ЗМІСТ

<b>Перелік умовних позначень.....</b>	<b>4</b>
<b>Вступ.....</b>	<b>5</b>
<b>1. Огляд літератури за темою дисертації .....</b>	<b>10</b>
<b>2. Допоміжні твердження з теорії матричних зображень груп та схрещених групових кілець.....</b>	<b>28</b>
2.1. Матричні зображення скінченних груп.....	28
2.2. Задача про пару матриць .....	31
2.3. Схрещені групові кільця .....	39
2.4. Еквівалентні незвідні проєктивні зображення скінченних груп та їх степені .....	41
2.5. Множина класів ізоморфізму.....	45
2.6. Схрещені групові кільця скінченних груп і кілець цілих $p$ -адичних чисел з скінченним числом нерозкладних цілочислових зображень.....	46
2.7. Дикі схрещені групові кільця.....	48
2.8. Висновки до розділу 2 .....	49
<b>3. Про подібність матриць над комутативними кільцями за модулем ідеалів.....</b>	<b>50</b>
3.1. Означення.....	50
3.2. Випадок областей цілісності.....	55
3.3. Випадок нетерових кілець.....	61
3.4. Висновки до розділу 3 .....	62
<b>4. Про матричні зображення скінченних <math>p</math>-груп над локальними факторіальними кільцями.....</b>	<b>63</b>
4.1. Постановка задачі .....	63
4.2. Випадок, коли $2$ – добуток двох різних простих елементів .....	65

4.3.	Узагальнення теореми 4.7 .....	76
4.4.	Випадок, коли 2 – простий елемент .....	85
4.5.	Висновки до розділу 4 .....	92
<b>5.</b>	<b>Матричні зображення схрещених групових кілець</b>	
	<b>над <math>p</math>-адичними числами.....</b>	<b>93</b>
5.1.	Постановка задачі .....	93
5.2.	Матричні зображення схрещених групових кілець циклічної 2-групи .....	96
5.3.	Критерій ручності відносно проєктивних зображень.....	111
5.4.	Матричні зображення схрещених групових кілець абелевих 2-груп і кільця цілих 2-адичних чисел з $(\pm)$ одиничною системою факторів .....	113
5.5.	Висновки до розділу 5 .....	130
	<b>Висновки.....</b>	<b>131</b>
	<b>Список використаних джерел .....</b>	<b>132</b>

## Перелік умовних позначень

$\text{Rad } K$	– радикал Джекобсона кільця $K$
$[G : H], (G : H)$	– індекс підгрупи $H$ в групі $G$
$A \otimes B$	– кронекеровий добуток матриць $A$ та $B$
$M(n, K)$	– множина всіх матриць розміру $n \times n$ над кільцем $K$
$GL(n, K)$	– група всіх оборотних матриць розміру $n \times n$ над кільцем $K$
$\exp(G)$	– експонента групи $G$
$KG$	– групове кільце групи $G$ над кільцем $K$
$\mathbb{Z}_p$	– кільце цілих $p$ -адичних чисел
$\mathbb{Z}'_p$	– кільце цілих раціональних $p$ -адичних чисел
$[H_1, H_2]$	– комутатор груп $H_1$ і $H_2$
$C_G(a)$	– централізатор елемента $a$ в групі $G$
$\text{Ann}_K M$	– анулятор модуля $M$ в кільці $K$
$Z^2(G, K^*)$	– множина всіх нормованих систем $K$ -факторів групи $G$

## ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена вивченню матричних зображень скінченних груп та схрещених групових кілець над комутативними кільцями. Зображення скінченних груп над полями вивчені достатньо повно. Якщо говорити про зображувальний тип, то у класичному випадку, коли характеристика поля не ділить порядок групи, група завжди має, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень (більш того, відповідна групова алгебра напівпроста), а в іншому випадку, який називається модулярним, скінченне число нерозкладних зображень мають лише групи із циклічною силовською  $p$ -підгрупою, де  $p$  – характеристика поля. У модулярному випадку більшість груп є дикими, тобто задача про опис їх зображень містить в собі класичну нерозв’язану задачу лінійної алгебри про класифікацію пар матриць з точністю до подібності; групи, які допускають опис своїх зображень, називаються ручними (формальні означення диких та ручних матричних задач в загальному випадку введені Ю. А. Дроздом [1]). Ручні скінченні групи в модулярному випадку повністю описані В. М. Бондаренком та Ю. А. Дроздом [2]. Для матричних зображень груп над комутативними кільцями, які є природним узагальненням матричних зображень над полями, ситуація набагато складніша. Такі зображення груп, а також порядків (як більш загальних об’єктів), почали вивчатися ще в кінці 30-х років минулого століття (Н. Цасенхауз, Ф. Дидерихсен, Р. Брауер та інші), а інтенсивні дослідження почали проводитися в 50-і роки. Тоді були отримані фундаментальні результати про зображення над комутативними кільцями (З. І. Борович, Ж. Маранда, І. Райнер, С. Такахаші, Д. К. Фаддєєв, Д. Хігман та інші). Пізніше зображення груп над кільцями  $p$ -адичних чисел, а також над іншими кільцями, вивчали також С. Д. Берман, П. М. Гудивок, А. Джонс, Л. О. Назарова, А. В. Ройтер, В. П. Рудько, А. Трой, А. Хеллер, А. В. Яковлев та інші. Зображення різних класів кілець (які ідейно пов’язані з зображеннями групових кілець), вивчали Ю. А. Дрозд, О. Г. Завадський,

В. В. Кириченко, Р. Сван, К. Роггенкамп, А. В. Ройтер, Х. Якобінський та інші алгебраїсти.

Детальні дослідження зображень, зокрема, показали, що основним випадком при вивченні зображень скінченних груп над багатьма комутативними кільцями є випадок, коли кільце є локальним, а група –  $p$ -групою. Критерій ручності таких груп над (найбільш модним протягом багатьох десятиліть) кільцем цілих  $p$ -адичних чисел отримав П. М. Гудивок [3].

Важливим етапом у теорії зображень груп було виникнення теорії проєктивних зображень скінченних груп (коли матриці, що відповідають добуткам елементів групи, розглядаються з точністю до скалярних множників). Основи теорії проєктивних зображень скінченних груп над полем комплексних чисел були закладені І. Шуром [4], [5] ще на початку 20-го століття, який, зокрема, звів вивчення проєктивних комплексних зображень скінченної групи до вивчення звичайних комплексних зображень деякої групи, що є скінченним центральним розширенням початкової групи. Р. Фрухт [6] описав точні незвідні проєктивні зображення абелевої групи над алгебраїчно замкненим полем, характеристика якого не ділить порядок групи. Починаючи з другої половини 20 століття розпочинається інтенсивне вивчення проєктивних зображень над довільним полем (через складність цієї задачі більшість отриманих результатів відносяться до абелевих груп). Якщо параметри, які задають проєктивне зображення, зафіксувати, то таке зображення природно розглядати як зображення схрещеного групового кільця, що дає змогу застосовувати класичні і сучасні методи теорії зображень алгебр. Вивчення проєктивних зображень груп та зображень схрещених групових кілець проводилося і над кільцями. Як і у випадку звичайних зображень груп, одним з найбільш цікавих випадків є випадок кільця цілих  $p$ -адичних чисел. Схрещені групові кільця скінченної групи і вказаного кільця, що мають скінченний тип, описали П. М. Гудивок [7] і Л. Ф. Баранник [8].

У дисертації вивчаються проєктивні зображення груп і зображення схрещених групових кілець над кільцем цілих  $p$ -адичних чисел з точки зору опису ручних та диких випадків.

**Актуальність теми.** Матричні задачі над кільцями  $i$ , зокрема, матричні зображення груп та кілець відіграють суттєву роль в сучасній теорії зображень. Основні результати дисертації належать до цієї тематики. Як видно із викладеного вище, цей напрямок є актуальним. Багато важливих результатів у цьому напрямку отримано саме українськими математиками.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Тематика дисертаційної роботи пов'язана з науковими дослідженнями кафедри алгебри Ужгородського національного університету – “Зображення скінченних груп над комутативними кільцями та їх застосування” (тема затверджена на засіданні Вченої ради математичного факультету, протокол № 5 від 11 грудня 2014 р.).

**Мета і задачі дослідження.** Метою дослідження є опис ручних та диких скінченних абелевих груп над комутативними кільцями та схрещених групових кілець абелевих груп і кільця цілих  $p$ -адичних чисел. Розглядається низка конкретних задач, розв'язання яких, зокрема, дає змогу (разом із раніше отриманими результатами інших авторів) сформулювати та довести відповідні критерії для важливих випадків.

*Об'єктом дослідження* є матричні зображення груп та схрещених групових кілець над комутативними кільцями.

*Предметом дослідження* є зображувальний тип груп та схрещених групових кілець над комутативними кільцями.

**Методи дослідження.** Основними методами, що використовуються у дослідженні, є класичні та сучасні методи теорії матриць та теорії зображень.

**Наукова новизна одержаних результатів.**

Наукові результати, отримані в дисертації, є новими. У дисертаційній роботі вперше:

- отримано зв'язок між дикістю скінченної 2-групи над нетеровим локальним факторіальним кільцем характеристики нуль з полем лишків характеристики 2 та наявністю фактор-кільця, що не є областю головних ідеалів;
- отримано зв'язок між дикістю задачі про опис матриць над областю цілісності відносно еквівалентності за модулем максимального ідеалу і властивостями множини простих елементів даної області;
- описано ручні схрещені групові кільця циклічної 2-групи і кільця цілих 2-адичних чисел з довільною системою факторів;
- доведена дикість схрещеного групового кільця абелевої групи типу  $(4, 4)$  і  $(2, 2, 2)$  та кільця цілих 2-адичних чисел з довільною системою факторів;
- описано ручні схрещені групові кільця абелевої 2-групи і кільця цілих 2-адичних чисел з  $(\pm)$  одиничною системою факторів;
- отримано критерій ручності скінченних  $p$ -груп відносно проєктивних зображень над кільцем цілих  $p$ -адичних чисел.

**Практичне значення одержаних результатів.** Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть бути використані в загальній теорії зображень та теорії матриць.

**Особистий внесок здобувача.** Всі результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. У опублікованій спільно з В. М. Бондаренком і О. А. Тилищакком статті [9] (у фаховому журналі) автору належать результати, що стосуються еквівалентності матриць за модулем ідеалу над областями цілісності (теореми 1 – 3) та над нетеровими областями (теореми 5 – 7) у випадку, коли ідеал є максимальним.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертаційної роботи оприлюднено на:

- Міжнародній конференції з неевклідової геометрії в сучасній фізиці і математиці (м. Ужгород, 22-25 травня 2012 р.);

- Одинадцятій Відкритій науковій конференції ІМФН (м. Львів, 13-14 червня 2013 р.);
- IX Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (м. Львів, 8-13 липня 2013 р.);
- 68-й підсумковій науковій конференції професорсько-викладацького складу ДВНЗ “Ужгородський національний університет” (м. Ужгород, 26-27 лютого 2014 р.);
- Міжнародній конференції молодих математиків (м. Київ, 3-6 червня 2015 р.).

Крім того, результати дисертаційної роботи доповідались на семінарі відділу алгебри Інституту математики імені Альфреда Рені, м. Будапешт (керівник: проф. П. П. Пал), березень 2011 р.; алгебраїчному семінарі Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники: проф. Ю. А. Дрозд, проф. В. В. Кириченко, проф. А. А. Петравчук), вересень 2013 р.; науковому семінарі факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (керівник: проф. А. В. Загороднюк), жовтень 2014 р. та на наукових семінарах кафедри алгебри Ужгородського національного університету (2012 – 2015 рр.).

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковано у п’яти наукових роботах [11, 12, 13, 14, 9], всі із яких опубліковані у фахових виданнях, одна з яких [9] – у виданні, що відображається в наукометричній базі Scopus; та чотири – у тезах конференцій [15, 16, 17, 10].

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається зі вступу, п’яти розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи – 131 сторінка, список використаних джерел займає 12 сторінок (111 найменувань).

# РОЗДІЛ 1

## Огляд літератури за темою дисертації

В теорії зображень розглядаються конкретні реалізації аксіоматичних систем абстрактної алгебри. Ця теорія, бере свій початок з вивчення груп підстановок та матричних алгебр, та займається вивченням гомоморфізмів абстрактної скінченної групи в групу матриць чи лінійних операторів. Всю важливість такого розгляду для вивчення груп добре усвідомлювали Ф. Г. Фробеніус та У. Бернсайд у зв'язку з тим, що теоретико-числові обчислення легше проводити у групі матриць, ніж в абстрактній групі. Теорія зображень груп, в достатньо повній та зручній для застосування формі, була розвинена Ф. Г. Фробеніусом в останні два десятиліття 19-го століття. Дякуючи Ф. Г. Фробеніусу та У. Бернсайдю теорія зображень груп стала відігравати важливу роль в теорії абстрактних скінченних груп. Перша книга, що давала систематичний виклад теорії зображень, появилася в 1911 році (У. Бернсайд [18]) і містила багато результатів про скінченні групи. Робота Е. Ньотер [19], яка з'явилася в 1929 році, виявила тісний зв'язок теорії зображень з теорією модулів над кільцями і алгебрами. Іншою важливою віхою, в розвитку теорії зображень, були роботи Р. Брауера про модулярні зображення скінченних груп. Як і класична теорія Ф. Г. Фробеніуса, теорія Р. Брауера має багато важливих застосувань в теорії скінченних груп. В цей же час, вона встановлює зв'язок з теорією зображень алгебр, підказує нові задачі для модулів і кілець з умовою мінімальності і розкриває фундаментальне значення теоретико-числових питань в теорії груп і теорії зображень. Матричні зображення груп вивчалися багатьма авторами, в першу чергу: Г. Хігманом, В.А. Башевим, І. Шуром, Р. Фрухтом, К. Ямазакі,

К. Рінгелем, К. В. Роггенкампом, Т. Ханнулом, С. А. Кругляком, І. Райнером, С. Д. Берманом, П. М. Гудивком, В. М. Бондаренком, Ю. А. Дроздом, В. М. Петричковичем, Л. Ф. Баранником, І. В. Шапочком, О. А. Тилищакком та іншими. Важливими поняттями і природними питаннями, що постають при вивченні матричних зображень скінченних груп, є питання про описання з точністю до еквівалентності нерозкладних матричних зображень скінченної групи, про число нееквівалентних нерозкладних матричних зображень скінченної групи, про множину степенів нерозкладних матричних зображень скінченної групи, задача про дикість скінченної групи над комутативними кільцями та про проєктивні зображення груп і пов'язані з ними питання.

### **Нерозкладні зображення скінченних груп.**

В 1961 році В. А. Башев [20] першим описав всі, з точністю до еквівалентності, нерозкладні  $F$ -зображення, де  $F$  – довільне поле характеристики  $p$ , деякої скінченної нециклічної  $p$ -групи  $G$ . Він описав, всі з точністю до еквівалентності нерозкладні зображення абелевої групи типу  $(2,2)$  над полем характеристики 2.

Наступні результати отримані Г. Хігманом [21].

Нехай  $K$  – поле характеристики  $p > 0$ .

**Теорема 1.1** ([21]). *Всі нерозкладні нееквівалентні матричні  $K$ -зображення циклічної  $p$ -групи  $G = \langle a \rangle$  порядку  $p^r$  вичерпуються такими зображеннями:*

$$\Gamma_j: a \rightarrow V_j \quad (j = 1, 2, \dots, p^r),$$

де  $V_j$  – жорданова клітка порядку  $j$  з одиницями на головній діагоналі.

**Теорема 1.2** ([21]). *Абелева група  $G$  типу  $(p, p)$  володіє нерозкладними матричними  $K$ -зображеннями як завгодно великого степеня.*

**Теорема 1.3** ([21]). *Нехай  $G$  – скінченна  $p$ -група. Число нееквівалентних нерозкладних матричних  $K$ -зображень групи  $G$  скінченне тоді і тільки тоді, коли група  $G$  циклічна.*

**Теорема 1.4** ([21]). *Нехай  $H$  – підгрупа групи  $G$ ,  $K$  – область головних ідеалів,  $((G : H) \in K^*)$  і для  $KG$ -модулів справедлива теорема Крулля-Шмідта. Множина степенів всіх нерозкладних  $K$ -зображень групи  $G$  скін-*

ченна тоді і тільки тоді, коли скінченна множина степенів всіх нерозкладних матричних  $K$ -зображень групи  $H$ .

**Наслідок 1.5** ([21]). Нехай  $G$  – скінченна група з силовською  $p$ -підгрупою  $H$  і  $K$  – поле характеристики  $p$ , або повне дискретно нормоване кільце з полем лишків характеристики  $p$  і  $n(KG)$  – число нееквівалентних нерозкладних матричних  $K$ -зображень групи  $G$ . Число  $n(KG)$  скінченне тоді і тільки тоді, коли число  $n(KH)$  скінченне.

З вище наведеного наслідку та теорем випливає теорема Хігмана [21], про число нееквівалентних нерозкладних матричних зображень скінченної групи над полем характеристики  $p > 0$ .

**Теорема 1.6** ([21]). Нехай  $G$  – скінченна група з силовською  $p$ -підгрупою  $H$  і  $K$  – поле характеристики  $p$ . Число нееквівалентних нерозкладних матричних  $K$ -зображень групи  $G$  скінченне тоді і тільки тоді, коли група  $G$  циклічна.

В. М. Бондаренко [22] та К. Рінгель [23] описали всі, з точністю до еквівалентності, нерозкладні зображення дієдральної групи

$$D_m = \langle a, b \mid a^{2m} = 1, b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle \quad (m \in \mathbb{N})$$

над полем характеристики 2.

П. М. Гудивок та Є. Я. Погоріляк [24] довели наступну теорему.

**Теорема 1.7** ([24]). Нехай  $G$  – скінченна  $p$ -група порядку  $|G| > 1$ ,  $S$  – поле характеристики  $p$ ,  $L = S[x_1, \dots, x_n]$  ( $n > 1$ ) і  $m$  – довільне натуральне число, відмінне від 1. Існує нескінченне число нееквівалентних незвідних матричних  $L$ -зображень степеня  $m$  групи  $G$ .

П. М. Гудивок, В. С. Дроботенко та О. І. Ліхтман [25] одержали важливі результати про зображення скінченних груп над кільцем  $\mathbb{Z}_m$  класів лишків за модулем  $m$ . Вони отримали такі теореми.

**Теорема 1.8** ([25]). Якщо  $m \equiv 0 \pmod{p^2}$ , то кожна  $p$ -група  $G$  порядку  $|G| > 1$  володіє незвідними матричними зображеннями як завгодно високого степеня над кільцем  $\mathbb{Z}_m$ .

**Теорема 1.9** ([25]). Група  $G$  порядку  $t$  володіє нерозкладними матричними зображеннями як завгодно високого степеня над кільцем  $\mathbb{Z}_m$  тоді і тільки тоді, коли існує просте число  $p$ , що задовольняє хоча б одну з таких умов:

- 1)  $t \equiv 0 \pmod{p}$  і  $m \equiv 0 \pmod{p^2}$ ;
- 2)  $m \equiv 0 \pmod{p}$  і силовська  $p$ -підгрупа групи  $G$  нециклічна.

П. М. Гудивок [26] розв'язав задачу, про скінченність множини степенів нерозкладних матричних зображень скінченної  $p$ -групи над областю головних ідеалів характеристики  $p$ .

**Теорема 1.10** ([26]). Нехай  $G$  – скінченна  $p$ -група порядку  $|G| > 1$  і  $K$  – область головних ідеалів характеристики  $p$ . Множина степенів нерозкладних матричних  $K$ -зображень групи  $G$  скінченна тоді і тільки тоді, коли група  $G$  циклічна і виконується хоча б одна із таких умов:

- 1)  $K$  – поле;
- 2)  $G$  – група порядку 2.

Означення 1.1. Кільцем Безу називають область цілісності з одиницею, будь-який скінченно породжений ідеал якої є головним.

П. М. Гудивок та В. Й. Погоріляк [27] розв'язали попередню задачу для комутативного локального кільця характеристики  $p^s$ .

**Теорема 1.11** ([27]). Нехай  $G$  – скінченна  $p$ -група порядку  $|G| > 1$  і  $K$  – комутативне локальне кільце характеристики  $p^s$  ( $s \in \mathbb{N}$ ), яке не є полем. Множина степенів всіх нерозкладних матричних  $K$ -зображень групи  $G$  скінченна тоді і тільки тоді, коли  $G$  – група порядку 2 і  $K$  – кільце Безу характеристика якого рівна 2.

В. С. Дроботенко, Е. С. Дроботенко, З. П. Жилінська та Є. Я. Погоріляк [28] описали з точністю до еквівалентності нерозкладні зображення циклічної групи порядку  $p$  над кільцем  $\mathbb{Z}_{p^s}$  класів лишків за модулем  $p^s$  ( $s \in \mathbb{N}, s > 1$ ).

**Теорема 1.12** ([28]). Кожне нерозкладне матричне  $\mathbb{Z}_{p^s}$ -зображення групи  $G = \langle a \rangle$  порядку  $p \neq 2$  ( $s \in \mathbb{N}, s > 1$ ) еквівалентне одному з таких зображень:

$$\begin{aligned}\Gamma_1: \mathfrak{a} &\rightarrow E_n + p^{s-1}F_n, \\ \Gamma_2: \mathfrak{a} &\rightarrow \Delta \otimes E_n + \Theta(p^{s-1}) \otimes F_n, \\ \Gamma_3: \mathfrak{a} &\rightarrow \Omega,\end{aligned}$$

де  $\Delta$  і  $\Omega$  – такі дві матриці відповідно порядків  $(p-1)$  і  $p$ :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ -C_p^1 & -C_p^2 & -C_p^3 & \dots & -C_p^{p-2} & -C_p^{p-1} \end{pmatrix},$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -C_p^1 & -C_p^2 & \dots & -C_p^{p-2} & -C_p^{p-1} \end{pmatrix}$$

(тут  $-C_p^i$  – число комбінацій з  $p$  елементів по  $i$ , де  $i = 1, \dots, p-1$ ),  $\Theta(\alpha)$  – квадратна матриця порядку  $p-1$ , у якій у правому нижньому кутку розміщений елемент  $\alpha$ , а всі інші рівні нулю;  $F_n$  – нормальна форма Фробеніуса квадратної матриці порядку  $n$  над простим полем  $\mathbb{Z}_p^s/p\mathbb{Z}_p^s$  характеристики  $p$ ,  $E_n$  – одинична матриця порядку  $n$ ,  $\otimes$  – символ кронекерового добутку матриць.

**Теорема 1.13** ([28]). Всі нерозкладні нееквівалентні матричні зображення групи  $G = \langle a \rangle$  порядку 2 над кільцем класів лишків за модулем  $2^s$  ( $s \in \mathbb{N}, s > 1$ ) вичерпуються такими серіями:

$$\begin{aligned}\Gamma_1: \mathfrak{a} &\rightarrow E_n + p^{s-1}F_n, \\ \Gamma_2: \mathfrak{a} &\rightarrow -E_n + 2^{s-1}F_n, \\ \Gamma_3: \mathfrak{a} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Даний результат, узагальнив Т. Ханнула [29] у випадку фактор-кільця  $R/P^s$  дискретно-нормованого кільця  $R$ , в якому  $p$  – простий елемент, де  $P$  – радикал Джекобсона кільця  $R$  і  $s > 1$ .

К. Роггенкамп [30] показав, що множина нееквівалентних нерозкладних матричних  $K$ -зображень скінченної групи  $G$  порядку  $|G| > 1$ , степені яких не перевищують порядок групи  $G$ , нескінченна, якщо  $K$  така нетерова область цілісності характеристики нуль, у якої існує такий простий ідеал  $P$ , що фактор-кільце  $K/P$  не є полем і  $|G| \equiv 0 \pmod{P}$ .

**Теорема 1.14** ([31]). *Нехай  $K$  – комутативне кільце з одиницею,  $G$  – скінченна група,  $\Gamma: g \rightarrow \Gamma(g)$  – матричне  $K$ -зображення групи  $G$  ( $g \in G, \Gamma(g) \in GL(n, K)$ ) і  $W(\Gamma) = \{C \in M(n, K) \mid C\Gamma(g) = \Gamma(g)C, g \in G\}$ , де  $M(n, K)$  – множина всіх матриць порядку  $n$  над кільцем  $K$ . Якщо  $W(\Gamma)$  – локальне кільце, то  $\Gamma$  є нерозкладним матричним  $K$ -зображенням групи  $G$ .*

Наведемо результати, які відносно недавно отримали П. М. Гудивок та М. П. Желізняк [32], [33], про число нееквівалентних нерозкладних матричних зображень скінченної  $p$ -групи, над деякими локальними кільцями характеристики нуль з полем лишків характеристики  $p$ , та про множину степенів всіх нерозкладних матричних зображень скінченної 2-групи, над нетеровою локальною областю цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2.

**Теорема 1.15** ([32]). *Нехай  $G$  – скінченна нециклічна  $p$ -група,  $K$  – локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики  $p$ ,  $\varepsilon \in K$  ( $\varepsilon^p = 1, \varepsilon \neq 1$ ) і  $K/(1 - \varepsilon)K$  нескінченне кільце. Тоді число нееквівалентних нерозкладних матричних  $K$ -зображень степеня  $4n$  групи  $G$  нескінченне ( $n$  – довільне натуральне число).*

**Теорема 1.16** ([32]). *Нехай  $G = \langle a \rangle$  – скінченна  $p$ -група порядку  $|G| > 1$  ( $p > 3$ ),  $K$  – локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики  $p$ ,  $\varepsilon \in K$  ( $\varepsilon^p = 1, \varepsilon \neq 1$ ) і  $K/(1 - \varepsilon)K$  – нескінченне кільце. Тоді число нееквівалентних нерозкладних матричних  $K$ -зображень степеня  $4n$  групи  $G$  нескінченне ( $n$  – довільне натуральне число).*

**Теорема 1.17** ([32]). Нехай  $G$  – скінченна група порядку  $3^r$  ( $r \geq 1$ ),  $K$  – нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 3 ( $\varepsilon \in K, \varepsilon^3 = 1, \varepsilon \neq 1$ ). Якщо  $(1 - \varepsilon)K \neq \text{Rad } K$  і  $K/\text{Rad } K$  – нескінченне поле, тоді число нееквівалентних нерозкладних матричних  $K$ -зображень групи  $G$  степеня  $3n$  нескінченне ( $n$  – довільне натуральне число).

**Теорема 1.18** ([32]). Нехай  $G = \langle a \rangle$  – циклічна група порядку  $2^r$  ( $r > 1$ ),  $K$  – нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2. Якщо  $2K \neq \text{Rad } K$  і  $K/\text{Rad } K$  – нескінченне поле, то число нееквівалентних нерозкладних матричних  $K$ -зображень степеня  $4n$  групи  $G$  нескінченне ( $n$  – довільне натуральне число).

**Теорема 1.19** ([32]). Нехай  $G$  – скінченна  $p$ -група порядку  $|G| > 1$  ( $p \neq 2$ ),  $K$  – локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики  $p$  ( $\varepsilon \in K, \varepsilon^p = 1, \varepsilon \neq 1$ ). Якщо  $K$  не є дискретно нормованим кільцем, то число нееквівалентних нерозкладних матричних  $K$ -зображень степеня  $3n$  групи  $G$  нескінченне ( $n$  – довільне натуральне число).

**Теорема 1.20** ([32]). Нехай  $G$  – скінченна 2-група порядку  $|G| > 2$ ,  $K$  – локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2. Якщо  $K$  – не є дискретно нормованим кільцем, то число нееквівалентних нерозкладних матричних  $K$ -зображень степеня  $4n$  групи  $G$  нескінченне ( $n$  – довільне натуральне число).

**Теорема 1.21** ([33]). Нехай  $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$  – абелева 2-група типу  $(2,2)$  ( $a^2 = b^2 = e$ ) і  $K$  – локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2. Множина степенів всіх нерозкладних матричних  $K$ -зображень групи  $G$  нескінченна.

**Теорема 1.22** ([33]). Нехай  $G = \langle a \rangle$  – циклічна група порядку 4 і  $K$  – нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2. Множина степенів всіх нерозкладних матричних  $K$ -зображень групи  $G$  нескінченна, якщо  $2K$  не є максимальним ідеалом кільця  $K$ .

**Теорема 1.23** ([33]). Нехай  $G$  – скінченна 2-група порядку  $|G| > 2$  і  $K$  – нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2. Множина степенів всіх нерозкладних матричних  $K$ -зображень групи  $G$  скінченна тоді і тільки тоді, коли  $G$  – циклічна група порядку 4 і  $2K$  – максимальний ідеал кільця  $K$ .

**Теорема 1.24** ([33]). Нехай  $G = \langle a \rangle$  – циклічна група порядку 2 і  $K$  – нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, яке не є дискретно нормованим кільцем. Якщо 2 не простий елемент кільця  $K$ , то множина степенів всіх нерозкладних матричних  $K$ -зображень групи  $G$  нескінченна.

**Теорема 1.25** ([33]). Нехай  $G = \langle a \rangle$  – циклічна група порядку 2 і  $K$  – нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, 2 – простий елемент кільця  $K$  і фактор-кільце  $K/2K$  не є кільцем головних ідеалів. Множина степенів всіх нерозкладних матричних  $K$ -зображень групи  $G$  нескінченна.

**Теорема 1.26** ([33]). Нехай  $K$  – нетерове не дискретно нормоване локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, 2 – простий елемент кільця  $K$  і фактор-кільце  $\bar{K} = K/2K$  є кільцем головних ідеалів. Всі нееквівалентні нерозкладні матричні  $K$ -зображення циклічної групи  $G = \langle a \rangle$  порядку 2 вичерпуються такими зображеннями:

$$\Delta_1: a \rightarrow 1;$$

$$\Delta_2: a \rightarrow -1;$$

$$\Gamma_i: a \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & u^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (i \in \mathbb{N});$$

$$\Gamma'_j: a \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & u^j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (j \in \mathbb{N} \cup \{0\}),$$

де  $\text{Rad} \bar{K} = \bar{u} \bar{K}$ ,  $\bar{u} = u + 2K$  ( $u \in K$ ),  $\mathbb{N}$  – множина всіх натуральних чисел.

**Теорема 1.27** ([33]). Нехай  $G$  – скінченна 2-група порядку  $|G| > 1$  і  $K$  – нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, яке не є дискретно нормованим кільцем. Множина степенів

всіх нерозкладних матричних  $K$ -зображень групи  $G$  скінченна тоді і тільки тоді, коли  $G$  – група порядку 2,  $2$  – простий елемент кільця  $K$  і  $\text{Rad}K/2K$  – головний ідеал кільця  $K/2K$ .

### **Дикі скінченні групи над комутативними кільцями.**

Задачу про дикість скінченної групи досить гарно вивчено над полями. Зокрема в роботі С. А. Кругляка [34] була доведена наступна теорема.

**Теорема 1.28** ([34]). *Нехай  $G$  – скінченна нециклічна  $p$ -група і  $K$  – поле характеристики  $p$  ( $p \neq 2$ ). Група  $G$  дика над полем  $K$ .*

С. А. Кругляк [34] та Ш. Бренер [35] з'ясували, що задача описання з точністю до еквівалентності  $F$ -зображень скінченної нециклічної  $p$ -групи  $G$  при  $p \neq 2$  або коли фактор-група  $G/G'$  є абелевою групою типу  $(2,2)$ , де  $G'$  – комутант групи  $G$ , містить в собі класичну нерозв'язану задачу лінійної алгебри про класифікацію з точністю до подібності пар квадратних матриць довільного порядку над деяким полем, тобто задача є дикою. Отримана умова, виявилась не тільки достатньою, але й необхідною для того, щоб задача описання з точністю до еквівалентності зображень нециклічної  $p$ -групи над полем  $F$  була дикою.

В. М. Бондаренко та Ю. А. Дрозд [2] довели дикість скінченної групи з силовською  $p$ -підгрупою над полем характеристики  $p$ .

**Теорема 1.29** ([2]). *Нециклічна скінченна група  $G$  є ручною над полем  $K$  характеристики  $p$  тоді і тільки тоді, коли  $(G : G') \leq 4$ . В протилежному випадку група  $G$  – дика над полем  $K$ .*

*Тут  $G'$  позначає, як звичайно, комутант групи  $G$ .*

Частинні випадки даної теореми були доведені Г. Хігманом [21], В. А. Башевим [5] та С. А. Кругляком [34].

Сформулюємо результати про дикість скінченної  $p$ -групи над кільцем цілих раціональних  $p$ -адичних чисел отримані в роботах П. М. Гудивка [36], [3] наступним чином.

**Теорема 1.30** ([36],[3]). *Нехай  $G$  – скінченна  $p$ -група і  $\mathbb{Z}'_p$  – кільце цілих раціональних  $p$ -адичних чисел. Група  $G$  є ручною над кільцем  $\mathbb{Z}'_p$  тоді і тільки то-*

ді, коли  $G$  – група типу  $(2,2)$  або циклічна група порядку  $p^r$  ( $r \leq 2$  при  $p \neq 2$  і  $r \leq 3$  при  $p = 2$ ).

**Наслідок 1.31** ([36],[3]). *Нехай  $G$  – скінченна група з силовською  $p$ -підгрупою  $H$  ( $p \neq 2$ ). Група  $G$  є ручною над кільцем  $\mathbb{Z}'_p$  тоді і тільки тоді, коли  $H$  – циклічна група порядку  $p^r$  ( $r \leq 2$ ).*

І. Райнером та Х. Цассенгаузом в роботі [37] був отриманий зв'язок між еквівалентністю  $\mathbb{Z}'_p$ -зображень скінченної групи над скінченим розширенням поля раціональних  $p$ -адичних чисел, та над кільцем цілих величин поля даного розширення.

**Теорема 1.32** ([37]). *Нехай  $F_p$  – скінченне розширення поля раціональних  $p$ -адичних чисел  $\mathbb{Q}_p$  і  $R_p$  – кільце цілих величин поля  $F_p$ . Матричні  $\mathbb{Z}'_p$ -зображення  $\Gamma$  і  $\Gamma'$  скінченної групи  $G$   $\mathbb{Z}'_p$ -еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони  $R_p$ -еквівалентні.*

**Наслідок 1.33** ([37]). *Якщо скінченна група  $G$  є дикою над кільцем  $\mathbb{Z}'_p$ , то вона буде дикою і над кільцем  $R_p$ .*

Наведемо результати, які відносно недавно були отримані П. М. Гудивком та С. П. Кіндюхом [38], [39] про дикість  $p$  групи над деякими областями цілісності характеристики нуль.

Зокрема в [38] була доведена дикість скінченної 2-групи  $G$  порядку  $|G| > 2$  над локальним факторіальним кільцем характеристики нуль з полем лишків характеристики 2.

**Теорема 1.34** ([38]). *Нехай  $G$  – скінченна 2-група порядку  $|G| > 2$  і  $K$  – локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2. Група  $G$  є дикою над кільцем  $K$ , якщо  $K$  не дискретно нормоване кільце.*

**Теорема 1.35** ([38]). *Нехай  $G$  – скінченна 2-група порядку  $|G| > 1$ ,  $K$  – локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2. Якщо  $K$  не дискретно нормоване кільце і  $2 = \theta t_1^e$  де  $(\theta \in K^*, e > 1)$  або  $2 = \theta t_1^{r_1} \dots t_s^{r_s}$ , де  $t_1, \dots, t_s$  – різні прості елементи кільця  $K$ ,  $s \geq 2$  і  $r_1 + \dots + r_s > 2$ , то група  $G$  є дикою над кільцем  $K$ .*

**Теорема 1.36** ([39]). *Нехай  $G$  – скінченна  $p$ -група порядку  $|G| > 1$ ,  $K$  – область цілісності характеристики нуль,  $p \notin K^*$  і  $\varepsilon \in K$  ( $\varepsilon^p = 1$ ,  $\varepsilon \neq 1$ ). Група  $G$  є дикою над кільцем  $K$ , якщо виконується одна із таких умов:*

- 1)  $p > 3$ ;
- 2)  $G$  – 3-група порядку  $|G| > 3$ .

### **Проективні зображення груп.**

Як відомо, основи теорії проективних зображень скінченних груп над полем комплексних чисел  $\mathbb{C}$ , закладені І. Шуром в роботах [4], [5]. І. Шур звів вивчення проективних комплексних зображень скінченної групи  $G$  до вивчення лінійних комплексних зображень деякої групи  $\hat{G}$ , яка є скінченним центральним розширенням групи  $G$  за допомогою  $\mathbb{C}$ -мультиплікатора групи  $G$ .

Нехай  $A$  є абелевою групою і  $L$  алгебраїчно замкнене поле характеристика якого не ділить  $|A|$ . Р. Фрухт [6] довів, що група  $A$  має точне незвідне проективне зображення над полем  $L$  тоді і тільки тоді, якщо  $A$  – група симетричного типу, тобто розкладається в добуток двох ізоморфних груп. К. Ямазакі [40] показав, що якщо  $A$  є групою симетричного типу, то  $A$  має точне незвідне проективне зображення над довільним полем, що містить первісний корінь з 1 степеня  $\exp A$ . Г. Н. Енжі [41], [42] описав метациклічні групи, що мають точні незвідні проективні зображення над полем комплексних чисел  $\mathbb{C}$ . Крім того, він також виділив деякі метабелеві групи, що володіють точним незвідним проективним зображенням над  $\mathbb{C}$ . Р. Куінлан [43] досліджував метациклічні групи, що мають центральну схрещену групову алгебру над підполем  $\mathbb{C}$ . Будь-яка така група володіє точним цілком звідним проективним зображенням над цим підполем. Л. Ф. Баранник [44] узагальнив результати Р. Фрухта та Є. М. Жмудя до довільного поля, характеристика якого не ділить порядок групи  $A$ . Л. Ф. Баранник і К. Соболевська [45] отримали деякі необхідні і достатні умови для нільпотентних груп, того, щоб вони мали точне незвідне проективне зображення над довільним полем.

Р. Фрухт [6] описав всі скінченні абелеві групи, що володіють точними незвідними проєктивними зображеннями над полем комплексних чисел  $\mathbb{C}$ . В [46] Р. Фрухтом описані проєктивні комплексні зображення скінченних абелевих груп. Є. М. Жмудь [47] знайшов необхідну і достатню умови, за яких скінченна група  $G$  володіє точними незвідними проєктивними комплексними зображеннями із заданою системою факторів. В цій роботі вводяться бінарні характери абелевих груп, за допомогою яких, дається просте доведення теореми Р. Фрухта [6] про абелеві групи, що мають точне незвідне проєктивне комплексне зображення. В [48] досліджуються точні проєктивні комплексні зображення скінченної абелевої групи. Встановлюється, що мінімальне число незвідних компонент точних проєктивних комплексних зображень скінченної абелевої групи  $G$  дорівнює одиниці, якщо група  $G$  – група симетричного типу (тобто  $G = H \times H$ ), і дорівнює двом в протилежному випадку.

У другій половині 20 століття, розпочалось вивчення проєктивних зображень над довільним полем. Знята умова алгебраїчної замкненості значно ускладнює вивчення проєктивних зображень. У зв'язку з цим, більшість отриманих результатів відносяться до абелевих груп. К. Ямазакі в [40], [49] використовуючи методи гомологічної алгебри, отримав ряд цікавих результатів. В [40] доведені необхідна і достатня умови, за яких схрещена групова алгебра  $(G, K, \lambda)$  скінченної абелевої групи  $G$  і поля  $K$ , характеристика якого не ділить порядок групи  $G$ , буде центральною і простою. Знайдені також необхідна і достатня умови, за яких скінченновимірна алгебра над алгебраїчно замкненим полем  $K$  характеристики 0 ізоморфна схрещеній груповій алгебрі  $(G, K, \lambda)$ . Ш. Б. Конлон [50] узагальнив результати Й. А. Гріна [80] і Д. Ж. Хігмана [81] про індуковані зображення груп на випадок проєктивних зображень груп над алгебраїчно замкненим полем характеристики  $p > 0$ .

Л. Ф. Баранник та П. М. Гудивок [51] досліджували нерозкладні проєктивні  $K$ -зображення скінченної групи  $G$  у випадку, коли  $K = R \in$  кільцем всіх цілих величин скінченного розширення  $F$  поля раціональних  $p$ -адичних чисел  $\mathbb{Q}_p$ .

**Теорема 1.37** ([51]). Нехай  $T$  – поле інерції поля  $F$ . Число  $n(R, G)$  нерозкладних проєктивних  $R$ -зображень скінченної групи  $G$  скінченне тоді і тільки тоді, коли силовська  $p$ -підгрупа групи  $G$  є циклічною групою порядку  $p^s$  ( $s \leq 2$ ) і виконується одна з наступних умов:

- 1) якщо  $s = 2$ , то  $F = T$ ;
- 2) якщо  $s = 1$  і  $p > 3$ , то  $(F:T) \leq 2$ ;
- 3) якщо  $s = 1$  і  $p = 3$ , то  $(F:T) \leq 3$ .

В [49] розв'язується задача про лінеаризацію проєктивних зображень.

**Теорема 1.38** ([49]). Нехай  $G$  – скінченна група,  $K$  – довільне поле,  $K^*$  – мультиплікативна група поля  $K$ ,  $W_K$  – група всіх коренів із 1 поля  $K$ . Всі проєктивні  $K$ -зображення групи  $G$  тоді і тільки лінеаризуються лінійними  $K$ -зображеннями деякого скінченного центрального групового розширення  $\hat{G}$  групи  $G$ , коли  $K^* = (K^*)^p W_K$  для кожного простого дільника  $p$  індекса комутанта групи  $G$ .

Узагальнення теореми Брауера про поле реалізації лінійних комплексних зображень зроблено в роботі В. Ф. Рейнольдса [52].

**Теорема 1.39** ([52]). Будь-яке проєктивне зображення  $\Gamma$  скінченної групи  $G$  над полем комплексних чисел еквівалентно проєктивному зображенню  $\Delta$  групи  $G$  над полем  $|G|$ -вих коренів із 1.

Б. Файн [53] у своїй роботі узагальнив поняття індекса Шура на випадок проєктивних зображень і вивчив деякі його властивості.

Л. Ф. Баранник [54] вивчав множину індексів простих компонент схрещених групових алгебр.

**Теорема 1.40** ([54]). Нехай  $F$  – скінченне розширення поля  $\mathbb{Q}$  або  $\mathbb{Q}_p$ ,  $W_F$  – група всіх коренів із 1 поля  $F$ ,  $G$  – скінченна абелева група,  $\overline{\text{exp}}G$  – експонента групи  $G/\bar{G}$ , де  $\bar{G}$  – така підгрупа групи  $G$ , що  $|\bar{G}| = \text{exp}\bar{G} = \text{exp}G$ . Індеси простих компонент алгебр  $(G, F, \lambda)$  ділять число  $d = (\overline{\text{exp}}G, |W_F|)$ . Для будь-якого дільника  $t$  числа  $d$  існує така схрещена групова алгебра  $(G, F, \lambda)$ , що індекс деякої її простої компоненти дорівнює  $t$ .

З останньої теореми випливає, що множина індексів простих компонент схрещених групових  $F$ -алгебр абелевих груп міститься серед всіх можливих дільників порядку групи  $W_F$ . Цілковитою протилежністю, є випадок неабелевих нільпотентних груп.

**Теорема 1.41** ([54]). *Нехай  $F$  – скінченне розширення поля  $\mathbb{Q}$ . Тоді для будь-якого натурального числа  $m = q_1^{k_1} q_2^{k_2} \dots q_s^{k_s}$  ( $q_1, q_2, \dots, q_s$  – різні прості числа,  $k_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1, s}$ ) існує така нільпотентна група  $G$  порядку  $q_1^{l_1} q_2^{l_2} \dots q_s^{l_s}$  ( $l_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1, s}$ ), що деяка її схрещена групова алгебра  $(G, F, \lambda)$  має просту компоненту індекса  $m$ .*

Аналогічна теорема доводиться в [54] для деяких скінченних розширень поля  $\mathbb{Q}_p$ , а також для випадку, коли  $F$  – довільне розширення поля  $\mathbb{Q}_p$ , а  $m \not\equiv 0 \pmod{p}$ .

Якщо обмежитись груповими алгебрами нільпотентних груп, то, як довів П. Рокет [55], множина індексів простих компонент співпадає з множиною  $\{1, 2\}$ . Індокси простих компонент групових алгебр  $\mathbb{Q}G$  вичерпують множину натуральних чисел, якщо  $G$  пробігає категорію всіх скінченних груп. Останній результат довели Р. Брауер [56] і незалежно С. Д. Берман [57].

У випадку локального поля, різниця між множиною індексів простих компонент схрещених групових і групових  $F$ -алгебр скінченних груп, є ще більшою (С. Д. Берман [58, 59]).

**Теорема 1.42** ([58, 59]). *Нехай  $F$  – скінченне розширення поля  $\mathbb{Q}_p$  ( $p \neq 2$ ). Тоді натуральне число  $m$  тоді і тільки тоді є індексом Шура абсолютно незвідного лінійного зображення деякої скінченної групи  $G$  відносно поля  $F$ , коли  $\frac{p-1}{d} \equiv 0 \pmod{m}$  ( $d$  – найбільший спільний дільник  $p-1$  і абсолютного показника кручення поля  $F$ ).*

Л. Ф. Баранник [54] розв'язав задачу про мінімальне поле реалізації  $K$  всіх проєктивних зображень скінченної абелевої групи  $G$  над алгебраїчно замкненим полем  $\Omega$  характеристика якого не ділить  $|G|$ . Доводиться, що поле  $K$  співпадає з полем  $m$ -вих коренів із 1, де  $m$  – експонента групи  $G$ . Також доводитьься

ся, що мінімальне поле реалізації всіх незвідних проєктивних  $\Omega$ -зображень групи  $G$  співпадає з полем  $\bar{m}$ -вих коренів із 1, де  $\bar{m} = \overline{\text{exp}G}$ .

Відмітимо, що задачу про поле реалізації проєктивних  $\Omega$ -зображень абелевої групи  $G$  вивчалося Г. Палінгсом [60]. Ним доведено, що кожне проєктивне  $\Omega$ -зображення групи  $G$  можна реалізувати в полі  $l$ -вих коренів з 1, де  $l = \text{exp}G$  при  $|G| \not\equiv 0 \pmod{2}$  і  $l = 2\text{exp}G$  при  $|G| \equiv 0 \pmod{2}$ . Крім того, Г. Палінгс показав, що кожне незвідне проєктивне  $\Omega$ -зображення групи  $G$  можна реалізувати в полі  $m$ -вих коренів з 1, де  $m = \text{exp}G$ .

Л. Ф. Баранник [61] досліджував питання про точні проєктивні зображення скінченних абелевих груп над полем  $F$ , що є скінченим розширенням поля  $\mathbb{Q}$  чи  $\mathbb{Q}_p$ . Якщо  $F$  – скінченне розширення поля  $\mathbb{Q}$ , то доводиться, що будь-яка скінченна абелева група  $G$  володіє точними незвідними проєктивними  $F$ -зображеннями степеня  $|G|$ . Поле  $F$  називається  $G$ -циклічним, якщо  $\text{exp}G$  ділить  $|W_F|$ .

**Теорема 1.43** ([61]). *Нехай  $[F: \mathbb{Q}_p] = n$ . Скінченна абелева група  $G$  володіє точним незвідним проєктивним  $F$ -зображенням тоді і тільки тоді, коли кожна силовська  $q$ -підгрупа  $G_q$  групи  $G$  має таку підгрупу  $H_q = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \dots \times \langle a_s \rangle$ , що  $G_q/H_q$  є групою симетричного типу і  $F \in G_q/H_q$ -циклічне поле, при цьому  $s \leq n + 2$ , якщо  $q = p$  і  $s \leq 2$ , якщо  $q \neq p$ .*

Л. Ф. Баранник та П. М. Гудивок [51] описали абелеві групи, що володіють простими схрещеними груповими алгебрами.

**Теорема 1.44** ([51]). *Нехай  $F$  – скінченне розширення поля  $\mathbb{Q}_p$  ( $p \neq 2$ ) степеня  $n$ ,  $G$  – скінченна абелева група,  $\xi$  – твірний елемент силовської  $p$ -підгрупи групи  $W_F$  і  $f$  – абсолютна степінь інерції поля  $F$ . Група  $G$  володіє простою схрещеною груповою  $F$ -алгеброю тоді і тільки тоді, коли кожна силовська  $q$ -підгрупа  $G_q$  групи  $G$  має таку підгрупу  $H_q = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \dots \times \langle a_s \rangle$ , що факторгрупа  $G_q/H_q$  є групою симетричного типу,  $F \in G_q/H_q$ -циклічне поле і виконується одна із наступних умов:*

- 1)  $s \leq n + 2$ , якщо  $q = p$ ,  $\xi \neq 1$ ;

- 2)  $s \leq n + 1$ , якщо  $q = p$ ,  $\xi = 1$ ;
- 3)  $s \leq 2$ , якщо  $q | (p^f - 1)$ , причому, якщо  $s = 2$ ,  $q = 2$ ,  $4 \nmid (p^f - 1)$ ,  $8 \nmid (p^{2f} - 1)$ , то для деякого  $i$ ,  $1 \leq i \leq 2$ ,  $a_i^2 = 1$ ;
- 4)  $s = 1$ , якщо  $q \neq p$  і  $q \nmid (p^f - 1)$ .

Аналогічне до даної теореми твердження доводиться в [51] також для випадку, коли  $F$  – нерозгалужене розширення поля  $\mathbb{Q}_2$ .

Л. Ф. Баранник [61] знайшов мінімальне число незвідних компонент точних проєктивних зображень скінченної абелевої групи  $G$ , над довільним полем  $K$ , характеристика якого не ділить порядок групи  $G$ .

$T$ -рядом групи  $G$  назвемо ряд  $G_0 = G \supset G_1 \supset \dots \supset G_s = 1$  фактори якого задовольняють наступним умовам:

- 1)  $G_0/G_1$  володіє точними незвідними проєктивними  $K$ -зображеннями;
- 2)  $G_i/G_{i+1}$  – циклічна група ( $i = 1, \dots, s - 1$ ).

**Теорема 1.45** ([61]). *Мінімальне число незвідних компонент точних проєктивних  $K$ -зображень абелевої групи  $G$  дорівнює  $\min_s s$ , де  $s$  пробігає множину довжин всіх можливих  $T$ -рядів групи  $G$ .*

**Твердження 1.46** ([61]). *Мінімальне число незвідних компонент точних лінійних  $K$ -зображень абелевої групи  $G$  дорівнює  $\max_{q || G} t_q$ , де  $t_q$  – число інваріантів силовської  $q$ -підгрупи  $G_q$  групи  $G$ .*

**Твердження 1.47** ([61]). *Нехай  $G = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \dots \times \langle a_k \rangle$  є  $p$ -групою ( $p \neq 2$ ). Мінімальне число незвідних компонент точних проєктивних  $\mathbb{Q}_p$ -зображень групи  $G$  дорівнює 1, якщо  $k \leq 3$  і дорівнює  $k - 2$  при  $k > 3$ .*

Цікавою є задача про число нерозкладних цілочислових  $p$ -адичних зображень схрещених групових кілець. Нехай  $\mathbb{Z}_p$  – кільце цілих раціональних  $p$ -адичних чисел,  $\mathbb{Z}_p^*$  – мультиплікативна група кільця  $\mathbb{Z}_p$ ,  $G$  – скінченна група і  $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$  – схрещене групове кільце групи  $G$  і кільця  $\mathbb{Z}_p$  із системою факторів  $\{\lambda_{a,b}\}$  ( $\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_p^*$ ;  $a, b \in G$ ). Задачу, про число  $n(\Lambda)$  нерозкладних  $\mathbb{Z}_p$ -зображень кільця  $\Lambda$  у випадку, коли  $\Lambda$  – групове кільце було розв'язано З. І. Боровичем, К. М. Фадєєвим [62], С. Д. Берманом, П. М. Гудивком [63], [64],

А. Хеллером та І. Райнером [65]. Ю. А. Дрозд, А. В. Ройтер [66] та Г. Якобінський [67] розв'язали задачу про скінченність числа нерозкладних  $\mathbb{Z}_p$ -зображень  $\mathbb{Z}_p$ -порядків в комутативних напівпростих скінченних алгебрах над полем  $\mathbb{Q}_p$  раціональних  $p$ -адичних чисел. П. М. Гудивок [7] досліджував задачу про число  $n(\Lambda)$  нерозкладних  $\mathbb{Z}_p$ -зображень кільця  $\Lambda$  та отримав таку теорему.

**Теорема 1.48** ([7]). *Нехай  $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$ ,  $H_p$  – силовська  $p$ -підгрупа групи  $G$ ,  $\Lambda_{H_p} = (H_p, \mathbb{Z}_p, \lambda) \subset \Lambda$ ,  $\tilde{\Lambda}_{H_p} = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda_{H_p}$ ,  $d$  – число простих компонент алгебри  $\tilde{\Lambda}_{H_p}$  і при  $p = 2$   $\lambda_{a,b} = \pm 1 (a, b \in H_2)$ . Число  $n(\Lambda)$  нерозкладних  $\mathbb{Z}_p$ -зображень кільця  $\Lambda$  скінченне тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов:*

- 1) *при  $p \geq 3$  група  $H_p$  циклічна або типу  $(3,3)$  і  $d = 3$ , то  $\Lambda_{H_p}$  є груповим кільцем  $\mathbb{Z}_p H_p$ ;*
- 2) *при  $p = 2$  група  $H_2$  абелева типу  $(2^n, 2^m)$  ( $n \geq 1, 0 \leq m \leq 1$ ) чи група дієдра порядку  $2^k$  ( $k \geq 3$ ), причому*
  - а) *якщо  $H_2$  – циклічна група, то  $d \leq 3$  і  $d = 2,3$  тільки тоді, коли  $\tilde{\Lambda}_{H_2}$  – групова алгебра  $\mathbb{Q}_2 H_2$ ;*
  - б) *якщо  $H_2$  – абелева група типу  $(2^n, 2)$  і  $\Lambda_{H_2}$  – комутативне кільце, то  $d = 2$ ;*
  - в) *якщо  $H_2$  – абелева група типу  $(2^n, 2)$  чи група дієдра і  $\Lambda_{H_2}$  – некомутативне кільце, то  $d = 1$ .*

## Висновки

Вивчення звичайних та проєктивних матричних зображень скінченних груп є предметом багатьох наукових праць, що з'явилися за останні більш ніж півсторіччя. У структурній теорії звичайних та проєктивних матричних зображень можливо виокремити декілька напрямів – вивчення нерозкладних скінченних груп над комутативними кільцями, вивчення питання про дикість скінченної групи над комутативними кільцями та вивчення питання про дикість та ручність схрещених групових кілець скінченних груп та комутативних кілець з

одиницею. Зважаючи на чисельні результати, отримані у цих напрямках, природною задачею є узагальнення, систематизація та класифікація отриманих результатів.

Актуальним є вивчення питання дикості скінченних  $2$ -груп над нетеровим локальним факторіальним кільцем, а також питання зв'язку дикості задачі про опис матриць над областю цілісності за модулем ідеалу і властивістю множин простих елементів цієї області, питання дикості і ручності схрещених групових кілець скінченних груп і кілець цілих  $2$ -адичних чисел.

## РОЗДІЛ 2

### Допоміжні твердження з теорії матричних зображень груп та схрещених групових кілець

#### 2.1. Матричні зображення скінченних груп

У цьому підрозділі приведено добре відомі означення з теорії матричних зображень груп, які знадобляться надалі.

Нехай  $K$  – комутативне кільце з одиницею,  $GL(n, K)$  – група всіх оборотних матриць розміру  $n \times n$  над кільцем  $K$  і  $G$  – скінченна група порядку  $|G|$ .

*Означення 2.1.* Гомоморфізм  $\Gamma: g \rightarrow \Gamma(g)$  групи  $G$  в групу  $GL(n, K)$  називається *матричним  $K$ -зображенням степеня  $n$  групи  $G$* .

*Означення 2.2.* Матричні  $K$ -зображення  $\Gamma$  і  $\Gamma'$  степеня  $n$  групи  $G$  називаються  *$K$ -еквівалентними*, якщо існує така матриця  $C \in GL(n, K)$ , що  $C^{-1}\Gamma(g)C = \Gamma'(g)$  для будь-якого  $g \in G$ .

Очевидно, множина всіх матричних  $K$ -зображень степеня  $n$  групи  $G$  розбивається на класи  $K$ -еквівалентних матричних  $K$ -зображень групи  $G$ .

*Означення 2.3.* Матричне  $K$ -зображення  $\Gamma$  степеня  $n$  групи  $G$  називається *звідним* над кільцем  $K$ , якщо воно  $K$ -еквівалентне зображенню  $\Gamma'$  вигляду:

$$g \rightarrow \Gamma'(g) = \begin{pmatrix} \Gamma_1(g) & T(g) \\ 0 & \Gamma_2(g) \end{pmatrix},$$

де  $\Gamma_i$  – матричне  $K$ -зображення степеня  $n_i$  групи  $G$  ( $n_i < n; i = 1, 2$ ). В протилежному випадку зображення  $\Gamma$  називається *незвідним* над кільцем  $K$ .

*Означення 2.4.* Матричне  $K$ -зображення  $\Gamma$  групи  $G$  називається *цілком звідним* над кільцем  $K$ , якщо воно  $K$ -еквівалентне зображенню  $\Gamma'$  вигляду:

$$g \rightarrow \Gamma'(g) = \begin{pmatrix} \Gamma_1(g) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Gamma_r(g) \end{pmatrix},$$

де  $\Gamma_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) – незвідне матричне  $K$ -зображення групи  $G$ .

**Теорема 2.1** (Машке). *Нехай  $K^*$  – мультиплікативна група кільця  $K$  і  $G$  – скінченна група порядку  $|G|$ . Якщо  $|G| \in K^*$ , то довільне матричне  $K$ -зображення групи  $G$  цілком звідне.*

*Означення 2.5.* Матричне  $K$ -зображення  $\Gamma$  степеня  $n$  групи  $G$  називається *розкладним* над кільцем  $K$ , якщо воно  $K$ -еквівалентне зображенню  $\Gamma'$  вигляду:

$$g \rightarrow \Gamma'(g) = \begin{pmatrix} \Gamma_1(g) & 0 \\ 0 & \Gamma_2(g) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

де  $\Gamma_i$  – матричне  $K$ -зображення степеня  $n_i$  групи  $G$  ( $n_i < n; i = 1, 2$ ). В протилежному випадку зображення  $\Gamma$  називається *нерозкладним* над кільцем  $K$ .

Якщо зображення  $\Gamma$   $K$ -еквівалентне зображенню вигляду (2.1) то зображення  $\Gamma$  будемо називати *сумою* зображень  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  і позначатимемо наступним чином:

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

Очевидно, якщо матричне  $K$ -зображення групи  $G$  незвідне над кільцем  $K$ , то воно і нерозкладне над кільцем  $K$ . Зауважимо, що обернене до даного твердження не буде справедливим.

Дамо модульне трактування матричних  $K$ -зображень групи  $G$ . Через  $KG$  будемо позначати групове кільце групи  $G$  над кільцем  $K$ . Надалі під  $KG$  модулями будемо розуміти ліві  $KG$ -модулі.

*Означення 2.6.*  $KG$ -модуль, що є вільним  $K$ -модулем скінченного рангу  $n$ , називається  *$KG$ -модулем зображення рангу  $n$* .

Нехай  $u_1, \dots, u_n$  –  $K$ -базис  $KG$ -модуля зображення  $M$  рангу  $n$ . Очевидно,

$$gu_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}(g)u_j \quad (\alpha_{ji}(g) \in K, g \in G)$$

і зображення  $\Gamma: g \rightarrow \Gamma(g) = \|\alpha_{ji}(g)\|$  є матричним  $K$ -зображенням групи  $G$ . Будемо казати, що зображення  $\Gamma$  *реалізується в  $KG$ -модулі зображення  $M$* .

Для кожного матричного  $K$ -зображення  $\Gamma$  степеня  $n$  групи  $G$ , можна очевидним чином побудувати  $KG$ -модуль з скінченним  $K$ -базисом, в якому реалізується зображення  $\Gamma$ . Легко бачити, що при цьому матричні  $K$ -зображення  $\Gamma$  і  $\Gamma'$  групи  $G$   $K$ -еквівалентні тоді і тільки тоді, коли відповідні  $KG$ -модулі зображення ізоморфні.

*Означення 2.7.*  $KG$ -модуль зображення  $M$  рангу  $n$  називається *звідним*, якщо він містить ненульовий  $KG$ -підмодуль зображення рангу  $t$  ( $t < n$ ),  $K$ -базис якого продовжується до  $K$ -базису модуля  $M$ . В протилежному випадку  $KG$ -модуль  $M$  називають *незвідним*.

*Означення 2.8.*  $KG$ -модуль зображення  $M$  називається *розкладним*, якщо він є прямою сумою двох ненульових  $KG$ -підмодулів зображень. В протилежному випадку  $KG$ -модуль  $M$  називають *нерозкладним*.

Очевидно, матричне  $K$ -зображення  $\Gamma$  групи  $G$ , що реалізується в  $KG$ -модулі зображення  $M$ , незвідне (нерозкладне) тоді і тільки тоді, коли  $KG$ -модуль  $M$  незвідний (нерозкладний).

Звідси випливає, що на мові модулів теорема Машке формулюється так:

*Нехай  $|G| \in K^*$ . Довільний  $KG$ -модуль розкладається в пряму суму незвідних  $KG$ -підмодулів зображень.*

## 2.2. Задача про пару матриць

Нехай  $G$  – скінченна група і  $K$  – комутативне кільце з одиницею.

*Означення 2.9.* Нехай у групи  $G$  існує матричне  $K$ -зображення  $\Gamma(A_1, A_2)$ , що залежить від довільних матриць  $A_1$  і  $A_2$  розміру  $n \times n$  (у тому сенсі, що всі матриці зображення є блоковими, кожен блок яких є деяким не комутативним поліномом від матриць  $A_1$  і  $A_2$ ) над кільцем  $K$  ( $n$  – довільне натуральне число). Будемо казати, що задача описання  $K$ -зображень групи  $G$  є *дикою*, якщо із  $K$ -еквівалентності зображень  $\Gamma(A_1, A_2)$  і  $\Gamma(B_1, B_2)$  випливає, що пари матриць  $(\overline{A_1}, \overline{A_2})$  і  $(\overline{B_1}, \overline{B_2})$  подібні над полем  $\overline{K} = K/V$  ( $V$  – деякий максимальний ідеал кільця  $K$ ,  $\overline{A}$  – матриця над  $\overline{K}$ , що одержується з матриці  $A$  над  $K$  приведенням її елементів за модулем ідеалу  $V$ ).

*Означення 2.10.* Якщо задача описання матричних  $K$ -зображень групи  $G$  є дикою, то таку групу  $G$  називають *дикою* над кільцем  $K$ .

Відмітимо, що задача про класифікацію з точністю до подібності матриць над полем вважається достатньо важкою (див. [68]).

У зв'язку з різного роду застосуванням заслуговує інтерес наступна задача 1: Виділити всі скінченні групи, описання матричних  $K$ -зображень яких не включає задачу про пару матриць над деяким полем. Такі групи часто називають *ручними* над кільцем  $K$ .

П. М. Гудивком [3] була отримана необхідна і достатня умова ручності скінченної нециклічної  $p$ -групи над кільцем  $R_p$ , де  $R_p$  – кільце цілих величин поля  $F_p$ , що є скінченним розширенням поля раціональних  $p$ -адичних чисел  $\mathbb{Q}_p$ .

**Теорема 2.2** ([3]). *Нехай  $G$  – скінченна нециклічна  $p$ -група. Група  $G$  є ручною над кільцем  $R_p$  тоді і тільки тоді, коли  $G$  – група типу  $(2,2)$  і  $F_2$  є нерозгалуженим розширенням поля  $\mathbb{Q}_2$ .*

*Означення 2.11.* *Дискретно нормованим кільцем* називається кільце з дискретним нормуванням, тобто область цілісності з одиницею, в якій існує такий елемент  $t$ , що будь-який ненульовий ідеал породжується деяким степенем еле-

мента  $t$ . Такий елемент, називають *уніформізуєючим*, і такий елемент визначається з точністю до оборотного множника.

Кожен ненульовий елемент дискретно нормованого кільця однозначно записується у вигляді  $ut^n$ , де  $u$  – оборотний елемент, а  $n$  – невід’ємне ціле число. Прикладами дискретно нормованого кільця, є кільце  $\mathbb{Z}_p$  цілих  $p$ -адичних чисел та кільце  $k[[T]]$  формальних степеневих рядів від однієї змінної  $T$  над полем  $k$ .

Результати отримані П. М. Гудивком в роботах [3], [69], [70], [71] та Е. Дітеріх [72], [73] про ручність скінченної  $p$ -групи  $G$  порядку  $|G| > 1$  ( $p \neq 2$ ) над дискретно нормованим кільцем сформулюємо наступним чином.

**Теорема 2.3** ([3], [69], [70], [71], [72], [73]). *Нехай  $G$  – скінченна  $p$ -група порядку  $|G| > 1$  ( $p \neq 2$ ),  $K$  – повне дискретно нормоване кільце характеристики  $p$  і  $p = \lambda t^e$  ( $\lambda \in K^*$ ,  $t$  – простий елемент кільця  $K$ ,  $K^*$  – мультиплікативна група кільця  $K$ ). Група  $G$  є ручною над кільцем  $K$  тоді і тільки тоді, коли виконується одна із умов:*

- 1)  $|G| = p, e \leq 2$ ;
- 2)  $|G| = 3, e \leq 4$ ;
- 3)  $G$  – циклічна група порядку  $p^2$ ,  $e = 1$ .

Наведемо результати П. М. Гудивка [70], [71], Е. Дітеріх [72], В. М. Бондаренка [74], Л. А. Назарової [75], [76], [77] та А. В. Яковлева [18] про ручність скінченної 2-групи  $G$  над дискретно нормованим кільцем.

**Теорема 2.4** ([70], [71], [72], [74], [75], [76], [77], [78]). *Нехай  $G$  – скінченна 2-група,  $K$  – повне дискретно нормоване кільце характеристики 2 і  $2 = \lambda t^e$  ( $\lambda \in K^*$ ,  $t$  – простий елемент кільця  $K$ ,  $K^*$  – мультиплікативна група кільця  $K$ ). Група  $G$  порядку  $|G|$  є ручною над кільцем  $K$  тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов:*

- 1)  $|G| \leq 2$ ;
- 2)  $G$  – циклічна група порядку 4,  $e \leq 2$ ;
- 3)  $G$  – циклічна група порядку 8,  $e = 1$ ;
- 4)  $G$  – абелева група типу  $(2,2)$ ,  $e = 1$ .

Наведемо також наступну теорему, що є узагальненням результатів П. М. Гудивка, В. М. Ороса, А. В. Ройтера [79] та П. М. Гудивка і В. М. Бондаренка [80].

**Теорема 2.5** ([79], [80]). *Нехай  $G$  – скінченна  $p$ -група порядку  $|G| > 1$ ,  $R_p$  – повне дискретно нормоване кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики  $p$  і  $K_p = R_p[[x_1, \dots, x_n]]$  – кільце формальних степеневих рядів від  $n$  змінних  $x_1, \dots, x_n$  з коефіцієнтами з кільця  $R_p$ . Група  $G$  є дикою над кільцем  $K_p$  тоді і тільки тоді, коли  $|G| = p$ ,  $n = 1$  і  $p$  – простий елемент кільця  $R_p$ .*

*Означення 2.12.* Лівий ідеал  $A$  кільця  $K$  називається *максимальним лівим ідеалом*, якщо  $A \neq K$  і будь-який лівий ідеал, що містить  $A$ , співпадає або з  $A$ , або з  $K$ .

*Означення 2.13.* *Радикалом Джекобсона  $\text{Rad } K$  кільця  $K$  з одиницею називається перетин всіх максимальних лівих ідеалів кільця  $K$ .*

*Означення 2.14.* Нехай  $M$  –  $K$ -модуль. *Анулятором модуля  $M$  в  $K$  називається множина  $\text{Ann}_K M = \{a \in K : aM = 0\}$ .*

*Означення 2.15.* *Нетеровим кільцем називають таке асоціативне кільце з одиницею для якого справедливе наступне твердження: нехай маємо деяку зростаючу послідовність ідеалів кільця:*

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots,$$

тоді існує таке натуральне  $n$  для якого

$$I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \dots.$$

Якщо ідеали в означенні ліві, то кільце називається *лівим нетеровим кільцем*, якщо праві – *правим нетеровим кільцем*. Якщо твердження виконується і для лівих і для правих ідеалів, то кільце просто називається *нетеровим кільцем*.

Прикладом нетерового кільця є будь-яке поле, кільце цілих чисел та кільце многочленів з скінченною кількістю змінних з цілочисловими коефіцієнтами чи коефіцієнтами з деякого поля. Кільце многочленів з нескінченною кількістю змінних не є нетеровим кільцем.

Наступні два твердження є еквівалентними до означення нетерового кільця, і відповідно, самі можуть бути означеннями.

**Твердження 2.6** ([81]). *Деяке кільце  $K$  є нетеровим кільцем тоді і тільки тоді, коли кожна непорожня множина його ідеалів має максимальний елемент.*

**Твердження 2.7** ([81]). *Деяке кільце  $K$  є нетеровим кільцем тоді і тільки тоді, коли кожен його ідеал є скінченнопородженим. Тобто, для кожного ідеалу  $I$  кільця  $K$  існують такі елементи  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r \in K$ , що*

$$I = \{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_rx_r : x_1, x_2, \dots, x_k \in K\}.$$

**Теорема 2.8** ([82]). *Нехай  $K$  – нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики  $p$ .*

- 1) *Скінченна нециклічна  $p$ -група  $G$  порядку  $|G|$  є ручною над кільцем  $K$  тоді і тільки тоді, коли  $|G| = 4$  і  $\text{Rad } K = 2K$ .*
- 2) *Циклічна  $p$ -група  $G$  порядку  $|G| = p^r$  ( $r > 2$ ) є ручною над кільцем  $K$  тоді і тільки тоді, коли  $|G| = 8$  і  $\text{Rad } K = 2K$ .*
- 3) *Циклічна  $p$ -група порядку  $p^2$  є дикою над кільцем  $K$ , якщо  $K$  – факторіальне і не дискретно нормоване кільце.*

Відмітимо, що П. М. Гудивок, Ф. Г. Ващук, В. С. Дроботенко [83] і П. М. Гудивок та І. В. Шапочка [84], використовуючи нерозкладні  $\mathbb{Z}'_p$ -зображення циклічної групи порядку  $p^2$  ( $\mathbb{Z}'_p$  – кільце цілих раціональних  $p$ -адичних чисел) описали всі неізоморфні розширення повної абелевої  $p$ -групи  $N$  з умовою мінімальності за допомогою циклічної групи  $G$  порядку  $p^r$  ( $r \leq 2$ ) і довели наступне твердження.

**Твердження 2.9** ([83], [84]). *Задача описання всіх розширень довільної повної абелевої  $p$ -групи з умовою мінімальності за допомогою скінченної  $p$ -групи  $G$  ( $p \neq 2$ ) не містить задачу про пару матриць над деяким полем тоді і тільки тоді, коли  $G$  є циклічною групою порядку  $p^r$  ( $r \leq 2$ ).*

П. М. Гудивок та В. І. Погоріляк [85], [86] вивчали задачу про дикість скінченних груп над комутативним локальним кільцем характеристики  $p^s$  ( $s > 0$ ).

**Теорема 2.10** ([85], [86]). *Нехай  $G$  – скінченна  $p$ -група порядку  $|G| > 1$ ,  $K$  – комутативне локальне кільце характеристики  $p^s$  ( $s > 1$ ),  $V$  – максимальний ідеал кільця  $K$ . Група  $G$  не є дикою над кільцем  $K$  тоді і тільки тоді, коли  $|G| = p$  і  $V = Kp$ .*

Відмітимо, що у випадку, коли  $K = \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$ , теорема 2.10 була доведена В. М. Бондаренком [87].

**Теорема 2.11** ([85], [86]). *Нехай  $G$  – скінченна  $p$ -група порядку  $|G| > 2$ ,  $K$  – комутативне локальне кільце характеристики  $p$ , що не є полем. Група  $G$  є дикою над кільцем  $K$ .*

*Означення 2.16.* Елемент кільця  $K$  називається *нілпотентним елементом*, якщо деяка степінь цього елемента рівна нулю.

В. Й. Погоріляк [88] розв'язав задачу, про дикість групи  $G$  порядку 2 над комутативним локальним кільцем  $K$  характеристики 2 в наступних випадках:

- 1)  $K$  містить ненульовий нільпотентний елемент;
- 2)  $K$  містить власний ідеал, породжений не менше, ніж трьома елементами.

**Теорема 2.12** ([88]). *Нехай  $K$  – локальне кільце характеристики 2, в якому є ненульовий нільпотентний елемент  $t$  ( $t^r = 0, t^{r-1} \neq 0, r \geq 2, r \in \mathbb{N}$ );  $V$  – максимальний ідеал кільця  $K$ . Циклічна 2-група  $G = \langle a \rangle$  порядку  $|G| > 1$  не є дикою над кільцем  $K$  тоді і тільки тоді, коли  $|G| = 2$ ,  $t^2 = 0$ ,  $V = Kt$ .*

**Теорема 2.13** ([88]). *Нехай  $K$  – локальне кільце характеристики 2, в якому є власний ідеал, породжений не менше ніж трьома твірними елементами. Циклічна 2-група  $G = \langle a \rangle$  порядку  $|G| > 1$  є дикою над кільцем  $K$ .*

**Твердження 2.14** ([88]). *Нехай  $K$  – локальне кільце характеристики 2 без ненульових нільпотентних елементів,  $V$  – максимальний ідеал кільця  $K$  і існують такі ненульові елементи  $w_1, w_2 \in V$ , що  $w_1w_2 = 0$  і  $V \neq W_1 + W_2$ , де  $W_1 = \text{Ann}_K w_2$ ,  $W_2 = \text{Ann}_K w_1$ . Циклічна 2-група  $G = \langle a \rangle$  порядку  $|G| > 1$  є дикою над кільцем  $K$ .*

**Твердження 2.15** ([88]). Нехай  $K$  – локальне кільце характеристики 2 без ненульових нільпотентних елементів,  $V$  – максимальний ідеал кільця  $K$  і існують такі ненульові елементи  $w_1, w_2 \in V$ , що  $w_1 w_2 = 0$  і  $V = W_1 + W_2$ , де  $W_1 = \text{Ann}_K w_2$ ,  $W_2 = \text{Ann}_K w_1$ , причому  $W_1 \cap W_2 \neq 0$  і/або деякий скінченнопо-роджений ідеал  $I$  кільця  $K$ , для якого  $I \subseteq W_1$  або  $I \subseteq W_2$ , не є головним. Циклічна 2-група  $G = \langle a \rangle$  порядку  $|G| > 1$  є диною над кільцем  $K$ .

**Теорема 2.16** ([3]). Нехай  $G$  – скінченна група з силовською  $p$ -підгрупою  $H$  і  $K$  – повне дискретно нормоване кільце характеристики  $p$ . Група  $G$  є ручною над кільцем  $K$  тоді і тільки тоді, коли  $(|G|, p) = 1$  або  $H$  – циклічна група порядку 2.

П. М. Гудивок та Є. Я. Погоріляк [89] довели теореми 2.10 та 2.11 у випадку, коли  $K = R/P^n$ , де  $R$  – дискретно нормоване кільце з полем лишків характеристики  $p$ ,  $P$  – максимальний ідеал кільця  $R$ .

Використовуючи теорему 2.10 при  $K = \mathbb{Z}/p^s \mathbb{Z}$  ( $s > 1$ ), В. В. Сергейчук [90], П. М. Гудивок та І. В. Шапочка [91] довели наступне твердження.

**Твердження 2.17** ([90], [91]). Нехай  $H_m$  – прямий добуток  $m$  екземплярів циклічної  $p$ -групи порядку  $p^n$  ( $n > 1$ ) і  $B$  – циклічна  $p$ -група порядку  $p^s$  ( $s > 1$ ). Задача про опис всіх неізоморфних розширень групи  $H_m$  ( $m$  – довільне натуральне число) за допомогою  $B$ , є диною.

Г. Секереш [92] та окремо Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, В. В. Сергейчук та В. М. Бондаренко [68] описали всі неізоморфні скінченні  $p$ -групи, що містять абелеву групу індексу  $p$  (див. також В. С. Дроботенко [93] та Л. А. Назарова, А. В. Ройтер [94]).

Дамо означення факторіальних кілець, так як це зроблено в книзі [95].

Нехай  $K$  – область цілісності з одиницею. Оскільки область цілісності – комутативне кільце, то в ній поняття правого і лівого дільника елемента збігаються і тому означення подільності формулюється так:

*Означення 2.17.* Якщо для елементів  $a$  і  $b$  області цілісності  $K$  в  $K$  існує такий елемент  $c$ , що  $a = bc$ , то говорять, що  $a$  ділиться на  $b$  або  $b$  ділить  $a$  і пишуть відповідно  $a : b$ ,  $b|a$  або  $a \equiv 0 \pmod{b}$ .

Оборотним елементом, а також одиницею кільця або дільником одиниці називатимемо будь-який елемент кільця, для якого існує обернений елемент.

*Означення 2.18.* Елементи  $a$  і  $b$  області цілісності  $K$  називаються *асоційованими*, якщо кожен з них є дільником іншого:

$$a = bc, b = ad \quad (c, d \in K). \quad (2.2)$$

З рівностей (2.2) випливає, що  $a = a(dc)$ . Звідси, скоротивши обидві частини рівності на  $a \neq 0$ , дістаємо  $dc = 1$ . Отже,  $d$  і  $c$  є дільники одиниці. Таким чином, якщо  $a$  і  $b$  – асоційовані елементи, то  $b = a\varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – деякий дільник одиниці. З іншого боку, який би ми не взяли дільник одиниці  $\varepsilon$ , елементи  $a$  і  $a\varepsilon$  асоційовані між собою, оскільки  $a = (a\varepsilon)\varepsilon^{-1}$ . Отже, означення асоційованих елементів можна дати наступним чином.

*Означення 2.19.* Елементи  $a$  і  $b$  області цілісності  $K$  називаються *асоційованими*, якщо  $b = a\varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – деякий дільник одиниці.

Очевидно, два асоційовані елементи  $a$  і  $b$  породжують той самий головний ідеал.

*Означення 2.20.* Найбільшим спільним дільником елементів  $a$  і  $b$  області цілісності  $K$  називається такий спільний дільник цих елементів, який ділиться на будь-який інший їхній спільний дільник.

Щоб зазначити, що  $d$  є найбільший спільний дільник елементів  $a$  і  $b$ , пишуть  $d = (a, b)$ .

*Означення 2.21.* Елементи  $a, b \in K$  називаються *взаємно простими*, якщо вони не мають спільних дільників, відмінних від дільників одиниці, тобто якщо  $(a, b) = 1$ .

Нехай  $\varepsilon$  – будь-який дільник одиниці і  $a$  – довільний елемент області цілісності  $K$ . Тоді  $a = a\varepsilon \cdot \varepsilon^{-1}$ . З цієї рівності випливає, що всі елементи, асоційовані з елементом  $a$ , і всі дільники одиниці  $\varepsilon$  є дільниками елемента  $a$ . Їх називають дільниками елемента  $a$ .

вають *тривіальними*, або *невласними* дільниками елемента  $a$ . Всі інші дільники елемента  $a$ , тобто дільники, відмінні від  $a\varepsilon$  і  $\varepsilon$ , якщо такі існують, називають *нетривіальними*, або *власними*.

*Означення 2.22.* Елемент  $a \in K$  називається *нерозкладним*, або *простим*, якщо він не є дільником одиниці та не має нетривіальних дільників; елемент  $a \in K$  називається *розкладним*, або *складеним*, якщо він має нетривіальні дільники.

Інакше кажучи, елемент  $a \in K$  називається *розкладним*, якщо його можна записати у вигляді добутку  $a = bc$  двох нетривіальних множників  $b$  і  $c$ ; він називається *нерозкладним*, якщо його не можна записати у вигляді добутку двох нетривіальних дільників, тобто, якщо  $a = bc$ , то звідси завжди випливає, що один з множників  $b$  і  $c$  є дільником одиниці, а інший – асоційований з  $a$ .

*Означення 2.23.* Говорять, що елемент  $a$  області цілісності  $K$  має *однозначний розклад на прості множники*, якщо виконуються умови:

- 1) існують у  $K$  такі прості елементи  $p_i$ , що  $a = \prod_{i=1}^m p_i$ ;
- 2) якщо  $a = \prod_{i=1}^n q_i$  – інший розклад, у якому  $q_i$  – прості елементи  $K$ , то  $m = n$  і при відповідній нумерації  $p_i \sim q_i$  (асоційовані) для  $i = 1, \dots, m$ .

*Означення 2.24.* Кільце називається *факторіальним*, якщо воно є областю цілісності і всякий відмінний від нуля необоротний елемент кільця має однозначний розклад на прості множники.

П. М. Гудивок та Є. Я. Погоріляк [24] отримали наступні результати.

**Теорема 2.18** ([24]). *Нехай  $G$  – скінченна  $p$ -група порядку  $|G| > 2$ ,  $K$  – область цілісності з одиницею характеристики  $p$ , що не є полем. Група  $G$  є дикуою над кільцем  $K$ .*

**Теорема 2.19** ([24]). *Нехай  $G$  – скінченна  $p$ -група порядку  $|G| > 1$ ,  $K$  – нетерове факторіальне кільце характеристики  $p$ , що не є полем. Група  $G$  не є дикуою над кільцем  $K$ .*

кою над кільцем  $K$  тоді і тільки тоді, коли  $K$  – область головних ідеалів і  $|G| = 2$ .

### 2.3. Схрещені групові кільця

Нехай  $K$  – комутативне кільце з одиницею,  $K^*$  – мультиплікативна група кільця  $K$ ,  $G$  – скінченна група,  $GL(n, K)$  – група всіх оборотних матриць над  $K$  порядку  $n$ .

*Означення 2.25.* Відображення  $\Gamma: G \rightarrow GL(n, K)$  називається *проективним  $K$ -зображенням* групи  $G$  степеня  $n$ , якщо для всіх  $a, b \in G$  виконується рівність

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma(b) = \lambda_{a,b} \Gamma(ab), \quad (2.3)$$

де  $\lambda_{a,b} \in K^*$ .

З (2.3) випливає, що для всіх  $a, b, c \in G$  матимемо

$$\lambda_{ab,c} \lambda_{a,b} = \lambda_{a,bc} \lambda_{b,c}. \quad (2.4)$$

*Означення 2.26.* Система  $\lambda = \{\lambda_{a,b}: a, b \in G\}$   $|G|^2$  елементів із  $K^*$ , що задовольняють умову (2.4), називають *системою  $K$ -факторів* групи  $G$ . Про  $\Gamma$ , що задовольняє умову (2.3), будемо говорити, що  $\Gamma$  є *проективним  $K$ -зображенням* групи  $G$  з системою факторів  $\lambda = \{\lambda_{a,b}\}$ .

*Означення 2.27.* Два проективних зображення  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  групи  $G$  називаються *еквівалентними*, якщо знайдеться така оборотна над  $K$  матриця  $C$  і такі елементи  $\alpha_g \in K^*$  ( $g \in G$ ), що

$$C^{-1} \Gamma_1(g) C = \alpha_g \Gamma_2(g)$$

для всіх  $g \in G$ .

*Означення 2.28.* Дві системи факторів  $\{\lambda_{a,b}\}$  і  $\{\mu_{a,b}\}$  називаються *еквівалентними*, якщо існує множина  $\{\alpha_a\} |G|$  елементів із  $K^*$ , що задовольняють умову

$$\lambda_{a,b} = \frac{\alpha_a \alpha_b}{\alpha_{ab}} \mu_{a,b}$$

для всіх  $a, b \in G$ .

*Означення 2.29.* Система  $K$ -факторів  $\{\lambda_{a,b}\}$  групи  $G$  називається *нормованою*, якщо  $\lambda_{e,a} = \lambda_{a,e} = 1$  для кожного елемента  $a \in G$  і одиниці  $e$  групи  $G$ .

Будь-яка система  $K$ -факторів групи  $G$  еквівалентна деякій нормованій системі  $K$ -факторів групи  $G$ . Надалі будемо припускати, що всі розглядувані системи  $K$ -факторів групи  $G$  є нормованими.

Множину всіх нормованих систем  $K$ -факторів групи  $G$  позначатимемо  $Z^2(G, K^*)$ . Ця множина утворює абелеву групу відносно множення

$$\{\lambda_{a,b}\} \cdot \{\mu_{a,b}\} = \{\lambda_{a,b} \mu_{a,b}\}.$$

Нехай  $[\lambda]$  – клас еквівалентних систем факторів, що містить систему  $\{\lambda_{a,b}\}$ . Якщо множення класів визначити формулою  $[\lambda][\mu] = [\lambda\mu]$ , то множина  $H^2(G, K^*)$  всіх класів еквівалентних систем  $K$ -факторів групи  $G$  утворює абелеву групу. Відмітимо, що в нашому випадку  $G$  є групою тотожних операторів групи  $K^*$ . Цю групу називають  *$K$ -мультиплікатором групи  $G$* .

*Означення 2.30.* Схрещеним груповим кільцем  $\Lambda = (G, K, \lambda)$  групи  $G$  ( $|G| = d$ ) і кільця  $K$ , що відповідає системі факторів  $\{\lambda_{a,b}\}$ , називається алгебра рангу  $d$  над  $K$ , з системою базисних елементів  $u_a$  ( $a \in G$ ), що задовольняють умову

$$u_a u_b = \lambda_{a,b} u_{ab} \quad (a, b \in G).$$

## 2.4. Еквівалентні незвідні проєктивні зображення скінченних груп та їх степені

Нехай  $G$  є скінченною групою,  $K$  – кільце і  $K^*$  є мультиплікативною підгрупою ненульових елементів із  $K$ .

*Означення 2.31.* Зображення  $\alpha: G \times G \rightarrow K^*$  називається *2-коциклом* (чи коєфіцієнтом) на  $G$  якщо

- 1)  $\alpha(x, y)\alpha(xu, z) = \alpha(x, yz)\alpha(y, z)$  для всіх  $x, y, z \in G$ ;
- 2)  $\alpha(x, e) = \alpha(e, x) = 1$  для всіх  $x \in G$ , де  $e$  є одиничним елементом групи  $G$ .

Множина всіх можливих 2-коциклів на  $G$  є абелевою групою, якщо визначити операцію множення двох 2-коциклів як поточковий добуток. Отриману групу будемо позначати через  $Z^2(G; K^*)$ .

Множина всіх 2-коциклів  $\alpha$  задовольняє наступну рівність

$$\alpha(x, y) = \mu(xy)\mu(x)^{-1}\mu(y)^{-1}$$

для довільної функції  $\mu: G \rightarrow K^*$  такої, що  $\mu(e) = 1$  та утворює інваріантну підгрупу  $B^2(G; K^*)$  групи  $Z^2(G; K^*)$ . Таким чином ми можемо побудувати факторгрупу  $H^2(G; K^*) = Z^2(G; K^*)/B^2(G; K^*)$ .

Дамо означення проєктивного зображення у даних викладках.

*Означення 2.32.* Нехай  $GL(n, K)$  є групою всіх оборотних матриць розміру  $n \times n$  над  $K$ . *Проєктивним зображенням* групи  $G$  над  $K$  назвемо відображення  $\pi: G \rightarrow GL(n, K)$  таке, що  $\pi(x)\pi(y) = \alpha(x, y)\pi(x, y)$  для всіх  $x, y \in G$ , де  $\alpha$  є асоціативним 2-коциклом.

Натуральне число  $n$  називається *степенем*  $\pi$  і позначається через  $\deg \pi$ .

В теорії проєктивних зображень  $H^2(G; K^*)$  називають *мультиплікатором* групи  $G$ . Елементи  $H^2(G; K^*)$  називають *2-комологічними класами*.

*Означення 2.33.* Нехай  $\alpha \in 2$ -коциклом на  $G$  і нехай  $c \in 2$ -комологічним класом для  $\alpha$  в  $H^2(G; K^*)$ , тобто 2-коциклом Шура групи  $G$  над  $K$ . Ми скажемо, що проєктивне зображення  $\pi$  належить до  $c$ .

*Означення 2.34.* Два проєктивних зображення  $\pi_1$  і  $\pi_2 \in$  еквівалентними (чи проєктивно еквівалентними), якщо існує оборотна матриця  $U$  і відображення

$$\mu: G \rightarrow K^*,$$

таке, що

$$\mu(e) = 1$$

і

$$\pi_1(x) = \mu(x)U^{-1}\pi_2(x)U$$

для всіх  $x \in G$ .

Якщо  $\alpha \in$  асоціативним 2-коциклом для  $\pi_1$  і  $\beta \in$  асоціативним 2-коциклом для  $\pi_2$ , тоді проєктивна еквівалентність  $\pi_1$  та  $\pi_2$  означатиме, що

$$\mu(xy)\alpha(x, y) = \mu(x)\mu(y)\beta(x, y)$$

для всіх  $x, y \in G$ .

Якщо 2-коцикли задовольнятимуть останню рівність, то називатимемо їх *еквівалентними*.

*Означення 2.35.* Проєктивне зображення  $\pi$  групи  $G$  називається *звідним*, якщо воно проєктивно еквівалентне проєктивному зображенню  $\rho$  вигляду

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1(x) & * \\ 0 & \rho_2(x) \end{pmatrix}$$

для всіх  $x \in G$ , де  $\rho_1$  і  $\rho_2 \in$  проєктивними зображеннями групи  $G$ .

Проєктивне зображення, яке не є звідним назвемо *незвідним* проєктивним зображенням.

*Означення 2.36.* Нехай  $I_n \in$  одиничним елементом  $GL(n, K)$ . Множину

$$\ker \pi = \{x \in G; \pi(x) \in K^*I_n\}$$

назвемо *ядром*  $\pi$ . Якщо  $\ker \pi = \{e\}$ , то говорять, що проєктивне зображення  $\pi \in$  *точним*.

Надалі через  $G$  будемо позначати скінченну групу порядку  $n$  і через  $K$  – алгебраїчно замкнене поле довільної характеристики.

*Означення 2.37.* Групу  $G^*$  називатимемо *розширенням групи  $G$  за допомогою групи  $H$* , якщо існує гомоморфізм  $\varphi: G^* \rightarrow G$  з ядром  $H$ .

*Означення 2.38.* Нехай  $G^*$  є розширенням групи  $G$  з ядром  $N$  і припустимо, що  $N$  міститься в центрі  $G^*$ . Тоді  $G^*/N \cong G$ , і ми можемо знайти множину представників суміжних класів  $\{v_x, x \in G\}$  у взаємно однозначній відповідності з елементами групи  $G$  так, що для всіх  $x, y \in G$  матимемо

$$v_x v_y = v_{xy} a(x, y),$$

де  $a(x, y) \in N$ . Нехай  $\pi: G^* \rightarrow GL(n, K)$  є звичайним зображенням групи  $G^*$ , таке, що для всіх  $x, y \in G$ ,

$$\pi(a(x, y)) = \alpha(x, y)I_n,$$

для деякого елемента  $\alpha(x, y) \in K^*$ . Тоді відображення  $\pi: G \rightarrow GL(n, K)$ , задане за правилом  $x \mapsto \pi(v_x)$ , визначає проєктивне зображення групи  $G$  з асоціативним 2-коциклом  $\alpha$ . Ми скажемо, що проєктивне зображення групи  $G$ , яке побудоване таким чином з звичайного зображення групи  $G^*$  може бути *піднято* до  $G^*$ .

*Означення 2.39.* Скінченну групу  $G^*$  назвемо *групою зображення групи  $G$* , якщо  $G^*$  є розширенням групи  $G$  з ядром, що міститься в центрі  $G^*$  і кожне проєктивне зображення групи  $G$  може бути піднято до  $G^*$ .

**Теорема 2.20** ([96]). *Скінченна група  $G$  має не більше ніж скінченне число нееквівалентних проєктивних зображень над алгебраїчно замкненим полем  $K$ .*

*Означення 2.40.* Нехай  $\alpha$  є 2-коциклом на  $G$ . Елемент  $a \in G$  назвемо  $\alpha$ -регулярним якщо  $\alpha(x, a) = \alpha(a, x)$  для всіх  $x \in C_G(a)$ , де  $C_G(a)$  – централізатор елемента  $a$  в  $G$ ,  $C_G(a) = \{x \in G; xa = ax\}$ . Кожен спряжений клас елемента  $a$  є  $\alpha$ -регулярним. Такі спряжені класи називатимемо  $\alpha$ -регулярними класами.

Нехай  $G$  є скінченною абелевою групою порядку  $n^m$  породженою  $m$  елементами  $x_1, \dots, x_m$  порядку  $n$ , тобто  $G \cong Z_n \times \dots \times Z_n$  ( $m$  разів), де  $Z_n$  є циклічною групою порядку  $n$ . Нехай  $\pi$  – проєктивне зображення групи  $G$  з 2-коциклом  $\alpha$  над полем комплексних чисел  $\mathbb{C}$ . Нехай

$$\mu(i) = \prod_{j=1}^{n-1} \alpha(x_i^j, x_i), \quad 1 \leq i \leq m$$

i

$$\beta(i, j) = \alpha(x_i, x_j) \alpha^{-1}(x_j, x_i), \quad 1 \leq i < j \leq m.$$

Виберемо 2-коцикл  $\alpha$  таким чином, щоб  $\mu(i) = 1, i = 1, \dots, m$  і  $\beta(i, j), 1 \leq i < j \leq m$  є первісним коренем  $n$ -го степеня з одиниці.

**Теорема 2.21** ([97]). *Нехай  $G$  є скінченною абелевою групою порядку  $n^m$  породженою  $m$  елементами  $x_1, \dots, x_m$  і нехай  $\alpha \in Z$ -коциклом групи  $G$  над  $\mathbb{C}$ , таким, що  $\mu(i) = 1, i = 1, \dots, m$  і  $\beta(i, j) = \omega, 1 \leq i < j \leq m$ , де  $\omega$  є первісним коренем  $n$ -го степеня з одиниці. Тоді, якщо  $m = 2\mu$ , то  $G$  має тільки одне нееквівалентне незвідне проєктивне зображення степеня  $n^\mu$  і якщо  $m = 2\mu + 1$  є непарним, то  $G$  має  $\mu$  нееквівалентні незвідні проєктивні зображення степеня  $n^\mu$ .*

**Теорема 2.22** ([97]). *Нехай  $G$  є скінченною абелевою групою порядку  $n^m$  породженою  $m$  елементами  $x_1, \dots, x_m$ ,  $n = 2v$  і 2-коцикл  $\alpha$  задовольняє умовам  $\mu(i) = 1, i = 1, \dots, m$  і  $\beta(i, j) = -1, 1 \leq i < j \leq m$ . Тоді, якщо  $m = 2\mu$ , то  $G$  має  $v^m$  нееквівалентні незвідні проєктивні зображення степеня  $2^\mu$  і, якщо  $m = 2\mu + 1$  є непарним, то  $G$  має  $2v^m$  нееквівалентні незвідні проєктивні зображення степеня  $2^\mu$ .*

**Означення 2.41.** *Схрещеною груповою алгеброю скінченної групи  $G$  над довільним полем  $K$  ми назвемо асоціативну  $K$ -алгебру  $B$  з базисом  $\{u_x; x \in G\}$  таким, що  $u_x u_y = \alpha(x, y) u_{xy}$ , для довільних  $x, y \in G$ , де  $\alpha \in Z$ -коциклом над  $G$ . Покладемо  $B = (KG)_\alpha$  для точного визначення 2-коцикла  $\alpha$ . Якщо  $\alpha$  належить до  $s \in H^2(G; K^*)$ , тоді говорять, що  $(KG)_\alpha$  належить до  $s$ .*

**Твердження 2.23** ([41]). *Скінченновимірний  $(KG)_\alpha$ -модуль задає проєктивне зображення групи  $G$  з 2-коциклом  $\alpha$  і навпаки.*

**Означення 2.42.** *Нехай  $H$  є нормальною підгрупою групи  $G$ . Тоді  $(KH)_\alpha = \sum_{y \in H} K u_y$ , що є підалгеброю алгебри  $(KG)_\alpha$  і яка має 2-коцикл  $\alpha$  з обмеженням на  $H$ , буде схрещеною груповою алгеброю групи  $H$ . Нехай  $F$  є  $(KH)_\alpha$ -мо-*

дулем. Ми утворимо індукований модуль  $F^G = (KG)_\alpha \otimes_{(KH)_\alpha} F = \sum_{i=1}^s u_{x_i} \otimes F$ , де  $\{x_1, \dots, x_s\}$  – множина представників суміжних класів фактор-групи  $G$  за підгрупою  $H$ .

Нехай  $x \in G$ . Тоді, для кожного  $i = 1, \dots, s$  матимемо, що  $xx_i = x_j h$  для  $h \in H$  і для довільного  $1 \leq j \leq s$ , що залежить від  $i$ . Звідси  $x_j^{-1}xx_i \in H$ . Отже  $u_{x_j}^{-1}u_x u_{x_i} \in (KH)_\alpha$ . Таким чином  $(KG)_\alpha$  діє на  $F^G$  так

$$u_x(u_{x_i} \otimes l) = (u_{x_j} u_{x_j}^{-1} u_x u_{x_i}) \otimes l = u_{x_j} \otimes (u_{x_j}^{-1} u_x u_{x_i} l), l \in F.$$

З останньої рівності можемо знайти індуковане проєктивне зображення  $\pi^G$ , яке задане  $(KG)_\alpha$ -модулем  $F^G$ , з проєктивного зображення  $\pi$  що задане  $(KH)_\alpha$ -модулем  $F$ .

Нехай  $G$  є скінченною групою і  $K$  – алгебраїчно замкнене поле характеристики якого не ділить  $|G|$ .

**Теорема 2.24** ([41]). *Нехай  $\pi$  є незвідне проєктивне зображення групи  $G$ , що належить до  $c \in H^2(G; K^*)$ . Нехай  $N$  є такою абелевою нормальною підгрупою групи  $G$ , що  $\text{res}_N c = 1$ , де  $\text{res}_N c$  є обмежуюче зображення з  $H^2(G; K^*)$  на  $H^2(N; K^*)$ . Тоді степінь  $\pi$  ділить  $[G: N]$ .*

*Означення 2.43.* Вільною групою на множині  $S = \{x_i\}$  назвемо групу кожен елемент якої може бути представлений у вигляді скінченного добутку  $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ , де кожен  $x_i$  є елементом  $S$   $x_i \neq x_{i+1}$  для довільного  $i$  та  $a_i$ , що є ненульовим цілим числом.

## 2.5. Множина класів ізоморфізму

Нехай  $S$  є областю цілісності з характеристикою  $p$ , що не є полем  $G$  – скінченна група і  $(G, S, \lambda)$  – схрещена групова алгебра групи  $G$  над  $S$  з 2-коциклом  $\lambda \in Z^2(G, S^*)$ . Позначимо через  $\text{Ind}_m(G, S, \lambda)$  множину класів ізоморфізму нерозкладного  $(G, S, \lambda)$ -модуля  $S$ -рангу  $m$ . Нехай  $p \geq 2$  є просте число. П. М. Гудивок [98] і Г. Я. Януш [99, 100] показали, що якщо  $K$  є нескінченним полем характеристики  $p$  і  $G$  є нециклічною групою для якої  $|G/G'| \neq 4$ , тоді

$\text{Ind}_n(G, K, \lambda)$  є нескінченною множиною для кожного цілого  $n > 1$ . Нехай  $G$  є скінченною  $p$ -групою порядку  $|G| > 2$ ,  $K$  – комутативне локальне кільце характеристики  $p^n$ , і  $\text{Rad } K \neq 0$ . П. М. Гудивок і І. Б. Чухрай [101], [102] довели, що якщо  $\bar{K} = K/\text{Rad } K$  є нескінченне поле, або  $K$  є область цілісності, тоді  $\text{Ind}_n(KG)$  є нескінченною для кожного  $n > 1$ . В [103] у співавторстві з І. П. Сігетій ці ж автори отримали схожі результати у випадку, коли  $G$  є нециклічною  $p$ -групою,  $p \neq 2$  і  $K$  є нескінченним кільцем характеристики  $p$ , або  $\bar{K}$  є нескінченним полем. Аналогічна задача досліджувалась в [104] і [105] у випадку схрещених групових алгебр  $(G, K, \lambda)$ , де  $K$  є полем характеристики  $p$  чи комутативним локальним кільцем характеристики  $p$ .

## 2.6. Схрещені групові кільця скінченних груп і кільце цілих $p$ -адичних чисел з скінченним числом нерозкладних цілочислових зображень

Нехай  $F$  – скінченне розширення поля раціональних  $p$ -адичних чисел  $\mathbb{Q}_p$ ,  $T$  – поле інерції розширення  $F/\mathbb{Q}_p$ ,  $K$  – кільце всіх цілих величин,  $P = (\pi)$  – простий ідеал кільця  $K$ ,  $K^*$  – мультиплікативна група кільця  $K$ ,  $\mathbb{Z}_p$  – кільце цілих  $p$ -адичних чисел,  $G$  – скінченна група;  $\Lambda = (G, K, \lambda)$  – схрещене групове кільце групи  $G$  і кільця  $K$  при системі факторів  $\{\lambda_{a,b}\}$  ( $\lambda_{a,b} \in K^*$ ;  $a, b \in G$ ). Однією з основних задач теорії цілочислових зображень, є задача А про число  $n(\Omega)$  нерозкладних  $K$ -зображень  $K$ -порядків  $\Omega$  в напівпростих скінченновимірних  $F$ -алгебрах. Кільця  $\Omega$  з скінченним числом  $n(\Omega)$ , називають *кільцями скінченного типу*.

П. М. Гудивок [7] описав всі кільця  $(G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$  скінченного типу. Ю. А. Дрозд та А. В. Ройтер [66] і Г. Якобінський [67] розв'язали задачу А для  $K$ -порядків в комутативних алгебрах. Ю. А. Дрозд та В. В. Кириченко [106] і К. Роггенкамп [107] досліджували цю задачу для локальних (цілком примарних)  $R$ -порядків.

Л. Ф. Баранник та П. М. Гудивок [8] задачу  $\Lambda$  досліджували для кілець  $(G, K, \lambda)$ . Із [7] випливає, що дослідження достатньо провести для  $p$ -груп.

Нехай  $H$  – абелева  $p$ -група типу  $(p^{n_1}, \dots, p^{n_r})$ . Кільце  $(H, K, \lambda)$  володіє твірними елементами  $u_1, \dots, u_r$ , що задовольняють умовам

$$u_i^{p^{n_i}} = \alpha_i, \quad u_i u_j = \varepsilon_{ij} u_j u_i,$$

де  $\alpha_i, \varepsilon_{ij} \in K^*$ ,  $\alpha_i - 1 \in P$ ,  $\varepsilon_{ij}^{p^{m_{ij}}} = 1$ ;  $m_{ij} \leq \min\{n_i, n_j\}$  ( $i, j = 1, \dots, r$ ). Надалі будемо припускати виконання цих умов і позначати кільце  $(H, K, \lambda)$  через  $[H, K, \alpha_1, \dots, \alpha_r]$ .

**Теорема 2.25** ([8]). *Нехай  $G$  – абелева  $p$ -група,  $\Lambda = (G, K, \lambda)$  – комутативне кільце. Число  $n(\Lambda)$  скінченне тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов:*

- 1)  $G$  – циклічна група порядку  $|G| > 2$  (тобто  $\Lambda = [G, K, \alpha]$ ) і  $\alpha \not\equiv 1 \pmod{P^3}$ ;
- 2)  $G$  – циклічна група порядку  $p^2$  і  $F = T$ ;
- 3)  $G$  – циклічна група порядку 4 чи 5,  $[F:T] > 1$  і  $\alpha \not\equiv 1 \pmod{P^4}$ ;
- 4)  $|G| = p$ ,  $p > 3$  і  $[F:T] \leq 2$ ;
- 5)  $|G| = 3$  і  $[F:T] \leq 3$ ;
- 6)  $|G| = 3$ ,  $[F:T] > 3$  і  $\Lambda$  не є кільцем виду  $[G, K, \beta]$ , де  $\beta \equiv 1 \pmod{P^6}$ ;
- 7)  $|G| = 2$ ;
- 8)  $G$  – група типу  $(3,3)$ ,  $F = T$  і  $\Lambda$  неізоморфне кільцю  $KG$ ;
- 9)  $G$  – група типу  $(2^n, 2)$  (тобто  $\Lambda = [G, K, \alpha_1, \alpha_2]$ ),  $n > 1$  і  $\alpha_1 \not\equiv 1 \pmod{P^2}$ ;
- 10)  $G$  – група типу  $(2,2)$  і  $(\alpha_1, \alpha_2) \not\equiv (1,1) \pmod{P^2}$ .

**Теорема 2.26** ([8]). *Нехай  $G$  – скінченна  $p$ -група порядку  $|G| \neq 9$ ,  $\Lambda = (G, K, \lambda)$  – некомутативне кільце. Число  $n(\Lambda)$  скінченне тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

- 1)  $G$  – група типу  $(2^n, 2)$  (тобто  $\Lambda = [G, K, \alpha_1, \alpha_2]$ ),  $n > 1$  і  $\alpha_1 \not\equiv 1 \pmod{P^2}$ ;
- 2)  $G$  – група типу  $(2,2)$  і  $(\alpha_1, \alpha_2) \not\equiv (1,1) \pmod{P^2}$  при  $[F:T] > 1$ ;

3)  $G$  – група діедра порядку  $2^{n+1}$  ( $n > 1$ ),  $F = T$  і кільце  $\Lambda$  задається такими співвідношеннями:

$$u^{2^n} = -\gamma^{2^n-1}, \quad v^2 = \beta, \quad v^{-1}uv = \gamma u^{-1} \quad (\beta, \gamma \in K^*).$$

## 2.7. Дикі схрещені групові кільця

Нехай  $G$  – скінченна група,  $\mathbb{Z}_p$  – кільце цілих  $p$ -адичних чисел ( $p$  – просте непарне число),  $\mathbb{Z}_p^*$  – мультиплікативна група кільця  $\mathbb{Z}_p$ ,  $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$  – схрещене групове кільце групи  $G$  і кільця  $\mathbb{Z}_p$ , при системі факторів  $\{\lambda_{a,b}\}$  ( $\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_p^*$ ;  $a, b \in G$ ). В [62],[63],[64],[65],[7] розв’язана задача, про число  $n(\Lambda)$  нееквівалентних нерозкладних матричних  $\mathbb{Z}_p$ -зображень кільця  $\Lambda$ . Питання, коли задача описання нееквівалентних матричних  $\mathbb{Z}_p$ -зображень групи  $G$  є дикою вивчалось П. М. Гудивком в [3].

Результати отримані П. М. Гудивком [3], [69], [71], Е. Дітеріх [72] та Г. Якобінські [67] сформулюємо наступним чином.

**Теорема 2.27** ([3], [69], [71], [72], [67]). *Нехай  $G$  – скінченна  $p$ -група ( $p > 2$ ),  $F_p$  – скінченне розширення поля  $p$ -адичних чисел  $\mathbb{Q}_p$ ,  $K_p$  – кільце цілих величин поля  $F_p$ ,  $T_p$  – поле інерції поля  $F_p$  і  $K_p G$  – групове кільце групи  $G$  над кільцем  $K_p$ . Кільце  $K_p G$  не являється диким тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов:*

- 1)  $G$  – циклічна група порядку  $p^r$  ( $r \leq 2$ ) і  $F_p = T_p$ ;
- 2)  $G$  – циклічна група порядку  $p$  і  $(F_p : T_p) \leq 2$ ;
- 3)  $G$  – група порядку 3 і  $(F_3 : T_3) < 5$ .

**Теорема 2.28** ([108]). *Нехай  $K$  – повне дискретно нормоване кільце,  $V$  – максимальний ідеал кільця  $K$ ,  $F = K/V$  – досконале поле,  $S$  – поле лишків кільця  $K$  і  $\Lambda$  –  $K$ -порядок в сепарабельній скінченновимірній  $S$ -алгебрі  $A$ .  $K$ -порядок  $\Lambda$  є диким, якщо існує нерозкладний проєктивний  $\Lambda$ -модуль  $M$ , який є вільним  $K$ -модулем скінченного рангу, причому композиційна довжина  $A$ -модуля  $S \otimes_K M$  більше 4.*

**Теорема 2.29** ([109]). Нехай  $G$  – скінченна абелева група типу  $(p, p)$  ( $p > 3$ ). Кільце  $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$  є диким.

**Теорема 2.30** ([109]). Нехай  $G$  – скінченна абелева 3-група і  $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_3, \lambda)$ . Кільце  $\Lambda$  не є диким тоді і тільки тоді, коли  $G$  – група типу  $(3, 3)$  і алгебра  $\tilde{\Lambda} = \mathbb{Q}_3 \otimes_{\mathbb{Z}_3} \Lambda$  неізоморфна груповій алгебрі  $\mathbb{Q}_3 G$ .

**Теорема 2.31** ([109]). Нехай  $T_p$  – скінченне нерозгалужене розширення поля  $\mathbb{Q}_p$ ,  $R_p$  – кільце цілих величин поля  $T_p$ ,  $\Lambda$  –  $\mathbb{Z}_p$ -порядок в скінченновимірній сепарабельній  $\mathbb{Q}_p$ -алгебрі  $A$  і  $\Lambda' = R_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$ . Порядок  $\Lambda$  є диким тоді і тільки тоді, коли  $\Lambda'$  – дикий порядок.

**Теорема 2.32** ([109]). Нехай  $G$  – неабелева група порядку 27. Тоді кільце  $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_3, \lambda)$  є диким.

## 2.8. Висновки до розділу 2

У другому розділі, наведено допоміжні поняття та основні результати теорії матричних зображень груп та схрещених групових кілець, які потрібні у подальшій роботі.

У підрозділах 2.1 та 2.3 наводяться основні означення теорії матричних зображень скінченних груп та теорії схрещених групових кілець відповідно. У підрозділі 2.2 ми слідували роботам П. М. Гудивка [3],[37],[69],[70]-[73], В. І. Погоріляк [85]-[86], П. М. Гудивка та І. В. Шапочки [84], у підрозділі 2.4 статті А. О. Моріс [97] та Г. Н. Енжі [41], у підрозділі 2.5 роботам Г. Я. Януш та П. М. Гудивка [24], у підрозділах 2.6 та 2.7 Л. Ф. Баранника, П. М. Гудивка [8] та П. М. Гудивка [109] відповідно.

Ключовими поняттями цього розділу є поняття матричного зображення, нерозкладного матричного зображення, дикої групи, проективного зображення, схрещеного групового кільця.

## РОЗДІЛ 3

### Еквівалентність матриць над комутативними кільцями за модулем ідеалів

Задача про еквівалентність матриць над комутативними кільцями пов'язана із задачею про матричні зображення груп над кільцями як ідейно, так і формально (в деяких випадках). У цьому розділі, досліджується зв'язок між дією задачі про опис матриць над областю цілісності з точністю до еквівалентності за модулем ідеалу, і властивостями простих елементів даної області.

#### 3.1. Означення

Нехай  $K$  – комутативне кільце і  $J \neq K$  є його ідеалом. Для матриць  $P$  і  $Q$  над  $K$ , позначення  $P \equiv Q \pmod{J}$  означає, що  $P - Q$  є матрицею з елементами з  $J$ .

**Означення 3.1.** Будемо говорити, що дві матриці  $A$  та  $B$  розміру  $m \times n$  над  $K$  є еквівалентними за модулем  $J$ , якщо для деякої оборотної матриці  $Y$  розміру  $m \times m$  і оборотної матриці  $X$  розміру  $n \times n$

$$B \equiv Y^{-1}AX \pmod{J}.$$

Аналогічно, будемо говорити, що матриці  $A$  та  $B$  розміру  $n \times n$  над  $K$  є подібними за модулем  $J$ , якщо для деякої оборотної матриці  $X$  розміру  $n \times n$

$$B \equiv X^{-1}AX \pmod{J}.$$

Якщо  $J = 0$ , то ми отримаємо класичні означення еквівалентності і подібності матриць.

Ці поняття можуть бути легко узагальненими для будь-якого числа матриць і, зокрема, у випадку подібності, для матричних зображень  $K$ -алгебр.

**Означення 3.2.** Нехай  $I$  та  $J$  є ідеалами кільця  $K$ , причому  $I$  не дорівнює  $K$ , а  $J$  максимальний, і нехай  $\Sigma = K\langle x, y \rangle$  позначає вільну асоціативну  $K$ -алгебру, породжену елементами  $x, y$ . Матрицю  $M$  розміру  $m \times n$  над  $\Sigma$  назвемо  $(I, J)$ -досконалою, якщо з еквівалентності матриць  $M \otimes T$  і  $M \otimes T'$  над  $K$  за модулем  $I$ , де  $T$  і  $T'$  є матричними зображеннями  $\Sigma$  над  $K$ , випливає, що  $T$  і  $T'$  є подібними за модулем  $J$ . Ми скажемо, що задача про опис матричних зображень над  $K$  відносно еквівалентності за модулем  $I$  є *дикою за модулем  $J$* , чи *дикою над полем  $K/J$* , якщо існує  $(I, J)$ -досконале зображення над  $\Sigma$ .

Вказана в означенні дикість реально означає, що існує блокова матриця  $T(A, B)$  над кільцем  $K$ , кожний блок якої є некомутативним поліномом від квадратних матриць  $A$  та  $B$  однакового розміру і така, що з еквівалентності матриць  $T(A, B)$  і  $T(A', B')$  за модулем  $I$  випливає подібність пар матриць  $(A, B)$  і  $(A', B')$  за модулем  $J$ .

Приведемо один приклад, що стосується випадку звичайної еквівалентності (тобто еквівалентності за модулем нульового ідеалу).

Нехай  $K$  – нетерове факторіальне кільце, яке не є кільцем головних ідеалів (наприклад, кільце формальних степеневих рядів від двох змінних над довільним полем). Покажемо, що задача про опис матриць над  $K$  з точністю до еквівалентності є дикою.

Нехай  $V_1$  – неголовний ідеал кільця  $K$ ;  $u_1, \dots, u_r$  – мінімальна система твірних ідеалу  $V_1$  і  $u_1 = ud$ ,  $u_2 = vd$ , де  $u$  і  $v$  – взаємно прості елементи кільця  $K$  ( $d \in K$ ). Позначимо через  $V$  максимальний ідеал кільця  $K$ , що містить елементи  $u$  і  $v$ . Очевидно,  $V \neq K$ .

Покладемо

$$T(A, B) = \begin{pmatrix} uvE & u^2A & 0 \\ v^2E & uvE & u^2B \\ 0 & v^2E & uvE \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

де  $E$  – одинична матриця розміру  $n \times n$ ;  $A$  і  $B$  – довільні матриці розміру  $n \times n$  над кільцем  $K$  ( $n$  – довільне натуральне число).

Нехай матриці  $T(A, B)$  і  $T(A', B')$  еквівалентні над кільцем  $K$ , тобто існують такі оборотні над кільцем  $K$  матриці  $C$  і  $D$ , що

$$T(A, B)C = DT(A', B'). \quad (3.2)$$

Запишемо матриці  $C$  і  $D$  у вигляді

$$C = \|C_{ij}\|, \quad D = \|D_{ij}\|,$$

де  $C_{ij}$  і  $D_{ij}$  – матриці розміру  $n \times n$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

Тоді із (3.1) і (3.2) дістанемо

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} uvE & u^2A & 0 \\ v^2E & uvE & u^2B \\ 0 & v^2E & uvE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} uvE & u^2A' & 0 \\ v^2E & uvE & u^2B' \\ 0 & v^2E & uvE \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} uvC_{11} + u^2AC_{21} & uvC_{12} + u^2AC_{22} & uvC_{13} + u^2AC_{23} \\ v^2C_{11} + uvC_{21} + u^2BC_{31} & v^2C_{12} + uvC_{22} + u^2BC_{32} & v^2C_{13} + uvC_{23} + u^2BC_{33} \\ v^2C_{21} + uvC_{31} & v^2C_{22} + uvC_{32} & v^2C_{23} + uvC_{33} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} uvD_{11} + v^2D_{12} & u^2D_{11}A' + uvD_{12} + v^2D_{13} & u^2D_{12}B' + uvD_{13} \\ uvD_{21} + v^2D_{22} & u^2D_{21}A' + uvD_{22} + v^2D_{23} & u^2D_{22}B' + uvD_{23} \\ uvD_{31} + v^2D_{32} & u^2D_{31}A' + uvD_{32} + v^2D_{33} & u^2D_{32}B' + uvD_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Прирівнюючи в останній матричній рівності елементи на місцях (1,1) (під місцем  $(i, j)$  матриці ми розуміємо елемент, що знаходиться на перетині  $i$ -го рядка та  $j$ -го стовпця), отримаємо

$$uvC_{11} + u^2AC_{21} = uvD_{11} + v^2D_{12}. \quad (3.3)$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,2), отримаємо

$$uvC_{12} + u^2AC_{22} = u^2D_{11}A' + uvD_{12} + v^2D_{13}. \quad (3.4)$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,3), отримаємо

$$uvC_{13} + u^2AC_{23} = u^2D_{12}B' + uvD_{13}. \quad (3.5)$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,1), отримаємо

$$v^2C_{11} + uvC_{21} + u^2BC_{31} = uvD_{21} + v^2D_{22}. \quad (3.6)$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,2), отримаємо

$$v^2C_{12} + uvC_{22} + u^2BC_{32} = u^2D_{21}A' + uvD_{22} + v^2D_{23}. \quad (3.7)$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,3), отримаємо

$$v^2C_{13} + uvC_{23} + u^2BC_{33} = u^2D_{22}B' + uvD_{23}. \quad (3.8)$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,1), отримаємо

$$v^2C_{21} + uvC_{31} = uvD_{31} + v^2D_{32}. \quad (3.9)$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,2), отримаємо

$$v^2C_{22} + uvC_{32} = u^2D_{31}A' + uvD_{32} + v^2D_{33}. \quad (3.10)$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,3), отримаємо

$$v^2C_{23} + uvC_{33} = u^2D_{32}B' + uvD_{33}. \quad (3.11)$$

З (3.3) одержимо наступні конгруенції:

$$D_{12} \equiv 0 \pmod{uK} \quad (3.12)$$

i

$$C_{11} \equiv D_{11} \pmod{V}. \quad (3.13)$$

З (3.4) одержимо наступні конгруенції:

$$D_{13} \equiv 0 \pmod{uK} \quad (3.14)$$

i

$$AC_{22} \equiv D_{11}A' \pmod{vK}. \quad (3.15)$$

З (3.5) одержимо наступну конгруенцію:

$$D_{13} \equiv C_{13} \pmod{uK}. \quad (3.16)$$

З (3.6) одержимо наступну конгруенцію:

$$C_{11} \equiv D_{22} \pmod{uK}. \quad (3.17)$$

З (3.7) одержимо наступні конгруенції:

$$C_{12} \equiv 0 \pmod{uK} \quad (3.18)$$

i

$$C_{22} \equiv D_{22} \pmod{V}. \quad (3.19)$$

З (3.8) одержимо наступні конгруенції:

$$C_{13} \equiv 0 \pmod{uK}, \quad (3.20)$$

$$C_{23} \equiv D_{23} \pmod{V} \quad (3.21)$$

і

$$BC_{33} \equiv D_{22}B' \pmod{vK}. \quad (3.22)$$

З (3.9) одержимо наступні конгруенції:

$$C_{21} \equiv D_{32} \pmod{uK} \quad (3.23)$$

і

$$C_{31} \equiv D_{31} \pmod{vK}. \quad (3.24)$$

З (3.9) одержимо наступні конгруенції:

$$C_{22} \equiv D_{33} \pmod{uK} \quad (3.25)$$

і

$$C_{32} \equiv D_{32} \pmod{V}. \quad (3.26)$$

З (3.11) одержимо наступні конгруенції:

$$C_{23} \equiv 0 \pmod{uK} \quad (3.27)$$

і

$$C_{33} \equiv D_{33} \pmod{V}. \quad (3.28)$$

З (3.12)-(3.28) маємо

$$D_{12} \equiv D_{13} \equiv D_{23} \equiv C_{12} \equiv C_{13} \equiv C_{23} \pmod{V},$$

$$D_{ii} \equiv C_{ii} \pmod{V} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$AC_{11} \equiv C_{11}A' \pmod{V}, \quad (3.29)$$

$$BC_{11} \equiv C_{11}B' \pmod{V}. \quad (3.30)$$

Звідси маємо

$$C \equiv \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{11} \end{pmatrix} \pmod{V}.$$

Отже, матриця  $C_{11}$  оборотна за модулем ідеалу  $V$ . Звідси, з (3.29) і (3.30) маємо, що задача про опис, з точністю до еквівалентності, довільних квадратних матриць над кільцем  $K$  містить задачу про пару матриць над полем  $K/V$ .

□

Це твердження приведено в статті [110].

### 3.2. Випадок областей цілісності

Через  $K$  позначатимемо, якщо не сказано інше, область цілісності. Її не-одиночний елемент  $c$  називається *простим елементом*, якщо з  $c|ab$  для деяких  $a, b \in K$  випливає, що  $c|a$  або  $c|b$ . Під *різними простими* елементами кільця  $K$  ми розуміємо попарно неасоційовані. Це означає, якщо  $a$  і  $b$  неасоційовані елементи кільця  $K$ , то  $a \neq \theta b$ , де  $\theta \in K^*$  ( $K^*$  – мультиплікативна група кільця  $K$ ).

Через  $J$  позначатимемо (як і раніше) максимальний ідеал кільця  $K$ .

**Лема 3.1.** *Нехай  $p, q \in K$  є різними простими елементами з  $J$  і виконується рівність*

$$p^2a + q^2b + pqc = 0 \quad (3.31)$$

для деяких  $a, b, c \in K$ . Тоді  $a, b, c \in J$ .

**Доведення.** З (3.31) випливає, що

$$q(qb + pc) = -p^2a$$

і

$$p(pa + qc) = -q^2b,$$

звідки відповідно

$$q|a, p|b.$$

Тоді

$$a = qa' \in J, b = pb' \in J,$$

для деяких  $a', b' \in K$ .

Таким чином, рівність (3.31) є еквівалентною рівності

$$pq(pa' + qb' + c) = 0.$$

Звідси

$$pa' + qb' + c = 0$$

і, як наслідок,  $c \in J$ .

□

**Теорема 3.2.** *Нехай  $K$  є областю цілісності і  $J$  містить два різні прості елементи. Тоді задача про опис матриць над  $K$  відносно еквівалентності над  $K$  є дикою за модулем  $J$ .*

**Доведення.** Природно можна визначити матричні зображення  $T$  для  $\Sigma = K\langle x, y \rangle$  над  $K$  з впорядкованою парою матриць  $T(x)$ ,  $T(y)$ ; якщо ці матриці мають розміри  $n \times n$ , то будемо говорити, що  $T$  має  $K$ -розмірність  $n$ . Тоді, для матриці  $M$  над  $K\langle x, y \rangle$  (дивись вище означення дикості), матриця  $M \otimes T$  з  $T$ , що має  $K$ -розмірність  $m$ , отримується з матриці  $M$  за допомогою заміни  $x$  та  $y$  на матриці  $T(x)$  і  $T(y)$  відповідно, і  $a \in K$  на діагональну матрицю  $aE_n$ , де  $E_n$  є одиничною матрицею розміру  $n \times n$ .

Розглянемо наступну матрицю  $M$  (розміру  $1 \times 1$ ) над  $\Sigma$ :

$$M = p^2x + q^2y + pq.$$

Ми доводимо, що матриця  $M \in (0, J)$ -досконалою.

Нехай  $T = (A, B)$  і  $T' = (A', B')$  є матричними зображеннями  $\Sigma$  над  $K$ , що мають  $K$ -розмірність  $n$ . Тоді

$$M \otimes T = p^2A + q^2B + pqE_n,$$

$$M \otimes T' = p^2A' + q^2B' + pqE_n.$$

Припустимо, що матриці  $M \otimes T$  і  $M \otimes T'$  (над  $K$ ) є еквівалентними, тобто існують оборотні матриці  $X$  та  $Y$  розміру  $n \times n$  над  $K$  такі, що

$$(M \otimes T)X = Y(M \otimes T').$$

Таким чином маємо рівність

$$(p^2A + q^2B + pqE_n)X = Y(p^2A' + q^2B' + pqE_n),$$

що еквівалентна рівності

$$p^2(AX - YA') + q^2(BX - YB') + pq(X - Y) = 0.$$

Застосовуючи лему 3.1 до всіх рівностей останньої матричної рівності, ми отримаємо, що

$$AX - YA' \equiv 0(\text{mod } J),$$

$$BX - YB' \equiv 0(\text{mod } J),$$

$$X - Y \equiv 0(\text{mod } J),$$

звідки

$$AX \equiv YA'(\text{mod } J)$$

та

$$BX \equiv YB'(\text{mod } J),$$

що і необхідно було довести.

□

**Лема 3.3.** Нехай  $a, b, c \in K$  такі, що

$$t_1^2a + t_2^2b + t_1t_2c \equiv 0(\text{mod } t_1t_2tK). \quad (3.32)$$

Тоді  $a, b, c \in J$ .

**Доведення.** Конгруенція (3.32) означає, що існує елемент  $u \in K$  такий, що

$$t_1^2a + t_2^2b + t_1t_2c = t_1t_2tu. \quad (3.33)$$

З (3.33) маємо

$$t_2(t_2b + t_1c - t_1tu) = -t_1^2a, \quad (3.34)$$

звідки

$$t_2|a$$

і тому  $a \in J$ . Нехай  $a = t_2 a'$ . Далі з (3.34) (після скорочення на  $t_2$  і елементарних перетворень) отримаємо, що

$$t_1(c + t_1 a' - tu) = -t_2 b,$$

звідки

$$t_1|b$$

і

$$t_2|(c + t_1 a' - tu),$$

звідки  $b, c \in J$ .

□

**Теорема 3.4.** *Нехай  $K$  є областю цілісності,  $t_1, t_2 \in J$  є різними простими елементами і  $t \in J$  ненульовий елемент. Тоді задача про опис матриць над  $K$  відносно еквівалентності за модулем  $t_1 t_2 t K$  є дикою за модулем  $J$ .*

**Доведення.** Розглянемо наступну матрицю  $M$  (розміру  $1 \times 1$ ) над  $\Sigma$ :

$$M = t_1^2 x + t_2^2 y + t_1 t_2.$$

Ми доведемо, що матриця  $M \in (t_1 t_2 t K, J)$ -досконалою.

Нехай  $T = (A, B)$  і  $T' = (A', B')$  є матричними зображеннями  $\Sigma$  над  $K$ , що мають  $K$ -розмірність  $n$ . Тоді

$$M \otimes T = t_1^2 A + t_2^2 B + t_1 t_2 E_n,$$

$$M \otimes T' = t_1^2 A' + t_2^2 B' + t_1 t_2 E_n.$$

Припустимо, що матриці  $M \otimes T$  і  $M \otimes T'$  (над  $K$ ) є еквівалентними за модулем  $t_1 t_2 tK$ , тобто існують оборотні матриці  $X$  та  $Y$  розміру  $n \times n$  над  $K$  такі, що

$$(M \otimes T)X \equiv Y(M \otimes T') \pmod{t_1 t_2 tK}.$$

Таким чином отримуємо конгруенцію

$$(t_1^2 A + t_2^2 B + t_1 t_2 E_n)X \equiv Y(t_1^2 A' + t_2^2 B' + t_1 t_2 E_n) \pmod{t_1 t_2 tK},$$

чи еквівалентну їй

$$t_1^2 (AX - YA') + t_2^2 (BX - YB') + t_1 t_2 (X - Y) \equiv 0 \pmod{t_1 t_2 tK}.$$

Застосовуючи лему 3.3 до всіх по елементних конгруенцій останньої матричної конгруенції, ми отримуємо (як у доведенні теореми 3.2), що

$$AX \equiv XA' \pmod{J}$$

і

$$BX \equiv XB' \pmod{J},$$

що і потрібно було довести.

□

**Лема 3.5.** Нехай  $a, b, c \in K$  такі, що

$$t_1^2 a + t_2^2 b + t_1 t_2 c \equiv 0 \pmod{t_1 t_2 tK}. \quad (3.35)$$

Тоді  $a, b, c \in J$ .

**Доведення.** Конгруенція (3.35) означає, що існує  $u \in K$  таке, що

$$t_1^2 a + t_2^2 b + t_1 t_2 c = t_1^2 tu. \quad (3.36)$$

З (3.36) отримуємо

$$t_1(t_1 a + t_2 c - t_1 tu) = -t_2^2 b, \quad (3.37)$$

звідки

$$t_1 | b$$

і таким чином  $b \in J$ . Нехай  $b = t_1 b'$ . Тоді з (3.37) отримаємо (після скорочення на  $t_1$  і елементарних перетворень), що

$$t_1(a - tu) = -t_2(c + t_2 b'),$$

звідки

$$t_2 | (a - tu)$$

і

$$t_1 | (c + t_2 b'),$$

звідки  $a, c \in J$ .

□

**Теорема 3.6.** *Нехай  $K$  є областю цілісності,  $t_1 \in J$  є простим елементом і  $t \in J$  ненульовий елемент. Якщо  $J$  містить простий елемент  $t_2$  відмінний від  $t_1$ , тоді задача про опис матриць над  $K$  відносно еквівалентності за модулем  $t_1^2 t K$  є дикою за модулем  $J$ .*

**Доведення.** Введемо в розгляд  $(t_1^2 t K, J)$ -досконалу матрицю  $M$  над  $\Sigma$  аналогічну за формою матриці в доведенні теореми 3.4 з простим елементом  $t_2$  відмінним від  $t_1$  (він існує за умовою теореми). Тоді доведення теореми 3.6 аналогічне доведенню теореми 3.4, тільки потрібно використати лему 3.5 замість леми 3.3.

□

З теорем 3.4 і 3.6 випливає наступний наслідок.

**Наслідок 3.7.** *Нехай  $K$  є областю цілісності, і  $t_1, t_2, t_3 \in J$  є простими елементами, що не є рівними. Тоді, задача про опис матриць над  $K$  відносно еквівалентності за модулем  $t_1 t_2 t_3 K$  є дикою за модулем  $J$ .*

### 3.3. Випадок нетерових кілець

Деталізуємо отримані в попередньому підрозділі результати на випадок, коли кільце  $K$  є нетеровим.

У випадку, який розглядався в попередньому підрозділі, область  $K$  могла і не мати максимальних ідеалів. До таких кілець доведені теореми не можуть бути застосовані. Якщо ж область  $K$  є нетеровою, то вона має хоча б один максимальний ідеал. У цьому випадку будемо говорити, що задача про опис матриць над  $K$  з точністю до еквівалентності за модулем ідеалу  $I$  є дикою над  $K$ , або просто дикою, якщо вона є дикою за модулем деякого максимального ідеалу. Тоді з теорем 3.2, 3.4, 3.6 і наслідку 3.7 маємо відповідно наступні твердження.

**Теорема 3.8.** *Нехай  $K$  є нетеровою областю і  $p, q$  є такі його різні прості елементи, що*

$$pK + qK \neq K.$$

*Тоді задача про опис відносно еквівалентності матриць є дикою над  $K$ .*

**Теорема 3.9.** *Нехай  $K$  є нетеровою областю і  $t_1, t_2, t$  є його ненульові елементи такі, що*

$$t_1K + t_2K + tK \neq K.$$

*Якщо  $t_1$  і  $t_2$  є різні прості елементи, тоді матрична задача про опис над  $K$  відносно еквівалентності за модулем  $t_1t_2tK$  є дикою.*

**Теорема 3.10.** *Нехай  $K$  є нетеровою областю і  $t_1, t_2, t$  є його такими ненульовими елементами, що*

$$t_1K + t_2K + tK \neq K.$$

*Якщо  $t_1$  і  $t_2$  є різними простими елементами, тоді матрична задача про опис над  $K$  відносно еквівалентності за модулем  $t_1^2tK$  є дикою.*

**Наслідок 3.11.** *Нехай  $K$  є нетеровою областю,  $t_1, t_2, t_3$  є такими її простими елементами, які не всі рівні і*

$$t_1K + t_2K + t_3K \neq K.$$

*Тоді матрична задача про опис над  $K$  відносно еквівалентності за модулем  $t_1t_2t_3K$  є дикою.*

### 3.4. Висновки до розділу 3

У розділі досліджено, зв'язок між дикістю матричної задачі, про опис матриць над областями цілісності з точністю до еквівалентності за модулем ідеалу і властивостями множини простих елементів даної області.

Доведено

- 1) дикість за модулем максимального ідеалу задачі про опис, з точністю до еквівалентності за модулем ідеалу, матриць над областю цілісності у випадку наявності простих елементів з вказаними властивостями;
- 2) дикість задачі про опис, з точністю до еквівалентності за модулем ідеалу, матриць над нетеровою областю цілісності у випадку наявності простих елементів з вказаними властивостями.

Основні результати цього розділу опубліковано в роботах [9] і [10].

## РОЗДІЛ 4

### Матричні зображення скінченних груп над локальними факторіальними кільцями

#### 4.1. Постановка задачі

Як і у випадку матричних зображень скінченних груп над полем, будова матричних зображень груп над кільцями також залежить від характеристики кільця. Але, у випадку полів, можуть бути лише дві можливості: характеристика поля взаємно проста, чи не взаємно проста з порядком групи. Для кілець таких можливостей досить багато. Це і різні конкретні кільця, це і абстрактні класи кілець з тими чи іншими конкретними властивостями, і в кожному з цих випадків важливим фактором є характеристика самих кілець, і характеристики їх фактор-кілець.

Якщо говорити про матричні зображення над локальними кільцями (а саме такі зображення розглядаються в цьому розділі), то найважливішими випадками є такі:

- 1)  $G$  –  $p$ -група, а  $K$  – кільце характеристики  $0$ ,  $K/\text{Rad } K$  – кільце характеристики  $0$  (не модулярний випадок);
- 2)  $G$  –  $p$ -група, а  $K$  – кільце характеристики  $p^s$  ( $s > 0$ ) (модулярний випадок);
- 3)  $G$  –  $p$ -група, а  $K$  – кільце характеристики  $0$ ,  $K/\text{Rad } K$  – кільце характеристики  $p^s$  ( $s > 0$ ) (модулярний випадок).

Зауважимо, що чим меншим є порядок групи чи число  $s$ , тим складніше, при однакових обмеженнях на кільце, довести дикість відповідної задачі (якщо вона є такою).

Випадки 1) та 2) вивчені достатньо добре.

Якщо говорити про випадок 3), то найскладнішою і найменше вивченою задачею є така, для якої група  $G$  має порядок 2 і  $s = 1$ . Відповідні задачі для інших груп вивчені достатньо добре.

Приведемо деякі результати для  $p = 2$  (а саме цей випадок вивчається в цьому розділі дисертації).

**Теорема 4.1** [39]. Нехай  $G$  – скінченна нециклічна 2-група,  $K$  – нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2 і  $W$  – максимальний ідеал кільця  $K$ . Група  $G$  не є дикою над кільцем  $K$  тоді і тільки тоді, коли  $G$  – група порядку 4 і  $W = 2K$ .

**Теорема 4.2** [39]. Нехай  $G$  – циклічна 2-група порядку  $|G| > 4$ ,  $K$  – нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2 і  $W$  – максимальний ідеал кільця  $K$ . Група  $G$  не є дикою над кільцем  $K$  тоді і тільки тоді, коли  $|G| = 8$  і  $W = 2K$ .

**Теорема 4.3** [111]. Нехай  $H = \langle a \rangle$  – циклічна група порядку 4 і  $K$  – нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2 і  $K$  не є дискретно нормованим кільцем. Тоді група  $H$  є дикою над кільцем  $K$ , якщо виконується одна з умов:

- 1) 2 – не є простим елементом кільця  $K$ ;
- 2) фактор-кільце  $K/2K$  не є кільцем головних ідеалів.

У цьому розділі розглядаються матричні зображення циклічної групи порядку 2 над кільцем  $K$  характеристики 0, таким, що  $K/\text{Rad } K$  – кільце характеристики 2. Приводяться також деякі наслідки із отриманих результатів для будь-яких 2-груп.

## 4.2. Випадок, коли 2 – добуток двох різних простих елементів

Розглянемо задачу про матричні зображення циклічної групи порядку 2 над кільцем  $K$  у випадку, коли елемент 2 кільця  $K$  є добутком двох простих елементів.

Спочатку доведемо деякі леми.

**Лема 4.4.** *Нехай  $K$  – нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2,  $2 = t_1 t_2$ , де  $t_1, t_2$  – різні прості елементи кільця  $K$ ,  $t_1 \neq \theta t_2$  ( $\theta \in K^*$ ), де  $K^*$  – мультиплікативна група кільця  $K$ . Нехай  $K/t_1 K$  не є областю головних ідеалів. Тоді існують такі елементи  $\bar{u}, \bar{v}$  із кільця  $\bar{K}_1 = K/t_1 K$ , що  $\bar{V} = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$  не буде головним ідеалом кільця  $\bar{K}_1$ . Нехай  $\bar{u} = u + t_1 K$ ,  $\bar{v} = v + t_1 K$ , ( $u, v \in K$ ). Тоді  $(u, t_1) = 1$ ,  $(v, t_1) = 1$ .*

**Доведення.** Розглянемо  $u = u_1 d$ ,  $v = v_1 d$ , де  $(u_1, v_1) = 1$  ( $u_1, v_1, d \in K$ ). Очевидно, ідеал  $V_1 = \langle u_1, v_1 \rangle$  не є головним в  $K$ , бо якщо

$$V_1 = Kt \quad (t \in K^*),$$

то

$$u_1 = \alpha_1 t, \quad v_1 = \beta_1 t \quad (\alpha_1, \beta_1 \in K),$$

тобто  $u_1$  і  $v_1$  не є взаємно простими.

Покажемо, що ідеал  $V_1$  не співпадає з усім кільцем.

Нехай  $V_1 = K$ ,  $1 = \alpha_1 u_1 + \beta_1 v_1$  ( $\alpha_1, \beta_1 \in K$ ).

Тоді  $d = \alpha_1 d u_1 + \beta_1 d v_1 = \alpha_1 u + \beta_1 v \in V = Ku + Kv$ , звідки  $V = Kd$ .

Позначимо

$$u = \lambda_1 d, \quad v = \lambda_2 d \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in K).$$

Тоді маємо

$$\bar{u} = \lambda_1 d + t_1 K, \quad \bar{v} = \lambda_2 d + t_1 K,$$

тобто

$$\bar{u} = (\lambda_1 + t_1K)(d + t_1K),$$

$$\bar{v} = (\lambda_2 + t_1K)(d + t_1K),$$

де  $\bar{d} = d + t_1K \in \bar{V}$ .

Значить,  $\bar{V}$  – головний ідеал. Отримали протиріччя.

Отже,  $V_1 \neq K$  і  $V_1 \neq Kt$ , тобто  $V_1$  не є головним ідеалом.

Значить  $(u, t_1) = 1$ ,  $(v, t_1) = 1$ .

□

**Лема 4.5.** *Нехай  $K$  – локальне кільце,  $t_1$  – простий елемент кільця  $K$ . Тоді  $K/t_1K$  – локальне кільце.*

**Доведення.** Розглянемо  $\bar{v} = v + t_1K$  ( $v \in K$ ). Нехай  $\bar{v}$  не є оборотним елементом і  $\bar{1} - \bar{v}$  ( $\bar{1} = 1 + t_1K$ ) не є оборотним елементом  $\bar{K}_1$ .

Тоді

$$1 - v + t_1K = \bar{w} \notin (K/t_1K)^*,$$

і

$$v + t_1x \in K,$$

де  $(K/t_1K)^*$  – мультиплікативна група фактор-кільця  $K/t_1K$ ,  $x \in K$ .

Якщо  $v \in K^*$ , то  $v + t_1x \in K^*$ . Отже,  $\bar{v} \in (K/t_1K)^*$ .

Нехай

$$v \in \text{Rad } K, \text{ то } 1 - v \in K^*.$$

Тоді

$$1 - v + t_1K \in (K/t_1K)^*.$$

Отримали протиріччя. Отже,  $K/t_1K$  – локальне кільце.

□

**Твердження 4.6.** *Нехай  $H = \langle a \mid a^2 = e \rangle$ ,  $K$  – нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2,  $2 = t_1t_2$ , де  $t_1, t_2$  – різні прості елементи кільця  $K$ , ( $t_1 \neq \theta t_2$ ,  $\theta \in K^*$ ) і  $K/t_1K$  не є областю головних ідеалів. Тоді задача про опис матричних зображень групи  $H$  над кільцем  $K$  є дикою.*

**Доведення.** Нехай  $K/t_1K$  не є областю головних ідеалів. Тоді існують такі елементи  $\bar{u}, \bar{v}$  із  $\bar{K}_1 = K/t_1K$  (за лемою 4.5  $\bar{K}_1$  є локальним кільцем), що  $\bar{V} = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$  не буде головним ідеалом кільця  $\bar{K}_1$ . За лемою 4.4 можна підібрати такий ідеал  $V = \langle t_2, v \rangle$  кільця  $K$ , що  $(t_2, v) = 1$ , тобто вважати, що  $u = t_2$  (бо якби це було не так, то це означало би, що будь-який елемент із радикалу кільця  $K$  належить ідеалу, породженому елементами  $t_1$  і  $t_2$ , а тоді  $\bar{K}_1$  було би кільцем головних ідеалів).

Розглянемо наступне відображення:

$$\Gamma(A, B): a \rightarrow \begin{pmatrix} -E & D(A, B) \\ 0 & E \end{pmatrix} = \Gamma_a(A, B),$$

з матрицею

$$D(A, B) = \begin{pmatrix} vt_2E & t_2^2A & 0 \\ v^2E & vt_2E & t_2^2B \\ 0 & v^2E & vt_2E \end{pmatrix},$$

де  $A, B$  – довільні матриці розміру  $n \times n$  над  $K$ ,  $E$  – одинична матриця розміру  $n \times n$ .

Очевидно,

$$\Gamma_a^2(A, B) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Отже,  $\Gamma(A, B) \in K$ -зображенням групи  $H$ .

Нехай зображення  $\Gamma(A, B)$  і  $\Gamma(A', B')$  є  $K$ -еквівалентні, тобто існує така матриця  $C \in GL(6n, K)$ , що

$$\Gamma_a(A, B)C = C\Gamma_a(A', B'), \quad (4.1)$$

де  $C = \|C_{ij}\|$ ,  $C_{ij}$  – матриці розміру  $n \times n$  над  $K$  ( $1 \leq i, j \leq 6$ ).

Запишемо (4.1) у вигляді

$$\begin{pmatrix} -E & D(A, B) \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E & D(A', B') \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

де

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{34} & C_{35} & C_{36} \end{pmatrix},$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}.$$

Звідси отримаємо, що

$$\begin{pmatrix} -EC_1 & -EC_2 + D(A, B)C_4 \\ 0 & EC_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1(-E) & C_1D(A', B') + C_2E \\ 0 & C_4E \end{pmatrix}.$$

Прирівнюючи в останній матричній рівності елементи на місцях (1,2) (під місцем  $(i, j)$  матриці ми розуміємо елемент, що знаходиться на перетині  $i$ -го рядка та  $j$ -го стовпця), отримаємо, що

$$-EC_2 + D(A, B)C_4 = C_1D(A', B') + C_2E,$$

звідки

$$D(A, B)C_4 = C_1D(A', B') + 2C_2.$$

Зважаючи на останню матричну рівність, одержимо

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} vt_2E & t_2^2A & 0 \\ v^2E & vt_2E & t_2^2B \\ 0 & v^2E & vt_2E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vt_2E & t_2^2A' & 0 \\ v^2E & vt_2E & t_2^2B' \\ 0 & v^2E & vt_2E \end{pmatrix} + 2C_2. \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} vt_2C_{44} + t_2^2AC_{54} & vt_2C_{45} + t_2^2AC_{55} & vt_2C_{46} + t_2^2AC_{56} \\ v^2C_{44} + vt_2C_{54} + t_2^2BC_{64} & v^2C_{45} + vt_2C_{55} + t_2^2BC_{65} & v^2C_{46} + vt_2C_{56} + t_2^2BC_{66} \\ v^2C_{54} + vt_2C_{64} & v^2C_{55} + vt_2C_{65} & v^2C_{56} + vt_2C_{66} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} vt_2C_{11} + v^2C_{12} & t_2^2C_{11}A' + vt_2C_{12} + v^2C_{13} & t_2^2C_{12}B' + vt_2C_{13} \\ vt_2C_{21} + v^2C_{22} & t_2^2C_{21}A' + vt_2C_{22} + v^2C_{23} & t_2^2C_{22}B' + vt_2C_{23} \\ vt_2C_{31} + v^2C_{32} & t_2^2C_{31}A' + vt_2C_{32} + v^2C_{33} & t_2^2C_{32}B' + vt_2C_{33} \end{pmatrix} + 2C_2. \end{aligned}$$

В отриманій матричній рівності будемо прирівнювати елементи в лівій та правій частинах на відповідних місцях. Для цього введемо наступні позначення:

$$D_1 = C_{34}, \quad D_2 = -C_{24},$$

$$D_3 = -C_{14}, \quad D_4 = -C_{35},$$

$$D_5 = -C_{25}, \quad D_6 = -C_{15},$$

$$D_7 = -C_{36}, \quad D_8 = -C_{26}, \quad D_9 = -C_{16}.$$

Отже, прирівнюючи елементи на місці (3,1), отримаємо

$$vt_2C_{31} + v^2C_{32} + 2D_1 = v^2C_{54} + vt_2C_{64}. \quad (4.2)$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,1), отримаємо

$$vt_2C_{21} + v^2C_{22} = v^2C_{44} + vt_2C_{54} + t_2^2BC_{64} + 2D_2. \quad (4.3)$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,1), отримаємо

$$vt_2C_{11} + v^2C_{12} = vt_2C_{44} + t_2^2AC_{54} + 2D_3. \quad (4.4)$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,2), отримаємо

$$t_2^2C_{31}A' + vt_2C_{32} + v^2C_{33} = v^2C_{55} + vt_2C_{65} + 2D_4. \quad (4.5)$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,2), отримаємо

$$t_2^2C_{21}A' + vt_2C_{22} + v^2C_{23} = v^2C_{45} + vt_2C_{55} + t_2^2BC_{65} + 2D_5. \quad (4.6)$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,2), отримаємо

$$t_2^2C_{11}A' + vt_2C_{12} + v^2C_{13} = vt_2C_{45} + t_2^2AC_{55} + 2D_6. \quad (4.7)$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,3), отримаємо

$$t_2^2C_{32}B' + vt_2C_{33} = v^2C_{56} + vt_2C_{66} + 2D_7. \quad (4.8)$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,3), отримаємо

$$t_2^2C_{22}B' + vt_2C_{23} = v^2C_{46} + vt_2C_{56} + t_2^2BC_{66} + 2D_8. \quad (4.9)$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,3), отримаємо

$$t_2^2C_{12}B' + vt_2C_{13} = vt_2C_{46} + t_2^2AC_{56} + 2D_9. \quad (4.10)$$

Із (4.3) маємо

$$vt_2C_{21} + v^2C_{22} = v^2C_{44} + vt_2C_{54} + t_2^2BC_{64} + t_1t_2D_2,$$

або (в еквівалентній формі)

$$vt_2(C_{21} - C_{54}) + v^2(C_{22} - C_{44}) = t_2^2BC_{64} + t_1t_2D_2. \quad (4.11)$$

Оскільки всі доданки обох частин рівності (4.11) діляться на  $t_2$ , окрім другого доданку лівої рівності, то, враховуючи взаємну простоту  $v$  і  $t_2$ , маємо, що

$$C_{22} \equiv C_{44} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.12)$$

Із (4.4) отримаємо, що

$$vt_2C_{11} + v^2C_{12} = vt_2C_{44} + t_2^2AC_{54} + t_1t_2D_3.$$

Оскільки всі доданки обох частин останньої рівності діляться на  $t_2$ , окрім другого доданку лівої рівності, то, враховуючи взаємну простоту  $v$  і  $t_2$ , маємо, що  $C_{12}$  ділиться на  $t_2$ , тобто  $C_{12} = t_2C'_{12}$ , звідки, по-перше,

$$C_{12} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K}, \quad (4.13)$$

і, по-друге (після підстановки  $C_{12} = t_2C'_{12}$  та скорочення на  $t_2$ ),

$$v(C_{11} + vC'_{12} - C_{44}) = t_2AC_{54} + t_1D_3. \quad (4.14)$$

Нехай

$$C_{11} + vC'_{12} - C_{44} \not\equiv 0 \pmod{\text{Rad } K}.$$

Зважаючи на (4.14) маємо

$$\bar{v}\bar{\theta} = \bar{t}_2\bar{x}_1 (\bar{x}_1 \in \bar{K}_1).$$

Оскільки  $\theta \in K^*$ , то  $\bar{\theta} \in (K/t_1K)^*$ .

Значить,

$$\bar{v} = \bar{\theta}^{-1}\bar{t}_2\bar{x}_1 = \bar{t}_2\bar{x}_2 = \bar{u}\bar{x}_2.$$

Отримали протиріччя, бо  $\bar{V} = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$  не є головним ідеалом.

Отже,

$$C_{11} + vC'_{12} - C_{44} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K}.$$

Звідси

$$C_{11} - C_{44} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.15)$$

Із (4.5) маємо, що

$$t_2^2 C_{31} A' + vt_2 C_{32} + v^2 C_{33} = v^2 C_{55} + vt_2 C_{65} + t_1 t_2 D_4,$$

звідки

$$t_2^2 C_{31} A' + vt_2 C_{32} + v^2 (C_{33} - C_{55}) = vt_2 C_{65} + t_1 t_2 D_4.$$

Оскільки всі доданки обох частин останньої рівності діляться на  $t_2$ , окрім третього доданку лівої рівності, то, враховуючи взаємну простоту  $v$  і  $t_2$ , маємо, що  $C_{33} - C_{55}$  ділиться на  $t_2$ , тобто

$$C_{33} - C_{55} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K},$$

звідки

$$C_{33} \equiv C_{55} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.16)$$

Із (4.6) маємо:

$$t_2^2 C_{21} A' + vt_2 C_{22} + v^2 C_{23} = v^2 C_{45} + vt_2 C_{55} + t_2^2 B C_{65} + t_1 t_2 D_5,$$

звідки дістанемо, що

$$t_2^2 C_{21} A' + vt_2 (C_{22} - C_{55}) = v^2 (C_{45} - C_{23}) + t_2^2 B C_{65} + t_1 t_2 D_5,$$

$$t_2 C_{21} A' + v(C_{22} - C_{55} - vx) = t_2 B C_{65} + t_1 D_5,$$

$$v(C_{22} - C_{55} - vx) = t_2 x + t_1 D_5.$$

Аналогічними міркуваннями, як у випадку з (4.14) одержуємо, що

$$C_{22} \equiv C_{55} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.17)$$

Із (4.7) дістанемо, що

$$t_2^2 C_{11} A' + vt_2 (C_{12} - C_{45}) + v^2 C_{13} = t_2^2 A C_{55} + t_1 t_2 D_6.$$

Оскільки всі доданки обох частин останньої рівності діляться на  $t_2$ , окрім третього доданку лівої рівності, то, враховуючи взаємну простоту  $v$  і  $t_2$  маємо, що  $C_{13}$  ділиться на  $t_2$ , тобто  $C_{13} = t_2 C'_{13}$ , звідки, по-перше,

$$C_{13} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K}, \quad (4.18)$$

і, по-друге (після підстановки  $C_{13} = t_2 C'_{13}$  та скорочення на  $t_2$ ),

$$t_2(C_{11}A' - AC_{55}) - v(C_{12} - C_{45} + vC'_{13}) = t_1D_6,$$

$$t_2(C_{11}A' - AC_{55}) = vx + t_1D_6,$$

де

$$x = C_{12} - C_{45} + vC'_{13}.$$

Нехай

$$C_{11}A' - AC_{55} \not\equiv 0 \pmod{\text{Rad } K}.$$

Тоді маємо, що

$$\bar{t}_2 \bar{\theta} = \bar{v} \bar{x},$$

де

$$\theta = C_{11}A' - AC_{55},$$

звідки отримаємо, що

$$\bar{t}_2 = \bar{v} \bar{y} \quad (\bar{y} = \bar{x} \bar{\theta}^{-1}),$$

а це приводить до протиріччя з визначенням  $t_2$ , бо  $t_2$  і  $v$  взаємно прості.

Отже,

$$C_{11}A' - AC_{55} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K},$$

звідки

$$C_{11}A' \equiv AC_{55} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.19)$$

Із (4.8) одержимо, що

$$t_2^2 C_{32}B' + vt_2 C_{33} = v^2 C_{56} + vt_2 C_{66} + t_1 t_2 D_7,$$

звідки

$$t_2^2 C_{32} B' + vt_2(C_{33} - C_{66}) = v^2 C_{56} + t_1 t_2 D_7.$$

Аналогічними міркуваннями, як у випадку (4.14) одержуємо, що

$$C_{33} \equiv C_{66} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.20)$$

З (4.9) отримаємо, що

$$t_2^2 C_{22} B' + vt_2 C_{23} = v^2 C_{46} + vt_2 C_{56} + t_2^2 B C_{66} + t_1 t_2 D_8,$$

$$t_2^2 (C_{22} B' - B C_{66}) + t_2 v (C_{23} - C_{56}) = v^2 C_{46} + t_1 t_2 D_8.$$

Оскільки всі доданки обох частин останньої рівності діляться на  $t_2$ , окрім першого доданку правої рівності, то, враховуючи взаємну простоту  $v$  і  $t_2$ , маємо, що  $C_{46}$  ділиться на  $t_2$ , тобто  $C_{46} = t_2 C'_{46}$ , звідки, по-перше,

$$C_{46} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K},$$

і, по-друге (після підстановки  $C_{46} = t_2 C'_{46}$  та скорочення на  $t_2$ ),

$$v(C_{23} - v C'_{46} - C_{56}) = -t_2 (C_{22} B' - B C_{66}) + t_1 D_8.$$

Нехай

$$C_{22} B' - B C_{66} \not\equiv 0 \pmod{\text{Rad } K}.$$

Звідси маємо

$$\bar{v} \bar{x}_1 = \bar{t}_2 \bar{\theta} \bar{x}_1 (\bar{x}_1 \in \bar{K}_1).$$

Оскільки  $\theta \in K^*$ , то  $\bar{\theta} \in (K/t_1 K)^*$ .

Значить,  $\bar{t}_2 = \bar{v} \bar{x}_1 \bar{\theta}^{-1} = \bar{v} \bar{x}_2$ . Звідси  $\bar{u} = \bar{v} \bar{x}_2$ . Отримали протиріччя, бо  $\bar{V} = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$  не є головним ідеалом.

Отже,

$$C_{22} B' - B C_{66} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K},$$

звідки

$$C_{22}B' \equiv BC_{66} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.21)$$

Отже, з (4.12), (4.16), (4.17), (4.20) ми отримали, що

$$C_{22} \equiv C_{44} \equiv C_{11} \equiv C_{33} \equiv C_{55} \equiv C_{66} \pmod{\text{Rad } K}, \quad (4.22)$$

та із (4.13) та (4.18) одержали

$$C_{12} \equiv C_{13} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K}.$$

Отже, для матриці  $C$  справедлива наступна конгруенція:

$$C \equiv \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{11} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{11} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{11} & C_{45} & C_{46} \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{11} & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & C_{64} & C_{65} & C_{11} \end{pmatrix} \pmod{\text{Rad } K}.$$

З вигляду матриці  $C$  видно, що вона оборотна тоді і лише тоді, коли оборотна матриця  $C_{11}$ .

Враховуючи (4.19), (4.21) та (4.22), маємо

$$C_{11}A' \equiv AC_{11} \pmod{\text{Rad } K},$$

$$C_{11}B' \equiv BC_{11} \pmod{\text{Rad } K}.$$

Отже, задача про опис матричних  $K$ -зображень групи  $H$  є дикою.

□

Із доведеного твердження випливає наступна теорема.

**Теорема 4.7.** *Нехай  $G$  – скінченна 2-група порядку  $|G| > 1$ ,  $K$  – нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2,  $2 = t_1 t_2$ , де  $t_1, t_2$  – різні прості елементи кільця  $K$  ( $t_1 \neq \theta t_2$ ,*

$\theta \in K^*$ ) і  $K/t_1K$  не є областю головних ідеалів. Тоді задача про опис матричних зображень групи  $G$  над кільцем  $K$  є дикою.

### 4.3. Узагальнення теореми 4.7

Через  $m(I)$ , де  $I$  – ідеал деякого кільця  $K$ , позначатимемо найменше число його твірних.

Спочатку доведемо наступну лему.

**Лема 4.8.** Нехай  $G = \langle a | a^2 = e \rangle$  і  $K$  – локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, таке, що

1)  $2 = t_1 t_2 \dots t_s$  ( $s \in \mathbb{N}, s > 1$ ), де  $t_1, t_2, \dots, t_s$  – різні прості елементи кільця  $K$  ( $t_i \neq \theta t_j, \theta \in K^*, i = \overline{1, s}, j = \overline{1, s}, i \neq j$ );

2) кільце  $\overline{K}_1 = K/t_1K$  містить ідеал  $I$  із скінченним  $m(I) > 1$ .

Тоді задача про опис матричних зображень групи  $G$  над кільцем  $K$  є дикою.

**Доведення.** Нехай  $K$  таке, як в умові леми. Тоді існує такий  $v \in K$ , що  $(v, t_1) = 1$ . Дійсно, якщо навпаки  $(v, t_1) \neq 1$ , то  $(v, t_1) = t_1$  і  $v$  ділиться на  $t_1$ ,  $\bar{v} = v + t_1K = t_1K = 0$  і ідеал  $\bar{V} = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{u}, 0 \rangle = \langle \bar{u} \rangle$  головний, що неможливо.

Розглянемо таке матричне  $K$ -зображення групи  $G$ :

$$\Gamma(A, B): a \rightarrow \begin{pmatrix} -E & D(A, B) \\ 0 & E \end{pmatrix} = \Gamma_a(A, B),$$

де

$$D(A, B) = \begin{pmatrix} vt_1E & t_1^2A & 0 \\ v^2E & vt_1E & t_1^2B \\ 0 & v^2E & vt_1E \end{pmatrix},$$

$A, B$  – довільні матриці розміру  $n \times n$  над  $K$ ;  $E$  – одинична матриця розміру  $n \times n$ .

Нехай, два такі зображення  $\Gamma(A, B)$  і  $\Gamma(A', B')$  є  $K$ -еквівалентні, тобто існує така матриця  $C \in GL(6n, K)$ , що

$$\Gamma_a(A, B)C = C\Gamma_a(A', B'), \quad (4.23)$$

де  $C = \|C_{ij}\|$ ;  $i, j = \overline{1, 6}$ ,  $C_{ij}$  – матриці розміру  $n \times n$  над  $K$ .

Запишемо матричну рівність (4.23) у такому вигляді:

$$\begin{pmatrix} -E & D(A, B) \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E & D(A', B') \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

де

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{34} & C_{35} & C_{36} \end{pmatrix},$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}.$$

Прирівнюючи в останній матричній рівності елементи на місцях (1,2), отримаємо, що

$$-EC_2 + D(A, B)C_4 = C_1D(A', B') + C_2E,$$

звідки

$$D(A, B)C_4 = C_1D(A', B') + 2C_2.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} vt_1E & t_1^2A & 0 \\ v^2E & vt_1E & t_1^2B \\ 0 & v^2E & vt_1E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vt_1 E & t_1^2 A' & 0 \\ v^2 E & vt_1 E & t_1^2 B' \\ 0 & v^2 E & vt_1 E \end{pmatrix} + 2C_2, \\
&\begin{pmatrix} vt_1 C_{44} + t_1^2 AC_{54} & vt_1 C_{45} + t_1^2 AC_{55} & vt_1 C_{46} + t_1^2 AC_{56} \\ v^2 C_{44} + vt_1 C_{54} + t_1^2 BC_{64} & v^2 C_{45} + vt_1 C_{55} + t_1^2 BC_{65} & v^2 C_{46} + vt_1 C_{56} + t_1^2 BC_{66} \\ v^2 C_{54} + vt_1 C_{64} & v^2 C_{55} + vt_1 C_{65} & v^2 C_{56} + vt_1 C_{66} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} vt_1 C_{11} + v^2 C_{12} & t_1^2 C_{11} A' + vt_1 C_{12} + v^2 C_{13} & t_1^2 C_{12} B' + vt_1 C_{13} \\ vt_1 C_{21} + v^2 C_{22} & t_1^2 C_{21} A' + vt_1 C_{22} + v^2 C_{23} & t_1^2 C_{22} B' + vt_1 C_{23} \\ vt_1 C_{31} + v^2 C_{32} & t_1^2 C_{31} A' + vt_1 C_{32} + v^2 C_{33} & t_1^2 C_{32} B' + vt_1 C_{33} \end{pmatrix} + 2C_2.
\end{aligned}$$

В отриманій матричній рівності прирівнюємо елементи в лівій та правій частинах на відповідних місцях. Для цього введемо наступні позначення:

$$D_1 = C_{34}, \quad D_2 = -C_{24},$$

$$D_3 = -C_{14}, \quad D_4 = -C_{35},$$

$$D_5 = -C_{25}, \quad D_6 = -C_{15},$$

$$D_7 = -C_{36}, \quad D_8 = -C_{26}, \quad D_9 = -C_{16}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,1), отримаємо

$$v^2 C_{54} + vt_1 C_{64} = vt_1 C_{31} + v^2 C_{32} + 2D_1. \quad (4.24)$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,1), отримаємо

$$vt_1 C_{21} + v^2 C_{22} = v^2 C_{44} + vt_1 C_{54} + t_1^2 BC_{64} + 2D_2. \quad (4.25)$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,1), отримаємо

$$vt_1 C_{11} + v^2 C_{12} = vt_1 C_{44} + t_1^2 AC_{54} + 2D_3. \quad (4.26)$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,2), отримаємо

$$t_1^2 C_{31} A' + vt_1 C_{32} + v^2 C_{33} = v^2 C_{55} + vt_1 C_{65} + 2D_4. \quad (4.27)$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,2), отримаємо

$$t_1^2 C_{21} A' + vt_1 C_{22} + v^2 C_{23} = v^2 C_{45} + vt_1 C_{55} + t_1^2 BC_{65} + 2D_5. \quad (4.28)$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,2), отримаємо

$$t_1^2 C_{11} A' + vt_1 C_{12} + v^2 C_{13} = vt_1 C_{45} + t_1^2 AC_{55} + 2D_6. \quad (4.29)$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,3), отримаємо

$$t_1^2 C_{32} B' + vt_1 C_{33} = v^2 C_{56} + vt_1 C_{66} + 2D_7. \quad (4.30)$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,3), отримаємо

$$t_1^2 C_{22} B' + vt_1 C_{23} = v^2 C_{46} + vt_1 C_{56} + t_1^2 BC_{66} + 2D_8. \quad (4.31)$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,3), отримаємо

$$t_1^2 C_{12} B' + vt_1 C_{13} = vt_1 C_{46} + t_1^2 AC_{56} + 2D_9. \quad (4.32)$$

Із співвідношення (4.25) одержимо:

$$vt_1 C_{21} + v^2 C_{22} = v^2 C_{44} + vt_1 C_{54} + t_1^2 BC_{64} + t_1 t_2 \dots t_s D_2,$$

або (в еквівалентній формі)

$$vt_1(C_{21} - C_{54}) + v^2(C_{22} - C_{44}) = t_1^2 BC_{64} + t_1 t_2 \dots t_s D_2. \quad (4.33)$$

Оскільки, всі доданки обох частин рівності (4.33) діляться на  $t_1$ , окрім другого доданку лівої рівності, то, враховуючи взаємну простоту  $v$  і  $t_1$ , маємо, що

$$C_{22} - C_{44} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K},$$

звідки

$$C_{22} \equiv C_{44} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.34)$$

Із рівності (4.26) отримаємо, що

$$vt_1 C_{11} + v^2 C_{12} = vt_1 C_{44} + t_1^2 AC_{54} + t_1 t_2 \dots t_s D_3.$$

Оскільки всі доданки обох частин останньої рівності діляться на  $t_1$ , окрім другого доданку лівої рівності, то, враховуючи взаємну простоту  $v$  і  $t_1$ , маємо, що  $C_{12}$  ділиться на  $t_1$ , тобто  $C_{12} = t_1 C'_{12}$ , звідки, по-перше,

$$C_{12} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K} \quad (4.35)$$

і по-друге (після підстановки  $C_{12} = t_1 C'_{12}$  та скорочення на  $t_1$ ),

$$v(C_{11} + vC'_{12} - C_{44}) = t_1 AC_{54} + t_2 t_3 \dots t_s D_3. \quad (4.36)$$

Нехай

$$C_{11} + vC'_{12} - C_{44} \not\equiv 0 \pmod{\text{Rad } K}.$$

Тоді із рівності (4.36) маємо

$$\bar{v}\bar{\theta} = \overline{t_2 t_3 \dots t_s x_1} \quad (\bar{x}_1 \in \bar{K}_1).$$

Оскільки  $\theta \in K^*$ , то  $\bar{\theta} \in (K/t_1 K)^*$ .

Значить,

$$\bar{v} = \overline{\theta^{-1} t_2 t_3 \dots t_s x_1} = \overline{t_2 t_3 \dots t_s x_2} = \bar{u} \bar{x}_2.$$

Отримали протиріччя, бо  $\bar{V} = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$  не є головним ідеалом.

Отже,

$$C_{11} + vC'_{12} - C_{44} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K}.$$

Звідси

$$C_{11} - C_{44} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K},$$

звідки

$$C_{11} \equiv C_{44} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.37)$$

Із рівності (4.27) маємо, що

$$t_1^2 C_{31} A' + v t_1 C_{32} + v^2 C_{33} = v^2 C_{55} + v t_1 C_{65} + t_1 t_2 \dots t_s D_4,$$

або (в еквівалентній формі)

$$t_1^2 C_{31} A' + vt_1(C_{32} - C_{65}) + v^2(C_{33} - C_{55}) = vt_1 + t_1 t_2 \dots t_s D_4,$$

звідки (аналогічно, як в попередніх випадках)

$$C_{33} \equiv C_{55} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.38)$$

Із рівності (4.28) одержимо:

$$t_1^2 C_{21} A' + vt_1 C_{22} + v^2 C_{23} = v^2 C_{45} + vt_1 C_{55} + t_1^2 B C_{65} + t_1 t_2 \dots t_s D_5.$$

Звідси

$$t_1^2 C_{21} A' + vt_1(C_{22} - C_{55}) = v^2(C_{45} - C_{23}) + t_1^2 B C_{65} + t_1 t_2 \dots t_s D_5,$$

$$t_1 C_{21} A' + v(C_{22} - C_{55} - vx) = t_1 B C_{65} + t_2 t_3 \dots t_s D_5,$$

$$v(C_{22} - C_{55} - vx) = t_1 x + t_2 t_3 \dots t_s D_5.$$

Аналогічними міркуваннями, як у випадку з рівністю (4.36), одержуємо, що

$$C_{22} \equiv C_{55} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.39)$$

Із рівності (4.29) дістанемо:

$$t_1^2 C_{11} A' + vt_1(C_{12} - C_{45}) + v^2 C_{13} = t_1^2 A C_{55} + t_1 t_2 \dots t_s D_6.$$

Оскільки всі доданки обох частин останньої рівності діляться на  $t_1$ , окрім другого доданку лівої рівності, то, враховуючи взаємну простоту  $v$  і  $t_1$ , маємо, що  $C_{13}$  ділиться на  $t_1$ , звідки по-перше,

$$C_{13} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K}, \quad (4.40)$$

і по-друге (після підстановки  $C_{13} = t_1 C'_{13}$  та скорочення на  $t_1$ ),

$$t_1(C_{11} A' - A C_{55}) - v(C_{12} - C_{45} + v C'_{13}) = t_2 t_3 \dots t_s D_6,$$

що запишемо

$$t_1(C_{11}A' - AC_{55}) = vx + t_2t_3 \dots t_s D_6,$$

де

$$x = C_{12} - C_{45} + vC'_{13}.$$

Нехай

$$C_{11}A' - AC_{55} \not\equiv 0 \pmod{\text{Rad } K}.$$

Тоді

$$\bar{t}_1 \bar{\theta} = \bar{v} \bar{x} \quad (\theta = C_{11}A' - AC_{55}),$$

звідки

$$\bar{t}_1 = \bar{v} \bar{y} \quad (\bar{y} = \bar{x} \bar{\theta}^{-1}),$$

що приводить до протиріччя з визначенням  $t_1$ .

Отже,

$$C_{11}A' - AC_{55} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K}.$$

Звідси маємо

$$C_{11}A' \equiv AC_{55} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.41)$$

Із рівності (4.30) маємо:

$$t_1^2 C_{32}B' + vt_1(C_{33} - C_{66}) = v^2 C_{56} + 2D_7,$$

звідки

$$t_1^2 C_{32}B' + vt_1(C_{33} - C_{66}) = v^2 C_{56} + t_1 t_2 \dots t_s D_7.$$

Аналогічними міркуваннями, як у випадку з рівністю (4.26), одержуємо, що

$$C_{33} \equiv C_{66} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.42)$$

Із рівності (4.31) отримаємо:

$$t_1^2 C_{22} B' + v t_1 C_{23} = v^2 C_{46} + v t_1 C_{56} + t_1^2 B C_{66} + t_1 t_2 \dots t_s D_8,$$

звідки

$$t_1^2 (C_{22} B' - B C_{66}) + t_1 v (C_{23} - C_{56}) = v^2 C_{46} + t_1 t_2 \dots t_s D_8.$$

Оскільки всі доданки обох частин останньої рівності діляться на  $t_1$ , окрім першого доданку правої рівності, то, враховуючи взаємну простоту  $v$  і  $t_1$ , маємо, що  $C_{46}$  ділиться на  $t_1$ , тобто  $C_{46} = t_1 C'_{46}$ , тому

$$t_1^2 (C_{22} B' - B C_{66}) + t_1 v (C_{23} - C_{56}) = v^2 t_1 C'_{46} + t_1 t_2 \dots t_s D_8,$$

звідки (після скорочення на  $t_1$ )

$$t_1 (C_{22} B' - B C_{66}) + v (C_{23} - C_{56} - v C'_{46}) = t_2 \dots t_s D_8,$$

або

$$t_1 (C_{22} B' - B C_{66}) + v x = t_2 \dots t_s D_8,$$

де

$$x = C_{23} - C_{56} - v C'_{46}.$$

Нехай

$$C_{22} B' - B C_{66} \not\equiv 0 \pmod{\text{Rad } K}.$$

Тоді маємо, що

$$\bar{t}_1 \bar{\theta} = \bar{v} \bar{x} \quad (\theta = C_{22} B' - B C_{66}),$$

звідки отримаємо, що

$$\bar{t}_1 = \bar{v} \bar{y} \quad (\bar{y} = \bar{x} \bar{\theta}^{-1}),$$

а це приводить до протиріччя з визначенням  $t_1$ , бо  $t_1$  і  $v$  взаємно прості.

Отже,

$$C_{22} B' - B C_{66} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K},$$

звідки

$$C_{22}B' \equiv BC_{66} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.43)$$

Отже, із рівностей (4.34), (4.38), (4.39) і (4.42) ми одержали:

$$C_{22} \equiv C_{44} \equiv C_{11} \equiv C_{33} \equiv C_{55} \equiv C_{33} \pmod{\text{Rad } K}, \quad (4.44)$$

а з (4.35) та (4.40) отримали, що

$$C_{12} \equiv C_{13} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K}.$$

Отже, для матриці  $C$  справедлива наступна конгруенція:

$$C \equiv \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{11} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{11} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{11} & C_{45} & C_{46} \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{11} & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & C_{64} & C_{65} & C_{11} \end{pmatrix} \pmod{\text{Rad } K}.$$

З вигляду матриці  $C$  видно, що вона оборотна тоді і лише тоді, коли оборотна матриця  $C_{11}$ .

Зважаючи на (4.41), (4.43) і (4.44) ми отримуємо, що

$$C_{11}A' \equiv AC_{11} \pmod{\text{Rad } K},$$

і

$$C_{11}B' \equiv BC_{11} \pmod{\text{Rad } K}.$$

Отже, задача про опис матричних  $K$ -зображень групи  $G$  є дикою.

□

Із доведеної лемі випливає наступна теорема.

**Теорема 4.9.** *Нехай  $G$  – скінченна 2-група порядку  $|G| > 1$ ,  $K$  – локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2,*

таке, що

- 1)  $2 = t_1 t_2 \dots t_s$  ( $s \in \mathbb{N}, s > 1$ ), де  $t_1, t_2, \dots, t_s$  – різні прості елементи кільця  $K$  ( $t_i \neq \theta t_j, \theta \in K^*, i = \overline{1, s}, j = \overline{1, s}, i \neq j$ );
- 2) кільце  $\overline{K_1} = K/t_1 K$  містить ідеал  $I$  із скінченним  $m(I) > 1$ .

Тоді задача про опис матричних зображень групи  $G$  над кільцем  $K$  є дикою.

На завершення зауважимо, що, на відміну від результатів усіх інших підрозділів цього розділу, теорема 4.9 не є абсолютно новою (див. роботу [38]), але мета цього підрозділу – показати, що ідея доведення тверджень попереднього підрозділу може узагальнюватись на інші задачі.

#### 4.4. Випадок, коли 2 – простий елемент

Розглянемо випадок, коли елемент 2 є простим елементом основного кільця.

Спочатку розглянемо наступне твердження.

**Твердження 4.10.** Нехай  $H = \langle a \mid a^2 = 1 \rangle$ ,  $K$  – нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, 2 – простий елемент кільця  $K$ . Нехай  $K/2K$  – факторіальне кільце неголовних ідеалів. Тоді задача про опис матричних  $K$ -зображень групи  $H$  є дикою.

**Доведення.** Оскільки  $K/2K$  не є областю головних ідеалів, то в ньому існують різні прості елементи  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{u} \neq \theta \bar{v}$  ( $\theta \in (K/2K)^*$ ). Покладемо

$$\bar{u} = u + 2K, \bar{v} = v + 2K.$$

Розглянемо наступне відображення:

$$\Gamma(A, B): a \rightarrow \begin{pmatrix} -E & D(A, B) \\ 0 & E \end{pmatrix} = \Gamma_a(A, B),$$

де

$$D(A, B) = \begin{pmatrix} uvE & u^2A & 0 \\ v^2E & uvE & u^2B \\ 0 & v^2E & uvE \end{pmatrix},$$

$A, B$  – довільні матриці розміру  $n \times n$  над кільцем  $K$ ,  $E$  – одинична матриця розміру  $n \times n$ .

Очевидно,

$$\Gamma_a^2(A, B) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Отже,  $\Gamma(A, B)$  є  $K$ -зображенням групи  $H$ .

Нехай  $K$ -зображення  $\Gamma(A, B)$  та  $\Gamma(A', B')$  є  $K$ -еквівалентними, тобто існує така матриця  $C \in GL(6n, K)$ , що

$$\Gamma_a(A, B)C = C\Gamma_a(A', B'), \quad (4.45)$$

де  $C = \|C_{ij}\|$ ,  $C_{ij}$  – матриці розміру  $n \times n$  над  $K$  ( $1 \leq i, j \leq 6$ ).

Запишемо (4.45) у вигляді

$$\begin{pmatrix} -E & D(A, B) \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E & D(A', B') \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

де

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{34} & C_{35} & C_{36} \end{pmatrix},$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}.$$

Звідси отримуємо, що

$$\begin{pmatrix} -EC_1 & -EC_2 + D(A, B)C_4 \\ 0 & EC_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1(-E) & C_1D(A', B') + C_2E \\ 0 & C_4E \end{pmatrix}.$$

Прирівнюючи в останній матричній рівності елементи на місцях (1,2), маємо

$$-EC_2 + D(A, B)C_4 = C_1D(A', B') + C_2E,$$

звідки

$$D(A, B)C_4 = C_1D(A', B') + 2C_2.$$

Зважаючи на останню матричну рівність, одержимо

$$\begin{pmatrix} uvE & u^2A & 0 \\ v^2E & uvE & u^2B \\ 0 & v^2E & uvE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} uvE & u^2A' & 0 \\ v^2E & uvE & u^2B' \\ 0 & v^2E & uvE \end{pmatrix} + 2C_2.$$

Звідси маємо наступну матричну рівність

$$\begin{pmatrix} uvC_{44} + u^2AC_{54} & uvC_{45} + u^2AC_{55} & uvC_{46} + u^2AC_{56} \\ v^2C_{44} + uvC_{54} + u^2BC_{64} & v^2C_{45} + uvC_{55} + u^2BC_{65} & v^2C_{46} + uvC_{56} + u^2BC_{66} \\ v^2C_{54} + uvC_{64} & v^2C_{55} + uvC_{65} & v^2C_{56} + uvC_{66} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} uvC_{11} + v^2C_{12} & u^2C_{11}A' + uvC_{12} + v^2C_{13} & u^2C_{12}B' + uvC_{13} \\ uvC_{21} + v^2C_{22} & u^2C_{21}A' + uvC_{22} + v^2C_{23} & u^2C_{22}B' + uvC_{23} \\ uvC_{31} + v^2C_{32} & u^2C_{31}A' + uvC_{32} + v^2C_{33} & u^2C_{32}B' + uvC_{33} \end{pmatrix} + 2C_2.$$

В отриманій матричній рівності прирівняємо елементи в лівій та правій частинах на відповідних місцях.

Прирівнюючи елементи на місці (3,1), отримаємо

$$v^2C_{54} + uvC_{64} = uvC_{31} + v^2C_{32} + 2C_{34},$$

звідки

$$\bar{v}^2C_{54} + \bar{u}\bar{v}C_{64} = \bar{u}\bar{v}C_{31} + \bar{v}^2C_{32}. \quad (4.46)$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,1), отримаємо

$$v^2 C_{44} + uv C_{54} + u^2 B C_{64} = uv C_{21} + v^2 C_{22} + 2C_{24},$$

звідки

$$\bar{v}^2 C_{44} + \bar{u}\bar{v} C_{54} + \bar{u}^2 B C_{64} = \bar{u}\bar{v} C_{21} + \bar{v}^2 C_{22}. \quad (4.47)$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,1), отримаємо

$$uv C_{44} + u^2 A C_{54} = uv C_{11} + v^2 C_{12} + 2C_{14},$$

звідки

$$\bar{u}\bar{v} C_{44} + \bar{u}^2 A C_{54} = \bar{u}\bar{v} C_{11} + \bar{v}^2 C_{12}. \quad (4.48)$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,2), отримаємо

$$v^2 C_{55} + uv C_{65} = u^2 C_{31} A' + uv C_{32} + v^2 C_{33} + 2C_{35},$$

звідки

$$\bar{v}^2 C_{55} + \bar{u}\bar{v} C_{65} = \bar{u}^2 C_{31} A' + \bar{u}\bar{v} C_{32} + \bar{v}^2 C_{33}. \quad (4.49)$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,2), отримаємо

$$v^2 C_{45} + uv C_{55} + u^2 B C_{65} = u^2 C_{21} A' + uv C_{22} + v^2 C_{23} + 2C_{25},$$

звідки

$$\bar{v}^2 C_{45} + \bar{u}\bar{v} C_{55} + \bar{u}^2 B C_{65} = \bar{u}^2 C_{21} A' + \bar{u}\bar{v} C_{22} + \bar{v}^2 C_{23}. \quad (4.50)$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,2), отримаємо

$$uv C_{45} + u^2 A C_{55} = u^2 C_{11} A' + uv C_{12} + v^2 C_{13} + 2C_{15},$$

звідки

$$\bar{u}\bar{v} C_{45} + \bar{u}^2 A C_{55} = \bar{u}^2 C_{11} A' + \bar{u}\bar{v} C_{12} + \bar{v}^2 C_{13}. \quad (4.51)$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,3), отримаємо

$$v^2 C_{56} + uv C_{66} = u^2 C_{32} B' + uv C_{33} + 2C_{36},$$

звідки

$$\bar{v}^2 C_{56} + \bar{u}\bar{v} C_{66} = \bar{u}^2 C_{32} B' + \bar{u}\bar{v} C_{33}. \quad (4.52)$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,3), отримаємо

$$v^2 C_{46} + uv C_{56} + u^2 B C_{66} = u^2 C_{22} B' + uv C_{23} + 2C_{26},$$

звідки

$$\bar{v}^2 C_{46} + \bar{u}\bar{v} C_{56} + \bar{u}^2 B C_{66} = \bar{u}^2 C_{22} B' + \bar{u}\bar{v} C_{23}. \quad (4.53)$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,3), отримаємо

$$uv C_{46} + u^2 A C_{56} = u^2 C_{12} B' + uv C_{13} + 2C_{16},$$

звідки

$$\bar{u}\bar{v} C_{46} + \bar{u}^2 A C_{56} = \bar{u}^2 C_{12} B' + \bar{u}\bar{v} C_{13}. \quad (4.54)$$

З (4.47) маємо наступну рівність:

$$uv(C_{21} - C_{54}) + v^2(C_{22} - C_{44}) = u^2 B C_{64} + 2C_{24},$$

звідки

$$\bar{u}\bar{v}(C_{21} - C_{54}) + \bar{v}^2(C_{22} - C_{44}) = \bar{u}^2 B C_{64}. \quad (4.55)$$

а з (4.48), маємо

$$u^2 A C_{54} = uv(C_{11} - C_{44}) + v^2 C_{12} + 2C_{14},$$

звідки

$$\bar{u}^2 A C_{54} = \bar{u}\bar{v}(C_{11} - C_{44}) + \bar{v}^2 C_{12}. \quad (4.56)$$

Оскільки в рівності (4.55) перший доданок лівої частини і її права частина діляться на  $\bar{u}$ , то одержимо наступну конгруенцію:

$$C_{22} \equiv C_{44} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.57)$$

Оскільки в рівності (4.50) другий і третій доданки її лівої частини і перший та другий доданки правої частини діляться на  $\bar{u}$ , то

$$C_{45} \equiv C_{23} \pmod{\text{Rad } K},$$

а значить

$$\bar{v}^2 C_{45} = \bar{v}^2 C_{23},$$

звідки знову ж таки з рівності (4.50) одержимо наступну конгруенцію:

$$C_{22} \equiv C_{55} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.58)$$

Оскільки в рівності (4.56) її ліва частина і перший доданок правої частини діляться на  $\bar{u}$ , то одержимо наступну конгруенцію:

$$C_{12} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.59)$$

Оскільки в рівності (4.51) її ліва частина і два перших доданки правої частини діляться на  $\bar{u}$ , то одержимо наступну конгруенцію:

$$C_{13} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.60)$$

Оскільки з рівності (4.56) маємо, що

$$\bar{v}^2 C_{12} = 0,$$

то знов-таки з рівності (4.56) одержимо наступну конгруенцію:

$$C_{11} \equiv C_{44} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.61)$$

Оскільки з рівності (4.51) маємо, що

$$\bar{v}^2 C_{13} = 0,$$

то знов-таки з рівності (4.51) одержимо наступну конгруенцію:

$$C_{11} A' \equiv A C_{55} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.62)$$

Оскільки в рівності (4.49) другий доданок її лівої частини і два перших доданки її правої частини діляться на  $\bar{u}$ , то одержимо наступну конгруенцію:

$$C_{33} \equiv C_{55} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.63)$$

Оскільки в рівності (4.52) другий доданок її лівої частини і права частина діляться на  $\bar{u}$ , то

$$C_{56} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K},$$

а значить

$$\bar{v}^2 C_{56} = 0,$$

звідки знов-таки з рівності (4.52) одержимо наступну конгруенцію:

$$C_{33} \equiv C_{66} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.64)$$

Оскільки в рівності (4.53) перші два доданки її лівої частини і останній доданок правої частини діляться на  $\bar{v}$ , то одержимо наступну конгруенцію:

$$C_{22}B' \equiv BC_{66} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.65)$$

Отже, з (4.57) – (4.65) маємо

$$C_{22} \equiv C_{44} \equiv C_{11} \equiv C_{33} \equiv C_{55} \equiv C_{66} \pmod{\text{Rad } K}, \quad (4.66)$$

$$C_{12} \equiv C_{13} \equiv 0 \pmod{\text{Rad } K},$$

$$C_{11}A' \equiv AC_{11} \pmod{\text{Rad } K}, \quad (4.67)$$

$$C_{11}B' \equiv BC_{11} \pmod{\text{Rad } K}. \quad (4.68)$$

Матриця  $C_{11}$  – оборотна над кільцем  $K$ , бо в протилежному випадку, враховуючи (4.66), матриця  $C$  не була б оборотною, що суперечить вибору матриці  $C$ . Конгруенції (4.67) та (4.68) доводять твердження.

□

Із доведеного твердження випливає наступна теорема.

**Теорема 4.11.** *Нехай  $G$  – скінченна 2-група порядку  $|G| > 1$ ,  $K$  – нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2,  $2$  – простий елемент кільця  $K$ . Нехай  $K/2K$  факторіальне кільце неголовних ідеалів. Тоді задача про опис матричних  $K$ -зображень групи  $G$  є дикою.*

#### 4.5. Висновки до розділу 4

Отримані у цьому розділі результати стосуються дикості скінченної 2-групи над локальними факторіальними кільцями. Вони опубліковані в [11], [14] і [17].

Доведено:

- 1) дикість скінченної 2-групи  $G$  порядку  $|G| > 1$  над нетеровим локальним факторіальним кільцем  $K$  характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, коли  $2 = t_1 t_2$ , де  $t_1, t_2$  – різні прості елементи кільця  $K$  ( $t_1 \neq \theta t_2, \theta \in K^*$ ) і  $K/t_1 K$  не є областю головних ідеалів;
- 2) дикість скінченної 2-групи  $G$  порядку  $|G| > 1$  над нетеровим локальним факторіальним кільцем  $K$  характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, коли  $2 = t_1 t_2 \dots t_s$  ( $s \in \mathbb{N}, s > 1$ ), де  $t_1, t_2, \dots, t_s$  – різні прості елементи кільця  $K$  ( $t_i \neq \theta t_j, \theta \in K^*, i = \overline{1, s}, j = \overline{1, s}, i \neq j$ ) та кільце  $\overline{K_1} = K/t_1 K$  містить ідеал  $I$  із скінченним  $m(I) > 1$  ( $m(I)$  – найменше число твірних ідеалу  $I$ );
- 3) дикість скінченної 2-групи  $G$  порядку  $|G| > 1$  над нетеровим локальним факторіальним кільцем  $K$  характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, у випадку коли  $2$  є простим елементом кільця  $K$  і  $K/2K$  є факторіальним кільцем неголовних ідеалів.

## РОЗДІЛ 5

### Матричні зображення схрещених групових кілець над $p$ -адичними числами

#### 5.1. Постановка задачі

При дослідженні зображень для деякого класу об'єктів, як правило, спочатку вивчають об'єкти скінченного типу (тобто такі, які мають з точністю до еквівалентності скінченне число нерозкладних зображень), а потім об'єкти ручного типу (тобто такі, зображення яких можна явно описати) та дикого типу (тобто такі, задача про опис зображень яких містить задачу про пару матриць, і які доповнюють ручні об'єкти до усіх об'єктів). Очевидно, що ручні об'єкти включають в себе об'єкти скінченного типу.

Як приклад можна розглянути зображення скінченних груп над полями. Спочатку зображення були вивчені у випадку, коли характеристика поля не ділить порядок групи і виявилось, що всі вони мають скінченний тип; у випадку, коли характеристика поля  $p$  ( $p > 0$ ) ділить порядок групи, спочатку були описані групи скінченного типу і ними виявилися лише групи з циклічними силовськими  $p$ -підгрупами, потім була доведена ручність групи  $(2,2)$  (В. А. Башев) і дикість груп  $(p,p)$  при  $p \neq 2$  (П. М. Гудивок, неопублікований результат, і С. А. Кругляк) та  $(2,2,2)$ ,  $(2,4)$  (Ш. Бреннер), потім ручність дієдральних і квазідієдральних груп (В. М. Бондаренко), а вже потім отримано критерій ручності скінченної групи над довільним полем фіксованої характеристики (В. М. Бондаренко, Ю. А. Дрозд).

Аналогічну ситуацію маємо і для зображень скінченних груп над кільцем цілих  $p$ -адичних чисел. Спочатку Ф. Дідеріксен показав, що циклічна група порядку  $p$  має скінченний тип, а потім А. В. Ройтер показав, що скінченний тип має циклічна група порядку  $p^2$  при  $p = 2$ .

С. Д. Берман, П. М. Гудивок і незалежно А. Хеллер та І. Райнер довели, що (неодинарна) циклічна  $p$ -група має скінченний тип тоді і лише тоді, коли її порядок дорівнює  $p$  або  $p^2$ ; ці ж автори довели, що скінченна група має скінченний тип над кільцем цілих  $p$ -адичних чисел тоді і лише тоді, коли її силовська  $p$ -підгрупа є циклічною скінченного типу. Після цього почалося вивчення ручних груп над кільцем цілих  $p$ -адичних чисел. Л. О. Назарова довела ручність групи  $(2,2)$ , А. В. Яковлев довів ручність циклічної групи порядку 8, а на завершення П. М. Гудивок отримав критерій ручності для довільних скінченних  $p$ -груп. А саме, він довів, що скінченна (неодинарна)  $p$ -група є ручною тоді і лише тоді, коли або  $p \neq 2$  і група має скінченний тип, або  $p = 2$  і група є циклічною групою порядку  $2^r$ ,  $r \leq 3$ , або групою  $(2,2)$ .

Ідейно близькою до задачі про зображення груп над цілими  $p$ -адичними числами є задача про зображення груп над кільцями цілих величин, пов'язаних з  $p$ -адичними числами.

**Теорема 5.1** ([3], [69], [71], [72], [67], [109]). *Нехай  $G$  – скінченна  $p$ -група і  $|G| > 1$ ,  $F_p$  – скінченне розширення поля  $\mathbb{Q}_p$ ,  $K_p$  – кільце цілих величин поля  $F_p$ ,  $T_p$  – поле інерції поля  $F_p$ . Група  $G$  є ручною над кільцем  $K_p$  тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов:*

- 1)  $G$  – абелева група типу  $(2, 2)$  і  $F_2 = T_2$ ;
- 2)  $G$  – циклічна  $p$ -група порядку  $p$  ( $p > 2$ ) і  $F_p = T_p$ ;
- 3)  $G$  – циклічна 2-група порядку 8 і  $F_2 = T_2$ ;
- 4)  $G$  – група порядку  $p$  ( $p > 3$ ) і  $(F_p : T_p) \leq 2$ ;
- 5)  $G$  – циклічна група порядку 4 і  $(F_2 : T_2) \leq 2$ ;
- 6)  $G$  – група порядку 3 і  $(F_3 : T_3) \leq 4$ ;
- 7)  $G$  – група порядку 2.

Переходимо тепер до задачі про зображення схрещених групових кілець над  $p$ -адичними числами.

В [62] – [65], [7] вивчалась задача про число  $n(\Lambda)$  нееквівалентних нерозкладних матричних  $\mathbb{Z}_p$ -зображень кільця  $\Lambda$ . Із цих результатів випливає наступна теорема про опис схрещених групових кілець скінченної  $p$ -групи та кільця цілих  $p$ -адичних чисел, що мають скінченний тип.

**Теорема 5.2** ([47]). *Нехай  $G$  – скінченна  $p$ -група і  $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$  – схрещене групове кільце групи  $G$  і кільця цілих  $p$ -адичних чисел  $\mathbb{Z}_p$  з системою факторів із  $\mathbb{Z}_p^*$ .  $\widehat{\Lambda} = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$ ,  $T_2 = \mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$ ,  $\widehat{\Lambda}' = T_2 \otimes_{\mathbb{Q}_p} \widehat{\Lambda}$  і  $d \in \mathbb{N}$  є числом нееквівалентних матричних  $\mathbb{Q}_p$ -зображень алгебри  $\widehat{\Lambda}$ .  $n(\Lambda)$  – число нееквівалентних нерозкладних матричних  $\mathbb{Z}_p$ -зображень кільця  $\Lambda$  є скінченним тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

- 1)  $G$  – циклічна група порядку  $p^r$  ( $r \leq 2$ );
- 2)  $G$  – циклічна  $p$ -група ( $p > 2$ ) і  $d < 3$ ;
- 3)  $G$  – циклічна 2-група і  $d = 1$ ;
- 4)  $G$  – абелева група типу  $(3, 3)$  і  $d = 2$ ;
- 5)  $G$  – абелева група типу  $(2^m, 2)$  ( $m \geq 1$ ) і кільце  $\Lambda' = R_2 \otimes_{\mathbb{Z}_2} \Lambda$  ( $R_2$  – кільце цілих величин поля  $T_2$ ) задається співвідношеннями:
 
$$u^{2^m} = -5^r, v^2 = 1, uv = vu (0 \leq r < 2^m);$$
- 6)  $G$  – абелева група типу  $(2^m, 2)$  ( $m \geq 1$ ) і  $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$  некомутативне кільце і  $\widehat{\Lambda}' = T_2 \otimes_{\mathbb{Q}_p} \widehat{\Lambda}$  є простою алгеброю;
- 7)  $G$  – група діедра і  $\widehat{\Lambda}' = T_2 \otimes_{\mathbb{Q}_p} \widehat{\Lambda}$  є простою алгеброю.

Зробимо деяке зауваження до цієї теореми, а саме пояснимо, звідки береться число 5. Добре відомо, що при  $n > 2$  групою оборотних елементів кільця класів лишків по модулю  $2^n$  є (абелева) група типу  $(2, 2^{n-2})$ , яка породжується елементами  $-1$  та  $5$ . Звідси маємо, що якщо  $u^{2^n} = \lambda$ , де  $\lambda$  – оборотний елемент кільця  $\mathbb{Z}_2$ , то  $u$  по модулю числа  $2^n$  дорівнює  $(\pm 5)^r$ , а, скориставшись лемою Гензеля, легко бачити, що після заміни  $u$  на  $u' = x^{2^m} u$  для деякого  $x$ , отримає-

мо  $(u')^{2^n} = (\pm 5)^r$ . Якщо ж  $p > 2$ , то вказана група оборотних елементів є циклічною. Надалі, як правило, будемо використовувати подібні факти без додаткових посилань.

При вивченні схрещених групових кілець, пов'язаних із задачами скінченного типу, також розглядалися більш загальні ситуації.

Для проєктивних зображень має місце наступна теорема.

**Теорема 5.3** ([77]). *Нехай  $G$  – скінченна група,  $H$  – силовська підгрупа групи  $G$ ,  $F_p$  – скінченне розширення поля  $\mathbb{Q}_p$ ,  $T_p$  – поле інерції поля  $F_p$  і  $R_p$  є кільцем цілих величин поля  $F_p$ . Число нееквівалентних і нерозкладних проєктивних матричних  $R_p$ -зображень групи  $G$  скінченне тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

- 1)  $H$  – циклічна група порядку  $p^2$  і  $F_p = T_p$ ;
- 2)  $H$  – циклічна група порядку  $p > 3$  і  $(F_p : T_p) \leq 2$ ;
- 3)  $H$  – циклічна група порядку 3 і  $(F_p : T_p) \leq 3$ ;
- 4)  $H$  – група порядку 2.

У цьому розділі дисертації детально вивчаються ручні випадки при  $p = 2$ , тобто вивчається задача про ручність схрещених групових кілець скінченної 2-групи та кільця цілих 2-адичних чисел. На протязі всього розділу будемо вважати, що система факторів складається із оборотних елементів кільця (раніше ця вимога вказувалася явно).

## 5.2. Матричні зображення схрещених групових кілець циклічної 2-групи

Основним результатом цього підрозділу є наступна теорема.

**Теорема 5.4.** *Нехай  $G$  – циклічна 2-група порядку  $|G| = 2^m$  ( $m \geq 1$ ),  $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda)$  – схрещене групове кільце групи  $G$  і кільця цілих 2-адичних чисел  $\mathbb{Z}_2$  з системою факторів  $\{\lambda_{a,b}\}$  ( $\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_2^*$ ). Схрещене групове кільце  $\Lambda$  є ручним над  $\mathbb{Z}_2$  тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

- 1)  $|G| \leq 8$ ;
- 2)  $|G| = 2^m$  ( $m > 3$ ) і  $\hat{\Lambda} = \mathbb{Q}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_2} \Lambda \in \text{полем}$ .

Нам знадобиться наступна лема.

**Лема 5.5** ([96]). Нехай  $F_p$  – скінченне розширення поля  $\mathbb{Q}_p$ ,  $T_p$  – скінченне нерозгалужене розширення поля  $F_p$ ,  $R_p(L_p)$  – кільце цілих величин поля  $F_p(T_p)$  і  $\Lambda \in$  скінченновимірним  $R_p$ -порядком в сепарабельній  $F_p$ -алгебрі і  $\Lambda' = L_p \otimes_{R_p} T_p$ .  $\Lambda$ -порядок є диким над  $R_p$  тоді і тільки тоді, якщо  $\Lambda'$ -порядок є диким над  $L_p$ .

Переходимо до доведення теореми.

Група  $G$  є циклічною групою порядку  $2^m$  ( $m \geq 1$ ), тоді кільце  $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda)$  може бути задане наступними співвідношеннями (див. зауваження в розділі 5.1):

$$u^{2^m} = \pm 5^r \quad (0 \leq r \leq 2^m).$$

Розглянемо наступні можливі випадки.

1) Нехай  $u^{2^m} = -5^r$  ( $0 \leq r \leq 2^m$ ). Тоді  $\Lambda \cong \mathbb{Z}_2[\theta]$ , де  $\theta$  – корінь незвідного многочлена:  $x^{2^m} + 5^r$  над полем  $\mathbb{Q}_2$ . В цьому випадку за теоремою 5.2  $n(\Lambda) < \infty$  ( $n(\Lambda)$  – число нееквівалентних нерозкладних матричних  $\mathbb{Z}_2$ -зображень кільця  $\Lambda$ ).

2) Нехай  $u^{2^m} = 5^r$  ( $0 \leq r \leq 2^m$ ). Випадок  $r = 0$  є очевидним (теореми 5.1 і 5.2). Нехай далі  $r \neq 0$ . Тоді

$$r = 2^s \quad (0 \leq s \leq m).$$

В цьому випадку ми також отримаємо декілька випадків.

а) Нехай  $s = 4$  і  $m = 5$ , тобто  $u^{2^5} = 5^{2^4}$ . Покладемо  $u_1 = \frac{u^2}{5}$ .

Тоді маємо:

$$u_1^{2^4} = \frac{u^{2^5}}{5^{2^4}} = 1.$$

Звідси випливає, що кільце  $\Lambda$  містить групове кільце  $\mathbb{Z}_2 H$  ( $H$  – циклічна група 16-го порядку). Тоді, на основі теореми 5.1 ми отримаємо, що  $\Lambda$  є диким кільцем над кільцем  $\mathbb{Z}_2$ .

б)  $s = 0$ . Тоді, за теоремою 5.2  $n(\Lambda) < \infty$ .

с)  $S = 3, m = 4$ , тобто

$$u^{16} = 5^8.$$

Розкладемо поліном

$$x^{16} - 5^8 = (x^8 + 5^4)(x^4 + 5^2)(x^2 + 5)(x^2 - 5).$$

Перейдемо до розгляду поля  $T = \mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$ . Нехай  $R$  є кільцем цілих величин поля  $T$ . Тоді отримаємо, що алгебра  $T \otimes_{\mathbb{Q}_2} \Lambda$  матиме 5 незвідних  $T$ -зображень, беручи до уваги, що

$$x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}).$$

Таким чином, беручи до уваги лему 5.5, отримаємо, що  $\Lambda$  є диким порядком над  $\mathbb{Z}_2$ .

д)  $S = 2, m = 3$ , тобто

$$u^8 = 5^4.$$

Перейдемо до розгляду поля  $T = \mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$ . Нехай  $R$  – кільце цілих величин поля  $T$ .

Тоді отримаємо, що

$$u_1^8 = 1,$$

де  $u_1 = \frac{u}{\sqrt{5}}$ . Звідси та з теореми 5.1 одержуємо, що  $\Lambda$  не є диким кільцем.

е) Нехай  $S = 2, m = 4$ , тобто

$$u^{16} = 5^4.$$

Розкладемо поліном

$$x^{16} - 5^8 = (x^8 - 5^2)(x^8 + 5^2) = (x^8 + 5^2)(x^4 + 5)(x^4 - 5).$$

Нехай  $\theta_3$  – корінь многочлена  $x^8 + 5^2$ ,  $\theta_2$  – многочлена  $x^4 + 5$ ,  $\theta_1$  – многочлена  $x^4 - 5$ .

Покладемо  $t_3 = \theta_3 - 1, t_2 = \theta_2 - 1$ .

Нехай  $\tilde{\theta}_i$  – матриця, що відповідає оператору множення на  $\theta_i$  в  $\mathbb{Z}_2$ -базисі  $1, \theta_i, \dots, \theta_i^{m_i}$  кільця  $Z_2[\theta_i]$ ;  $\tilde{\theta}_i^{(n)} = \tilde{\theta}_i \otimes E$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $E$  – одинична матриця розміру  $n \times n$ ,  $A \otimes B$  – кронекеровий добуток матриць  $A$  і  $B$ ) і  $\langle \delta_{rj} \rangle$  – матриця розміру  $m_r \times m_j$ , у якої всі стовпці, крім останнього, нульові, а останній містить

координати елемента  $\delta_{rj} \in \mathbb{Z}_2[\theta_r]$  в  $\mathbb{Z}_2$ -базисі  $1, \theta_r, \dots, \theta_r^{m_r}$  кільця  $\mathbb{Z}_2[\theta_r]$  ( $r = 2, 3; 1 \leq j < r$ ).

Розглянемо наступне  $\mathbb{Z}_2$ -зображення  $\Gamma(A, B)$  кільця  $\Lambda$ :

$$\Gamma_u(A, B) = \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_3^{(n)} & 0 & \langle t_3^2 \rangle \otimes E & 0 & \langle 1 \rangle \otimes A & \langle 1 \rangle \otimes B \\ 0 & \tilde{\theta}_3^{(n)} & 0 & \langle t_3 \rangle \otimes E & \langle 1 \rangle \otimes E & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\theta}_2^{(n)} & 0 & \langle t_2 \rangle \otimes E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_2^{(n)} & 0 & \langle t_2^2 \rangle \otimes E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_1^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_1^{(n)} \end{pmatrix},$$

де  $A$  і  $B$  – довільні матриці розміру  $n \times n$  над кільцем  $\mathbb{Z}_2$ ,  $E$  – одинична матриця розміру  $n \times n$  і  $n$  – довільне натуральне число.

Нехай зображення  $\Gamma(A, B)$  і  $\Gamma(A', B')$  є  $\mathbb{Z}_2$ -еквівалентні, тобто існує така оборотна над  $\mathbb{Z}_2$  матриця  $C$ , що

$$C\Gamma_u(A, B) = \Gamma_u(A', B')C, \quad (5.1)$$

де  $C = \|C_{ij}\|$ ,  $C_{ij}$  – матриці розміру  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}_2$  ( $1 \leq i, j \leq 6$ ).

Перепишемо (5.1) у вигляді

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_3^{(n)} & 0 & \langle t_3^2 \rangle \otimes E & 0 & \langle 1 \rangle \otimes A & \langle 1 \rangle \otimes B \\ 0 & \tilde{\theta}_3^{(n)} & 0 & \langle t_3 \rangle \otimes E & \langle 1 \rangle \otimes E & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\theta}_2^{(n)} & 0 & \langle t_2 \rangle \otimes E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_2^{(n)} & 0 & \langle t_2^2 \rangle \otimes E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_1^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_1^{(n)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_3^{(n)} & 0 & \langle t_3^2 \rangle \otimes E & 0 & \langle 1 \rangle \otimes A' & \langle 1 \rangle \otimes B' \\ 0 & \tilde{\theta}_3^{(n)} & 0 & \langle t_3 \rangle \otimes E & \langle 1 \rangle \otimes E & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\theta}_2^{(n)} & 0 & \langle t_2 \rangle \otimes E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_2^{(n)} & 0 & \langle t_2^2 \rangle \otimes E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_1^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_1^{(n)} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}.$$

Виконавши в останній матричній рівності операцію множення матриць, прирівнюємо відповідні елементи у лівій та правій частинах отриманої рівності.

Прирівнюючи елементи на місці (6,1), отримаємо

$$C_{61} \tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)} C_{61}. \quad (5.2)$$

Прирівнюючи елементи на місці (6,2), отримаємо

$$C_{62} \tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)} C_{62}. \quad (5.3)$$

Прирівнюючи елементи на місці (6,3), отримаємо

$$C_{61} \langle t_3^2 \rangle \otimes E + C_{63} \tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)} C_{63}. \quad (5.4)$$

Прирівнюючи елементи на місці (6,4), отримаємо

$$C_{62} \langle t_3 \rangle \otimes E + C_{64} \tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)} C_{64}. \quad (5.5)$$

Прирівнюючи елементи на місці (6,5), отримаємо

$$C_{61} \langle 1 \rangle \otimes A + C_{62} \langle 1 \rangle \otimes E + C_{63} \langle t_2 \rangle \otimes E + C_{65} \tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)} C_{65}. \quad (5.6)$$

Прирівнюючи елементи на місці (6,6), отримаємо

$$C_{61} \langle 1 \rangle \otimes B + C_{64} \langle t_2^2 \rangle \otimes E + C_{66} \tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)} C_{66}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (5,1), отримаємо

$$C_{51} \tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)} C_{51}. \quad (5.7)$$

Прирівнюючи елементи на місці (5,2), отримаємо

$$C_{52}\tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)}C_{52}. \quad (5.8)$$

Прирівнюючи елементи на місці (5,3), отримаємо

$$C_{51}\langle t_3^2 \rangle \otimes E + C_{53}\tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)}C_{53}. \quad (5.9)$$

Прирівнюючи елементи на місці (5,4), отримаємо

$$C_{52}\langle t_3 \rangle \otimes E + C_{54}\tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)}C_{54}. \quad (5.10)$$

Прирівнюючи елементи на місці (5,5), отримаємо

$$C_{51}\langle 1 \rangle \otimes A + C_{52}\langle 1 \rangle \otimes E + C_{53}\langle t_2 \rangle \otimes E + C_{55}\tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)}C_{55}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (5,6), отримаємо

$$C_{51}\langle 1 \rangle \otimes B + C_{54}\langle t_2^2 \rangle \otimes E + C_{56}\tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)}C_{56}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (4,1), отримаємо

$$C_{41}\tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{41} + \langle t_2^2 \rangle \otimes EC_{61}. \quad (5.11)$$

Прирівнюючи елементи на місці (4,2), отримаємо

$$C_{42}\tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{42} + \langle t_2^2 \rangle \otimes EC_{62}. \quad (5.12)$$

Прирівнюючи елементи на місці (4,3), отримаємо

$$C_{41}\langle t_3^2 \rangle \otimes E + C_{43}\tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{43} + \langle t_2^2 \rangle \otimes EC_{63}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (4,4), отримаємо

$$C_{42}\langle t_3 \rangle \otimes E + C_{44}\tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{44} + \langle t_2^2 \rangle \otimes EC_{64}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (4,5), отримаємо

$$C_{41}\langle 1 \rangle \otimes A + C_{42}\langle 1 \rangle \otimes E + C_{43}\langle t_2 \rangle \otimes E + C_{45}\tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{45} + \langle t_2^2 \rangle \otimes EC_{65}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (4,6), отримаємо

$$C_{41}\langle 1 \rangle \otimes B + C_{44}\langle t_2^2 \rangle \otimes E + C_{46}\tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{46} + \langle t_2^2 \rangle \otimes EC_{66}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,1), отримаємо

$$C_{31}\tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{31} + \langle t_2 \rangle \otimes EC_{51}. \quad (5.13)$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,2), отримаємо

$$C_{32}\tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{32} + \langle t_2 \rangle \otimes EC_{52}. \quad (5.14)$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,3), отримаємо

$$C_{31}\langle t_3^2 \rangle \otimes E + C_{33}\tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{33} + \langle t_2 \rangle \otimes EC_{53}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,4), отримаємо

$$C_{32}\langle t_3 \rangle \otimes E + C_{34}\tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{34} + \langle t_2 \rangle \otimes EC_{54}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,5), отримаємо

$$C_{31}\langle 1 \rangle \otimes A + C_{32}\langle 1 \rangle \otimes E + C_{33}\langle t_2 \rangle \otimes E + C_{35}\tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{35} + \langle t_2 \rangle \otimes EC_{65}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,6), отримаємо

$$C_{31}\langle 1 \rangle \otimes B + C_{34}\langle t_2^2 \rangle \otimes E + C_{36}\tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{36} + \langle t_2 \rangle \otimes EC_{56}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,1), отримаємо

$$C_{21}\tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)}C_{21} + \langle t_3 \rangle \otimes EC_{41} + \langle 1 \rangle \otimes EC_{51}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,2), отримаємо

$$C_{22}\tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)}C_{22} + \langle t_3 \rangle \otimes EC_{42} + \langle 1 \rangle \otimes EC_{52}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,3), отримаємо

$$C_{21}\langle t_3^2 \rangle \otimes E + C_{23}\tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)}C_{23} + \langle t_3 \rangle \otimes EC_{43} + \langle 1 \rangle \otimes EC_{53}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,4), отримаємо

$$C_{22}\langle t_3 \rangle \otimes E + C_{24}\tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)}C_{24} + \langle t_3 \rangle \otimes EC_{44} + \langle 1 \rangle \otimes EC_{54}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,5), отримаємо

$$C_{21}\langle 1 \rangle \otimes A + C_{22}\langle 1 \rangle \otimes E + C_{23}\langle t_2 \rangle \otimes E + C_{25}\tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)}C_{25} + \langle t_3 \rangle \otimes EC_{45} + \\ + \langle 1 \rangle \otimes EC_{55}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,6), отримаємо

$$C_{21}\langle 1 \rangle \otimes B + C_{24}\langle t_2^2 \rangle \otimes E + C_{26}\tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)}C_{26} + \langle t_2 \rangle \otimes EC_{46} + \langle 1 \rangle \otimes EC_{56}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,1), отримаємо

$$C_{11}\tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)}C_{11} + \langle t_3^2 \rangle \otimes EC_{31} + \langle 1 \rangle \otimes A' C_{51} + \langle 1 \rangle \otimes B' C_{61}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,2), отримаємо

$$C_{12}\tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)}C_{12} + \langle t_3^2 \rangle \otimes EC_{32} + \langle 1 \rangle \otimes A' C_{52} + \langle 1 \rangle \otimes B' C_{62}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,3), отримаємо

$$C_{11}\langle t_3^2 \rangle \otimes E + C_{13}\tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)}C_{13} + \langle t_3^2 \rangle \otimes EC_{33} + \langle 1 \rangle \otimes A' C_{53} + \\ + \langle 1 \rangle \otimes B' C_{63}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,4), отримаємо

$$C_{12}\langle t_3 \rangle \otimes E + C_{14}\tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)}C_{14} + \langle t_3^2 \rangle \otimes EC_{34} + \langle 1 \rangle \otimes A'C_{54} + \\ + \langle 1 \rangle \otimes B'C_{64}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,5), отримаємо

$$C_{11}\langle 1 \rangle \otimes A + C_{12}\langle 1 \rangle \otimes E + C_{13}\langle t_2 \rangle \otimes E + C_{15}\tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)}C_{15} + \langle t_3^2 \rangle \otimes EC_{35} + \\ + \langle 1 \rangle \otimes A'C_{55} + \langle 1 \rangle \otimes B'C_{65}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,6), отримаємо

$$C_{11}\langle 1 \rangle \otimes B + C_{14}\langle t_2^2 \rangle \otimes E + C_{16}\tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)}C_{16} + \langle t_3^2 \rangle \otimes EC_{36} + \langle 1 \rangle \otimes A'C_{56} + \\ + \langle 1 \rangle \otimes B'C_{66}.$$

Враховуючи, що зображення  $u \rightarrow \tilde{\theta}_i^{(n)}$  ( $i = 1,2,3$ ) є незвідними, то використовуючи лему Шура, з рівностей (2)-(14) маємо, що

$$C = \begin{pmatrix} \tilde{\Theta}_3 & C_1 & C_2 \\ 0 & \tilde{\Theta}_2 & C_3 \\ 0 & 0 & \tilde{\Theta}_1 \end{pmatrix},$$

де  $\Theta_k = \|\delta_{ij}^k\|$  ( $\delta_{ij}^k \in \mathbb{Z}_p[\theta_k]$ ,  $k = 1,2,3$ ), причому  $\Theta_k$  – матриця розміру  $2n \times 2n$  ( $k = 1,2,3$ ).

Нехай

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} t_3^2 E & 0 \\ 0 & t_3 E \end{pmatrix}, \Delta_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ E & 0 \end{pmatrix}, \Delta_3 = \begin{pmatrix} t_2 E & 0 \\ 0 & t_2^2 E \end{pmatrix}, \Delta'_2 = \begin{pmatrix} A' & B' \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

звідки

$$\Gamma_u(A, B) = \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_3^{(2n)} & \Delta_1 & \Delta_2 \\ 0 & \tilde{\theta}_2^{(2n)} & \Delta_3 \\ 0 & 0 & \tilde{\theta}_1^{(2n)} \end{pmatrix}.$$

Звідси, виконавши в рівності (5.1) операцію множення матриць, прирівнюємо відповідні елементи у лівій та правій частинах отриманої матричної рівності.

Прирівнюючи елементи на місці (1,1), отримаємо

$$\tilde{\theta}_3^{(2n)}\tilde{\Theta}_3 = \tilde{\Theta}_3\tilde{\theta}_3^{(2n)}. \quad (5.15)$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,2), отримаємо

$$\tilde{\theta}_3^{(2n)}C_1 + \Delta_1\tilde{\Theta}_2 = \tilde{\Theta}_3\Delta_1 + C_1\tilde{\theta}_2^{(2n)}. \quad (5.16)$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,3), отримаємо

$$\tilde{\theta}_3^{(2n)} C_2 + \Delta_1 C_3 + \Delta_2 \tilde{\Theta}_1 = \tilde{\Theta}_3 \Delta'_2 + C_1 \Delta_3 + C_2 \tilde{\theta}_3^{(2n)}. \quad (5.17)$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,2), отримаємо

$$\tilde{\theta}_2^{(2n)} \tilde{\Theta}_2 = \tilde{\Theta}_2 \tilde{\theta}_2^{(2n)}. \quad (5.18)$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,3), отримаємо

$$\tilde{\theta}_2^{(2n)} C_3 + \Delta_3 \tilde{\Theta}_1 = \tilde{\Theta}_2 \Delta_3 + C_3 \tilde{\theta}_3^{(2n)}. \quad (5.19)$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,3), отримаємо

$$\tilde{\theta}_3^{(2n)} \tilde{\Theta}_1 = \tilde{\Theta}_1 \tilde{\theta}_3^{(2n)}. \quad (5.20)$$

Нехай

$$\Theta_i = \begin{pmatrix} X_i & Y_i \\ V_i & W_i \end{pmatrix},$$

де  $X_i, W_i$  – матриці розміру  $n \times n$ . Тоді з рівностей (5.15)-(5.20) отримаємо

$$X_3^{-1} A X_3 \equiv A' \pmod{P_1},$$

$$X_3^{-1} B X_3 \equiv B' \pmod{P_1},$$

де  $P_1 = t_3 \mathbb{Z}_2[\theta_3]$ .

Звідси та з леми 5.5 одержимо, що  $\Lambda$  є диким кільцем над  $\mathbb{Z}_2$ .

f) Нехай  $S = 1$ ,  $m = 4$ , тобто

$$u^{16} = 5^2.$$

В цьому випадку маємо

$$x^{16} - 5^2 = (x^8 + 5)(x^8 - 5),$$

звідки

$$x^{16} - 5^2 = (x^8 + 5)(x^4 + \sqrt{5})(x^4 - \sqrt{5}).$$

Нехай  $\theta_1$  – корінь многочлена  $x^8 + 5$ ,  $\theta_2$  – многочлена  $x^4 + \sqrt{5}$ ,  $\theta_3$  – многочлена  $x^4 - \sqrt{5}$ ,  $t_i = \theta_i - 1$ , ( $i = 1, 2, 3$ ). Розглянемо наступне  $R$ -зображення  $\Gamma(A, B)$  кільця  $\Lambda$ :

$$\Gamma_u(A, B) = \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_1^{(n)} & 0 & \langle t_1^2 \rangle \otimes E & 0 & \langle 1 \rangle \otimes A & \langle 1 \rangle \otimes B \\ 0 & \tilde{\theta}_1^{(n)} & 0 & \langle t_1 \rangle \otimes E & \langle 1 \rangle \otimes E & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\theta}_2^{(n)} & 0 & \langle t_2 \rangle \otimes E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_2^{(n)} & 0 & \langle t_2^2 \rangle \otimes E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_3^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_3^{(n)} \end{pmatrix},$$

де  $A$  і  $B$  – довільні матриці розміру  $n \times n$  над кільцем  $\mathbb{Z}_2$ ,  $E$  – одинична матриця розміру  $n \times n$  і  $n$  – довільне натуральне число.

Нехай зображення  $\Gamma(A, B)$  і  $\Gamma(A', B')$  є  $\mathbb{Z}_2$ -еквівалентні, тобто існує така оборотна над  $\mathbb{Z}_2$  матриця  $C$ , що

$$C\Gamma_u(A, B) = \Gamma_u(A', B')C, \quad (5.21)$$

де  $C = \|C_{ij}\|$ ,  $C_{ij}$  – матриці розміру  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}_2$  ( $1 \leq i, j \leq 6$ ).

Перепишемо (5.21) у вигляді

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_1^{(n)} & 0 & \langle t_1^2 \rangle \otimes E & 0 & \langle 1 \rangle \otimes A & \langle 1 \rangle \otimes B \\ 0 & \tilde{\theta}_1^{(n)} & 0 & \langle t_1 \rangle \otimes E & \langle 1 \rangle \otimes E & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\theta}_2^{(n)} & 0 & \langle t_2 \rangle \otimes E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_2^{(n)} & 0 & \langle t_2^2 \rangle \otimes E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_3^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_3^{(n)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_1^{(n)} & 0 & \langle t_1^2 \rangle \otimes E & 0 & \langle 1 \rangle \otimes A' & \langle 1 \rangle \otimes B' \\ 0 & \tilde{\theta}_1^{(n)} & 0 & \langle t_1 \rangle \otimes E & \langle 1 \rangle \otimes E & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\theta}_2^{(n)} & 0 & \langle t_2 \rangle \otimes E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_2^{(n)} & 0 & \langle t_2^2 \rangle \otimes E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_3^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_3^{(n)} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}.$$

Виконавши в останній матричній рівності операцію множення матриць, прирівнюємо відповідні елементи у лівій та правій частинах отриманої рівності.

Прирівнюючи елементи на місці (6,1), отримаємо

$$C_{61} \tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)} C_{61}. \quad (5.22)$$

Прирівнюючи елементи на місці (6,2), отримаємо

$$C_{62} \tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)} C_{62}. \quad (5.23)$$

Прирівнюючи елементи на місці (6,3), отримаємо

$$C_{61} \langle t_1^2 \rangle \otimes E + C_{63} \tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)} C_{63}. \quad (5.24)$$

Прирівнюючи елементи на місці (6,4), отримаємо

$$C_{62} \langle t_1 \rangle \otimes E + C_{64} \tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)} C_{64}. \quad (5.25)$$

Прирівнюючи елементи на місці (6,5), отримаємо

$$C_{61} \langle 1 \rangle \otimes A + C_{62} \langle 1 \rangle \otimes E + C_{63} \langle t_2 \rangle \otimes E + C_{65} \tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)} C_{65}. \quad (5.26)$$

Прирівнюючи елементи на місці (6,6), отримаємо

$$C_{61} \langle 1 \rangle \otimes B + C_{64} \langle t_3^2 \rangle \otimes E + C_{66} \tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)} C_{66}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (5,1), отримаємо

$$C_{51} \tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)} C_{51}. \quad (5.27)$$

Прирівнюючи елементи на місці (5,2), отримаємо

$$C_{52} \tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)} C_{52}. \quad (5.28)$$

Прирівнюючи елементи на місці (5,3), отримаємо

$$C_{51}\langle t_1^2 \rangle \otimes E + C_{53}\tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)}C_{53}. \quad (5.29)$$

Прирівнюючи елементи на місці (5,4), отримаємо

$$C_{52}\langle t_1 \rangle \otimes E + C_{54}\tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)}C_{54}. \quad (5.30)$$

Прирівнюючи елементи на місці (5,5), отримаємо

$$C_{51}\langle 1 \rangle \otimes A + C_{52}\langle 1 \rangle \otimes E + C_{53}\langle t_2 \rangle \otimes E + C_{55}\tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)}C_{55}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (5,6), отримаємо

$$C_{51}\langle 1 \rangle \otimes B + C_{54}\langle t_1^2 \rangle \otimes E + C_{56}\tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_3^{(n)}C_{56}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (4,1), отримаємо

$$C_{41}\tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{41} + \langle t_2^2 \rangle \otimes EC_{61}. \quad (5.31)$$

Прирівнюючи елементи на місці (4,2), отримаємо

$$C_{42}\tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{42} + \langle t_2^2 \rangle \otimes EC_{62}. \quad (5.32)$$

Прирівнюючи елементи на місці (4,3), отримаємо

$$C_{41}\langle t_1^2 \rangle \otimes E + C_{43}\tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{43} + \langle t_2^2 \rangle \otimes EC_{63}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (4,4), отримаємо

$$C_{42}\langle t_1 \rangle \otimes E + C_{44}\tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{44} + \langle t_2^2 \rangle \otimes EC_{64}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (4,5), отримаємо

$$C_{41}\langle 1 \rangle \otimes A + C_{42}\langle 1 \rangle \otimes E + C_{43}\langle t_2 \rangle \otimes E + C_{45}\tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{45} + \langle t_2^2 \rangle \otimes EC_{65}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (4,6), отримаємо

$$C_{41}\langle 1 \rangle \otimes B + C_{44}\langle t_2^2 \rangle \otimes E + C_{46}\tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{46} + \langle t_2^2 \rangle \otimes EC_{66}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,1), отримаємо

$$C_{31}\tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{31} + \langle t_2 \rangle \otimes EC_{51}. \quad (5.33)$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,2), отримаємо

$$C_{32}\tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{32} + \langle t_2 \rangle \otimes EC_{52}. \quad (5.34)$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,3), отримаємо

$$C_{31}\langle t_1^2 \rangle \otimes E + C_{33}\tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{33} + \langle t_2 \rangle \otimes EC_{53}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,4), отримаємо

$$C_{32}\langle t_1 \rangle \otimes E + C_{34}\tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{34} + \langle t_2 \rangle \otimes EC_{54}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,5), отримаємо

$$C_{31}\langle 1 \rangle \otimes A + C_{32}\langle 1 \rangle \otimes E + C_{33}\langle t_2 \rangle \otimes E + C_{35}\tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{35} + \langle t_2 \rangle \otimes EC_{65}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,6), отримаємо

$$C_{31}\langle 1 \rangle \otimes B + C_{34}\langle t_2^2 \rangle \otimes E + C_{36}\tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_2^{(n)}C_{36} + \langle t_2 \rangle \otimes EC_{56}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,1), отримаємо

$$C_{21}\tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)}C_{21} + \langle t_1 \rangle \otimes EC_{41} + \langle 1 \rangle \otimes EC_{51}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,2), отримаємо

$$C_{22}\tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)}C_{22} + \langle t_1 \rangle \otimes EC_{42} + \langle 1 \rangle \otimes EC_{52}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,3), отримаємо

$$C_{21}\langle t_1^2 \rangle \otimes E + C_{23}\tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)}C_{23} + \langle t_1 \rangle \otimes EC_{43} + \langle 1 \rangle \otimes EC_{53}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,4), отримаємо

$$C_{22}\langle t_1 \rangle \otimes E + C_{24}\tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)}C_{24} + \langle t_1 \rangle \otimes EC_{44} + \langle 1 \rangle \otimes EC_{54}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,5), отримаємо

$$C_{21}\langle 1 \rangle \otimes A + C_{22}\langle 1 \rangle \otimes E + C_{23}\langle t_2 \rangle \otimes E + C_{25}\tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)}C_{25} + \langle t_1 \rangle \otimes EC_{45} + \langle 1 \rangle \otimes EC_{55}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,6), отримаємо

$$C_{21}\langle 1 \rangle \otimes B + C_{24}\langle t_2^2 \rangle \otimes E + C_{26}\tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)}C_{26} + \langle t_2 \rangle \otimes EC_{46} + \langle 1 \rangle \otimes EC_{56}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,1), отримаємо

$$C_{11}\tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)}C_{11} + \langle t_1^2 \rangle \otimes EC_{31} + \langle 1 \rangle \otimes A'C_{51} + \langle 1 \rangle \otimes B'C_{61}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,2), отримаємо

$$C_{12}\tilde{\theta}_1^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)}C_{12} + \langle t_1^2 \rangle \otimes EC_{32} + \langle 1 \rangle \otimes A'C_{52} + \langle 1 \rangle \otimes B'C_{62}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,3), отримаємо

$$C_{11}\langle t_1^2 \rangle \otimes E + C_{13}\tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)}C_{13} + \langle t_1^2 \rangle \otimes EC_{33} + \langle 1 \rangle \otimes A'C_{53} + \langle 1 \rangle \otimes B'C_{63}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,4), отримаємо

$$C_{12}\langle t_1 \rangle \otimes E + C_{14}\tilde{\theta}_2^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)}C_{14} + \langle t_1^2 \rangle \otimes EC_{34} + \langle 1 \rangle \otimes A'C_{54} +$$

$$+\langle 1 \rangle \otimes B' C_{64}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,5), отримаємо

$$C_{11}\langle 1 \rangle \otimes A + C_{12}\langle 1 \rangle \otimes E + C_{13}\langle t_2 \rangle \otimes E + C_{15}\tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)}C_{15} + \langle t_1^2 \rangle \otimes EC_{35} + \\ + \langle 1 \rangle \otimes A' C_{55} + \langle 1 \rangle \otimes B' C_{65}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,6), отримаємо

$$C_{11}\langle 1 \rangle \otimes B + C_{14}\langle t_2^2 \rangle \otimes E + C_{16}\tilde{\theta}_3^{(n)} = \tilde{\theta}_1^{(n)}C_{16} + \langle t_1^2 \rangle \otimes EC_{36} + \langle 1 \rangle \otimes A' C_{56} + \\ + \langle 1 \rangle \otimes B' C_{66}.$$

Враховуючи, що зображення  $u \rightarrow \tilde{\theta}_i^{(n)}$  ( $i = 1,2,3$ ) є незвідними і використовуючи лему Шура, з рівностей (5.22)-(5.34) маємо, що

$$C = \begin{pmatrix} \tilde{\Theta}_1 & C_1 & C_2 \\ 0 & \tilde{\Theta}_2 & C_3 \\ 0 & 0 & \tilde{\Theta}_3 \end{pmatrix},$$

де  $\Theta_k = \|\delta_{ij}^k\|$  ( $\delta_{ij}^k \in \mathbb{Z}_p[\theta_k]$ ,  $k = 1,2,3$ ), причому  $\Theta_k$  – матриця розміру  $2n \times 2n$  ( $k = 1,2,3$ ).

Нехай

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} t_1^2 E & 0 \\ 0 & t_1 E \end{pmatrix}, \Delta_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ E & 0 \end{pmatrix}, \Delta_3 = \begin{pmatrix} t_2 E & 0 \\ 0 & t_2^2 E \end{pmatrix}, \Delta'_2 = \begin{pmatrix} A' & B' \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

звідки

$$\Gamma_u(A, B) = \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_1^{(2n)} & \Delta_1 & \Delta_2 \\ 0 & \tilde{\theta}_2^{(2n)} & \Delta_3 \\ 0 & 0 & \tilde{\theta}_3^{(2n)} \end{pmatrix}.$$

Звідси, виконавши в рівності (5.21) операцію множення матриць, прирівнюємо відповідні елементи у лівій та правій частинах отриманої матричної рівності.

Прирівнюючи елементи на місці (1,1), отримаємо

$$\tilde{\theta}_1^{(2n)}\tilde{\Theta}_3 = \tilde{\Theta}_3\tilde{\theta}_1^{(2n)}. \quad (5.35)$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,2), отримаємо

$$\tilde{\theta}_1^{(2n)}C_1 + \Delta_1\tilde{\Theta}_2 = \tilde{\Theta}_3\Delta_1 + C_1\tilde{\theta}_2^{(2n)}. \quad (5.36)$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,3), отримаємо

$$\tilde{\theta}_1^{(2n)}C_2 + \Delta_1C_3 + \Delta_2\tilde{\Theta}_1 = \tilde{\Theta}_3\Delta'_2 + C_1\Delta_3 + C_2\tilde{\theta}_1^{(2n)}. \quad (5.37)$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,2), отримаємо

$$\tilde{\theta}_2^{(2n)} \tilde{\Theta}_2 = \tilde{\Theta}_2 \tilde{\theta}_2^{(2n)}. \quad (5.38)$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,3), отримаємо

$$\tilde{\theta}_2^{(2n)} C_3 + \Delta_3 \tilde{\Theta}_1 = \tilde{\Theta}_2 \Delta_3 + C_3 \tilde{\theta}_1^{(2n)}. \quad (5.39)$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,3), отримаємо

$$\tilde{\theta}_1^{(2n)} \tilde{\Theta}_1 = \tilde{\Theta}_1 \tilde{\theta}_1^{(2n)}. \quad (5.40)$$

Нехай

$$\Theta_i = \begin{pmatrix} X_i & Y_i \\ V_i & W_i \end{pmatrix},$$

де  $X_i, W_i$  – матриці розміру  $n \times n$ . Тоді з рівностей (5.35)-(5.40) отримаємо

$$X_3^{-1} A X_3 \equiv A' \pmod{P_1},$$

$$X_3^{-1} B X_3 \equiv B' \pmod{P_1},$$

де  $P_1 = t_1 \mathbb{Z}_2[\theta_1]$ .

Звідси та з леми 5.5 одержимо, що  $\Lambda$  є диким кільцем над  $\mathbb{Z}_2$ .

г) Нехай  $S = 1$ ,  $m = 3$ , тобто

$$u^8 = 5^2.$$

Тоді маємо

$$x^8 - 5^2 = (x^4 + 5)(x^4 - 5) = (x^4 + 5)(x^2 - \sqrt{5})(x^2 + \sqrt{5}).$$

Нехай  $\theta_3$  – корінь многочлена  $x^4 + 5$ ,  $\theta_2$  – многочлена  $x^2 + \sqrt{5}$ ,  $\theta_1$  – многочлена  $x^2 - \sqrt{5}$ . Позначимо через  $F_i = T(\theta_i)$  повне розгалужене розширення поля  $T$  ( $i = 1,2,3$ ),  $R[\theta_i]$  – кільце цілих величин  $F_i$  ( $i = 1,2,3$ ). Знову побудуємо зображення:

$$u \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_3 & \langle t_3^i \rangle \otimes E \\ 0 & \tilde{\theta}_2 \end{pmatrix} \quad (i = 0,1),$$

$$u \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_3 & \langle t_3^i \rangle \otimes E \\ 0 & \tilde{\theta}_1 \end{pmatrix} \quad (j = 0,1),$$

$$u \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_2 & \langle t_2^j \rangle \otimes E \\ 0 & \tilde{\theta}_1 \end{pmatrix} (j = 0,1),$$

які також є нееквівалентні і нерозкладні. Аналогічно попередньому випадку доводиться що  $\Lambda$  не є диким над  $\mathbb{Z}_2$ .

□

### 5.3. Критерій ручності відносно проєктивних зображень

Групу назвемо ручною чи дикою відносно проєктивних зображень над кільцем  $\mathbb{Z}_p$ , якщо такою є задача про опис її проєктивних зображень, або, іншими словами, задача про опис зображень будь-якого схрещеного групового кільця цієї групи і  $\mathbb{Z}_p$ ; аналогічно дається означення ручних чи диких схрещених групових кілець. Для скінченного типу також природно дати такі означення.

Основним результатом цього підрозділу є наступна теорема.

**Теорема 5.6.** *Нехай  $G$  – скінченна  $p$ -група. Задача про опис всіх нееквівалентних проєктивних  $\mathbb{Z}_p$ -зображень групи  $G$  є ручною тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

- 1)  $G$  – циклічна група порядку  $p^r$  ( $r \leq 2$ );
- 2)  $G$  – циклічна група порядку 8;
- 3)  $G$  – абелева група типу (2,2).

**Доведення.** Оскільки цей критерій збігається з критерієм для звичайних зображень над  $\mathbb{Z}_p$  (тобто для зображень із одиничною системою факторів), то достатньо показати, що ручною є будь-яке схрещене групове кільце групи вигляду 1) – 3) і  $\mathbb{Z}_p$  з неединичною системою факторів.

За теоремою 5.3 при  $p > 2$  будь-яке схрещене групове кільце циклічної  $p$ -групи порядку  $p^r$  ( $r \leq 2$ ) і кільця  $\mathbb{Z}_p$  є ручним; більш того, за теоремою 5.2 (див. 1)) воно має скінченний тип. За теоремою 5.4 будь-яке схрещене групове кільце циклічної 2-групи порядку  $2^r \leq 3$  кільця  $\mathbb{Z}_2$  є ручним. За теоремою 5.2 (див. 5), 6) при  $m = 2$ ) будь-яке схрещене групове кільце групи (2,2) і кільця  $\mathbb{Z}_2$

з неединичною системою факторів має скінченний тип, а значить є ручним.

□

Тепер розглянемо зв'язок між проєктивними зображеннями групи та її силовської підгрупи.

Доведемо спочатку наступну лему.

**Лема 5.7.** Нехай  $H$  – підгрупа скінченної групи  $G$ .  $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$  – схрещене групове кільце групи  $G$  і кільця цілих  $p$ -адичних чисел  $\mathbb{Z}_p$  з системою факторів із  $\mathbb{Z}_p^*$ ,  $\Lambda_H = (H, \mathbb{Z}_p, \lambda) \subset \Lambda$ . Якщо  $\Lambda_H$  є диким кільцем над  $\mathbb{Z}_p$ , тоді і  $\Lambda$  є диким кільцем над  $\mathbb{Z}_p$ .

**Доведення.** Нехай  $M$  –  $\Lambda_H$ -модуль з скінченним  $\mathbb{Z}_p$ -базисом і

$$M^\Lambda = \Lambda \otimes_{\Lambda_H} M,$$

де

$$u(v \otimes m) = uv \otimes m (u, v \in \Lambda; m \in M).$$

Нехай

$$\{u_g | g \in G\}$$

є природним  $\mathbb{Z}_p$ -базисом кільця  $\Lambda$ . Тоді можемо записати

$$M^\Lambda = u_{g_1} \otimes M \oplus \dots \oplus u_{g_s} \otimes M, \quad (5.41)$$

де  $g_1, g_2, \dots, g_s$  є повною системою представників лівих суміжних класів групи  $G$  за підгрупою  $H$  ( $g_1 = e$ ). Очевидно, що  $u_e$  – одиничний елемент кільця  $\Lambda$  і

$$u_e \otimes M \cong M$$

як  $\Lambda_H$  модулі.

Звідси маємо, що

$$W = u_{g_2} \otimes M \oplus \dots \oplus u_{g_s} \otimes M$$

є  $\Lambda_H$ -модулем із скінченним  $\mathbb{Z}_p$ -базисом.

Тоді з (5.41) випливає, що

$$(M^\Lambda)_{\Lambda_H} \cong M \oplus W. \quad (5.42)$$

Звідси, якщо  $M_1$  –  $\Lambda_H$ -модуль з скінченним  $\mathbb{Z}_p$ -базисом, тоді

$$(M_1^\Lambda)_{\Lambda_H} \cong M_1 \oplus W_1. \quad (5.43)$$

Для  $\Lambda$ -модулів справедлива теорема Крулля-Шмідта, тому з (5.42) і (5.43) отримаємо, що задача ізоморфізму  $\Lambda$ -модулів  $M^\Lambda$  і  $M_1^\Lambda$  містить задачу ізоморфізму  $\Lambda_H$ -модулів  $M$  та  $M_1$ . Таким чином, якщо  $\Lambda_H$  є диким кільцем над  $\mathbb{Z}_p$ , тоді кільце  $\Lambda$  також буде диким над  $\mathbb{Z}_p$ .

□

Має місце наступна теорема.

**Теорема 5.8.** *Нехай  $G$  – скінченна група з силовською  $p$ -підгрупою  $H$ ,  $p > 2$ . Задача про опис всіх нееквівалентних проєктивних  $\mathbb{Z}_p$ -зображень групи  $G$  є ручною тоді і тільки тоді, коли  $H$  – циклічна група порядку  $p^r$  ( $r \leq 2$ ).*

**Доведення.** Дійсно, якщо  $H$  – циклічна група порядку  $p^r$  ( $r \leq 2$ ), то за теоремою 5.3 група  $G$  має (відносно проєктивних зображень) скінченний тип, а значить є ручною; якщо ж  $H$  не є такою групою, то за доведеною вище теоремою 5.6 вона є дикою (відносно проєктивних зображень), а тоді за лемою 5.7 дикою є і сама група  $G$ .

□

#### 5.4. Матричні зображення схрещених групових кілець абелевих 2-груп і кільця цілих 2-адичних чисел з $(\pm)$ одиничною системою факторів

У цьому підрозділі буде доведена наступна теорема.

**Теорема 5.9.** *Нехай  $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda)$  – схрещене групове кільце скінченної абелевої 2-групи  $G$  і кільця цілих 2-адичних чисел  $\mathbb{Z}_2$  з системою факторів  $\{\lambda_{a,b}\}$  ( $\lambda_{a,b} = \pm 1, a, b \in G$ ).  $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda)$  є ручним над  $\mathbb{Z}_2$  тоді і тільки тоді, якщо виконується одна з наступних умов:*

- a)  $G$  – циклічна група порядку  $2^r$  ( $r \leq 3$ ) і  $\Lambda = \mathbb{Z}_2 G$ ;
- b)  $G$  – група типу  $(2,2)$  і  $\Lambda = \mathbb{Z}_2 G$ ;
- c)  $G$  – циклічна 2-група порядку  $2^m$  ( $m \geq 1$ ) і  $\tilde{\Lambda} = \mathbb{Q}_1 \otimes \Lambda$  є поле;
- d)  $G$  – група типу  $(2^m, 2)$  ( $m \geq 1$ ) і  $\Lambda$  – кільце із твірними співвідношеннями  $u^{2^m} = -1$ ,  $v^2 = 1$ ,  $uv = vu$ ;
- e)  $G$  – група типу  $(4, 2)$  і  $\Lambda$  – кільце із твірними співвідношеннями:  $u^4 = 1$ ,  $v^2 = -1$ ,  $uv = vu$ .

Переходимо до доведення теореми.

**Лема 5.10.** Нехай  $G$  – абелева група типу  $(4,4)$  і  $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$  – схрещене групове кільце групи  $G$  і кільця цілих 2-адичних чисел з системою факторів  $\{\lambda_{a,b}\}$  ( $\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_2^*$ ,  $a, b \in G$ ). Кільце  $\Lambda$  є диким над кільцем  $\mathbb{Z}_2$ .

**Доведення.** Кільце  $\Lambda$  задається наступними співвідношеннями

$$u^4 = \alpha 5^r, v^4 = \beta 5^s, (0 \leq r < 4, 0 \leq s < 4; \alpha, \beta = \pm 1). \quad (5.44)$$

Розглянемо наступні випадки:

- 1)  $u^4 = 1, v^4 = 1$ ;
- 2)  $u^4 = \alpha, v^4 = \beta, \alpha\beta = -1$ ;
- 3)  $u^4 = -5, v^4 = 1$ ;
- 4)  $u^4 = 5, v^4 = -1$ ;
- 5)  $u^4 = 5, v^4 = 1$ ;
- 6)  $u^4 = 5^2, v^4 = 1$ ;
- 7)  $u^4 = 5^2, v^4 = -1$ ;
- 8)  $u^4 = -5^2, v^4 = 1$ .

В 1) та 2) випадках  $\Lambda$  є диким за теоремою 5.1. Дикість у випадках 6) -8) впливає із леми 5.5 і теореми 5.6 (якщо перейдемо до розгляду зображень кільця  $\Lambda$  над кільцем  $R$  кільцем цілих величин поля  $T = \mathbb{Q}_2(5)$ ).

У випадку 5) покладемо  $u_1 = \frac{u^2}{\sqrt{5}}$ . Тоді маємо кільце  $\Lambda'_H$  ( $H$  – група типу (2,4);  $\Lambda'_H \subset \Lambda', \Lambda' = R \otimes_{\mathbb{Z}_2} \Lambda$ .) з наступними співвідношеннями:

$$u_1^2 = 1, \quad v^2 = 1, \quad u_1 v = v u_1.$$

З теореми 5.1 одержуємо, що  $\Lambda'_H$  є диким кільцем. Звідси та з лем 5.5 та 5.7 отримаємо, що  $\Lambda$  є диким кільцем.

Над кільцем  $R$  випадки 3) і 4) виводяться один з одного. Тому залишається тільки випадок:

$$u^4 = 5, \quad v^4 = -1, \quad uv = vu.$$

Нехай  $\varepsilon$  – первісний корінь 8-го степеня з одиниці. Тоді випадок 4) зводиться до випадку  $K$ -зображення кільця  $\Lambda_1: u^4 = 5$  ( $K = R[\varepsilon]$  – кільце цілих величин поля  $T(\varepsilon)$ ). Очевидно  $(T(\varepsilon):T) = 4$ .

Розглянемо рівність

$$x^4 - 5 = (x^2 - \sqrt{5})(x^2 + \sqrt{5}).$$

Нехай

$$\theta_1^2 = \sqrt{5}, \quad \theta_2^2 = -\sqrt{5},$$

$$L = K[\theta_1], \quad t = 1 - \varepsilon.$$

$$\pi = \theta_1 - 1,$$

$$V_j = t^j L + \pi L \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$2 = \lambda t^4 (\lambda \in K^*).$$

Очевидно, що  $V_j$  буде  $\Lambda_1$ -модулем, якщо ми покладемо  $ux = \theta_1 x$  ( $x \in V_j$ ).

Звідси

$$ut^j = \theta_j t^j = (\theta_1 - 1)t^j + t^j; \quad (5.45)$$

звідки

$$\begin{aligned} u\pi &= \theta_1(\theta_1 - 1); \\ u\pi &= \theta_1^2 - \theta_1; \\ u\pi &= \sqrt{5} - \theta_1; \\ u\pi &= \sqrt{5} - 1 - (\theta_1 - 1); \\ u\pi &= \sqrt{5} - 1 - \pi; \\ u\pi &= 2\omega^{-1} - 1; \\ u\pi &= \lambda\omega^{-1} - \pi; \\ u\pi &= (\lambda_1 t^{4-j})t^j - \pi, \end{aligned} \quad (5.46)$$

де

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda\omega^{-1}, \\ \omega &= \frac{\sqrt{5}+1}{2}, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} \omega^2 - \omega - 1 &= \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} - 1; \\ \omega^2 - \omega - 1 &= \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} - 1; \\ \omega^2 - \omega - 1 &= \frac{3 + \sqrt{5} - \sqrt{5} - 1 - 2}{2}, \end{aligned}$$

звідки

$$\omega^2 - \omega - 1 = 0.$$

Звідси маємо, що  $\omega$  є цілою величиною поля  $T$ , тобто  $\omega \in R$ . Таким чином,

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2};$$

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} - 1,$$

звідки

$$\omega_1 = \omega - 1.$$

Звідси маємо, що  $\omega_1 \in R$ .

Розглянемо

$$\omega \omega_1 = \omega(\omega - 1);$$

$$\omega \omega_1 = \omega^2 - \omega;$$

$$\omega \omega_1 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

звідки

$$\omega \omega_1 = 1.$$

Очевидно  $\omega, \omega_1 \in R^*$ .

Із рівностей (5.45) та (5.46) маємо, що зображення

$$\Delta_j: u \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 t^{4-j} \\ t^j & -1 \end{pmatrix} = \tilde{V}_j, (j = 1, 2, 3) \quad (5.47)$$

є незвідним  $K$ -зображенням кільця  $\Lambda_1$ .

Нехай маємо відображення

$$\widetilde{W}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda\omega t^2 \\ t^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\widetilde{W}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_2 t^2 \\ t^2 & -1 \end{pmatrix},$$

де  $\lambda_2 = -\lambda\omega$ .

Звідси

$$\widetilde{W}_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda\omega t^2 \\ t^2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda\omega t^2 \\ t^2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{W}_2^2 = \begin{pmatrix} 1 - \lambda\omega t^4 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda\omega t^4 \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{W}_2^2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

звідки

$$\widetilde{W}_2^2 = -\sqrt{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

отже

$$\widetilde{W}_2^2 = -\sqrt{5}E.$$

Це впливає з рівності

$$1 - \lambda\omega t^4 = 1 - 2\omega = 1 - 1 - \sqrt{5} = -\sqrt{5}.$$

Звідси одержимо, що відображення

$$\Delta: u \rightarrow \widetilde{W}_2$$

є незвідним  $K$ -зображенням кільця  $\Lambda_1$ , та  $\Delta_j$  і  $\Delta$  є нееквівалентними над полем  $T(\varepsilon)$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Розглянемо зображення  $\Gamma(A, B)$ :

$$\Gamma_u(A, B) = \begin{pmatrix} E \otimes \widetilde{V}_3 & 0 & S_1 \\ 0 & E \otimes \widetilde{V}_1 & S_2 \\ 0 & 0 & E \otimes \widetilde{W}_2 \end{pmatrix}, \quad (5.48)$$

де

$$S_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & tE \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} tE & 0 \\ 0 & tE \end{pmatrix},$$

$E$  – одинична матриця розміру  $n \times n$ ;  $A, B$  – довільні матриці розміру  $n \times n$  над  $K$  ( $\det A \not\equiv 0 \pmod{t}$ ),  $A \otimes B$  позначає кронекеровий добуток матриць  $A$  та  $B$ .

Звідси дістанемо

$$\begin{aligned} \Gamma_u^2 &= \begin{pmatrix} E \otimes \widetilde{V}_3 & 0 & S_1 \\ 0 & E \otimes \widetilde{V}_1 & S_2 \\ 0 & 0 & E \otimes \widetilde{W}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \otimes \widetilde{V}_3 & 0 & S_1 \\ 0 & E \otimes \widetilde{V}_1 & S_2 \\ 0 & 0 & E \otimes \widetilde{W}_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{5}E' & 0 & (E \otimes \widetilde{V}_3)S_1 + S_1(E \otimes \widetilde{W}_2) \\ 0 & \sqrt{5}E' & (E \otimes \widetilde{V}_1)S_2 + S_2(E \otimes \widetilde{W}_2) \\ 0 & 0 & -\sqrt{5}E' \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} E'' & D \\ 0 & -E'' \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

звідки

$$\Gamma_u^4 = 5E''' ,$$

де  $E'''$  – одинична матриця розміру  $3n \times 3n$ .

Таким чином,  $\Gamma$  є  $K$ -зображенням кільця  $\Lambda_1$ .

Нехай

$$\Gamma_u(A, B)C = C\Gamma_u(A', B'), \quad (5.49)$$

де  $C$  – оборотна матриця розміру  $3n \times 3n$  над кільцем  $K$ .

Очевидно, що  $C$  має наступний вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_5 \\ C_3 & C_4 & C_6 \\ 0 & 0 & C_7 \end{pmatrix}.$$

Тоді із (5.49) отримаємо, що

$$\begin{pmatrix} E \otimes \widetilde{V}_3 & 0 & S_1 \\ 0 & E \otimes \widetilde{V}_1 & S_2 \\ 0 & 0 & E \otimes \widetilde{W}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_5 \\ C_3 & C_4 & C_6 \\ 0 & 0 & C_7 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_5 \\ C_3 & C_4 & C_6 \\ 0 & 0 & C_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \otimes \widetilde{V}_3 & 0 & S_1' \\ 0 & E \otimes \widetilde{V}_1 & S_2 \\ 0 & 0 & E \otimes \widetilde{W}_2 \end{pmatrix}.$$

Позначимо через

$$E \otimes \widetilde{V}_3 = \widetilde{V}_3^{(n)},$$

$$E \otimes \widetilde{V}_1 = \widetilde{V}_1^{(n)},$$

$$E \otimes \widetilde{W}_2 = \widetilde{W}_2^{(n)}.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_3^{(n)} C_1 & \widetilde{V}_3^{(n)} C_2 & \widetilde{V}_3^{(n)} C_5 + S_1 C_7 \\ \widetilde{V}_1^{(n)} C_3 & \widetilde{V}_1^{(n)} C_4 & \widetilde{V}_1^{(n)} C_6 + S_2 C_7 \\ 0 & 0 & \widetilde{W}_2^{(n)} C_7 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} C_1 \widetilde{V}_3^{(n)} & C_2 \widetilde{V}_1^{(n)} & C_1 S_1' + C_2 S_2 + C_5 \widetilde{W}_2^{(n)} \\ C_3 \widetilde{V}_3^{(n)} & C_4 \widetilde{V}_1^{(n)} & C_3 S_1' + C_4 S_2 + C_6 \widetilde{W}_2^{(n)} \\ 0 & 0 & C_7 \widetilde{W}_2^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,1), отримаємо

$$\widetilde{V}_3^{(n)} C_1 = C_1 \widetilde{V}_3^{(n)}. \quad (5.50)$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,1), отримаємо

$$\widetilde{V}_1^{(n)} C_3 = C_3 \widetilde{V}_3^{(n)}. \quad (5.51)$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,2), отримаємо

$$\widetilde{V}_3^{(n)} C_2 = C_2 \widetilde{V}_1^{(n)}. \quad (5.52)$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,2), отримаємо

$$\widetilde{V}_1^{(n)} C_4 = C_4 \widetilde{V}_1^{(n)}. \quad (5.53)$$

Прирівнюючи елементи на місці (3,3), отримаємо

$$\widetilde{W}_2^{(n)} C_7 = C_7 \widetilde{W}_2^{(n)}. \quad (5.54)$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,3), отримаємо

$$\widetilde{V}_1^{(n)} C_6 + S_2 C_7 = C_3 S_1' + C_4 S_2 + C_6 \widetilde{W}_2^{(n)}. \quad (5.55)$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,3), отримаємо

$$\widetilde{V}_3^{(n)} C_5 + S_1 C_7 = C_1 S_1' + C_2 S_2 + C_5 \widetilde{W}_2^{(n)}. \quad (5.56)$$

Із рівності (5.50) маємо

$$\begin{pmatrix} E & \lambda_1 t E \\ t^3 E & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ Z_1 & U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ Z_1 & U_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \lambda_1 t E \\ t^3 E & -E \end{pmatrix},$$

звідки

$$\begin{pmatrix} X_1 + \lambda_1 t Z_1 & Y_1 + \lambda_1 t U_1 \\ t^3 X_1 - Z_1 & t^3 Y_1 - U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + t^3 Y_1 & \lambda_1 t X_1 - Y_1 \\ Z_1 + t^3 U_1 & \lambda_1 t Z_1 - U_1 \end{pmatrix}.$$

Звідси, прирівнюючи елементи на місці (1,1) одержимо, що

$$X_1 + \lambda_1 t Z_1 = X_1 + t^3 Y_1,$$

звідки

$$\lambda_1 t Z_1 = t^3 Y_1.$$

Звідси

$$Z_1 = \lambda_1^{-1} t^2 Y_1.$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,2) отримаємо

$$Y_1 + \lambda_1 t U_1 = \lambda t X_1 - Y_1,$$

звідки

$$2Y_1 + \lambda_1 t U_1 = \lambda_1 t X_1.$$

Звідси

$$U_1 = X_1 - \lambda_1^{-1} 2t^{-1} Y_1 = X_1 + \gamma_1 t^3 Y_1 \quad (\gamma_1 \in K^*).$$

В результаті маємо

$$C_1 = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ \lambda_1^{-1} t^2 Y_1 & X_1 + \gamma_1 t^3 Y_1 \end{pmatrix} (\gamma_1 \in K^*). \quad (5.57)$$

З рівності (5.53) маємо

$$\begin{pmatrix} E & \lambda_1 t^3 E \\ tE & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_4 & Y_4 \\ Z_4 & U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_4 & Y_4 \\ Z_4 & U_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \lambda_1 t^3 E \\ tE & -E \end{pmatrix},$$

звідки

$$\begin{pmatrix} X_4 + \lambda_1 t^3 Z_4 & Y_4 + \lambda_1 t^3 U_4 \\ tX_4 - Z_4 & tY_4 - U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_4 + tY_4 & \lambda_1 t^3 X_4 - Y_4 \\ Z_4 + tU_4 & \lambda_1 t^3 Z_4 - U_4 \end{pmatrix}.$$

Звідси, прирівнюючи елементи на місці (1,1), отримаємо

$$X_4 + \lambda_1 t^3 Z_4 = X_4 + tY_4,$$

звідки

$$Y_4 = \lambda_1 t^2 Z_4.$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,2), отримаємо

$$Y_4 + \lambda_1 t^3 U_4 = \lambda_1 t^3 X_4 - Y_4,$$

звідки

$$\lambda_1 t^3 U_4 = \lambda_1 t^3 X_4 - 2Y_4$$

і

$$U_4 = X_4 + \gamma_4 t^3 Y_4 \quad (\gamma_4 \in K^*).$$

Таким чином, маємо

$$C_4 = \begin{pmatrix} X_4 & \lambda_1 t^2 Z_4 \\ Z_4 & X_4 + \gamma_4 t^3 Y_4 \end{pmatrix} \quad (\gamma_4 \in K^*). \quad (5.58)$$

З рівності (5.11) маємо

$$\begin{pmatrix} E & \lambda_1 t^3 E \\ tE & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_3 & Y_3 \\ Z_3 & U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 & Y_3 \\ Z_3 & U_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \lambda_1 tE \\ t^3 E & -E \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо

$$\begin{pmatrix} X_3 + \lambda_1 t^3 Z_3 & Y_3 + \lambda_1 t^3 U_3 \\ tX_3 - Z_3 & tY_3 - U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 + t^3 Y_3 & \lambda tX_3 - Y_3 \\ Z_3 + t^3 U_3 & \lambda_1 tZ_3 - U_3 \end{pmatrix}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,1), отримаємо

$$X_3 + \lambda_1 t^3 Z_3 = X_3 + t^3 Y_3,$$

звідки

$$Y_3 = \lambda_1 Z_3.$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,1), отримаємо

$$tX_3 - Z_3 = Z_3 + t^3 U_3,$$

звідки

$$X_3 = t^2 X'_3.$$

Таким чином, маємо

$$C_3 = \begin{pmatrix} t^2 X'_3 & \lambda_1 Z_3 \\ Z_3 & U_3 \end{pmatrix}. \quad (5.59)$$

З рівності (5.12) маємо

$$\begin{pmatrix} E & \lambda_1 t E \\ t^3 E & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 & Y_2 \\ Z_2 & U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 & Y_2 \\ Z_2 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \lambda_1 t^3 E \\ t E & -E \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} X_2 + \lambda_1 t Z_2 & Y_2 + \lambda_1 t U_2 \\ t^3 X_2 - Z_2 & t^2 Y_2 - U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 + t Y_2 & \lambda_1 t X_2 - Y_2 \\ Z_2 + t U_2 & \lambda_1 t^3 Z_2 - U_2 \end{pmatrix}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,1), отримаємо

$$X_2 + \lambda_1 t Z_2 = X_2 + t Y_2,$$

звідки

$$Y_2 = \lambda_1 Z_2.$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,1), отримаємо

$$t^3 X_2 - Z_2 = Z_2 + t U_2,$$

звідки

$$U_2 = t^2 U'_2.$$

Таким чином, маємо

$$C_2 = \begin{pmatrix} X_2 & \lambda_1 Z_2 \\ Z_2 & t^2 U'_2 \end{pmatrix}. \quad (5.60)$$

З рівності (5.54) отримаємо

$$\begin{pmatrix} E & \lambda_2 t^2 E \\ t^2 E & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_7 & Y_7 \\ Z_7 & U_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_7 & Y_7 \\ Z_7 & U_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \lambda_2 t^2 E \\ t^2 E & -E \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо

$$\begin{pmatrix} X_7 + \lambda_2 t^2 Z_7 & Y_7 + \lambda_2 t^2 U_7 \\ t^2 X_7 - Z_7 & t^2 Y_7 - U_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_7 + t^2 Y_7 & \lambda_2 t^2 X_7 - Y_7 \\ Z_7 + t^2 U_7 & \lambda_2 t^2 Z_7 - U_7 \end{pmatrix}.$$

Прирівнюючи елементи на місці (1,1), отримаємо

$$X_7 + \lambda_2 t^2 Z_7 = X_7 + t^2 Y_7,$$

звідки

$$Y_7 = \lambda_2 Z_7.$$

Прирівнюючи елементи на місці (2,1), отримаємо

$$t^2 X_7 - Z_7 = Z_7 + t^2 U_7,$$

звідки

$$U_7 = X_7 + t^2 X_7'.$$

Звідси

$$C_2 = \begin{pmatrix} X_7 & \lambda_2 Z_7 \\ Z_7 & X_7 + t^2 X_7' \end{pmatrix}. \quad (5.61)$$

Таким чином, з (5.55), (5.58), (5.59), (5.60) і (5.61) маємо

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} E & 0 \\ tE & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_6 & Y_6 \\ Z_6 & U_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tE & 0 \\ 0 & tE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_7 & Y_7 \\ Z_7 & U_7 \end{pmatrix} \equiv \\ & \equiv \begin{pmatrix} t^2 X_3' & \lambda_1 Z_3 \\ Z_3 & U_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & tE \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} X_4 & \lambda_1 t^2 Z_4 \\ Z_4 & X_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} tE & 0 \\ 0 & tE \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_6 & Y_6 \\ Z_6 & U_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \lambda_2 t^2 E \\ t^2 E & -E \end{pmatrix} \pmod{t^3}. \end{aligned}$$

Звідси, прирівнюючи елементи матриці на місці (1,1) за модулем  $t^3$ , отримаємо

$$X_6 + tX_7 \equiv t^2 X_3' A' + tX_4 + X_6 + t^2 Y_6 \pmod{t^3},$$

звідки

$$X_7 \equiv X_4 \pmod{t}. \quad (5.62)$$

Прирівнюючи елементи матриці на місці (2,1) за модулем  $t^3$ , отримаємо

$$tX_6 - Z_6 + tZ_7 \equiv Z_3A' + tZ_4 + Z_6 + t^2U_6 \pmod{t^3}.$$

Звідси

$$Z_3A' \equiv 0 \pmod{t}.$$

Нехай

$$\det A' \not\equiv 0 \pmod{t}.$$

Тоді, очевидно

$$Z_3 \equiv 0 \pmod{t}. \quad (5.63)$$

Прирівнюючи елементи матриці на місці (1,2) за модулем  $t^3$ , отримаємо

$$Y_6 + tY_7 \equiv t^2X_3B' + t\lambda_1Z_3 + \lambda_2t^2X_6 - Y_6 \pmod{t^3}.$$

Звідси та із (5.63) маємо

$$Y_7 \equiv 0 \pmod{t}.$$

Таким чином, отримали, що

$$C_2 \equiv \begin{pmatrix} X_7 & 0 \\ 0 & X_7 \end{pmatrix} \pmod{t}. \quad (5.64)$$

З (5.56), (5.57), (5.60) і (5.62) маємо

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} E & \lambda_1 t E \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_5 & Y_5 \\ Z_5 & U_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & tE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_7 & \lambda_2 Z_7 \\ Z_7 & U_7 \end{pmatrix} \equiv \\ & \equiv \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ \lambda_1^{-1} t^2 Y_1 & X_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & tE \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} X_4 & \lambda_1 t^2 Z_4 \\ Z_4 & X_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} tE & 0 \\ 0 & tE \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_5 & Y_5 \\ Z_5 & U_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \lambda_2 t^2 E \\ t^2 E & E \end{pmatrix} \pmod{t^3}. \quad (5.65) \end{aligned}$$

Прирівнюючи, в останній конгруенції, елементи матриці на місці (1,2) за модулем  $t^3$ , отримаємо

$$X_5 + \lambda_1 t Z_5 + AX_7 + BZ_7 \equiv X_1 A' + tX_4 + X_5 + t^2 Y_5 \pmod{t^3}.$$

Звідси та з (5.64), отримаємо

$$A' X_7 \equiv X_1 A' \pmod{t}. \quad (5.66)$$

Прирівнюючи елементи матриці на місці (2,1) за модулем  $t^3$ , отримаємо

$$Z_5 + tZ_7 \equiv \lambda_1^{-1} t^2 Y_1 A' + tZ_4 + Z_5 + t^2 U_5 \pmod{t^3},$$

звідки

$$Z_4 \equiv 0 \pmod{t}.$$

Прирівнюючи елементи матриці на місці (1,2) за модулем  $t^3$ , отримаємо

$$Y_5 + \lambda_1 t U_5 + \lambda_2 AZ_7 + BU_7 \equiv X_1 B' + tY_1 + \lambda_1 t Z_2 + \lambda_2 t^2 X_5 + Y_5 \pmod{t^3}.$$

Звідси та з конгруенції (5.64) отримаємо

$$BU_7 \equiv X_1 B' \pmod{t}. \quad (5.67)$$

Прирівнюючи елементи матриці на місці (2,2) за модулем  $t^3$ , отримаємо

$$U_5 + tU_7 \equiv \lambda_1^{-1} t^2 Y_1 B' + tX_1 + \lambda_2 t^2 Z_5 + U_5 \pmod{t^3},$$

звідки

$$U_7 \equiv X_1 \pmod{t}.$$

З (5.62), (5.64), (5.66) і (5.67) отримаємо

$$X_7 \equiv X_4 \equiv X_1 \pmod{t},$$

$$AX_1 \equiv X_1 A' \pmod{t},$$

$$BX_1 \equiv X_1 B' \pmod{t},$$

звідки

$$C \equiv \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & X_2 & 0 & * & * \\ 0 & X_1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & X_1 & 0 & * & * \\ 0 & U_3 & Z_4 & X_1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 \end{pmatrix} \pmod{t}.$$

Звідси

$$\det C \equiv (\det X_1)^6 \pmod{t},$$

звідки маємо

$$\det X_1 \not\equiv 0 \pmod{t}.$$

Одержали, що кільце  $\Lambda_1$  є диким над  $K$ . Звідси робимо висновок, що кільце  $\Lambda$  є диким над  $R$ .

□

**Лема 5.11.** *Нехай  $G$  – скінченна абелева 2-група з  $t$  твірними елементами і  $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda)$  – схрещене групове кільце групи  $G$  і кільця цілих 2-адичних чисел  $\mathbb{Z}_2$  з системою факторів  $\{\lambda_{a,b}\}$  ( $\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_2^*$ ,  $a, b \in G$ ),  $\mathbb{Z}_2^*$  – мультиплікативна група кільця  $\mathbb{Z}_2$ ). Якщо  $t > 2$ , то кільце  $\Lambda$  є диким над кільцем  $\mathbb{Z}_2$ .*

**Доведення.** Нехай  $t > 2$ . Тоді очевидно, що  $G$  містить абелеву підгрупу  $H$  типу  $(2, 2, 2)$ .  $\Lambda_H$  може бути задана співвідношеннями:

- 1)  $u^2 = 1, v^2 = \omega^2 = 1$ ;
- 2)  $u^2 = -1, v^2 = \omega^2 = 1$ ;
- 3)  $u^2 = 5, v^2 = 1, \omega^2 = 1$ ;
- 4)  $u^2 = 5, v^2 = 1, \omega^2 = -1$ ;
- 5)  $u^2 = -5, v^2 = 1, \omega^2 = 1$ .

За теоремою 5.1 у випадку 1), 2) і 5)  $\Lambda_H$  буде диким кільцем. У випадку 3) одержимо  $\Lambda_H$ , якщо замінимо  $\mathbb{Z}_2$  на  $R$  ( $R$  – кільце цілих величин поля  $\mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$ ). У випадку 4) також матимемо дикість, оскільки, група типу  $(2,2)$  є дикою над  $R[i]$ . Звідси, з леми 5.5 та 5.7 отримаємо, що  $\Lambda$  є диким над  $\mathbb{Z}_2$ .

□

**Лема 5.12.** *Нехай  $G$  – абелева група типу  $(2^m, 2)$  ( $m \geq 1$ ) і  $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda)$  – схрещене групове кільце групи  $G$  і кільця цілих 2-адичних чисел з системою факторів  $\{\lambda_{a,b}\}$  ( $\lambda_{a,b} = \pm 1$ ). Кільце  $\Lambda$  не є диким тоді і тільки тоді, якщо виконується одна з наступних умов:*

1)  $G$  – група типу  $(2, 2)$  і  $\Lambda = \mathbb{Z}_2 G$ ;

2)  $G$  – група типу  $(2^m, 2)$  ( $m \geq 1$ ) і  $\Lambda$  задається співвідношеннями:

$$u^{2^m} = -1, v^2 = 1, uv = vu;$$

3)  $G$  – група типу  $(4, 2)$  і  $\Lambda$  задається співвідношеннями:  $u^4 = 1, v^2 = -1, uv = vu$ .

**Доведення.** Очевидно, що  $\Lambda$  має наступні твірні співвідношення:

$$u^{2^m} = \alpha, v^2 = \beta, uv = vu \quad (\alpha, \beta = \pm 1).$$

Звідси отримаємо 3 випадки:

1)  $u^{2^m} = 1, v^2 = 1$ ;

2)  $u^{2^m} = -1, v^2 = 1$ ;

3)  $u^{2^m} = 1, v^2 = -1$ .

У випадку 1), коли  $m > 1$ , як випливає з теореми 5.2,  $\Lambda$  є диким кільцем. Інакше, коли  $m = 1$ , воно ним не буде за цією ж теоремою. В 2)-му випадку  $n(\Lambda) < \infty$ .

У випадку 3), коли  $m > 2$ ,  $\Lambda$  є диким кільцем. Інакше, коли  $m \leq 2$ ,  $\Lambda$  не буде диким. Ці випадки впливають з теореми 5.1.

□

Теорема 5.9 впливає із теореми 5.4 лем 5.10, 5.11 і 5.12.

## 5.5. Висновки до розділу 5

Результати цього розділу опубліковані в [12], [13], [15] і [16]. Вони стосуються матричних зображень схрещених групових кілець скінченних груп над кільцем цілих  $p$ -адичних чисел.

В цьому розділі:

- 1) описано ручні скінченні  $p$ -групи відносно проєктивних зображень над кільцем цілих  $p$ -адичних чисел;
- 2) доведено необхідну і достатню умови ручності схрещеного групового кільця циклічної 2-групи  $G$  порядку  $|G| = 2^m$  ( $m \geq 1$ ) і кільця цілих 2-адичних чисел  $\mathbb{Z}_2$  з системою факторів  $\{\lambda_{a,b}\}$  ( $\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_2^*$ ,  $a, b \in G$ );
- 3) доведено дикість схрещеного групового кільця абелевої групи типу (4,4) чи типу (2,2,2) і кільця цілих 2-адичних чисел з системою факторів  $\{\lambda_{a,b}\}$  ( $\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_2^*$ ,  $a, b \in G$ );
- 4) описано ручні схрещені групові кільця скінченної абелевої 2-групи  $G$  і кільця цілих 2-адичних чисел  $\mathbb{Z}_2$  з системою факторів  $\{\lambda_{a,b}\}$  ( $\lambda_{a,b} = \pm 1$ ,  $a, b \in G$ ).

## Висновки

У першій частині дисертації вивчається задача про опис матриць над областю цілісності відносно еквівалентності за модулем максимального ідеалу, яка ідейно близька до задачі про опис зображень груп. Отримано зв'язок між дикістю цієї задачі і властивостями множини простих елементів області.

У другій частині дисертаційної роботи вивчаються матричні зображення скінченної 2-групи над комутативним кільцем. Доведено, що якщо  $K$  – нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2 і  $2$  – простий елемент кільця  $K$ , а фактор-кільце  $K/2K$  є факторіальним кільцем не головних ідеалів, то над ним є дикими всі скінченні 2-групи порядку  $|G| > 1$ . Аналогічне твердження доведено у випадку, коли  $2$  є добутком двох різних простих елементів  $t_1$  і  $t_2$  (тобто  $t_1 \neq \theta t_2$ , де  $\theta$  оборотний) і  $K/t_1 K$  не є областю головних ідеалів.

У третій частині дисертації вивчаються матричні зображення схрещених групових кілець абелевих груп і кільця цілих 2-адичних чисел. Доведено дикість схрещеного групового кільця абелевої групи типу  $(4, 4)$ ,  $(2, 2, 2)$  і кільця цілих 2-адичних чисел з довільною (невиродженою) системою факторів.

Описано дикі схрещені групові кільця циклічної 2-групи і кільця цілих 2-адичних чисел з довільною системою факторів і абелевої 2-групи і кільця цілих 2-адичних чисел з  $(\pm)$  одиничною системою факторів. Отримано критерій ручності скінченних  $p$ -груп відносно проєктивних зображень над кільцем цілих  $p$ -адичних чисел.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах / Ю. А. Дрозд // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104-114.
2. Бондаренко В. М. Представленческий тип конечных групп / В. М. Бондаренко, Ю. А. Дрозд // Записки науч. Семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, – 1977. –Т. 71. – С. 24-41.
3. Гудивок П. М. О представлениях конечных групп над полным дискретно нормированным кольцом / П. М. Гудивок // Труды Матем. ин-та АН СССР, – 1978. – Т. 148. С. 96-105.
4. Schur J. Über die Darstellung der endlicher Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen / J. Schur // J.Reine Angew. Math., – 1904. – V.127. – P. 20-50.
5. Schur J. Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen / J. Schur // J.Reine Angew. Math. – 1907. – V. 132. – P. 85-137.
6. Frucht R. Über die Darstellung endlicher Abelscher Grupper durch Kollineationen / R. Frucht // J. Reine Angew. Math. – 1931. – V. 166. – P.16-29.
7. Гудивок П. М. О числе неразложимых целочисленных  $p$ -адических представлений скрещенных групповых колец / П. М. Гудивок // Мат. сб. – 1973. –Т. 91, №1. – С.27-49.
8. Баранник Л. Ф. Скрещенные групповые кольца конечных групп и колец целых  $p$ -адических чисел с конечным числом неразложимых целочисленных представлений / Л. Ф. Баранник, П. М. Гудивок // Матем. сб. – 1979. – Т. 108(150), №2. – С. 187-211.
9. Bondarenko V. M. On the equivalence of matrices over commutative rings modulo ideals /V. M. Bondarenko, A. A. Tylyshchak, M. V. Stoika // Algebra and Discrete Mathematics.–2014. – Vol. 17, №1. – P. 12-19.

10. Stoika M. V. On classifying the matrices over commutative rings up to equivalence / M. V. Stoika, A. A. Tylyshchak // International Conference of Young Mathematicians, June 3-6, 2015. – Kyiv. – 2015. – P. 23.
11. Стойка М. В. Про дикі скінченні 2-групи над локальними факторіальними кільцями характеристики нуль / М. В. Стойка // Науковий вісник Ужгород. нац. ун-ту. Серія матем. і інформ. – 2009. – Вип. 19. – С. 125-132.
12. Стойка М. В. Проективні матричні зображення скінченних груп над кільцем цілих  $p$ -адичних чисел / М. В. Стойка // Науковий вісник Ужгород. нац. ун-ту. Серія матем. і інформ. – 2012. – Вип. 23, № 2. – С. 165-170.
13. Стойка М. В. Зображення схрещених групових кілець скінченних абелевих 2-груп та кільця цілих 2-адичних чисел / М. В. Стойка // Науковий вісник Ужгород. нац. ун-ту. Серія матем. і інформ. – 2013. – Вип. 24, № 1. – С. 175-184.
14. Стойка М. В. Про матричні зображення циклічної групи другого порядку над областями цілісності характеристики нуль / М. В. Стойка // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2013. – Вип. 11. – С. 58-62
15. Stoika M. V. Representation of twisted group rings of finite abelian 2-group over the ring of  $p$ -adic numbers / M. V. Stoika, P. M. Gudivok // BGL-8 International Conference on Non-Euclidian Geometry in Modern Physics and Mathematics, May 22-25 2012. – Uzhgorod. – 2012. – P 36.
16. Стойка М. В. Про ручні та дикі групи відносно проективних зображень над кільцем цілих  $p$ -адичних чисел / М. В. Стойка // Одинадцята відкрита наукова конференція інституту прикладної математики та фундаментальних наук (ІМФН), 13-14 червня 2013 року. – Львів. – 2013. – С. 73.
17. Stoika M. V. On wild groups over local factorial rings / M. V. Stoika // 9<sup>th</sup> International Algebraic Conference in Ukraine, July 8-13, – 2013. – L'viv. – 2013. – P. 186.
18. Burnside W. Theory of groups of finite order, second edition / W. Burnside – Cambridge: Cambridge University Press, 1911. – P. 512.

19. Noether E. Hypercomplexe Größen und Darstellungstheorie / E. Noether // Math. Z. – 1929. – V. 30. P. 641-692.
20. Башев В. А. Представление группы  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  в поле характеристики 2 / В. А. Башев // ДАН СССР, – 1961. – Т. 141, №5. – С. 1015-1018.
21. Higman D. G. Indecomposable representations at characteristic  $p$  / D. G. Higman // Duke Math. J., – 1954. –V. 21. – P. 377-381.
22. Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 / В. М. Бондаренко // Мат. сб. – 1975. – Т. 96, №1. – С. 63-74.
23. Ringel C. The indecomposable representations of dihedral 2-groups / C. Ringel // Math. Ann. – 1975. – V. 214, №1. –P. 19-34.
24. Гудивок П. М. О модулярных представлениях конечных групп над областями целостности / П. М. Гудивок, Е. Я. Погорияк // Труды Матем. ин-та АН СССР. – 1990. – Т. 183. – С. 78-86.
25. Гудивок П. М. О представлениях конечных групп над кольцом классов вычетов по модулю  $m$  / П. М. Гудивок, В. С. Дроботенко, А. И. Лихтман // Укр. мат. журн. – 1964. – Т. 16, №1. – С. 82-89.
26. Гудивок П. М. Про обмеженість степенів нерозкладних модулярних зображень скінченних груп над кільцем головних ідеалів / П. М. Гудивок // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1971. – №8. – С. 683-685.
27. Гудивок П. М. О неразложимых матричных представлениях конечных  $p$ -групп над коммутативными локальными кольцами характеристики  $p^s$  / П. М. Гудивок, В. И. Погорияк // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика. –1999. – Вип. 4. – С. 43-46.
28. Дроботенко В. С. Представления циклической группы простого порядка  $p$  над кольцом классов вычетов по модулю  $p^s$  / В. С. Дроботенко, Э. С. Дроботенко, З. П. Жилинская, Е. Я. Погорияк // Укр. мат. журн. – 1965. – Т. 17, № 5. – С. 1239-1242.
29. Hannula T. The integral representation ring  $a(R_k G)$  / T. Hannula // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – V. 133. – P. 553-559.

30. Roggenkamp K. V. Gruppenringe von unendlichem Darstellungstyp / K. V. Roggenkamp // Math. Z. – 1967. – V. 96, № 5. – P. 393-398.
31. Каш Ф. Модули и кольца / Ф. Каш –М.: «Мир», 1981. – 368 с. (под ред. В. А. Андрунакиевича, пер. с нем. Е. Н. Захаровой, М. И. Урсула).
32. Гудивок П. М. Про нерозкладні матричні зображення скінченних  $p$ -груп над локальними областями цілісності характеристики нуль / П. М. Гудивок, М. П. Желізняк // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика. – 2007. – Вип. 14-15. – С. 22-32.
33. Гудивок П. М. Про нерозкладні матричні зображення скінченних 2-груп над локальними областями цілісності характеристики нуль / П. М. Гудивок, М. П. Желізняк // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика. – 2008. – Вип. 17. – С. 92-95.
34. Кругляк С. А. О представлениях группы  $(p, p)$  над полем характеристики  $p$  / С. А. Кругляк // ДАН СССР, – 1963. – Т. 153, №6. – С. 1253-1256.
35. Brenner S. Modular representations of  $p$ -groups / S. Brenner // J. Algebra. – 1970. –V. 15, №1. – P. 89-102.
36. Гудивок П. М. О модулярных и целочисленных представлениях конечных групп / П. М. Гудивок // ДАН СССР, – 1974. – Т. 214, №5. С. 993-996.
37. Reiner I. Equivalence of representations under extensions of local group rings / I. Reiner, H. Zassenhaus // Ill. J. Math., – 1961.– V. 5. – P. 409-411.
38. Гудивок П. М. Про матричні зображення скінченних 2-груп над локальними областями цілісності характеристики нуль / П. М. Гудивок, С. П. Кіндюх // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика. – 2006. – Вип. 12-13. – С. 59-64.
39. Гудивок П. М. Про матричні зображення скінченних  $p$ -груп над областями цілісності характеристики нуль / П. М. Гудивок, С. П. Кіндюх // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика. – 2005. – Вип. 10-11. – С. 49-56.

40. Jamazaki K. On projective representations and ring extensions of finite groups / K. Jamazaki // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. – 1964. – V. 10, №2. – P. 147-195.
41. Ng H. N. Degrees of irreducible projective representations of finite groups / H. N. Ng // J. London Math. Soc. – 1975. – T.10. – P. 379-384.
42. Ng H. N. Faithful irreducible projective representations of metabelian groups / H. N. Ng // J. Algebra. – 1976. – V. 38. – P. 8-28.
43. Quinlan R. Twisted group rings of metacyclic groups / R. Quinlan // Represent. Theory 7. – 2003. – P. 214-226.
44. Баранник Л. Ф. Про точне проєктивне зображення скінченних абелевих груп над довільним полем / Л. Ф. Баранник // Український матем. ж. – 1974. – Т. 26. – С. 784-790.
45. Barannyk L. F. On modular projective representations of finite nilpotent groups / L. F. Barannyk, K. Sobolewska // Colloq. Math. – 2001. – V. 87. – P. 181-193.
46. Frucht R. Zur Darstellung endlicher Abelscher Gruppen durch Kollineationen / R. Frucht // Math. Z. – 1955. – V. 63. – P. 145-155.
47. Жмудь Э. М. Об изоморфных неприводимых проективных представлениях конечных групп / Э. М. Жмудь // Зап. Матем. отд. физ.-матем. фак. Харьковск. ун-та и Харьковск. матем. о-ва. – 1960. – Т. 26, № 4. – С. 333-372.
48. Жмудь Э. М. Симплектические геометрии и проективные представления конечных абелевых групп / Э. М. Жмудь // Матем. сб. – 1972. – Т. 87, №1. – С. 3-17.
49. Jamazaki K. A note on projective representations of finite groups / K. Jamazaki // Scient. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo. – 1964. – V.14, №1. – P. 27-36.
50. Conlon S. B. Twisted group algebras and their representations / S. B. Conlon // J. Austral. Math. Soc. – 1964. – Т.4. – P. 152-173.

51. Баранник Л. Ф. Проективные представления конечных групп над числовыми кольцами / Л. Ф. Баранник, П. М. Гудивок // Матем. сб. – 1970. – Т. 82, № 3. – С. 423-443.
52. Reynolds W. F. Projective representations of finite groups in cyclotomic fields / W. F. Reynolds // Ill. J. Math. – 1965. – V. 9, № 2. – P. 27-36.
53. Fein B. The Schur index for projective representations of finite groups / B. Fein // Pacific J. Math. – 1969. – V. 28, №1. – P. 87-100.
54. Баранник Л. Ф. Об индексе Шура проективных представлений конечных групп / Л. Ф. Баранник // Матем. сб. – 1971. – Т. 86, № 1. – С. 106-116.
55. Баранник Л. Ф. О точных проективных представлениях абелевых групп / Л. Ф. Баранник // Матем. заметки. – 1971. – Т. 10, № 3. – С. 345-354.
56. Brauer R. Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen / R. Brauer // II, Math. Z. – 1930. – V. 31. – P. 737-747.
57. Берман С. Д. Об индексе Шура / С. Д. Берман // УМН.– 1961. – Т.16, №2. – С. 95-99.
58. Берман С. Д. Представления конечных групп над произвольным полем и над кольцом целых чисел / С. Д. Берман // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1966. – Т. 30, № 1. – P. 69-132.
59. Берман С. Д. Об индексе Шура характеров конечных групп относительно локального поля / С. Д. Берман // VIII Всесоюзный коллоквиум по общей алгебре, Рига. – 1967. – С. 33.
60. Pahlings H. Beiträge zur Theorie der projektiven Darstellungen endlicher Gruppen / H. Pahlings // Mitt. Math. Semin. Giessen. – 1968. – № 77.
61. Баранник Л. Ф. О точных проективных представлениях абелевых групп / Л. Ф. Баранник // Матем. заметки. – 1971. – Т. 10, № 3. – С. 345-354.
62. Борович З. И. Теория гомологий в группах. II / З. И. Борович, Д. К. Фаддеев // Вестн. Ленинград. ун-та. –1959. – №7. – С. 72-87.

63. Берман С. Д. О целочисленных представлениях конечных групп / С. Д. Берман, П. М. Гудивок // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 145, №6. – С. 1199-1201.
64. Берман С. Д. Неразложимые представления конечных групп над кольцом  $p$ -адических чисел / С. Д. Берман, П. М. Гудивок // Изв. АН СССР. мат. – 1964. – Т. 28, №4. – С. 875-910.
65. Heller A. Representations of cyclic groups in rings of integers / A. Heller, I. Reiner // I, II Ann. Math. – 1962. – V. 76. – P. 73-92; 1963. – V. 77. – P. 318-328.
66. Дрозд Ю. А. Коммутативные кольца с конечным числом целочисленных неразложимых представлений / Ю. А. Дрозд, А. В. Ройтер // Изв. АН СССР, серия матем. – 1967. – Т. 31. – С. 783-798.
67. Jacobinski H. Sur les orders commutatifs avec us nombre fini de reseaux indecomposables / H. Jacobinski // Acta Math. – 1967. – V. 118. – P. 1-37.
68. Назарова Л. А. Применение модулей над диадой для классификации конечных  $p$ -групп, обладающих абелевой подгруппой индекса  $p$ , и пар взаимно аннулирующих операторов / Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, В. В. Сергейчук, В. М. Бондаренко // Записки науч. Семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, – 1972. – Т. 28. – С. 69-92.
69. Гудивок П. М. Представления конечных групп над числовыми кольцами / П. М. Гудивок // Изв. АН СССР, сер. матем., – 1967. – Т. 31, № 4. – С. 799-834.
70. Гудивок П. М. Целочисленные представления конечных групп и задача о паре матриц / П. М. Гудивок // Сб. «Материалы 29 науч. конф. проф.-препод. состава УжГУ. Секция матем. наук», ВИНТИ, Ужгород, – 1975. – № 705-706. – С. 231-240.
71. Гудивок П. М. О представлениях прямого произведения групп над полными дискретно нормированными кольцами / П. М. Гудивок // ДАН СССР, – 1977, – Т. 237, № 1. – С 25-27.

72. Dieterich E. Group rings of wild representation type / E. Dieterich // Math. Ann., – 1983. – V. 266, – P. 1-22.
73. Dieterich E. Solution of non-domestic tame classification problem from integral representation theory of finite groups / E. Dieterich // Mem. Amer. Math. Soc., – 1991. – V. 450. – P. 140.
74. Бондаренко В. М. Представления циклической группы четвертого порядка над  $p$ -адическими квадратичными кольцами / В. М. Бондаренко // Тезисы докладов X Всесоюзного симпозиума по теории групп, Гомель. – 1986. – С. 37.
75. Назарова Л. А. Целочисленные представления четвертой группы / Л. А. Назарова // ДАН СССР, – 1961. Т. 140, № 5. – С. 1011-1014.
76. Назарова Л. А. Целочисленные представления знакопеременной группы четвертой степени / Л. А. Назарова // Укр. матем. ж. – 1963. – Т. 15, № 4. – С. 437-444.
77. Назарова Л. А. Представления четвериады / Л. А. Назарова // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1967. – Т. 31. – С. 1361-1379.
78. Яковлев А. В. Классификация 2-адических представлений циклической группы восьмого порядка / А. В. Яковлев // Записки науч. семинаров Ленингр. отд. Матем. ун-та АН СССР. – 1972. – Т. 28, С. 93-129.
79. Гудивок П. М. О представлениях конечных  $p$ -групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми  $p$ -адическими коэффициентами / П. М. Гудивок, Орос В. М., А. В. Ройтер // Укр. матем. ж. – 1992. – Т. 44, № 6. – С. 753-765.
80. Бондаренко В. М. О представлениях конечных  $p$ -групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми  $p$ -адическими коэффициентами / В. М. Бондаренко, П. М. Гудивок // Сб. «Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры», Киев, Институт матем. НАН Украины. – 1993. – С. 5-14.

81. Атья М. Введение в коммутативную алгебру / М. Атья, И. Макдональд – Москва: «Мир», 1972. – 160 с. (под ред. Н. И. Плужникова, пер. с англ. Ю. И. Манин).
82. Gudivok P. On matrix representations of finite  $p$ -groups over local rings/ P. Gudivok // Groups and group rings, abstracts, Wisla. – 1998, – P. 11.
83. Гудивок П. М. Черниковские  $p$ -группы и целочисленные  $p$ -адические представления конечных групп / П. М. Гудивок, Ф. Г. Ващук, В. С. Дроботенко // Укр. матем. ж. – 1992. – Т. 44, № 6. – С. 742-756.
84. Гудивок П. М. О черниковских  $p$ -группах / П. М. Гудивок, И. В. Шапочка // Укр. матем. ж. – 1999. – Т. 51, № 3. – С. 291-304.
85. Гудивок П. М. Зображення скінченних  $p$ -груп над локальними кільцями додатної характеристики / П. М. Гудивок, В. І. Погоріляк // Доповіді АН УРСР, сер. А. – 1989. – № 2. С. 5-8.
86. Гудивок П. М. Матричные представления конечных  $p$ -групп над коммутативными локальными кольцами характеристики  $p^s$  / П. М. Гудивок, В. И. Погоріляк // Укр. матем. ж. – 2002. – Т. 54, № 6. – С. 764-770.
87. Бондаренко В. М. О подобии матриц над кольцами классов вычетов / В. М. Бондаренко // Матем. сб., Киев, «Наук. думка». – 1976. – С. 275-277.
88. Погоріляк В. Й. Про зображення циклічних 2-груп над комутативними локальними кільцями характеристики 2 / В. Й. Погоріляк // Науковий вісник Ужгород. ун-ту, Сер. матем. – 1997. – № 2. – С. 86-91.
89. Гудивок П. М. О теореме Крулля-Шмидта для представлений групп над кольцом  $P$ -целых чисел / П. М. Гудивок, Е. Я. Погоріляк // Матем. заметки, – 1970. – Т. 7, № 1. – С. 125-135.
90. Сергейчук В. В. О классификации метаабелевых  $p$ -групп / В. В. Сергейчук // Сб. «Матричные задачи», Институт матем. АН УССР. – 1977. – С. 150-161.

91. Гудивок П. М. О дикости задачи описания некоторых классов групп / П. М. Гудивок, И. В. Шапочка // Науковий вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1998. – № 3. – С. 69-77.
92. Szekeres G. Determination of certain family of finite metabelian groups / G. Szekeres // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – V. 66. – P. 11-43.
93. Дроботенко В. С.  $(p^s, p^s, \dots, p^s)$  за допомогою циклічної групи простого порядку  $p$  / В. С. Дроботенко // Доповіді АН УРСР. – 1966. – № 4. – С. 17-21.
94. Назарова Л. А. Конечнопорожденные модули над диадой двух локальных дедекиндовых колец и конечные группы, обладающие абелевым нормальным делителем индекса  $p$  / Л. А. Назарова, А. В. Ройтер // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1969. – Т. 33. – С. 65-89.
95. Ленг С. Алгебра / С. Ленг – Москва: «Мир», 1968. – 564 с. (под ред. А. И. Кострыкина, пер. с англ. Е. С. Голод).
96. Curtis Charles W. Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras/ Charles W. Curtis, Irving Reiner. – AMS CHELSEA PUBLISHING. – 2006. – P. 677.
97. Morris A. O. Projective representations of abelian groups / A. O. Morris // J. London Math. Soc. – 1973. – V. 7. – P. 235-238.
98. Гудивок П. М. О модулярных представлениях конечных групп / П. М. Гудивок // Докл.и сообщ. Ужгород. ун-та. Сер. физ-мат. наук. – 1961. – Т.4. – С. 86-87.
99. Janusz G. J. Faithful representations of  $p$ -groups at characteristic  $p$  / G. J. Janusz // I. J. of Algebra. –1970. – V. 15. – P. 335-351.
100. Janusz G. J. Faithful representations of  $p$ -groups at characteristic  $p$  / G. J. Janusz // II. Ibid.– 1972. – V. 22. – P. 137-160.
101. Гудивок П. М. Про число нерозкладних матричних зображень даного степеня скінченної  $p$ -групи над комутативними локальними кільцями харак-

- теристики  $p^s$  / П. М. Гудивок, І. Б. Чухрай // Науковий вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2000. – Вип. 5. – С. 33-40.
102. Gudyvok P. M. On indecomposable matrix representations of the given degree of a finite  $p$ -group over a commutative local rings of characteristic  $p^s$  / P. M. Gudyvok, I. B. Chukhrai // An. Ştiinţ. Univ. Ovidius Constanţa Ser. Math. – 2000. – V.8. – P. 27-36.
103. Гудивок П. М. Про число матричних зображень даного степеня скінченної  $p$ -групи над деякими комутативними кільцями характеристики  $p^s$  / П. М. Гудивок, І. П. Сігетій, І. Б. Чухрай // Науковий вісник Ужгород ун-ту. Сер. матем.– 1999. – Вип. 4. – С. 47-53.
104. Barannyk L. F. Absolutely indecomposable representations of a twisted group algebra of a finite  $p$ -group over a field of characteristic  $p$  / L. F. Barannyk // Publ. Math. Debrecen. –2011. –V. 78. – P. 413-437.
105. Barannyk L. F. Twisted group rings of strongly unbounded representation type / L. F. Barannyk, D. Klein // Colloq. Math. – 2004. – V. 100. – P. 265-287.
106. Дрозд Ю. А. Примарные порядки с конечным числом неразложимых представлений / Ю. А. Дрозд, В. В. Кириченко // Изв. АН СССР, серия матем. – 1973. – Т. 37. – С. 715-736.
107. Roggenkamp K. W. Classification of the completely primary totally ramified orders with a finite number of nonisomorphic indecomposable lattices / K. W. Roggenkamp // Bull. Amer. Math. Soc. – 1972. – V. 78. – P. 399-401.
108. Дрозд Ю. А. Ручные и дикие матричные задачи / Ю. А. Дрозд // Представления и квадратичные формы. Сборник науч. трудов Ин-т мат. АН УССР. – 1979. – С. 39-74.
109. Гудивок П. М. О представлениях скрещенных групповых колец конечных групп и колец целых  $p$ -адических чисел / П. М. Гудивок // Доп. НАН України. – 1998. – №7. – С. 19-23.

110. Гудивок П. М. Об эквивалентности матриц над коммутативными кольцами / П. М. Гудивок // Беск. группы и примыкающие алгебр. структуры. – Киев: Ин-т математики НАН Украины. – 1993.– С. 431-437.
111. Гудивок П. М. Про дикі скінченні 2-групи над локальними областями цілісності характеристики нуль / П. М. Гудивок, С. П. Кіндюх // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика. – 2009. – Вип. 18. – С. 54-61.