Міністерство освіти і науки УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені
ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

Кузніцька Богданна Миколаївна

УДК 512.552.13

ОБМЕЖЕНІ КІЛЬЦЯ З УМОВАМИ АДЕКВАТНОСТІ

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

ДИСЕРТАЦІЯ
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
Забавський Богдан Володимирович
доктор фізико-математичних
наук, професор

Львів — 2015

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$J(R)$ — радикал Джекобсона;

$ст.р.(R)$ — стабільний ранг кільця R;

$M(R_2)$ — кільце квадратних матриць порядку 2;

$F(R_2)$ — множина всіх повних матриць кільця R_2;

R^n — рядок довжини n над кільцем R;

$GL_n(R)$ — повна лінійна група;

$Q(R)$ — кільце дробів;

$\det A$ — визначник матриці A;

$a \mid b$ — елемент a є дільником елемента b (a ділить b);

$Max(\mathrm{R})$ — множина максимальних ідеалів кільця R;

$Spec(\mathrm{R})$ — множина простих ідеалів кільця R;

${}_aA_b$ — елемент a є адекватним до елемента b .

ВСТУП

Актуальність теми. Протягом останніх 50 років багато авторів, зокрема Армендаріз, Вацела, Гудьорл, Томас Пардо, Джайн, Кохлер, Лопез-Пермонд, Леві,Ософська, Скорняков, Сміт, Туганбаєв і Вісбаур досліджували кільця, фактор-кільця або фактор-модулі над ними, які мають обмеження типу скінченності або певні гомологічні властивості [69].

Скінченні гомоморфні образи комутативної області Безу є джерелом всеможливих прикладів і контрприкладів сучасної теорії кілець. Так вони є прикладами IF-кілець, тобто кілець над якими довільний ін'єктивний модуль є плоским [48]. А також вони є P-ін'єктивними кільцями [85] і псевдо-нетеровими кільцями [76]. В сучасних алгебраїчних дослідженнях виявився тісний зв'язок скінченних гомоморфних образів комутативних областей Безу з кільцями з властивістю заміни, які були введені Уорфілдом [97]. Ці кільця тісно пов'язані з властивістю скінченної заміни, яку вперше розглядали Кроулі і Джонсон [53]. Пізніше Ніколсон [84] показав, що у випадку комутативних кілець клас кілець з властивістю заміни збігається з класом чистих кілець. Забавський, Білявська, Мак Говерн показали, що у випадку комутативної області Безу фактор-кільце по довільному ненульовому головному ідеалі є напіврегулярним тоді і тільки тоді, коли твірний елемент даного головного ідеалу є адекватним елементом області. Відмітимо, що комутативні напіврегулярні кільця є чистими (кільцями з властивістю заміни), а клас комутативних чистих кілець збігається з класом кілець ідемпотентного стабільного рангу 1. Приклади чистих кілець є багаточисленними, а саме такими є: комутативні регулярні в сенсі Неймана кільця, напіврегулярні кільця, локальні кільця і напівдосконалі кільця [84].

Тим самим ці дослідження є перехрестям, де тісно переплелися дослідження алгебраїчної K-теорії та теорії кілець і модулів. Більш яскраво ця тенденція прослідковується в роботах Менала, Монказі [80], Ари, Гудьорла [27], Забавського [103] в сучасних дослідженнях задач діагоналізації матриць як всіх так і певного вигляду (ідемпотентних, регулярних і т.д.).

Вважають, що задача діагональної редукції матриць виникла в другій половині XVIII ст., коли було описано Гауссом алгоритм зведення матриці системи лінійних рівнянь над полем до трикутного вигляду. Аналогічно Сміт отримав цей же результат у 1861 р. для цілочисельних матриць [89]. Дослідження Сміта у 20 – 30 роках минулого століття були поширені на різні класи комутативних і некомутативних кілець Евкліда та на комутативні області головних ідеалів. Особливий внесок в цьому зробили Веддерберн [98], Діксон [55], Ван дер Варден [2] і Джекобсон [68]. Пізніше в 1937 р. Тейхмюллер [92] отримав повний розв'язок задачі для некомутативних кілець головних ідеалів без дільників нуля (в іншому формулюванні Асано [29]). Більш детально всі ці результати описано в монографії Джекобсона [8]. Все це спонукало Капланського розглянути кільце, над яким кожна матриця володіє канонічною діагональною редукцією. Таким чином, Капланським у 1949 році було введено поняття кільця елементарних дільників [70]. Це кільце досліджували як українські науковці, зокрема Лопатинський, Казімірський, Забавський, Петричкович, Щедрик, Романів, Гаталевич [103], так і закордонні, наприклад, Капланський [70, 71], Хенріксен [64, 65, 66], Шорес, Ларсен, Левіс [73], Кон [47]. Основні результати дослідження кільця елементарних дільників були отримані в роботах [5], [6], [7], [9], [10], [11], [18], [23], [29], [64], [71], [73], [74], [90], [91], [101], [102].

Особливий інтерес у зв'язку з даними дослідженнями викликає результат [104], який показує, що скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є напіврегулярним кільцем тоді і лише тоді, коли ядро даного гомоморфізму породжується адекватним елементом кільця. Відмітимо, що напіврегулярне кільце є кільцем з властивістю заміни [84]. Кільця з властивістю заміни, які були введені Уорфілдом [97], пов'язані з властивістю скінченної заміни, яку вперше розглядали Кроулі і Джонсон [53]. Пізніше Ніколсон [84] показав, що у випадку коли ідемпотенти кільця є центральними, то клас кілець з властивістю заміни збігається з класом чистих кілець. Приклади чистих кілець є багаточисленними, а саме такими є: комутативні регулярні в сенсі Неймана кільця, напіврегулярні кільця, локальні кільця і напівдосконалі кільця [84].

В багатьох роботах розглядається питання діагоналізації не всіх матриць, а певних матриць, зокрема ідемпотентних і регулярних матриць. Нагадаємо, що матриця з елементами кільця R називається регулярною, якщо над кільцем R існує матриця X відповідних розмірів, така що

$$AXA = A.$$

Якщо матрицю X можна вибрати оборотною, то тоді матриця A називається одинично регулярною.

В роботі [27] розглядається питання діагоналізації регулярних матриць над кільцями з властивістю заміни. Зауважимо, що задачі діагоналізації ідемпотентних і регулярних матриць тісно пов'язані, але вони різні. Хілбруком і Ван Гілем [67] показано, що над ID-областю (тобто областю, над якою діагоналізуються ідемпотентні матриці) та над артіновим кільцем кожна регулярна матриця може бути ідемпотентно діагоналізована, тобто для довільної регулярної матриці існують оборотні матриці P і Q відповідних розмірів такі, що:

1) $PAQ = D$ — діагональна матриця.

2) $D^2 = D$.

Природньо для таких задач необхідна інформація про структуру ідемпотентних і регулярних матриць над вказаними класами кілець.

Кільця Ерміта займають важливе значення у вивченні кілець елементарних дільників. Оскільки кільце Ерміта є кільцем скінченно породжених головних ідеалів, тобто кільцем Безу, то важливою є задача вивчення кільця Безу. Зауважимо, що кільце R є правим (лівим) кільцем Безу, якщо довільний скінченно породжений правий (лівий) ідеал кільця R є головним правим (лівим) ідеалом. А кільце Безу — це одночасно праве і ліве кільце Безу. Найважливішими прикладами кілець Безу є кільце всіх цілих алгебраїчних чисел, кільце аналітичних функцій на комплексній площині, кільце степеневих рядів над полем раціональних чисел з цілим вільним членом, кільце нетерових дійсних функцій над цілком регулярним Гаусдорфовим простором [103]. Але потрібно звернути увагу на той факт, що в роботі [59] побудовано приклад комутативного кільця Безу, яке не є кільцем Ерміта і також приклад комутативного кільця Ерміта, яке не є кільцем елементарних дільників. Тому класи кілець Безу, Ерміта та елементарних дільників є різні, навіть у випадку комутативних кілець.

Капланський показав, що над кільцем елементарних дільників довільний скінченно зображуваний модуль зображається у вигляді прямої суми циклічних модулів [70]. У випадку комутативних кілець у 1974 році доведено і обернене твердження, а саме, якщо скінченно зображуваний модуль над комутативним кільцем зображається у вигляді прямої суми циклічних, то це кільце є кільцем елементарних дільників [73]. Отже, у випадку комутативних кілець проблема описання кілець елементарних дільників, яку неодноразово ставили, зокрема Капланський, Кон, Хенріксен є еквівалентна відомій проблемі Уорфілда [96]: над якими кільцями розкладається кожний скінченно зображуваний модуль в пряму суму циклічних модулів?

На більшість відомих класів кілець елементарних дільників впливає умова обриву зростаючих ланцюгів ідеалів. Першим прикладом кільця елементарних дільників без умов обриву зростаючих ланцюгів ідеалів стало кільце аналітичних функцій. Саме Веддерберн у 1915 році вказав, що кільце цілих аналітичних функцій є таке [98]. Це дозволило Хелмеру [63] ввести в розгляд адекватні кільця. Пізніше Гільман і Хенріксен показали, що комутативне регулярне кільце є адекватним [57]. Відомим результатом стало те, що напівлокальне кільце є адекватним тоді і тільки тоді, коли воно є або перетином скінченного числа попарно незалежних кілець нормування без дільників нуля з спільним полем дробів, або скінченною прямою сумою кілець нормування [73]. Хенріксен [64] показав, що в комутативному адекватному кільці довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі (тобто в сучасній термінології адекватне кільце є PM^*-кільцем). В роботі [104] показано, що адекватна область Безу — це область, скінченні гомоморфні образи якої є напіврегулярними кільцями. Більше ніякої інформації про адекватні кільця не було. Тому Ларсен, Левіс і Шорес [73] сформулювали питання: чи комутативна область Безу, в якій довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі є адекватною? У 1974 році було побудовано контрприклад до цього питання [33]. Хоча відкритим залишилося питання: за яких умов комутативна область Безу, в якій довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, є адекватною? Проте Забавський та Білявська [105] дали позитивну відповідь на це питання у випадку комутативних областей Безу з нетеровим спектром. Ларсен, Левіс і Шорес [73] зауважили, що комутативне регулярне кільце і кільце нормування є не тільки адекватним, але й кільцем, в якому нуль є адекватним. Це дозволило Забавському ввести в розгляд всюди адекватні кільця, а також кільця, в яких нуль є адекватним [103]. Більше того він показав, що клас комутативних кілець, в яких нуль є адекватним, збігається з класом кілець ідемпотентного стабільного рангу 1 [105]. Відмітимо, що стабільний ранг є одним з основних інваріантів алгебраїчної K-теорії. Він був введений у 1969 році Басом [30]. Дане поняття виявилося корисним не тільки в алгебраїчній K-теорії, але й в теорії кілець і модулів, гомологічній алгебрі. Особливо продуктивно воно зреалізувалося в задачах діагоналізації матриць. Стабільний ранг досліджували багато відомих авторів, а саме Васерштейн [93, 94], Лам [72], Чен [37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44], Мак Говерн, Кушо [78], Менал, Монказі [80], Ара, Гудьорл [27], Забавський. В сучасних дослідженнях стабільний ранг використовується в дослідженнях по теорії кілець, зокрема в задачах діагоналізації матриць [17], [78], [80], [87], [95], [96]. За допомогою поняття стабільного рангу Забавський [13], [102], [100] розв'язав ряд відкритих задач, які були поставлені Хенріксеном у 60-х та 70-х роках XIX століття. Хоч ці задачі були сформульовані тільки у випадку комутативних кілець, Забавському вдалося розв'язати їх для більш загальних класів кілець, а саме асоціативних кілець з одиницею [99], [13], [102], [100]. Все це стало поштовхом для обчислення стабільного рангу адекватних, всюди адекватних кілець, регулярних кілець та їх узагальнень [1], [6], [4], [12], [28], [30], [65], [79], [86]. Крім того Степанов, Менал, Монказі, Каміло, Чен, Мак Говерн ввели всеможливі узагальнення поняття стабільного рангу [25], [28], [34], [35], [36], [40], [42], [41]. Так комутативні кільця елементарних дільників можна охарактеризувати, як кільця акуратного рангу 1. Комутативне кільце Безу є кільцем Ерміта тоді і тільки тоді, коли його стабільний ранг рівний 2. Серед кілець скінченного стабільного рангу слід виділити клас кілець елементарних дільників. Згідно з працею [13], стабільний ранг кільця елементарних дільників не більше 2.

Одним з важливих питань є вивчення зв'язку стабільного рангу кільця і стабільного рангу кілець матриць над ним. В роботі [3] встановлено, що стабільний ранг кільця матриць порядку n над кільцем стабільного рангу r рівний $1 + [-\frac{r-1}{n}]$, де $[m]$ — означає цілу частину від числа m. Зауважимо, що стабільний ранг кільця рівний 1 тоді і лише тоді, коли стабільний ранг кільця матриць довільного порядку теж рівний 1. Водночас Забавським і Петричковичем [17] встановлено, що стабільний ранг множини повних матриць над комутативною адекватною областю дорівнює 1, хоча базове кільце може мати стабільний ранг більший 1. Відмітимо, що такого роду дослідження проводив Лам, який досліджував множини елементів стабільного рангу 1 [72], а пізніше вони були продовжені в [1] для елементів майже стабільного рангу 1.

Особливе місце по кільцях, зокрема кільцях з властивістю заміни, займає умова, при якій всі регулярні елементи є одинично регулярними. Як показав Каміло і Хі Пі Ю [34] кільце з властивістю заміни, в якому довільний регулярний елемент є одинично регулярним, є кільцем стабільного рангу 1.

Чисті кільця є потужними. Дубровін навів критерій, коли комутативна область Безу є кільцем елементарних дільників, використавши умови, характерні для напівпотужних кілець на кільце матриць другого порядку над даною комутативною областю Безу.

Отже вивчення комутативних областей Безу, скінченні гомоморфні образи яких є чистими, а в більш загальній ситуації напівпотужними кільцями є актуальною задачею. Встановлення зв'язків стабільного рангу класів кілець і стабільного рангу класу повних матриць є не тільки актуальною задачею, але й найбільш затребованою для практичних застосувань. На це найбільш яскраво вказують дослідження 2015 року Лезовського [75].

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Напрямок досліджень, обраний у дисертації, належить до основних досліджень кафедри алгебри і логіки, а також пов'язаний з науковими дослідженнями, які проводяться в галузі математики у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Матеріал дисертації є складовою частиною досліджень держбюджетної теми ММ–146Ф "Аналітичні методи дослідження випадкових еволюцій та гомологічна класифікація алгебраїчних систем з використанням теорії стабільності"(номер державної реєстрації 0113U003052), яка виконувалась на кафедрі алгебри і логіки.

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є дослідження комутативних кілець з умовами, які узагальнюють умови адекватності на їх скінченні гомоморфні образи, обчислення стабільного рангу класів кілець, які досліджуються та різних множин матриць над цими кільцями.

Завданнями дослідження є:

— обчислити стабільний ранг множини повних матриць порядку 2 над кільцем елементарних дільників;

— описати регулярні матриці в сенсі Неймана порядку 2 над комутативною областю Безу;

— дослідити комутативні кільця Безу, скінченні гомоморфні образи яких є напівпотужними кільцями;

— ввести до розгляду роздільні кільця, як кільця скінченні гомоморфні образи яких є кільцями з властивістю заміни, дослідити роздільні кільця, встановити їх зв'язок з адекватними кільцями.

Об'єкт дослідження: кільця скінченного стабільного рангу, кільця з властивістю заміни, напівпотужні кільця Безу.

Предмет дослідження: стабільний ранг, скінченні гомоморфні образи комутативної області Безу.

Методи дослідження: у дисертаційній роботі використовуються методи теорії кілець і модулів лінійної алгебри над кільцями та алгебраїчної K-теорії.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертації є новими і полягають в наступному:

— показано, що множина повних матриць порядку 2 над кільцем елементарних дільників має стабільний ранг 1;

— доведено, що регулярна матриця в сенсі Неймана порядку 2 над комутативною областю Безу є одинично регулярною;

— досліджено комутативні кільця Безу, гомоморфні образи яких є напівпотужними кільцями;

— доведено, що ефективні кільця є кільцями елементарних дільників;

— введено до розгляду роздільні кільця, як кільця скінченні гомоморфні образи яких є кільцями з властивістю заміни, які є узагальненням адекватних та акуратних кілець;

— показано, що локально роздільне кільце є кільцем роздільного рангу 1;

— доведено, що комутативна область Безу роздільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер і є новими в теорії кілець. Вони можуть бути використані в подальших дослідженнях, що стосуються повних матриць, ефективних та роздільних кілець.

Особистий внесок здобувача. Викладені в дисертаційній роботі результати отримано автором самостійно. Науковому керівнику Забавському Б. В. в роботах, опублікованих спільно [16, 108, 22] належать деякі теореми, постановки окремих задач та загальне керівництво роботою. А саме науковому керівнику в роботі [16] належить Теорема 1, в роботі [108] — Теорема 5, а в роботі [22] — деякі ідеї щодо розв'язання задач. Домші О. В. із спільної роботи [21] належить Теорема 1.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи були оприлюднені і обговорені на таких конференціях:

— міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки та математики присвяченій 85-річчю від дня народження академіка НАН України Ярослава Степановича Підстригача (м. Львів, 21–25 травня 2013 р.);

— дев'ятій міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (м. Львів, 8–13 липня 2013 р.);

— конференції молодих учених "Підстригачівські читання — 2014" (м. Львів, 28–30 травня 2014 р.);

— міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження Л.А. Калужніна (м. Київ, 7–12 липня 2014 р.).

Крім того, результати дисертації неодноразово доповідалися на наукових семінарах:

— алгебраїчному семінарі "Проблеми кілець елементарних дільників" (Львівський національний університет імені Івана Франка, керівник — доктор фіз.-мат. наук, професор Б. В. Забавський, 2013–2015 рр.);

— семінарі кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"(Івано-Франківськ, керівник — доктор фіз.-мат. наук, професор А. В. Загороднюк 2015 р.);

— Львівському міському алгебраїчному семінарі (Львівський національний університет імені Івана Франка, керівник — доктор фіз.-мат. наук, професор М. Я. Комарницький 2015 р.).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковано у 9 наукових працях, з них 3 [20, 21, 22] — у фахових виданнях із переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України (1 без співавторів), 2 [16, 108] — у наукових фахових виданнях, які включені до міжнародної наукометричної бази даних "Scopus"та 3 [14, 106, 107] — у матеріалах міжнародних наукових конференціях і 1 [15] — у матеріалах всеукраїнської наукової конференції.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівникові, доктору фізико-математичних наук, професору Б. В. Забавському за постановку задач і допомогу в роботі над дисертацією.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації — 121 сторінка. Список використаних джерел займає 12 сторінок та містить 109 найменувань.

РОЗДІЛ 1

Попередні відомості, допоміжні факти та основні результати

1.1 Попередні відомості та допоміжні факти

Означення 1.1. *[70] Скажемо, що дві матриці A і B над кільцем R еквівалентні, якщо існують такі оборотні матриці P і Q над кільцем R відповідних розмірів, що $B = PAQ$.*

Означення 1.2. *[66] Кільце R називається кільцем елементарних дільників (за Хенріксеном), якщо довільна матриця A над кільцем R володіє діагональною редукцією, тобто вона еквівалентна діагональній матриці.*

Означення 1.3. *[70] Кільце R називається кільцем елементарних дільників (за Капланським), якщо довільна матриця A розміру $m \times n$ володіє канонічною діагональною редукцією, тобто еквівалентна канонічній діагональній матриці, а саме для матриці A існують такі* *оборотні матриці* $P \in GL_m(R)$, $Q \in GL_n(R)$, *що матриця*

$$PAQ = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де $R\varepsilon_i \cap \varepsilon_i R \subseteq R\varepsilon_{i+1}R$.

Зауважимо, що елементи $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_r$ називають елементарними дільниками матриці A.

Дане означення є класичним означенням кільця елементарних дільників. У цій роботі, як правило, під кільцем елементарних дільників розумітимемо кільце елементарних дільників за Капланським.

Означення 1.4. *[70] Кільце R, над яким довільна матриця приводиться до канонічного діагонального вигляду лише елементарними перетвореннями, називається кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Означення 1.5. *[70] Якщо над кільцем R довільна матриця розмірів 1×2 (2×1) еквівалентна діагональній матриці, тоді кільце R називається правим (лівим) кільцем Ерміта. Кільце R, яке є одночасно правим і лівим кільцем Ерміта називається кільцем Ерміта.*

Означення 1.6. *[8] Кільце R називається кільцем головних лівих (правих) ідеалів, якщо в ньому довільний лівий (правий) ідеал є головним.*

Означення 1.7. *[46], [47] Правим (лівим) кільцем Безу називається кільце, в якому довільний скінченно породжений правий (лівий) ідеал є головним. Кільце Безу — це кільце, яке є одночасно правим і лівим кільцем Безу.*

Нехай R — праве кільце Ерміта. Тоді згідно з означенням кільця R для довільного рядка $(a, b) \in R$ існує така оборотна матриця
$P \in GL_2(R)$ та елемент $d \in R$, що

$$(a, b)P = (d, 0) \tag{1.1}$$

Нехай

$$P = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ r & s \end{pmatrix}$$

Тоді згідно з 1.1, маємо

$$ax + by = d,$$

$$a = da_1, \quad b = db_1.$$

Тому очевидно, що

$$aR + bR = dR,$$

тобто R — праве кільце Безу.

Наступні теореми визначають умови, за яких кільце R є кільцем елементарних дільників.

Теорема 1.1. *[70] Якщо кожні довільні матриці розміру 1×2, 2×1, 2×2 над кільцем R володіють канонічною діагональною редукцією, то кільце R є кільцем елементарних дільників.*

Теорема 1.2. *[73] Комутативне кільце Ерміта R є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли довільна повна 2×2 матриця над R володіє канонічною діагональною редукцією.*

Теорема 1.3. *[70] Комутативне кільце R є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли воно є кільцем Ерміта і для таких довільних елементів $a, b, c \in R$, що $aR + bR + cR = R$ існують такі елементи $p, q \in R$, для яких*

$$(pa + qb)R + qcR = R.$$

Особливе місце у класі кілець елементарних дільників відіграють адекватні кільця.

Означення 1.8. *[63] Ненульовий елемент a кільця R називається адекватним до елемента $b \in R$ (${}_aA_b$ позначимо це), якщо існують такі два елементи $r, s \in R$, що $a = rs$ і виконуються наступні умови:*

1) $rR + bR = R$,

2) $s'R + bR \neq R$ для довільного необоротного дільника s' елемента s.

Якщо для кожного елемента $b \in R$ виконується що ${}_aA_b$, то тоді кажемо, що елемент a є адекватним. Якщо довільний ненульовий елемент кільця R є адекватним елементом, то тоді R є адекватним кільцем

[73]. Очевидними прикладами адекватних елементів можуть послужити одиниці кільця, елементи вільні від квадратів і факторіальні елементи [103].

Означення 1.9. *[63] Адекватним кільцем називається комутативне кільце Безу, в якому довільний ненульовий елемент адекватний.*

Також відмітимо простий факт: для довільного ненульового $a \in R$ маємо що ${}_aA_a$.

Має місце наступний результат:

Теорема 1.4. *[1] Комутативне адекватне кільце є кільцем елементарних дільників.*

Теорема 1.5. *[64] В комутативному адекватному кільці довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі.*

Приклад 1.1. *[64] Приклад області цілісності, що є кільцем елементарних дільників, але не є адекватним кільцем.*

Нехай S — довільне кільце елементаргих дільників, що є областю цілісності, яка містить більше ніж один максимальний ідеал і $\mathbb{N}$ — поле дробів кільця R. Позначимо через P кільце формальних степеневих рядів над $\mathbb{N}$ за змінною x. Кожний елемент $a \in P$ має вигляд

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

де $a_k \in \mathbb{N}$. *Нехай* $\mathbb{Q} = \{a \in P : a_0 \in S\}$. *Очевидно, що* $\mathbb{Q}$ *є підкільцем області цілісності* P. *Доведемо, що* $\mathbb{Q}$ *є кільцем елементарних дільників, яке не є адекватним.*

Спочатку покажемо, що $\mathbb{Q}$ *є кільцем Безу, перевіривши, що для будь-яких* $a, b \in \mathbb{Q}$ *ідеал* $aQ + bQ$ *є головним. Випадок, коли* a *або* b *рівні нулю є тривіальним, таким чином припустимо, що* a *і* b *не рівні нулю. Для довільного ненульового* $c \in \mathbb{Q}$ *через* $n(c)$ *позначимо найменше (невід'ємне) ціле число таке, що* $c_{n(c)} \neq 0$.

Якщо $c^* = c_{n(c)} x^{n(c)}$, *тоді*

$$c = c^* \left(1 + \sum_{k=n(c)+1}^{\infty} \frac{c_k}{c_{n(c)}} x^k \right).$$

Оскільки множник

$$\left(1 + \sum_{k=n(c)+1}^{\infty} \frac{c_k}{c_{n(c)}} x^k \right)$$

є одиницею $\mathbb{Q}$, *то* $cQ = c^*Q$. *Звідси*

$$aQ + bQ = a^*Q + b^*Q.$$

Якщо $n(a) > n(b)$, b^* *є дільником* a^*, *таким чином*

$$a^*Q + b^*Q = b^*Q.$$

Якщо $n(a) = n(b) = n$, *то*

$$a^* = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x^n, \qquad b^* = \frac{\beta_1}{\beta_2} x^n,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in S$, *і* $\alpha_2 \beta_2 \neq 0$. *(Якщо* $n = 0$, *візьмемо* $\alpha_2 = \beta_2 = 1$.*)* *Оскільки* S *є кільцем Ерміта, то тоді існують* $\gamma_1, \gamma_2, \delta \in S$ *такі, що*

$$\alpha_1 \beta_2 = \gamma_1 \delta, \quad \alpha_2 \beta_1 = \gamma_2 \delta, \quad \gamma_1 S + \gamma_2 S = S.$$

Легко перевірити, що

$$a^*Q + b^*Q = \frac{\delta x^n}{\alpha_2\beta_2}Q.$$

Це показує, що $\mathbb{Q}$ є кільцем Безу.

Легко показати, що $J(\mathbb{Q}) = \{a \in \mathbb{Q} : a_0 = 0\}$ радикал Джекобсона. Оскільки $J(\mathbb{Q})$ не є головним ідеалом, та $R/J(\mathbb{Q})$ і S є ізоморфними, то звідси слідує, що $\mathbb{Q}$ є кільцем елементарних дільників.

Підкільце $S' = \{a \in \mathbb{Q} : a = a_0\}$ кільця $\mathbb{Q}$ є ізоморфним з S, і кожний максимальний ідеал з $\mathbb{Q}$ складається з ідеалу з $\mathbb{Q}$, який породжений максимальним ідеалом з S'. Звідси, оскільки $J(\mathbb{Q})$ не є головним ідеалом з $\mathbb{Q}$ і S складається більше ніж з одного максимального ідеалу, то слідує, що $\mathbb{Q}$ не є адекватним кільцем.

Означення 1.10. *[60] Кільце R називається регулярним кільцем (в сенсі фон Неймана), якщо для довільного елемента $a \in R$ існує такий елемент $x \in R$, що $axa = a$.*

Для регулярних кілець справедливим є таке твердження.

Теорема 1.6. *[60] Для кільця R еквівалентні такі властивості:*

1) кільце R — регулярне кільце;

2) довільний головний правий (лівий) ідеал кільця R є породжений ідемпотентом;

3) довільний скінченно породжений правий (лівий) ідеал кільця R є породжений ідемпотентним елементом.

Означення 1.11. *[60] Кільце R називається одинично регулярним кільцем, якщо для довільного елемента $a \in R$ існує такий оборотний елемент $u \in U(R)$, що $aua = a$.*

Твердження 1.7. *[103] Комутативне регулярне кільце є одинично регулярним.*

Теорема 1.8. *[57] Комутативне регулярне кільце є адекватним кільцем.*

Зауважимо, що у випадку регулярного кільця друга умова з означення адекватного кільця виконується для нульового елемента, більше того, вона виконується і для кільця нормування [73].

Означення 1.12. *Скажемо, що комутативне кільце R називається кільцем нормування, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ виконується $a|b$ або $b|a$, тобто $bR \subset aR$ або $aR \subset bR$.*

Особливу роль у дослідженнях кілець, які розглядаються в дисертаційній роботі, відіграє такий важливий інваріант K-теорії, як стабільний ранг кільця.

Означення 1.13. *Рядок $(a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n$ елементів кільця R називається унімодулярним, якщо*

$$a_1R + a_2R + \ldots + a_nR = R.$$

Означення 1.14. *[94] Стабільним рангом кільця R називається таке найменше натуральне число m, що для довільного унімодулярно-*

го рядка $(a_1, a_2, \dots a_m, a_{m+1}) \in R^{m+1}$ *існують такі елементи*

$$b_1, b_2, \dots b_m \in R,$$

що рядок

$$(a_1 + a_{m+1}b_1, a_2 + a_{m+1}b_2, \dots a_m + a_{m+1}b_m) \in R^m$$

є унімодулярним.

Згідно з означенням, потрібно було б розглядати як правий, так і лівий стабільний ранг кільця, але відповідно до результатів Васерштейна [94] та Уорфілда [96] ці поняття співпадають.

Необхідно зауважити, що якщо $ст.р.(R) = n$, то умови аналогічні до тих, що визначають стабільний ранг кільця, виконуються і для довільного натурального числа більшого за n. Отже, означення стабільного рангу кільця враховує те, що натуральне число, яке визначає стабільний ранг визначається як найменше з такою властивістю. Якщо такого натурального числа не існує, то вважають, що стабільний ранг кільця дорівнює нескінченності [30, 80]. Зауважимо, що такі кільця існують, а саме до них відноситься кільце ендоморфізмів довільного нескінченновимірного лінійного простору.

Важливу роль у дослідженнях, які проводяться у дисертації відіграють кільця стабільного рангу 1 та 2, тому розглянемо більш детально означення кілець таких стабільних рангів.

Означення 1.15. *[94] Кільце R називається кільцем стабільного рангу 1 (в позначеннях $ст.р.(R) = 1$), якщо для довільних елементів*

$a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$ існує такий елемент $t \in R$, що

$$(a + bt)R = R,$$

тобто, $a + bt$ — правий оборотний елемент кільця R .

Прикладами кільця стабільного рангу 1 можуть слугувати:

1) артінове кільце [31];

2) кільце цілих функцій від однієї комплексної змінної [87];

3) кільце Кронекерівських функцій для довільної цілозамкнутої області [88];

4) кільце всіх неперервних дійсних (комплексних, кватерніонних) функцій на топологічному просторі X є кільцем стабільного рангу 1 тоді і лише тоді, коли розмірність X не перевищує 0 (відповідно 1,3) [94], [93];

5) Рой побудував приклад кільця головних ідеалів стабільного рангу 1, яке не є напівлокальним. В праці [95] наведено приклад Дедекіндового кільця стабільного рангу 1, яке не є кільцем головних ідеалів;

6) для довільного поля P, ст.р.$(P[[x_1, \dots x_n]] = 1)$.

Наступна теорема дає можливість побудувати багато нових прикладів кілець стабільного рангу 1.

Теорема 1.9. *[94] Нехай існує такий примітивний многочлен $f(x)$ з цілими коефіцієнтами, що $f(r) = 0$ для довільного елемента r кільця R. Тоді стабільний ранг кільця R дорівнює 1.*

Для регулярних кілець має місце такий результат Капланського.

Теорема 1.10. *[66] Регулярне кільце є одинично регулярним кільцем тоді і лише тоді, коли його стабільний ранг дорівнює 1.*

Зауважимо, що комутативне регулярне кільце є одинично регулярним. А згідно попередньої теореми дане кільце є кільцем стабільного рангу 1.

Теорема 1.11. *[94] Стабільний ранг кільця R дорівнює 1 тоді і лише тоді, коли стабільний ранг фактор-кільця по радикалу Джекобсона $R/J(R)$ дорівнює 1.*

Звідси, як наслідок, отримаємо наступну теорему:

Теорема 1.12. *[94] Напівлокальне кільце є кільцем стабільного рангу 1.*

Серед властивостей кілець стабільного рангу 1 виділимо наступні властивості:

Теорема 1.13. *[94] Довільне фактор-кільце кільця стабільного рангу 1 є кільцем стабільного рангу 1.*

Теорема 1.14. *[94] Якщо стабільний ранг кільця R дорівнює 1 і елемент e — довільний ідемпотент кільця R, то кільце eRe також є кільцем стабільного рангу 1.*

Теорема 1.15. *[56] Нехай R — комутативна область головних ідеалів стабільного рангу 1, тоді R є Евклідовим кільцем.*

Означення 1.16. *[94] Кільце R називається кільцем стабільного рангу 2 (в позначеннях ст.р.$(R) = 2$), якщо для довільних елементів $a, b, c \in R$, що $aR + bR + cR = R$, виконується співвідношення*

$$(a + cx)R + (b + cy)R = R$$

для деяких елементів $x, y \in R$.

Існує багато прикладів кільця стабільного рангу 2, зокрема:

1) довільне комутативне кільце, простір максимальних ідеалів якого є нетеровим розмірності 1, є кільцем стабільного рангу 2 [31];

2) довільна скінченнопороджена алгебра R над довільним скінченним полем, $dim(R) = 2$, є кільцем стабільного рангу 2 [31];

3) кільце дійсних неперервних функцій на інтервалі, або більш загально, на довільному топологічному просторі розмірності 1 є кільцем стабільного рангу 2 [94].

Зауважимо, що кільце цілих чисел є кільцем стабільного рангу 2, але не є кільцем стабільного рангу 1, щоб у цьому переконатися достатньо розглянути унімодулярний рядок (3; 5).

Теорема 1.16. *[31] Якщо R — комутативне кільце головних ідеалів, то ст.р.$(R) = 2$.*

Теорема 1.17. *[103] Стабільний ранг комутативної області Безу рівний 2.*

Теорема 1.18. *[13] Комутативне кільце Безу R є кільцем Ерміта тоді і тільки тоді, коли ст.р.$(R) = 2$.*

Відмітимо, такий результат [99].

Лема 1.19. *Нехай R — комутативна область Безу. Тоді всі власні ідемпотенти кільця R_2 спряжені між собою, тобто мають вигляд*

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P,$$

де P — деяка оборотна матриця порядку 2 над кільцем R_2.

Відмітимо теж, що згідно з лемою 1.19 довільна ідемпотентна матриця порядку 2 над комутативною областю Безу діагоналізується.

Впродовж 35 років багато авторів в різних контекстах вели дослідження чистих кілець. Наші дослідження обмежуться в основному комутативними чистими кільцями.

Кільце R назвемо чистим, якщо довільний елемент R є сумою ідемпотента і оборотного елемента. Прикладами чистих кілець можуть послужити всі комутативні регулярні в сенсі фон Неймана кільця, всі локальні кільця, довільне кільце $M_n(R)$ $n \times n$ матриць над чистим кільцем і напівдосконалі кільця. Більше того, клас чистих кілець є замкнений відносно прямих добутків гомоморфних образів. Означення чистого кільця було введено Ніколсоном [84] і прямо пов'язане з наступною умовою, яку вперше розглядали Кроулі і Джонсон, а пізніше Уорфілд.

Означення 1.17. *R-модуль M володіє скінченною властивістю* *заміни, якщо для довільного модуля* M *і розкладу*

$$N = M' \oplus P = \bigoplus_{i \in I} Q_i,$$

де $M' \cong M$ *і* I *— скінченна множина, існують підмодулі* $Q_i' \subseteq Q_i$ *для довільного* i *такого, що*

$$N = M' \oplus (\oplus Q_i').$$

Означення 1.18. *Кільце* R *називаєтьcя кільцем з властивістю заміни, якщо* R *є скінченним* R*-модулем з властивістю заміни.*

Пізніше Ніколсон показав, що чисте кільце є кільцем з властивістю заміни і якщо всі ідемпотенти кільця є центральними, то тоді кільце з властивістю заміни є чистим. Взагалі кажучи, існують приклади кільця з властивістю заміни, яке не є чистим [84].

Як було зауважено вище клас чистих кілець є замкнений стосовно прямих добутків і гомоморфних образів. Більше того відомо, що довільне комутативне нуль-мірне кільце і звідси булеве кільце є чистим. Область цілісності є чистою лише у випадку, коли вона є локальною.

Чисте кільце є кільцем Гельфанда.

Означення 1.19. *Кільце* R *є кільцем Гельфанда, якщо з умови* $a + b = 1$ *існують* $r, s \in R$ *такі, що* $(1 + ar)(1 + bs) = 0$.

Означення 1.20. *Кільце* R *називаєтьcя pm-кільцем, якщо довільний простий ідеал кільця* R *міститься в єдиному максимальному ідеалі.*

Комутативні pm-кільця вивчалися в працях [23, 46]. Відомо, що для довільного топологічного простору X кільце $C(X)$, яке складається дійсно визначеними неперервними функціями на X стосовно поточкових операцій додавання і множення є завжди pm-кільцем. Більше того, комутативне кільце є кільцем Гельфанда тоді і тільки тоді, коли воно є pm-кільцем.

Топологія Зарицького на $Spec(\mathrm{R})$ — це топологія, яку ми отримаємо взявши множини

$$U(a) = \{P \in Spec(\mathrm{R}) : a \notin P\}$$

для довільного $a \in A$ за базу для відкритих множин. Відмітимо, що $U(a) \cap U(b) = U(ab)$. Позначимо через $V(a)$ доповнення для $U(a)$. Множину максимальних ідеалів R позначимо $Max(R)$. Аналогічно виражається топологія Зарицького по $Max(R)$. Зокрема маємо

$$U(a) = Max(R) \cap U(a)$$

і

$$V(a) = Max(R) \cap V(a)$$

Оскільки R є кільцем з одиницею, тому $Spec(\mathrm{R})$ і $Max(R)$ є компактним простором. $Spec(\mathrm{R})$ є завжди T_0, $Max(R)$ є завжди T_1.

Топологічний простір X назвемо нуль-вимірним, якщо він має базу з замкнених множин. Більше того, коли X є компактним нуль-мірним Хаусдорфовим простором, тоді X назвемо бульовим простором.

Має місце наступний результат

Твердження 1.20. *Для комутативного кільця R з 1 наступні умови є еквівалентними.*

1) R є pm-кільцем.

2) $\mathrm{Spec}(R)$ є нормальним простором.

3) R є кільце Гельфанда.

4) Для довільної пари різних максимальних ідеалів M і N існують елементи a, b такі, що $a \notin M$, $b \notin N$ і $ab = 0$.

Означення 1.21. *Кільце називається топологічно бульовим (в позначеннях tb-кільце), якщо для довільної пари різних максимальних ідеалів існує ідемпотент, який належить одному з них.*

Означення 1.22. *Кільце R є f-кільцем, якщо довільний чистий ідеал породжується ідемпотентом.*

Означення 1.23. *Ідеал I є чистим, якщо для довільного $a \in I$ існує $b \in I$, що $ab = a$.*

Джонгрун [103] показав наступний результат

Твердження 1.21. *Наступні властивості для комутативного кільця R є еквівалентні:*

1) R є f-кільце;

2) довільний проективний ідеал є прямою сумою скінченно породжених ідеалів;

3) для довільної послідовності $\{a_n\}$ в R такої, що $a_n = a_n a_{n+1}$ для довільного ідеалу, який породжується $\{a_n\}$ породжується ідем-

потентом.

Наступна основна теорема описує співвідношення між наведеними класами кілець.

Теорема 1.22. *[77] Для комутативного кільця R з одиницею наступні властивості є еквівалентними:*

1) R — кільце з властивістю заміни;

2) $End_R R$ є кільцем з властивістю заміни;

3) ідемпотенти піднімаються по модулю довільного ідеалу кільця R;

4) R є кільцем Гельфанда і $Max(R)$ є нуль-вимірним;

5) R є pm-кільцем і $Max(R)$ є нуль-вимірним;

6) R є чисте кільце;

7) $R/J(R)$ є чисте кільце та ідемпотенти піднімаються по модулю $J(R)$;

8) R є tb-кільцем;

9) для довільних $m, m' \in R$ і якщо $1 = a+b$, тоді існує ідемпотент e, що $e \in mR$ і $1 - e \in Rm'$;

10) множина $\varepsilon = \{U(e|e^2 = e\}$ є базою для топології Зарицького на $Max(R)$;

11) R є pm-кільце і f-кільце.

В роботі [104] показано наступний результат.

Теорема 1.23. *Нехай R — комутативна область Безу і*

$a \in R \setminus \{0\}$. *Елемент* a *є адекватним тоді і лише тоді, коли фактор-кільце* R/aR *є напіврегулярним.*

Одна з основних властивостей чистих кілець є та, що гомоморфний образ чистого кільця є знову чистим. Це дозволяє ввести поняття акуратного кільця.

Означення 1.24. *[77] Кільце* R *є акуратним, якщо довільний нетривіальний його гомоморфний образ є чистим кільцем.*

Твердження 1.24. *[77] Наступні властивості для кільця* R *є еквівалентними:*

1) R *є акуратним;*

2) R/aR *є чистим для довільного ненульового елемента* $a \in R$*;*

3) R/aR *є акуратним для довільного* $a \in R$.

Більше того, гомоморфний образ акуратного кільця є акуратним кільцем.

Твердження 1.25. *[77] Якщо* R *є акуратним, яке не є чистим, тоді* R *є напівпросте.*

Твердження 1.26. *[77] Якщо* R *є розкладним кільцем в пряму суму, то* R *є акуратним тоді і тільки тоді, коли воно є чистим.*

Твердження 1.27. *[77] Якщо* R *є областю розмірності Круля 1, тоді* R *є акуратною.*

Зокрема, область головних ідеалів є акуратною. Звідси випливає, якщо R є акуратним, тоді довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі.

Означення 1.25. *Кільце R називається FGC кільцем, якщо довільний скінченно породжений R-модуль є ізоморфний прямій сумі циклічних підмодулів.*

Цей клас кілець ввів вперше Капланський [70].

Нехай в кільці R, M є R-модулем. Скажемо, що M є лінійно компактним R-модулем, якщо довільна множина суміжних класів з властивістю скінченного перетину має непорожній перетин. Якщо R є лінійно компактним R-модулем, тоді R називається максимальним кільцем. Артінове кільце є максимальним. Кільце p-адичних чисел є максимальним кільцем. Кільце R є майже максимальним, якщо R/I є лінійно компактним R-модулем для довільного ненульового ідеалу I кільця R. Якщо R_M є майже максимальне кільце для довільного максимального ідеалу M кільця R, тоді R назвемо локально майже максимальним.

Твердження 1.28. *[64] Максимальне кільце є чистим. Майже максимальне кільце є акуратним.*

Означення 1.26. *[64] Кільце R назвемо h-локальним, якщо довільний ненульовий елемент R міститься в скінченній множині максимальних ідеалів і довільний гомоморфний образ R є pm-кільцем.*

Означення 1.27. *[64] Кільце R є факельним, якщо воно задовольняє наступні властивості:*

1) R не є локальним.

2) R має єдиний мінімальний простий ідеал P, який є порівняний з довільним ідеалом кільця R.

3) R/P — h-локальна область.

4) R є локально майже максимальне кільце Безу.

Теорема 1.29. *[64] Кільце R є FGC кільцем тоді і тільки тоді, якщо воно є прямим добутком кілець трьох типів:*

1) Максимальних кілець нормування.

2) Майже максимальних областей Безу.

3) Факельних кілець.

Лема 1.30. *[64] Факельне кільце не є акуратним.*

Теорема 1.31. *[64] Нехай R є FGC кільце. R є чистим тоді і тільки тоді, якщо R — прямий добуток локальних кілець. R є акуратним тоді і тільки тоді, коли R є або чистим або майже максимальною областю Безу, яка не є локальною.*

Твердження 1.32. *[64] FGC область є акуратною.*

Твердження 1.33. *[64] h-локальна область є акуратною.*

Твердження 1.34. *[64] Наступні властивості є еквівалентні для області R:*

1) R — чиста область Безу.

2) R — область нормування.

Означення 1.28. *[104] Елемент* a *комутативного кільця* R *називається акуратним елементом, якщо фактор-кільце* R/aR *є чистим.*

Означення 1.29. *[104] Кільце* R *називається кільцем акуратного рангу 1, якщо для довільних елементів* a, b *кільця* R *таких, що* $aR + bR = R$ *існує елемент* $t \in R$ *такий, що* $a + bt$ *— акуратний елемент кільця* R*.*

Теорема 1.35. *[104] Комутативна область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли* R *є кільцем акуратного рангу 1.*

Означення 1.30. *[83] Кільце* R *називається напівпотужним, якщо довільний однобічний ідеал, який не міститься в радикалі Джекобсона* $J(R)$*, містить ненульовий ідемпотент. Якщо додатково ідемпотенти піднімаються по модулю радикала Джекобсона, то називається потужним кільцем.*

Лема 1.36. *[83] Для кільця* R *наступні властивості еквівалентні:*

1) R *— напівпотужне кільце.*

2) Якщо $a \notin J(R)$*, тоді* $xax = x$ *для деякого* $x \in R$*.*

Твердження 1.37. *[83] Якщо* R *— напівпотужне кільце, тоді* $M_n(R)$ *— напівпотужне кільце.*

Означення 1.31. *[52] Комутативне кільце* R *називається локально регулярним, якщо для довільного елемента* a *елементи* a *або*

$1-a$ є регулярними в сенсі Неймана.

Твердження 1.38. *[52] Локально регулярне кільце є PM-кільцем.*

Локальне і регулярне в сенсі Неймана є локально регулярним кільцем.

Кільце $\mathbb{Z}_n$ — цілих чисел по модулю числа n є локально регулярним, тоді і лише тоді, коли $(pq)^2 \nmid n$, де p і q різні прості числа.

Означення 1.32. *Скажемо, що матриця $A \in R_2$ є повною, коли*

$$R_2 A R_2 = R_2.$$

Наведемо необхідні та достатні умови акуратності областей Безу. У цих умовах використаємо групи подільності областей, а тому пригадаємо, що це таке. Для області R позначимо через $Q(R)$ класичне кільце дробів, а через $Q^*(R)$ — множину її ненульових елементів. Легко бачити, що $U(R)$ є підгрупою абелевої групи $Q^*(R)$, а тому назвемо фактор-групу

$$G(R) = Q^*(R)/U(R)$$

групою подільності області R. Зауважимо, що група $G(R)$ може бути частково впорядкована наступним чином. Якщо $aU(R), bU(R) \in G(R)$, то скажемо, що $aU(R) \leq bU(R)$, якщо $b/a \in R$. Дане визначення часткового порядку є коректним і $G(R)$ перетворюється на частково впорядковану групу. Додатнім конусом $G^+(R)$ цієї групи буде множина тих її елементів $aU(R) \in G(R)$, що

$$1U(R) \leq aU(R)$$

є множиною суміжних класів з представниками в R.

Так визначений частковий порядок перетворюється на порядок визначений на гратці і $G(R)$ стає градково впорядкованою групою (яку скорочено назвемо l-групою), а у випадку, коли R є НСД-областю (тобто областю в якій кожна пара елементів володіє НСД). Зокрема, області Безу є НСД-областями. Наступна добре відома теорема стверджує, що кожна абелева l-група є групою подільності деякої області Безу. Із детальною інформацією стосовно градково впорядкованих груп можна ознайомитись у працях [54, 26].

Теорема 1.39. *[78] Для кожної абелевої l-групи G існує така область Безу R, що $G(R) \cong G$.*

Враховуючи те, що область є чистою тоді і тільки тоді, коли вона є локальною, маємо таку характеризацію чистих областей Безу:

Наслідок 1.40. *[77] Наступні умови для області R є еквівалентними:*

1) R є чистою областю Безу.

2) R є областю нормування.

3) $G(R)$ є цілком впорядкованою групою.

Як згадувалось вище, метою є класифікація областей Безу. Причиною того, що змушені обмежитись областями Безу, а не працювати із ширшим класом НСД-областей є те, що для областей Безу може бути встановлена вкрай корисна відповідність між простими ідеалами R та простими підгрупами $G(R)$. Наприклад, $\mathbb{Z}[x]$ є НСД- областю але не є областю Безу. Ця область, крім того, не є акуратною. Проте група подільності $\mathbb{Z}[x]$ є прямою сумою груп ізоморфних $\mathbb{Z}$. Як показано нижче, область Безу із групою подільності, яка ізоморфна прямій сумі копій аддитивної групи цілих чисел, є акуратною.

Означення 1.33. *Підгрупа H l-групи G називається l-підгрупою, якщо вона є підграткою в G. Підмножина $C \subseteq G$ називається опуклою, якщо із того, що $x \leq y \leq z$ і $x, z \in C$ випливає, що $y \in C$. Сім'ю опуклих l-підгруп групи G позначимо через (G). Оскільки перетин довільної множини опуклих l-підгруп є також опуклою l-підгрупою, то (G) є повною граткою стосовно часткового порядку визначеного включенням множин. Більше того, для довільної множини $S \subseteq G$ існує найменша опукла l-підгрупа, що містить S і яку будемо позначати $G(S)$. Якщо $S = s$, то писатимемо просто $G(s)$.*

Нехай P — опукла l-підгрупа. Скажемо, що P є простою підгрупою, якщо із того, що $a \wedge b = e$ випливає $a \in P$ або $b \in P$. Для довільної заданої опуклої l-підгрупи H задамо індуковане відношення на фактор-групі G/H визначене за правилом:

$$a + H \leq b + H,$$

якщо існує таке $h \in H$, що $a + h \leq b$. Не важко переконатись, що так задане відношення є коректним і G/H перетворюється на l-групу. Тоді P є простою підгрупою тоді і тільки тоді, коли G/P є цілком впорядкованою множиною. Сім'ю усіх простих підгруп в G будемо позначати через $Spec_l(G)$. Як наслідок із леми Цорна отримаємо, що мінімальні прості підгрупи існують і їх сім'ю позначимо $Min(G)$.

Теорема 1.41. *[82, 58, 26] Нехай R — область Безу. Тоді існує взаємно-однозначна порядково-інверсна віповідність між ненульовими простими ідеалами R та простими підгрупами групи $G(R)$. Більше того, прості ідеали області Безу утворюють дерево, тобто для довільного простого ідеалу P множина простих ідеалів, що належать P утворює ланцюг.*

Наслідок 1.42. *Нехай R є областю Безу, то тоді існує бієкція ν між $Max(R)$ та $Min(G(R))$.*

Нехай P — ненульовий простий ідеал в R. Якщо R є акуратною областю, то R/P є чистою областю Безу і, отже, областю нормування. Звідси випливає, що множина всіх ідеалів, що містять P і, зокрема, ті прості ідеали, які містять P, утворює ланцюг. Так як знаємо, що прості ідеали, що містяться в P утворюють теж ланцюг, то $Spec(R^*)$ є диз'юнктним об'єднанням ланцюгів простих ідеалів. Скажемо, що абелева l-група G, множина простих підгруп якої є диз'юнктним об'єднанням ланцюгів простих підгруп, володіє поліланцюговим спектром. Це рівнозначно тому, що у l-групі G кожна проста підгрупа містить єдину мінімальну просту підгрупу [54]. Приклад абелевих l-груп із поліланцюговим спектром є приклад 18.1 в [54] та множина всіх неперервних цілочисельних функцій на топологічному просторі стосовно поточково визначених операцій. Якщо група подільності $G(R)$ області Безу R володіє поліланцюговим спектром, то будемо казати, що R володіє поліланцюговим спектром.

Твердження 1.43. *[78] Група подільності $G(R)$ акуратної області Безу R володіє поліланцюговим спектром.*

Означення 1.34. *Назвемо l-групу G гіпер-архімедовою, якщо кожна її проста підгрупа є мінімальною. Хоч це не є стандартним означенням (див. [49]), проте воно є достатнім для подальшої мети. Очевидно, що гіпер-архімедова l-група володіє поліланцюговим спектром. Також відмітимо такий очевидний факт: група $G(R)$ є гіпер-архімедовою тоді і тільки тоді, коли розмірність Крулля області R не перевищує 1.*

Твердження 1.44. *Якщо R є областю Безу з гіпер-архімедовою групою подільності $G(R)$, то R є акуратною.*

Наслідок 1.45. *Якщо R є областю Безу з групою подільності $G(R)$, що ізоморфна прямій сумі копій адитивної групи $\mathbb{Z}$, то R є акуратною.*

Охарактеризуємо h-локальні області Безу. Нехай G — абелева l-група і $a \in G^+$. Згідно з лемою Цорна, знайдуться опуклі l-підгрупи в G, які є максимальними щодо властивості неналежності елемента a. Такі підгрупи називають значущими для a (інколи про них кажуть, що вони є регулярними), і будемо казати, що деяка підгрупа є значущою, якщо вона є значущою для деякого додатного елемента. Значущі підгрупи є простими. Кажуть, що група G є скінченно-значуща, якщо кожний додатній елемент має лише скінченну множину значущих стосовно нього підгруп.

Твердження 1.46. *[78] Якщо R є областю Безу, то R є h-локальною тоді і тільки тоді, коли R володіє поліланцюговим спектром і $G(R)$ є скінченно-значущою. В цьому випадку R є акуратною.*

Приклад 1.2. *[78] Слід відмітити, що існують абелеві l-групи, які є скінченно-значущими, але їх спектр не є поліланцюговим. Області Безу із такими групами подільності не є акуратними.*

Наступним завданням є характеризація акуратних областей Безу у термінах їх груп подільності. Для цього доцільно розпочати вивчення простору мінімальних простих підгруп абелевих l-груп. Простір максимальних ідеалів $Max(R)$ комутативного кільця з одиницею R є завжди компактним T_1 простором у оболонково-ядерній топології, проте взагалі кажучи, не є Хаусдорфовим. З іншого боку множина $Min(G)$ довільної абелевої l-групи G володіє досить багатою структурою. Множини вигляду

$$M(a) = \{P \in Min(G) : a \notin P\},$$

де $a \in G^+$ є базою для відкритих множин у оболонково-ядерній топології над $Min(G)$. Доповнення таких множин позначимо через $N(a)$. Кожна відкрита (замкнена) множина $Min(G)$ для деякої опуклої l-підгрупи $H \leq G$ має вигляд $M(H)$ $(N(H))$, де

$$M(H) = \bigcup \{U(h) : h \in H^+\} \quad (N(H) = Min(G)\ M(H)).$$

Більше того, якщо P і Q є двома диз'юнктними мінімальними простими підгрупами, то знайдуться диз'юнктні a, b такі, що $a \in P \backslash Q$ і $b \in Q \backslash P$. Звідси легко отримати, що

$$M(a) \cap M(b) = \varnothing,$$

де $P \in M(b)$ і $Q \in M(a)$. А тому простір $Min(G)$ з оболонково-ядерною топологією є Хаусдорфним [50].

Означення 1.35. *Нехай G є l-групою і $X \subseteq G$. Поляром множини X називають множину*

$$X^{\perp} = \{g \in G : |g| \wedge |x| = 0 \quad \forall x \in X\},$$

яка є опуклою l-підгрупою в G. Якщо $X = \{x\}$, то її поляр позначатимемо через $x^{\perp}$.

Введення полярів мотивовано тим, що вони є корисними при відокремленні мінімальних простих підгруп від інших простих підгруп.

Наступна лема відома під назвою Леми про ультрафільтри і вона буде відігравати ключову роль у подальших дослідженнях. Детальну інформацію з цього приводу можна знайти в праці [50].

Лема 1.47. *(Лема на ультрафільтри) Нехай G є l-групою. Для кожної мінімальної простої підгрупи P, множина*

$$\gamma = \{g \in G^+ : g \notin P\}$$

є ультрафільтром на G^+. Навпаки, якщо γ є ультрафільтром на G^+, то множина

$$P = \bigcup \{x^\perp : x \in \gamma\}$$

є мінімальною простою підгрупою. Крім того P є мінімальною простою підгрупою тоді і тільки тоді, якщо

$$P = \bigcup \{x^\perp : x \notin P\}.$$

Одним із найважливіших наслідків Леми про ультрафільтри є те, що для кожного $a \in G$,

$$M(a) = M(a^{\perp\perp}) = V(a^\perp)$$

Таким чином елементи бази є віза множинами і оболонково-ядерна топологія на $Min(G)$ є нуль-вимірна. Хоч $Max(R)$ є компактним простором, проте $Min(G)$ буде таким лише в деяких випадках.

Позначимо через

$$\tau : Min(G(R)) \to Max(R)$$

обернене відображення до бієкції ν. Оскільки

$$\tau^{-1}(U(a)) = N(a),$$

то τ є неперервною функцією і топологія на $Min(G(R))$ є, в загальному випадку, тоншою аніж топологія на $Max(R)$. Крім того, τ є гомеоморфізмом тоді і тільки тоді, коли ν є неперервним відображенням. Завершимо ці викладки міркуваннями про те, коли вказані вище ситуацією є можливими.

Означення 1.36. *Нехай G є l-групою та $u \in G^+$. Скажемо, що u є (слабкою) порядковою одиницею якщо $u^\perp = 0$. Звідси, додатній елемент в G є слабкою порядковою одиницею лише у випадку, коли він не належить до жодної мінімальної простої підгрупи в G. Проте не в кожній l-групі є слабкі порядкові одиниці, наприклад їх немає у групі подільності цілих чисел. Відзначимо, що означенню таких елементів відповідають елементи із радикала Джекобсона кільця R. Якщо для елемента $x \in G^+$ знайдеться елемент $y \in G^+$ такий, що $x \wedge y = 0$ і $x \vee y$ є порядковою одиницею, то назвемо елемент доповняльним в G. Якщо кожний додатній елемент в G є доповняльним, то назвемо l-групу G доповняльною. Якщо для кожного*
$g \in G^+$ підгрупа $G(g)$ є доповняльною, то скажемо, що G є локально доповняльною.

Лема 1.48. *[78] Нехай G є l-групою і нехай $x, y \in G^+$. Якщо $x \wedge y = 0$ і $x \vee y$ є слабкою порядковою одиницею, то $M(x) = N(y)$, і навпаки.*

Теорема 1.49. *[78] Нехай R-область Безу і $G = G(R)$. Відображення*

$$\nu : Max(R) \to Min(G(R))$$

є неперервним (а тоді гомеоморфізмом) тоді і тільки тоді, коли G є доповняльною. В цьому випадку, $Max(R)$ є булевим простором.

Наслідок 1.50. *Якщо R є областю Безу з доповняльною l-групою подільності $G(R)$, то R є акуратною тоді і тільки тоді, коли R володіє поліланцюговим спектром.*

Той факт, що G є доповняльною тоді і тільки тоді, коли оболонково-ядерна топологія на $Min(G)$ є компактною доведений в теоремі 2.2 у [50]. Для абелевих l-груп необхідність вказаного твердження може бути доведена більш елегантним чином, ніж в оригіналі, де використовується трансфінітна індукція.

Теорема 1.51. *[78] Нехай G є абелевою l-групою. Простір $Min(G)$ є компактним у оболонково-ядерній топології тоді і тільки тоді, коли G є доповняльною.*

Очевидно, що булеві простори є нуль-вимірними, тому вказаний вище наслідок може бути посилений, вимагаючи, щоб $Max(R)$ був нуль-вимірним простором замість умови доповняльності l-групи $G(A)$. Цим і мотивується дослідження умов за яких $Max(R)$ є нуль-вимірним простором для комутативної області Безу R.

1.2 Основні напрямки і результати досліджень

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми та подано загальну характеристику дисертації, а саме визначені мета, актуальність, предмет, об'єкт та методи досліджень; вказано наукову новизну отриманих результатів.

У **першому розділі** наведено огляд літератури за темою дисертації та сформульовано необхідні означення та факти, пов'язані з тематикою досліджень, що використовуються у дисертації, а також важливі результати, які є необхідними для подальшого викладу матеріалу.

У **другому розділі** розглядаються роздільні кільця.

В першому підрозділі цього розділу вводиться поняття роздільного кільця, яке міститься в класі комутативних областей Безу, в яких довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі і є природнім узагальненням адекватного кільця.

Означення 2.1 *Комутативне кільце називається роздільним, якщо для довільних елементів $a, b, c \in R$, $c \neq 0$, що*

$$aR + bR + cR = R$$

існують елементи $r, s \in R$ такі що

$$c = rs,$$

де

$$rR + aR = R, \quad sR + bR = R \quad \text{і} \quad rR + sR = R.$$

Відмітимо, що контрприклад Бревера, Конрада і Монтгомері [33], як вказав Мак Говерн, є роздільним кільцем, яке не є адекватним кільцем.

У випадку комутативної області Безу встановлено, що комутативне роздільне кільце — це кільце, скінченні гомоморфні образи якого є чистим кільцем.

Теорема 2.1 *Комутативна область Безу R є роздільним кільцем тоді і тільки тоді, коли для довільного $c \in R \setminus \{0\}$ фактор-кільце R/cR є чистим кільцем.*

Теорема 2.1 встановлює, що введені Мак Говерном акуратні кільця, які активно вивчаються в сучасних дослідженнях багатьох відомих авторів, є прикладом роздільного кільця.

Наступна теорема встановлює існування роздільних кілець, а також показує, що комутативна адекватна область Безу є такою.

Теорема 2.2 *Комутативна адекватна область Безу є роздільною областю.*

Теорема 2.3 *Роздільна область — це область, в якій кожний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі.*

Тобто, встановлено що роздільна область є PM^*-областю. У випадку FGC областей вона є адекватною областю.

Теорема 2.4 *Довільна FGC область Безу R, в якій кожний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному іде-*

алі, є роздільною тоді і тільки тоді, коли R є адекватною областю.

Більше того доведено, що роздільна область Безу є кільцем елементарних дільників.

Теорема 2.5 *Будь-яка роздільна область Безу є кільцем елементарних дільників.*

Відмітимо, що дана теорема є відповіддю на відкрите питання роботи [109].

У другому підрозділі другого розділу на основі введеного поняття роздільного елемента, вводиться поняття кільця роздільного рангу 1, а також поняття локально роздільного кільця. Показано, що локально роздільне кільце є кільцем роздільного рангу 1, а також показано, що комутативна область Безу роздільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників.

У випадку довільного комутативного кільця адекватний елемент є роздільним. Тим самим встановлено існування роздільних елементів. Відмітимо, що адекватними елементами є всі оборотні елементи кільця, факторіальні елементи, а також елементи вільні від квадратів. Встановлено насиченість множини роздільних елементів комутативної області Безу.

Твердження 2.7 *Нехай R — комутативне кільце Безу і a — адекватний елемент в кільці R. Тоді a є роздільним елементом.*

Твердження 2.8 *Нехай R — комутативна область Безу і a — роздільний елемент. Тоді довільний дільник роздільного елемента є* *роздільним.*

Як природнє узагальнення локально регулярного кільця [52] вводиться поняття локально роздільного кільця.

Означення 2.2 *Комутативне кільце R називається локально роздільним кільцем, якщо для довільного елемента $a \in R$ хоча би один елемент a або $1-a$ є роздільним.*

Очевидними прикладами локально роздільного кільця є локальне і роздільне кільце, а також показано, що локально регулярні кільця, які активно вивчаються в сучасних дослідженнях є локально роздільними.

Твердження 2.9 *Локально регулярне кільце є локально роздільним кільцем.*

Згідно з твердженням 2.7, аналогічно маємо наступний результат.

Твердження 2.10 *Адекватне кільце є локально роздільним.*

Приклад Хенріксена [64], а саме кільце

$$R = \{z_0 + a_1x + ... + a_nx^n + ...|z_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Q}\}$$

є прикладом локально роздільного кільця, яке не є адекватним. Відмітимо, що в даному кільці для довільного ряду $f(x) \in R$ хоча би один з двох рядів $f(x)$ і $1 - f(x)$ є факторіальним, а значить є роздільним.

У випадку комутативних областей Безу локально роздільну область Безу можна визначити інакше, а саме

Твердження 2.11 *Комутативна область Безу є локально роздільною тоді і лише тоді, коли з умови $aR + bR = R$ випливає, що a*

або b є роздільним елементом.

Кільця роздільного рангу 1, введені Забавським Б. В. [104] є частковим випадком кільця акуратного рангу 1, які в класі комутативних областей Безу збігаються з кільцями елементарних дільників.

Означення 2.3 *Комутативне кільце R називається кільцем роздільного рангу 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$ існує елемент $t \in R$ такий, що $a + bt$ — роздільний елемент.*

Твердження 2.12 *Локально роздільна область Безу є кільцем роздільного рангу 1.*

Локально роздільна комутативна область Безу є прикладом кільця роздільного рангу 1. Більше того показано, що комутативна область роздільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників.

Теорема 2.13 *Комутативна область Безу роздільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників.*

Ця теорема є відповіддю на відкрите питання Забавського [109]. Відмітимо, що Дубровін [9] показав, що комутативна область Безу є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли в кільці матриць другого порядку над даною областю довільний головний ідеал породжений невиродженою повною матрицею містить власний ідемпотент. Все це стало мотивацією досліджень з розділу 3 і 4.

У **третьому розділі** розглядаються комутативні області Безу, скінченні гомоморфні образи яких є напівпотужними кільцями. В класі таких кілець виділяється клас ефективних кілець, які є кільцями елементарних дільників.

До важливих результатів цього розділу відносяться такі теореми, які описують чисті елементи, елементи з властивістю заміни і елементи ідемпотентного стабільного рангу 1 в кільцях, які є скінченними гомоморфними образами комутативної області Безу:

Теорема 3.3 *Нехай R — комутативна область Безу і ${}_aA_b$. Тоді:*

1) $\overline{b} = b + aR$ є чистим елементом у фактор-кільці R/aR.

2) $\overline{b} = b + aR$ є елементом з властивістю заміни у фактор-кільці R/aR.

3) $\overline{b} = b + aR$ є елементом ідемпотентного стабільного рангу 1 у фактор-кільці R/aR.

Відмітимо, що позначення ${}_aA_b$ означає, що елемент a є адекватним до елемента b, тобто: $a = rs$, $r, s \in R$, де

$$rR + bR = R \quad \text{і} \quad s'R + bR \neq R$$

для довільного необоротного дільника s' елемента s.

Теорема 3.4 *Нехай R — комутативна область Безу і нехай $a \in R \setminus \{0\}$. Якщо ${}_aA_b$ і $b \notin J(aR)$, тоді ідеал $\overline{bR}$ містить власний ідемпотент.*

Ця теорема встановлює необхідні умови, коли головний ідеал скінченного гомоморфного образу комутативної області Безу містить ідемпотент. Наступна теорема вказує достатні умови, коли головний ідеал скінченного гомоморфного образу комутативної області Безу містить ідемпотент.

Теорема 3.5 *Нехай R — комутативна область Безу і нехай $a \in R \setminus \{0\}$. Якщо фактор-кільце $\overline{R} = R/aR$ є напівпотужним, тоді для деякого елемента $b \in R \setminus J(aR)$ існує такий елемент $u \in R$, що ${}_aA_{bu}$.*

Як наслідок двох попередніх теорем маємо наступний результат, який показує, коли скінченні гомоморфні образи комутативної області Безу є напівпотужними кільцями.

Теорема 3.6 *Нехай R — комутативна область Безу і нехай $a \in R \setminus \{0\}$. Тоді фактор-кільце $\overline{R} = R/aR$ є напівпотужним тоді і тільки тоді, коли $b \in R \setminus J(aR)$ і існує деякий елемент $u \in R$, що ${}_aA_{bu}$, $bu \notin aR$.*

В класі комутативних областей Безу, скінченні гомоморфні образи яких є напівпотужними, виділяється клас ефективних кілець, які є узагальненням адекватних кілець і комутативних областей Безу, скінченні гомоморфні образи яких є кільцями з властивістю заміни, тобто роздільних кілець і які не є взагалі кажучи кільцями, в яких ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі.

Означення 3.1 *Кільце R називається ефективним, якщо для будь-яких елементів $a, b, c \in R$ таких, що*

$$aR + bR + cR = R \quad i \quad aR + bR \neq R$$

існує елемент $p \in R$ *такий, що*

$$ {}_cA_{pa} \quad i \quad pR + bR + cR = R. $$

Основним результатом цього розділу є наступна теорема

Теорема 3.7 *Ефективне кільце* R *є кільцем елементарних дільників.*

Доведено, що у випадку комутативної області Безу роздільні кільця є ефективними кільцями.

Теорема 3.9 *Нехай* R *— комутативна область Безу, гомоморфний образ якої* R/cR *є кільцем з властивістю заміни для довільного* $c \in R \setminus \{0\}$. *Тоді* R *— ефективне кільце.*

Більше того, встановлено зв'язок, коли ефективні кільця є роздільними.

Теорема 3.11 *Нехай* R *— комутативна область Безу, в якій для довільних елементів* $a, b, c \in R$ *таких, що* $aR + bR + cR = R$ *існує такий елемент* $p \in R$, *що* ${}_cA_{ap}$ *і* $pR + bR + cR = R$. *Тоді* R/cR *є кільцем з властивістю заміни для кожного* $c \in R \setminus \{0\}$.

У **четвертому розділі** досліджується $F(R_2)$ — множина повних матриць кільця матриць другого порядку над комутативною областю Безу стабільного рангу 2.

В першому підрозділі обчислюється стабільний ранг множини повних матриць. Важливими у цьому підрозділі є такі теореми.

Теорема 4.2 *Нехай R — комутативне кільце Безу стабільного рангу 2. Нехай $A, B \in F(R_2)$ і*

$$AR_2 + BR_2 = R_2,$$

причому матриця B діагоналізується. Тоді існує така повна матриця $T \in F(R_2)$, що $A + BT$ — оборотна матриця.

Як очевидний наслідок з цієї теореми у випадку кільця елементарних дільників отримаємо результат, який показує що стабільний ранг множини повних матриць порядку 2 рівний 1.

Теорема 4.3 *Нехай R — комутативне кільце елементарних дільників. Якщо $A, B \in F(R_2)$ і $AR_2 + BR_2 = R_2$, то тоді існує така повна матриця $T \in F(R_2)$, що $A + BT$ — оборотна матриця.*

Відмітимо, що повні матриці відіграють важливу роль в різних задачах, як теорії кілець так і в задачах діагоналізації матриць. Так згідно критерію Капланського для діагоналізації матриць над комутативним кільцем Ерміта необхідно і достатньо лише діагоналізації повних матриць другого порядку.

З того факту, що множина повних матриць другого порядку над кільцем елементарних дільників має стабільний ранг 1 отримаємо, що множина повних матриць порядку 2 над комутативним кільцем елементарних дільників володіє двочленним лівим ланцюгом подільності.

Теорема 4.4 *Нехай R — комутативне кільце елементарних дільників. Тоді для довільних повних матриць $A, B \in F(R_2)$ існують такі повні матриці $Q_1, Q_2, P \in R_2$, що $A = BQ_1 + P$, $B = PQ_2$.*

Відмітимо, що в анонсовані у 2015 році результати Лезовського [75] говорять, що матриці порядку 2 над комутативним кільцем елементарних дільників володіють лише тричленним алгоритмом подільності та цей алгоритм не є покращений.

Більше того, в другому підрозділі відмітимо наступну теорему, яка показує, що множина регулярних матриць порядку 2 є одинично регулярною, тобто є множиною елементів стабільного рангу 1.

Теорема 4.7 *Над комутативною областю Безу довільна регулярна матриця в сенсі Неймана порядку 2 є одинично регулярною.*

Актуальність цього результату підтверджує хоча би робота [35].

Як наслідок даної теореми, маємо такий результат.

Наслідок 4.8 *Довільна регулярна матриця в сенсі Неймана порядку 2 над комутативною областю Безу має вигляд FU, де F — ідемпотентна матриця кільця R_2, а U — оборотна матриця кільця R_2.*

Цей результат дозволяє описати всі регулярні матриці порядку 2 над комутативною областю Безу.

РОЗДІЛ 2

Роздільні кільця

У праці [73] ставиться задача описання адекватних кілець, а також ставиться питання: чи буде комутативна область Безу, в якій довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, адекватною?

В статті [33] побудовано приклад комутативної області Безу, в якій довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, яка не є адекватною. Мак Говерн зауважив, що цей контрприклад роботи [33] є акуратним кільцем, тобто кільцем гомоморфні образи якого є чистими. Тим самим це дозволяє виділити новий клас кілець елементарних дільників, який узагальнює клас адекватних кілець, причому цей клас кілець містить в собі вказаний контрприклад роботи [33].

2.1 Роздільне кільце

В даному підрозділі вивчаються комутативні області Безу, скінченні гомоморфні образи яких є чистими. Такі кільця названі роздільними кільцями. А також встановлено, що адекватна область Безу є роздільною.

Хелмер ввів адекватні кільця [63] як новий клас кілець елементарних дільників без умов обмеженості на ланцюги ідеалів. Зокрема, комутативне кільце називають адекватним, якщо для довільних елементів $a, b \in R$, $a \notin 0$ існують такі елементи $r, s \in R$, що

$$a = rs, \quad rR + bR = R, \quad s'R + bR \neq R$$

для довільного необоротного дільника s' елемента s. Забавський зауважив, що тоді $rR + sR = R$ і це дозволило ввести до розгляду роздільні кільця як узагальнення адекватних кілець [107]. Більше того, згідно з результатами [104], роздільні області Безу — це не що інше як комутативні області Безу, скінченні гомоморфні образи яких є кільцями з властивістю заміни.

Введемо означення роздільного кільця.

Означення 2.1. *Комутативне кільце R називається роздільним, якщо для довільних елементів $a, b, c \in R$, $c \neq 0$ таких, що*

$$aR + bR + cR = R$$

існують елементи $r, s \in R$ такі, що

$$c = rs,$$

де

$$rR + aR = R, \quad sR + bR = R \quad i \quad rR + sR = R.$$

Доведено, що роздільна область Безу є кільцем елементарних дільників.

Теорема 2.1. *Комутативна область Безу R є роздільним кільцем тоді і тільки тоді, коли для довільного $c \in R \setminus \{0\}$ фактор-кільце R/cR є чистим кільцем.*

Доведення. Нехай $\overline{R} = R/cR$ і $\overline{a} = a + cR$, $\overline{b} = b + cR$. Оскільки R є чистим кільцем, то існує ідемпотент $\overline{e} \in \overline{R}$ такий, що $\overline{e} \in \overline{a}\overline{R}$ і $\overline{1} - \overline{e} \in \overline{bR}$ (див. [77]). Тоді маємо, що

$$e - ap = cs$$

для деяких елементів $p, s \in R$. Подібно

$$1 - e - b\alpha = c\beta$$

для деяких елементів $\alpha, \beta \in R$. Співставляючи

$$e = cs - ap \quad \text{і} \quad 1 - e - b\alpha = c\beta,$$

отримаємо

$$apR + bR + cR = R.$$

Оскільки $\overline{e} = \overline{e}^2$, то отримаємо

$$e(1 - e) = ct$$

для деякого елемента $t \in R$. Нехай $eR + cR = dR$ і тоді

$$e = de_0, \quad c = dc_0,$$

де

$$e_0R + c_0R = R$$

для деяких елементів $b_0, c_0 \in R$. Звідси

$$e + c_0j = 1$$

для деякого елемента $j \in R$. Візьмемо $r = c_0$, $s = d$ і запишемо розклад на множники $c = rs$, де $rR + cR = R$ і $cR \subset sR$. Так як $e = ap + cs$, то отримаємо

$$rR + apR = R, \quad sR \subset apR.$$

Очевидно, що

$$sR + bR = R, \quad rR + sR = R \quad \text{і} \quad rR + aR = R.$$

Нехай $aR + bR + cR = R$, $c \neq 0$ і $c = rs$, де

$$rR + sR = R, \quad rR + aR = R \quad \text{і} \quad sR + bR = R.$$

Візьмемо $\overline{r} = r + cR$, $\overline{s} = s + cR$. Оскільки $rR + sR = R$, то отримаємо

$$ru + sv = 1 \quad \text{і} \quad \overline{r}^2\overline{u} = \overline{r}, \quad \overline{s}^2\overline{v} = \overline{s}.$$

Нехай $\overline{s} \cdot \overline{v} = \overline{e}$. Очевидно, що

$$\overline{e}^2 = \overline{e} \quad \text{і} \quad \overline{1} - \overline{e} = \overline{ru}.$$

Враховуючи, що $rR + aR = R$, отримаємо

$$\overline{a}\overline{\beta}\overline{e} = \overline{e}$$

для деякого елемента $\overline{\beta} \in \overline{R}$.

Подібно

$$\overline{b}\overline{x}(\overline{1} - \overline{e}) = \overline{1} - \overline{e}$$

для деякого елемента $\overline{x} \in \overline{R}$. Маємо доведено, що якщо

$$\overline{a}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} = \overline{R},$$

то існує такий ідемпотент $\overline{e} \in \overline{R}$, що

$$\overline{e} \in \overline{aR} \quad \text{і} \quad \overline{1} - \overline{e} \in \overline{bR}.$$

Згідно з [84], $\overline{R}$ — кільце з властивістю заміни. А так як у нас розглядаються комутативні кільця, то $\overline{R}$ є чистим згідно з [84] і теорема доведена.

$\square$

Теорема 2.2. *Комутативна адекватна область Безу є розрізняльною областю.*

Доведення. Нехай $aR + bR + cR = R$ і $c \neq 0$. Оскільки R є адекватною областю, то

$$c = rs,$$

де

$$rR + aR = R \quad \text{і} \quad s'R + aR \neq R$$

для довільного необоротного елемента $s' \in R$ такого, що

$$sR \subset s'R \neq R.$$

Очевидно, що $rR + sR = R$. Нехай

$$sR + bR = dR \neq R.$$

Так як d є дільником елемента s, то тоді

$$dR + aR = hR \neq R.$$

Оскільки

$$cR \subset dR \subset hR, \quad bR \subset dR \subset hR \quad \text{і} \quad aR \subset hR,$$

то отримаємо

$$aR + bR + cR \subset hR \neq R.$$

А це неможливо, бо $aR + bR + cR = R$.

$\square$

За теоремою 2.2 отримаємо наступний результат.

Теорема 2.3. *Роздільна область — це область, в якій кожний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі.*

Доведення. Нехай R — роздільна область, тоді згідно з теоремою 2.1 для довільного $c \in R \setminus \{0\}$ фактор-кільце R/cR є чисте кільце. А оскільки чисті кільця є PM-кільцями [84], то тоді $R \in PM^*$.

$\square$

В цей час існує відкрите таке питання: Чи є акуратним довільне роздільне кільце?

Теорема 2.4. *Довільна FGC область Безу R, в якій кожний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі є роздільною тоді і тільки тоді, коли R є адекватною областю.*

Доведення. Довільна FGC область Безу є областю, в якій кожний ненульовий елемент є елементом лише скінченного числа максимальних ідеалів [32]. Оскільки в кільці R кожний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, то згідно з працею [73], R

є адекватною областю. Використовуючи теорему 2.3, завершуємо доведення даної теореми.

$\square$

Теорема 2.5. *Роздільна область Безу є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Нехай $a, b, c \in R$ і $aR + bR + cR = R, c \neq 0$. Нехай

$$c = rs,$$

де

$$rR + aR = R, \quad sR + bR = R \quad \text{і} \quad rR + sR = R.$$

Розглянемо ідеал

$$(sa + rb)R + rcR.$$

Оскільки R — комутативна область Безу, то тоді існує елемент $h \in R$ такий, що

$$(sa + rb)R + rcR = hR.$$

Так як $rcR \subset hR$, то розглянемо

$$rR + hR = \delta R.$$

З того, що

$$rR \subset \delta R \quad \text{і} \quad (sa + rb) \subset hR \subset \delta R$$

отримаємо

$$saR \subset \delta R,$$

що можливо лише у випадку, коли $\delta R = R$, так як

$$rR + aR = R, \quad sR + rR = R.$$

Отже, $\delta R = R$ і з включення $rR \subset R \subset hR$ отримаємо, що $cR \subset hR$. Так як

$$c = rs \quad \text{і} \quad rR + hR = R,$$

тоді $sR \subset hR$. А з включення

$$(sa + rb)R \subset hR$$

маємо $rbR \subset hR$. Це можливо лише тоді, коли $hR = R$, так як

$$rR + sR = R \quad \text{і} \quad sR + bR = R.$$

Отже,

$$(sa + rb)R + rcR = R$$

і згідно з працею [70], R є кільцем елементарних дільників.

$\square$

2.2 Кільця роздільного рангу 1

В цьому підрозділі введено поняття кільця роздільного рангу 1. Показано, що локально роздільне кільце є кільцем роздільного рангу 1, а також те, що комутативна область Безу роздільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників. Введено поняття локально роздільного кільця та встановлено існування таких кілець. Дані кільця є узагальненням локально регулярних кілець, які є узагальненням локальних і регулярних кілець.

Введено означення кільця роздільного рангу 1 і показано, що локально роздільне кільце є кільцем роздільного рангу 1. Як наслідок, згідно з [104], отримано, що комутативна область роздільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників.

Відмітимо, що згідно з [104] маємо такий наступний результат.

Теорема 2.6. *Нехай R — комутативна область Безу. Ненульовий елемент $a \in R$ є роздільним тоді і лише тоді, коли фактор-кільце R/aR є кільцем з властивістю заміни.*

Покажемо, що в довільному комутативному кільці адекватний елемент є роздільним.

Твердження 2.7. *Нехай R — комутативне кільце Безу і a — адекватний елемент в кільці R. Тоді a є роздільним елементом.*

Доведення. Нехай $aR + bR + cR = R$. Згідно з означенням адекватного елемента, для елемента a існують такі елементи $r, s \in R$, що

$$a = rs,$$

де

$$rR + bR = R, \quad s'R + bR \neq R$$

для довільного необоротного дільника s' елемента s. Тоді, якщо

$$sR + cR = tR,$$

де $tR \neq R$, маємо

$$tR + bR = kR \neq R,$$

що неможливо, оскільки

$$aR \subset sR \subset kR, \quad bR \subset kR, \quad cR \subset tR \subset kR$$

і водночас $aR + bR + cR = R$. Отже, $sR + cR = R$. Якщо б

$$rR + sR = nR \neq R,$$

тоді б згідно з означенням адекватного елемента $a \in R$ мали б, з одного боку, $nR + bR = R$, оскільки $rR \subset nR$, а з іншого — $nR + bR \neq R$, бо $sR \subset nR \neq R$. Це неможливо, отже, $rR + sR = R$, а значить, a є роздільним елементом кільця R.

$\square$

Покажемо, що множина роздільних елементів комутативної області Безу є насиченою.

Твердження 2.8. *Нехай R — комутативна область Безу і a — роздільний елемент. Тоді довільний дільник роздільного елемента є роздільним.*

Доведення. Нехай $a = dx$ для деяких елементів $d, x \in R$ і виконується

$$aR + bR + cR = R.$$

Згідно з означенням елемента a існують такі елементи $r, s \in R$, що

$$a = rs,$$

де

$$rR + bR = R, \quad sR + cR = R, \quad rR + sR = R.$$

Якщо $dR + rR = hR$, то тоді для деяких елементів $d_0, r_0 \in R$ маємо рівність

$$d = hd_0, \quad r = hr_0,$$

причому

$$d_0R + r_0R = R.$$

Звідси отримаємо рівність

$$d_0u + r_0\nu = 1$$

для деяких елементів $u, \nu \in R$. Тоді з рівності

$$a = hd_0x = hr_0s$$

випливає, що виконуються рівності

$$d_0x = r_0s \quad \text{та} \quad sd_0u + sr_0\nu = s.$$

А звідси

$$d_0(su + x\nu) = s,$$

тобто існує включення

$$sR \subset d_0R.$$

Тоді

$$d_0R + cR = R, \quad hR + bR = R$$

і очевидно, що

$$d_0R + hR = R,$$

оскільки

$$rR \subset hR, \quad sR \subset d_0R \quad \text{і} \quad rR + sR = R.$$

$\square$

Відмітимо, що прикладами роздільних елементів можуть послужити одиниці кільця, факторіальні елементи та елементи вільні від квадратів, які є адекватними [103], а згідно з твердженням 2.7, є роздільними.

Означення 2.2. *Комутативне кільце R називаєтся локально роздільним кільцем, якщо для довільного елемента $a \in R$ хоча би один елемент a або $1 - a$ є роздільним.*

Очевидними прикладами локально роздільного кільця є локальне і роздільне кільце.

Твердження 2.9. *Локально регулярне кільце є локально роздільним.*

Доведення. Згідно з працею [57], довільний регулярний елемент комутативного кільця є адекватним елементом. Твердження 2.7 завершує доведення даного твердження.

□

Згідно з твердженням 2.7, аналогічно маємо наступний результат.

Твердження 2.10. *Адекватне кільце є локально роздільним.*

Приклад Хенріксена [64], зокрема, кільце

$$R = \{z_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ... | z_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Q}\}$$

є прикладом локально роздільного кільця, яке не є адекватним. Відмітимо, що в даному кільці для довільного ряду $f(x) \in R$ хоча би один з двох рядів $f(x)$ і $1 - f(x)$ є факторіальним, а значить є адекватним, а згідно з твердженням 2.7 є роздільним.

Для комутативних областей Безу маємо такий результат.

Твердження 2.11. *Комутативна область Безу є локально роздільною тоді і лише тоді, коли з умови $aR + bR = R$ випливає, що a або b є роздільним елементом.*

Доведення. Необхідність, згідно з означенням локально роздільного кільця, очевидна.

Нехай $aR+bR = R$ і тоді $au+b\nu = 1$. Згідно з означенням локально роздільного кільця, маємо, що au або $b\nu = 1-au$ є роздільним елементом. Твердження 2.8 свідчить, що a або b є роздільним елементом кільця R.

□

У праці [107] введено поняття кільця акуратного рангу 1. Частковим його випадком, згідно з теоремою 2.6, служить кільце роздільного рангу 1.

Означення 2.3. *Комутативне кільце R називається кільцем роздільного рангу 1, якщо для таких елементів $a, b \in R$, що $aR+bR = R$ існує такий елемент $t \in R$, що $a + bt$ — роздільний елемент.*

Твердження 2.12. *Локально роздільна область Безу є кільцем роздільного рангу 1.*

Доведення. Нехай R — локально роздільна область Безу і

$$aR + bR = R.$$

Якщо a — роздільний елемент, то очевидно, що $a + b \cdot 0$ — роздільний елемент. Якщо ж a не є роздільним елементом, то тоді розглянемо ідеал

$$aR + (a + b)R.$$

Так як R — комутативна область Безу, то тоді ідеал $aR + (a + b)R$ є головним. Якщо

$$aR + (a + b)R = hR,$$

то тоді

$$aR \subset hR, \quad (a + b)R \subset hR.$$

Що можливо тоді, коли $hR = R$, бо в протилежному випадку $bR \subset hR$, що неможливо, оскільки $aR \subset hR$, $bR \subset hR$. Отже

$$aR + (a + b)R = R \quad \text{і} \quad aR + bR = R,$$

а це означає, що $a + b$ — роздільний елемент.

□

Згідно з теоремою 2.6 і відомими результатами [107], отримаємо наступний результат.

Теорема 2.13. *Комутативна область Безу роздільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Оскільки комутативна область Безу роздільного рангу 1 є областю Безу акуратного рангу 1, то на основі праці [104] R є кільцем елементарних дільників.

□

2.3 Висновки до розділу 2

У даному розділі вводяться і вивчаються роздільні кільця, які є природнім узагальненням адекватних кілець, а саме показано:

1. У випадку комутативної області Безу клас роздільних кілець співпадає з класом областей Безу, скінченні гомоморфні образи яких є чистими кільцями.

2. Комутативна адекватна область Безу є роздільною областю.

3. У роздільній області довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі.

4. У випадку FGC областей Безу, в яких довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, клас роздільних областей співпадає з класом адеватних областей.

5. Роздільна область Безу є кільцем елементарних дільників.

6. Локально роздільна область Безу є кільцем роздільного рангу 1.

7. Комутативна область Безу роздільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників.

РОЗДІЛ 3

Ефективні кільця

3.1 Ефективні кільця

Вивчаючи комутативні області Безу, які є кільцями елементарних дільників, Дубровін в праці [9] показав, що комутативна область Безу R є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли в кільці матриць R_2 для довільної невиродженої матриці $A \in F(R_2)$ правий головний ідеал AR_2 містить власний ідемпотент. Очевидно, що напівпотужне кільце є таким. Більше того, як показано у праці [83] кільце матриць над напівпотужним кільцем є напівпотужним. У випадку потужного кільця вірна і зворотна імплікація.

В даному розділі вивчаються комутативні області Безу, скінченні гомоморфні образи яких є напівпотужними кільцями. В класі таких комутативних областей Безу виділений клас ефективних кілець, який є з однієї сторони узагальненням роздільних кілець, а з другої сторони, взагалі кажучи, не є кільцями, в яких довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі. Окрім того, показано, що ефективні кільця є кільцями елементарних дільників.

Твердження 3.1. *Нехай R — комутативна область Безу і $a \in R$ — деякий ненульовий елемент. Тоді ${}_aA_b$ тоді і тільки тоді,* *коли* ${}_aA_{b+at}$ *для довільного* $t \in R$.

Доведення. Нехай a — адекватний елемент до елемента b в кільці Безу R. Тоді за означенням існують деякі елементи $r, s \in R$, що

$$a = rs$$

і

$$rR + bR = R, \quad s'R + bR \neq R$$

для довільного елемента $s' \in R$, такого що $sR \subset s'R \neq R$. Візьмемо довільне $t \in R$ і розглянемо ідеал

$$rR + (b + at)R.$$

З того, що R є кільцем Безу отримаємо

$$rR + (b + at)R = hR$$

для деякого елемента $h \in R$. Так як

$$aR \subset rR \subset hR \quad \text{і} \quad (b + at)R \subset hR,$$

то тоді $bR \subset hR$, тобто це можливо тоді і тільки тоді, коли h є одиницею, бо $rR + bR = R$. Оскільки

$$s'R + bR \neq R$$

для деякого елемента $s' \in R$, що $sR \subset s'R \neq R$, то тоді

$$s'R + (b + at)R \neq R$$

для довільного $t \in R$.

Таким чином, ми отримали, що ${}_aA_{b+at}$ для довільного $t \in R$, тому необхідність доведена.

Для доведення достатності припустимо, що ${}_aA_{b+at}$, а це означає, що існують такі елементи $r, s \in R$, що

$$a = rs,$$

$$rR + (b+at)R = R \quad \text{і} \quad s'R + (b+at)R \neq R$$

для довільного елемента $s' \in R$, що $sR \subset s'R \neq R$. Якщо

$$rR + bR = hR \neq R,$$

то тоді

$$aR \subset rR \subset hR \quad \text{і} \quad bR \subset hR.$$

А звідси отримаємо

$$(b+at)R \subset hR,$$

що неможливо, бо $rR \subset hR$.

Далі припустимо, що існує такий елемент $s' \in R$, що

$$sR \subset s'R \neq R \quad \text{і} \quad s'R + bR = R.$$

Нехай виконується

$$s'R + (b+at)R = hR \neq R.$$

Тоді $bR \subset hR$, а це суперечить припущенню, що $s'R + bR = R$.

$\square$

Як наслідок, цей результат спонукає розглянути суміжний клас

$$\bar{b} = b + aR$$

фактор-кільця $\overline{R} = R/aR$. Наступне твердження визначає відповідність між властивістю ${}_aA_b$ комутативного кільця Безу R і структурою гомоморфного образу елемента b кільця $\overline{R} = R/aR$ при канонічному вкладенні R в $\overline{R}$.

Твердження 3.2. *Нехай R — комутативна область Безу і ${}_aA_b$. Тоді елемент $\overline{b} = b + aR$ є чистим в $\overline{R} = R/aR$.*

Доведення. Почнемо з очевидної рівності

$$(-1)R + bR + aR = R$$

і звідси $\overline{-1}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} = \overline{R}$. Оскільки a є адекватним до елемента b у кільці Безу R, то тоді існують такі елементи $r, s \in R$, що

$$a = rs$$

і

$$rR + bR = R \quad \text{та} \quad s'R + bR \neq R$$

для довільного елемента $s' \in R$, що $sR \subset s'R \neq R$. Тоді перейдемо до фактор-кільця $\overline{R}$ і отримаємо, що

$$\overline{r}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} = \overline{R} \quad \text{і} \quad \overline{s'}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} \neq \overline{R}.$$

Нехай $\overline{t}$ — деякий необоротний в $\overline{R}$ дільник елемента $\overline{s}$. Тоді існує такий елемент $k \in R$, що

$$(s + ak)R \subset tR.$$

Покажемо, що

$$sR + tR \neq R.$$

Припустимо супротивне, тобто $sR + tR = R$. Оскільки

$$(s + ak)R \subset tR,$$

тоді

$$s + ak = t\beta$$

для деякого елемента $\beta \in R$. З рівності $s + rsk = t\beta$ випливає, що

$$s(1 + rk) = t\beta.$$

Оскільки $sR + tR = R$, то тоді

$$(1 + rk)R \subset tR$$

і тому

$$tR + rR = R.$$

Так як

$$tR + sR = R \quad \text{і} \quad tR + rR = R,$$

то $tR + rsR = R$. Таким чином

$$tR + aR = R$$

і звідси $\overline{t}\overline{R} = \overline{R}$, що суперечить припущенню про необоротність елемента $\overline{t}$. Отже, показано, що

$$sR + tR = uR \neq R.$$

А це означає, що

$$\overline{u}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} \neq \overline{R}.$$

Оскільки $\overline{u}$ є дільником елемента $\overline{t}$, то тоді

$$\overline{t}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} \neq \overline{R}.$$

Отже, отримано, що $\overline{0} = \overline{rs}$ є адекватним елементом до елемента $\overline{b}$.

Більше того, зауважимо, що

$$\overline{r}\overline{R} + \overline{s}\overline{R} = \overline{R}.$$

Справді, якщо

$$\overline{r}\overline{R} + \overline{s}\overline{R} = \overline{hR} \neq \overline{R},$$

то тоді відповідно з адекватністю елемента $\overline{0}$ до елемента $\overline{b} \in \overline{R}$ знаємо, що $\overline{hR} + \overline{bR} = \overline{R}$ (так як $\overline{h}$ є дільником $\overline{r}$) і з іншої сторони

$$\overline{hR} + \overline{s}\overline{R} \neq \overline{R}$$

(так як $\overline{h}$ є необоротним дільником $\overline{s}$), що є неможливим. Отже,

$$\overline{r}\overline{R} + \overline{s}\overline{R} = \overline{R}$$

і існують такі елементи $\overline{u}, \overline{v} \in \overline{R}$, що

$$\overline{ru} + \overline{sv} = \overline{1}.$$

Крім того, потрібно довести, що елементи $\overline{ru}$ і $\overline{sv}$ є ідемпотентами в кільці $\overline{R}$. Це можна показати наступним виразом:

$$(\overline{ru})^2 = \overline{ru}(\overline{1} - \overline{sv}) = \overline{ru} - \overline{rusv} = \overline{ru}.$$

Подібно маємо

$$(\overline{sv})^2 = \overline{sv}.$$

Позначимо $\overline{e} = \overline{ru}$. Потрібно довести, що $\overline{b} - \overline{e}$ є одиницею в $\overline{R}$. Припустимо, що

$$(\overline{b} - \overline{e})\overline{R} = \overline{hR} \neq \overline{R}.$$

Розглянемо ідеал

$$\overline{hR} + \overline{r}\overline{R} = \overline{t}\overline{R}.$$

Якщо $\overline{t}$ не є одиницею в $\overline{R}$, то

$$(\overline{b} - \overline{e})\overline{R} \subset \overline{hR} \subset \overline{t}\overline{R},$$

а звідси $\overline{bR} \subset \overline{t}\overline{R}$, що неможливо, так як

$$\overline{r}\overline{R} \subset \overline{t}\overline{R}, \quad \overline{bR} \subset \overline{tR} \quad \text{і} \quad \overline{bR} + \overline{r}\overline{R} = \overline{R}$$

Отже, $\overline{hR} + \overline{r}\overline{R} = \overline{R}$. Покажемо, що

$$\overline{hR} + \overline{s}\overline{R} = \overline{R}.$$

Припустимо, що

$$\overline{s}\overline{R} + \overline{hR} = \overline{t}\overline{R} \neq \overline{R}.$$

Оскільки $\overline{t}$ є неодиничним і ділить $\overline{s}$, то за означенням властивості елемента $\overline{s}$ маємо

$$\overline{t}\overline{R} + \overline{bR} = \overline{kR} \neq \overline{R}.$$

З іншої сторони

$$(\overline{b} - \overline{e})\overline{R} = \overline{hR} \quad \text{і} \quad \overline{e}\overline{R} + \overline{s}\overline{R} = \overline{R}$$

і тому з умови $\overline{e}\overline{R} + \overline{t}\overline{R} = \overline{R}$ випливає, що $\overline{e}\overline{R} \subset \overline{kR}$. Останнє включення неможливе, бо

$$\overline{bR} \subset \overline{kR} \quad \text{і} \quad \overline{bR} + (\overline{-1})\overline{R} = \overline{R}.$$

Отже, маємо $\overline{s}\overline{R} + \overline{h}\overline{R} = \overline{R}$. Оскільки $\overline{r}\overline{R} + \overline{h}\overline{R} = R$, то тоді

$$\overline{rs}\overline{R} + \overline{h}\overline{R} = \overline{R}.$$

Відомо, що $\overline{rs} = \overline{0}$ і отримаємо, що $\overline{h}$ є одиницею кільця $\overline{R}$.

Отже, довели, що $\overline{b} - \overline{e} = \overline{u}$ є одиницею в кільці $\overline{R}$, і звідси

$$\overline{b} = \overline{u} + \overline{e}$$

є чистим елементом.

□

Згідно з працями [77], [84], [105] і згідно з твердженням 3.2 маємо наступний результат

Теорема 3.3. *Нехай R – комутативна область Безу і ${}_aA_b$. Тоді:*

1) $\overline{b} = b + aR$ є чистим елементом фактор-кільця R/aR.

2) $\overline{b} = b + aR$ є елементом з властивістю заміни фактор-кільця R/aR.

3) $\overline{b} = b + aR$ є елементом ідемпотентного стабільного рангу 1 фактор-кільця R/aR.

Доведення. Оскільки у випадку комутативних кілець чистий елемент є елементом з властивістю заміни і навпаки та ці елементи є елементами ідемпотентного рангу 1 [7], то в силу твердження 3.2 отримаємо доведення даної теореми.

□

Звернемо увагу, що запис ${}_aA_b$ передбачає, що $a \neq 0$.

Вкажемо умови, коли в скінченному гомоморфному образі комутативної області Безу головний ідеал містить ідемпотент. А саме

Теорема 3.4. *Нехай R — комутативна область Безу і нехай $a \in R\backslash\{0\}$. Якщо ${}_aA_b$ і $b \notin J(aR)$, то тоді ідеал $\overline{bR}$ містить власний ідемпотент.*

Доведення. Оскільки a є адекватним до b, то тоді

$$a = rs \quad \text{і} \quad rR + bR = R$$

так як $s'R + bR \neq R$ для довільного елемента $s' \in R$, що

$$sR \subset s'R \neq R.$$

Якщо $b \notin J(aR)$, то елемент r не є одиницею кільця R. Тоді з рівності $rR + bR = R$ випливає, що

$$ru + bv = 1$$

для деяких елементів $u, v \in R$. А звідси

$$\overline{rsu} + \overline{b}\overline{sv} = \overline{s}.$$

Оскільки $a = rs$, то $\overline{rs} = \overline{0}$ і отримаємо, що

$$\overline{s}\overline{R} \subset \overline{bR} \quad \text{і} \quad \overline{s}\bar{R} \neq (\overline{0}).$$

Більше того, якщо $rR + sR = R$, то тоді виконується

$$rx + sy = 1$$

для деяких елементів $x, y \in R$. Як наслідок, отримаємо

$$\overline{s}^2\overline{v} = \overline{s},$$

а це означає, що елемент $\overline{s}$ є регулярним. Так як $\overline{R}$ є комутативним, то тоді існує такий ідемпотент $\overline{e}$, що

$$\overline{s}\overline{R} = \overline{e}\overline{R}.$$

Остання рівність означає, що існує власний ідемпотент в ідеалі $\overline{bR}$, що і потрібно було зробити.

$\square$

Природньо знайти відповідь на питання: чи вірне обернене твердження? Теорема 3.5 є відповіддю на дане питання.

Теорема 3.5. *Нехай R — комутативна область Безу і нехай $a \in R \setminus \{0\}$. Якщо фактор-кільце $\overline{R} = R/aR$ є напівпотужним, то тоді для деякого елемента $b \in R \setminus J(aR)$ існує такий елемент $u \in R$, що ${}_aA_{bu}$.*

Доведення. Нехай $\overline{R} = R/aR$ — напівпотужне кільце і

$$b \in R \setminus J(aR).$$

За напівпотужністю $\overline{R}$ для суміжного класу $\overline{b} = b + aR$ існує такий ненульовий ідемпотент $\overline{e} \in \overline{bR}$. Звідси існують такі елементи $u, t \in R$, що

$$e - bu = at.$$

Більше того, оскільки $\overline{e} = \overline{e}^2$, то тоді

$$e(1-e) = as$$

для деякого елемента $s \in R$. Покажемо, що ${}_aA_e$. Справді, так як R є комутативним кільцем Безу, то тоді

$$eR + aR = dR$$

для деякого елемента $d \in R$. Згідно з працею [13], маємо

$$e = e_0 d, \quad a = a_0 d \quad \text{і} \quad e_0 p + a_0 q = 1$$

для деяких елементів $e_0, a_0, p, q \in R$. Більше того, з рівності

$$e(1 - e) = as$$

випливає, що

$$e_0(1 - e) = a_0 s.$$

Оскільки

$$e_0 p + a_0 q = 1 \quad \text{і} \quad e_0(1 - e) = a_0 s,$$

то тоді можна зробити висновок, що $a_0 k = 1 - e$ для деякого елемента $k \in R$ і звідси

$$e + a_0 k = 1.$$

Візьмемо $r = a_0$ та $s = d$ і тоді $a = rs$, де

$$rR + eR = R, \quad s'R + eR \neq R$$

для довільного елемента $s' \in R$, що $sR \subset s'R \neq R$. Таким чином ${}_aA_e$ і оскільки

$$bu = e - at,$$

то отримаємо, що ${}_aA_{bu}$, згідно з твердженням 3.1.

□

Як наслідок двох попередніх теорем маємо наступний результат.

Теорема 3.6. *Нехай R — комутативна область Безу і нехай $a \in \ R \setminus \{0\}$. Фактор-кільце $\overline{R} = R/aR$ є напівпотужним тоді і тільки тоді, коли для довільного $b \in R \setminus J(aR)$ існує такий елемент $u \in R$, що ${}_aA_{bu}$, $bu \notin aR$.*

Всі згадані результати дозволяють визначити новий підклас комутативного кільця Безу, тобто ефективне кільце, яке є також кільцем елементарних дільників.

Означення 3.1. *Комутативна область Безу R називається ефективною, якщо для будь-яких елементів $a, b, c \in R$ таких, що*

$$aR + bR + cR = R \quad i \quad aR + bR \neq R$$

існує такий елемент $p \in R$, що

$${}_cA_{pa} \quad i \quad pR + bR + cR = R.$$

Очевидним прикладом ефективного кільця є будь-яке адекватне кільце. Приклад Хенріксена [64], що є комутативною областю Безу

$$R = \{z_0 + a_1x + a_2x^2 + ...|z_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Q}\}$$

є також ефективним кільцем, але не адекватним. Зауважимо, що з умови

$$aR + bR + cR = R$$

випливає, що принаймні один з цих елементів $a, b, c \in R$ є адекватним елементом даного кільця з прикладу Хенріксена.

Теорема 3.7. *Ефективне кільце є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Згідно з працею [103], достатньо довести, що для будь-якої взаємно простої трійки елементів, що $aR + bR + cR = R$ існують такі елементи $p, q \in R$, що

$$(pa + qb)R + qcR = R.$$

Якщо $aR + bR = R$, то тоді існують такі елементи $p, g \in R$, що $(pa + gb)R + qcR = R$ [64, 73, 103]. За означенням ефективного кільця існує такий елемент $p \in R$, що

$$_{c}A_{ap} \quad \text{і} \quad pR + bR + cR = R.$$

Так як

$$aR + bR + cR = R \quad \text{і} \quad pR + bR + cR = R,$$

то тоді

$$apR + bR + cR = R.$$

Оскільки $_{c}A_{ap}$, то $c = qs$, де

$$qR + apR = R \quad \text{і} \quad s'R + apR \neq R$$

для будь-якого $s' \in R$, що $sR \subset s'R \neq R$. Покажемо, що

$$(ap + bq)R + cqR = R.$$

Припустимо від супротивного, тобто

$$(ap + bq)R + cqR = hR \neq R.$$

Оскільки $cq = sq^2$, то тоді нехай

$$qR + hR = dR \neq R.$$

Так як

$$qR \subset dR \quad \text{і} \quad hR \subset dR,$$

то $apR \subset dR$, а це неможливо, оскільки

$$qR + apR = R.$$

Таким чином $sR \subset hR$. За означенням елемента s маємо, що

$$hR + apR = kR \neq R.$$

Нехай

$$kR + aR = xR \neq R,$$

тоді $bqR \subset xR$. Оскільки

$$cR \subset xR, \quad aR \subset xR \quad \text{і} \quad aR + bR + cR = R,$$

то

$$xR + bR = R.$$

Отже $qR \subset xR$, що є неможливим, так як

$$qR + sR = R.$$

Як результат маємо, що $pR \subset kR$. Тоді $bqR \subset kR$. Якщо

$$bR + kR = \alpha R \neq R,$$

то

$$cR \subset \alpha R, \quad bR \subset \alpha R \quad \text{і} \quad pR \subset \alpha R.$$

Використовуючи

$$pR + bR + cR = R$$

отримаємо суперечність і таким чином показали, що α має бути одиницею. Отже, $qR \subset kR$, але це є неможливим, бо

$$qR + sR = R \quad \text{і} \quad sR \subset kR.$$

Тому

$$(ap + bq)R + cqR = R,$$

що і потрібно було показати.

□

Покажемо, що акуратні кільця є ефективними кільцями у випадку комутативного кільця Безу. Для виконання цієї мети потрібно наступне твердження.

Твердження 3.8. *Комутативне кільце R є кільцем з властивістю заміни тоді і тільки тоді, коли для будь-якої пари елементів $a, b \in R$ такої, що $aR + bR = R$ існує ідемпотент $e \in R$, що $e \in aR$ і $(1 - e) \in bR$.*

Доведення. Згідно з працею [84], в кожному кільці з властивістю заміни з рівності $aR + bR = R$ випливає, що існують такі ортогональні ідемпотенти e і $1 - e$, що $e \in aR$ та $(1 - e) \in bR$ і таким чином необхідність доведено. Якщо ж $aR + bR = R$, то тоді існує такий ідемпотент $e \in aR$, що

$$e \in aR \quad \text{і} \quad (1 - e) \in bR.$$

Тоді, використовуючи рівність $a + (1 - a) = 1$, отримаємо, що

$$e \in aR \quad \text{і} \quad (1 - e) \in (1 - a)R,$$

отже R є кільцем з властивістю заміни згідно з означенням праці [84].

$\square$

Наступний результат показує, що комутативна роздільна область Безу є ефективною.

Теорема 3.9. *Нехай R — комутативна область Безу, гомоморфний образ якої R/cR є кільцем з властивістю заміни для довільного $c \in R \setminus \{0\}$. Тоді R — ефективне кільце.*

Доведення. Нехай $\overline{R} = R/cR$ — кільце з властивістю заміни для будь-якого $c \in R \setminus \{0\}$. Згідно з працею [77], R є акуратним кільцем. Тоді, використовуючи твердження 3.8, з рівності

$$\overline{a}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} = \overline{R}$$

випливає, що існує такий ідемпотент $\overline{e} \in \overline{R}$, що

$$\overline{e} \in \overline{a}\overline{R} \quad \text{і} \quad \overline{1} - \overline{e} \in \overline{b}\overline{R}.$$

Зауважимо, що умова $\overline{a}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} = \overline{R}$ випливає з $aR + bR + cR = R$. Оскільки $\overline{e} \in \overline{a}\overline{R}$, то тоді існує такий елемент $p \in R$, що

$$e - ap = cs$$

для деякого елемента $s \in R$. Подібно

$$1 - e - b\alpha = c\beta$$

для таких елементів $\alpha, \beta \in R$. Підставимо

$$e = cs + ap$$

в $1 - e - b\alpha = c\beta$ і отримаємо

$$ap + cw + b\alpha = 1,$$

а це означає, що $pR + cR + bR = R$.

Покажемо, що ${}_cA_{ap}$. Оскільки $\overline{e} = \overline{e}^2$, то тоді

$$e(1 - e) = ct$$

для деякого елемента $t \in R$. Розглянемо ідеал

$$eR + cR = dR.$$

Згідно з працею [13], маємо, що $e = de_0$ і $c = dc_0$ для таких елементів $e_0, c_0 \in R$, що

$$e_0R + c_0R = R.$$

Тоді

$$e_0(1 - e) = c_0t$$

та

$$e + c_0\gamma = 1$$

для деякого елемента $\gamma \in R$. Візьмемо $r = c_0$, $s = d$ і отримаємо розклад

$$c = rs,$$

де

$$rR + eR = R \quad \text{і} \quad sR \subset eR.$$

Отже, маємо ${}_cA_e$.

Оскільки $e = ap + cs$, то згідно з твердженням 3.1 і використовуючи, що ${}_cA_{ap}$, отримаємо дане доведення.

$\square$

Наступне твердження має допоміжний характер.

Твердження 3.10. *Нехай R — комутативна область Безу, в якій для будь-яких елементів $a, b, c \in R$, що $aR + bR + cR = R$ існує такий елемент $p \in R$, що ${}_cA_{pa}$. Нехай $c = rs$, де $rR + apR = R$ і $s'R + apR \neq R$ для довільного необоротного дільника s' елемента s і $pR + bR + cR = R$ тоді і лише тоді, коли $sR + bR = R$.*

Доведення. Нехай $c = rs$, де

$$rR + apR = R \quad \text{i} \quad s'R + apR \neq R$$

для довільного необоротного дільника s' елемента s. Якщо

$$aR + bR + cR = R \quad \text{i} \quad pR + bR + cR = R,$$

то тоді

$$apR + bR + cR = R.$$

Якщо $sR + bR = \delta R \neq R$, маємо

$$\delta R + apR = hR \neq R.$$

Це неможливо, оскільки $apR + bR + cR = R$.

Нехай $sR + bR = R$. Доведемо, що $apR + bR + cR = R$. Якщо

$$pR + bR + cR = hR \neq R,$$

тоді $pR \subset hR$, $cR \subset hR$ і $bR \subset hR$. Оскільки $rR + apR = R$, тоді h є необоротним дільником s. Згідно того, що $bR \subset hR$ і $sR \subset hR$ отримаємо

$$sR + bR \subset hR \neq R.$$

Що є неможливим, оскільки $sR + bR = R$.

$\square$

Вкажемо умови, при яких скінченні гомоморфні образи комутативної області Безу є кільцями з властивістю заміни.

Теорема 3.11. *Нехай R — комутативна область Безу, в якій для довільних елементів $a, b, c \in R$ таких, що $aR + bR + cR = R$ існує такий елемент $p \in R$, що ${}_cA_{ap}$ і $pR + bR + cR = R$. Тоді R/cR є кільцем з властивістю заміни для кожного $c \in R \setminus \{0\}$.*

Доведення. Нехай $\bar{R} = R/cR$ і $\bar{a}\bar{R} + \bar{b}\bar{R} = \bar{R}$, де $\bar{a} = a + cR$, $\bar{b} = b + cR$. Тоді $aR + bR + cR = R$ і існує такий елемент $p \in R$, що $c = rs$, де $rR + apR = R$ і $s'R + apR \neq R$ для кожного такого $s'R$, що $sR \subset s'R \neq R$ і $pR + bR + cR = R$. Отже, виконується $ru + sv = 1$. Оскільки $\bar{r}\bar{u} + \bar{s}\bar{v} = 1$ і $\bar{r}\bar{s} = \bar{0}$, то отримаємо $\bar{r}^2\bar{u} = \bar{r}$ і $\bar{s}^2\bar{v} = \bar{s}$.

Зауважимо, що $\bar{e} = \bar{s}\bar{v}$. Очевидно, що

$$\bar{1} - \bar{e} = \bar{r}\bar{u} \quad \text{і} \quad \bar{s}\bar{R} = \bar{e}\bar{R}, \quad (\bar{1} - \bar{e})\bar{R} = \bar{r}\bar{R}.$$

Згідно з твердженням 3.6, маємо, що $sR + bR = R$ і тоді

$$s\alpha + bp = 1,$$

де $\alpha, p \in R$. Оскільки

$$rs\alpha + rbp = r,$$

маємо

$$\bar{r}\bar{b}\bar{p} = \bar{r} \quad \text{і} \quad \bar{r}\bar{R} \subset \bar{b}\bar{R}.$$

Оскільки $rR + apR = R$, $t, k \in R$. Так як

$$rsp + apsk = s$$

маємо

$$\bar{s}\bar{R} \subset \bar{a}\bar{R}.$$

Доведено, якщо $\bar{a}\bar{R} + \bar{b}\bar{R} = \bar{R}$, то тоді існують ідемпотенти

$$\bar{e} \in \bar{a}\bar{R} \quad \text{і} \quad \bar{1} - \bar{e} \in \bar{b}\bar{R}.$$

За твердженням 3.5, R/cR є кільцем з властивістю заміни. Теорема доведена повністю.

$\square$

3.2 Висновки до розділу 3

У даному розділі встановлено

1. Умови, коли скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є напівпотужним.

2. В класі комутативних областей Безу, скінченні гомоморфні образи яких є напівпотужними кільцями, виділено клас ефективних областей. Встановлено існування таких областей.

3. Показано, що ефективні області є кільцями елементарних дільників.

4. Показано, що комутативна область Безу, скінченні гомоморфні образи якої є кільцями з властивістю заміни, є ефективною.

5. Визначено умови на комутативні області Безу, при яких скінченні гомоморфні образи комутативної області Безу є кільцем з властивістю заміни.

РОЗДІЛ 4

Множина повних матриць над комутативним кільцем елементарних дільників

4.1 Стабільний ранг множини повних матриць над кільцем елементарних дільників.

У цьому підрозділі доведено, що множина $F(R_2)$ всіх повних матриць порядку 2 над кільцем елементарних дільників R має стабільний ранг 1.

Кільця стабільного рангу 1 є найбільш досліджуваними в сучасних алгебраїчних дослідженнях [72], що не можна сказати про кільця стабільного рангу ≥ 2. Саме ця причина спонукала в роботі [72] до дослідження елементів стабільного рангу 1.

Стабільний ранг кільця елементарних дільників не більше 2 [100]. Оскільки поняття кільця стабільного рангу 1 є Моріта інваріантом, а тому є актуальною задачею описання елементів стабільного рангу 1 кільця матриць над комутативною областю елементарних дільників.

Зауважимо, що стабільний ранг кільця дорівнює 1 тоді і тільки тоді, коли стабільний ранг кільця матриць дорівнює 1. В той же час в роботах [17, 24] описані деякі області Безу, над якими клас повних матриць має стабільний ранг 1. В даному підрозділі встановлено аналогічний результат для кілець елементарних дільників. А також, як наслідок, отримано, що виконується над кільцем елементарних дільників двочленний правий (лівий) ланцюг подільності для повних матриць порядку 2.

Встановимо критерій взаємної простоти зліва верхніх трикутних матриць другого порядку.

Твердження 4.1. *Нехай R — комутативне кільце Безу стабільного рангу 2. Дві матриці*

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$$

взаємно прості зліва тоді і тільки тоді, коли

$$aR + xR = R, \quad cR + zR + (ay - bx)R = R.$$

Доведення.

Необхідність. Нехай існують такі матриці $U, V \in R_2$, що

$$AU + BV = E,$$

де E — одинична матриця. Позначимо через

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}.$$

Тоді з рівності

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

отримаємо, що

$$au_1 + xv_1 = 1,$$

тобто

$$aR + xR = R.$$

Так як визначник матриці $AU + BV = E$ дорівнює 1, то

$$cR + zR + (ay - bx)R = R.$$

Достатність. Нехай для матриць A і B виконується, що

$$aR + xR = R, \quad cR + zR + (ay - bx)R = R.$$

Розглянемо матрицю

$$C = \begin{pmatrix} a & 0 & x & 0 \\ b & c & y & z \end{pmatrix}.$$

Оскільки $aR + xR = R$, то тоді існують такі елементи $u, v \in R$, що $au + xv = 1$. Тоді

$$\begin{pmatrix} a & 0 & x & 0 \\ b & c & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ v & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ bu + yv & c & ay - bx & z \end{pmatrix}.$$

Елементарними перетвореннями рядків матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ bu + yv & c & ay - bx & z \end{pmatrix}$$

приведемо до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & ay-bx & z \end{pmatrix} = B.$$

Оскільки

$$cR + zR + (ay-bx)R = R$$

і R — кільце Безу стабільного рангу 2, то тоді згідно з працею [13] існує оборотна матриця P порядку 3 над кільцем R, що

$$(c, ay-bx, z)P = (1,0,0).$$

Звідси

$$B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & P & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тобто, показано, що для матриці C існує оборотна матриця Q порядку 4, що

$$CQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а це означає ніщо інше згідно з [70], що для матриць A, B існують такі оборотні матриці $U, V \in R_2$, що

$$AU + BV = E,$$

тобто A, B взаємно прості зліва.

$\square$

Теорема 4.2. *Нехай R — комутативне кільце Безу стабільного рангу 2. Нехай $A, B \in F(R_2)$ і*

$$AR_2 + BR_2 = R_2,$$

причому матриця B діагоналізується. Тоді існує така повна матриця $T \in F(R_2)$, що $A + BT$ — оборотна матриця.

Доведення. Оскільки матриця B діагоналізується, то через обмеження, накладені на кільце R, отримаємо існування таких оборотних матриць $P, U, Q \in R_2$, що

$$PAU = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \quad PBQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$AR_2 + BR_2 = R_2,$$

то тоді існують такі матриці $C, D \in R_2$, що $AC + BD = E$, а звідси

$$PAU(U^{-1}C) + PBQ(Q^{-1}D) = P,$$

тобто матриці

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

взаємно прості зліва. На підставі твердження 4.1 маємо

$$bR + cR + yR = R.$$

Так як стабільний ранг кільця R дорівнює 2, то тоді існують такі елементи $\alpha, \beta \in R_2$, що

$$(b + y\alpha)R + (c + y\beta)R = R,$$

а відтак існують такі елементи $n, m \in R$, що

$$(b + y\alpha)n + (c + y\beta)m = 1.$$

Керуючись результатом праці [99], елементи α, β можна вибрати так, що $\alpha R + \beta R = R$. Тоді

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m - a & -n \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & -n \\ b + y\alpha & c + y\beta \end{pmatrix}$$

— оборотна матриця.

Оскільки $\alpha R + \beta R = R$, то тоді очевидно, що матриця $\begin{pmatrix} m - a & -n \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ є повною.

□

Як очевидний наслідок з теореми 4.2 у випадку кільця елементарних дільників отримаємо результат, який показує, що множина повних матриць порядку 2 над комутативним кільцем елементарних дільників є множиною елементів стабільного рангу 1.

Теорема 4.3. *Нехай R — комутативне кільце елементарних дільників. Якщо $A, B \in F(R_2)$ і $AR_2 + BR_2 = R_2$, то тоді існує така повна матриця $T \in F(R_2)$, що $A + BT$ — оборотна матриця.*

Більше того, маємо такий результат, який показує що для повних матриць порядку 2 над кільцем елементарних дільників виконується правий (лівий) двочленний ланцюг подільності.

Теорема 4.4. *Нехай R — комутативне кільце елементарних дільників. Тоді для довільних повних матриць $A, B \in F(R_2)$ існують такі* *повні матриці* $Q_1, Q_2, P \in R_2$, *що* $A = BQ_1 + P$, $B = PQ_2$.

Доведення. В силу обмежень накладених на R і на основі [70] маємо, що R_2 є теж кільцем елементарних дільників, а значить R_2 є кільцем Безу стабільного рангу 2.

Нехай $A, B \in F(R_2)$ і $AR_2 + BR_2 = DR_2$ для деякої матриці $D \in R_2$. Звідси

$$A = DA_0, \quad B = DB_0 \quad \text{і} \quad AU + BV = E$$

для деяких матриць $A_0, B_0, U, V \in R_2$. Тоді

$$D(E - A_0U - B_0V) = 0 \quad \text{і} \quad A_0U + B_0V + C = 0$$

для деякої матриці $C \in R_2$, що $DC = 0$.

Оскільки стабільний ранг R_2 дорівнює 2, тоді існують такі матриці $X, Y \in R_2$, що

$$(A_0 + CX)R_2 + (B_0 + CY)R_2 = R_2.$$

Позначимо

$$A_0 + CX = A_1, \quad B_0 + CY = B_1.$$

Оскільки $DC = 0$, то

$$DA_1 = A, \quad DB_1 = B.$$

Так як $A \in F(R_2)$, $B \in F(R_2)$ і $DA_1 = A$, $DB_1 = B$, то очевидно, що

$$A_1 \in F(R_2), \quad B_1 \in F(R_2).$$

Оскільки

$$A_1R_2 + B_1R_2 = R_2,$$

то тоді згідно з теоремою 4.3 отримаємо, що

$$A_1 + B_1 T = S$$

— оборотна матриця для деякої повної матриці T. Звідси

$$A_1 = B_1(-T) + S, \quad B_1 = S(S^{-1}B_1).$$

Тоді

$$A = B(-T) + DS, \quad B = DS(S^{-1}B_1).$$

Покладемо

$$Q_1 = -T, \quad Q_2 = S^{-1}B_1, \quad P = DS.$$

Зауважимо, що $Q_1 \in F(R_2)$, $Q_2 \in F(R_2)$, $P \in F(R_2)$ як відповідні дільники повних матриць.

$\square$

4.2 Регулярна матриця в сенсі Неймана над комутативною областю Безу є одинично регулярною.

В сучасних алгебраїчних дослідженнях особлива роль належить умові, коли всі регулярні (в сенсі Неймана) елементи є одинично регулярними. Так, наприклад, в кільцях з властивістю заміни з даною умовою [45] показано, що довільний регулярний елемент є чистим. А в роботі [34] показано, що таке кільце має стабільний ранг 1.

В цьому підрозділі показано, що регулярна матриця в сенсі Неймана порядку 2 над комутативною областю Безу є одинично регулярною, тобто є елементами стабільного рангу 1.

Відомо, що комутативне регулярне кільце в сенсі Неймана є одинично регулярним [57]. У випадку некомутативних кілець це не так [60]. Тим не менше, в даній роботі показано, що над комутативною областю Безу довільна регулярна матриця в сенсі Неймана порядку 2 є одинично регулярною.

Відмітимо зв'язок роботи [24] з теоремою 4.2. Для подальшого розгляду потрібний такий результат.

Лема 4.5. *Нехай R — комутативна область Безу. Довільний лівий або правий дільник повної матриці кільця R_2 є теж повною матрицею.*

Доведення. Нехай $A = (a_{ks})$ — повна матриця кільця R_2 і $A = BC$

для матриць $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ кільця R. Оскільки A — повна, то тоді

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} a_{ks}R = R.$$

Так як для довільних $i \in \overline{1,2}$, $j \in \overline{1,2}$

$$a_{ij} \in \sum_{k=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} b_{ks}R,$$

то очевидно, що $B = (b_{ij})$ — повна матриця. Аналогічно доводиться, що матриця C — повна. Лема доведена.

$\square$

Лема 4.6. *Нехай R — комутативна область Безу. Довільна ідемпотентна матриця кільця R_2 є повною діагоналізованою матрицею.*

Доведення. Згідно з працею [9] довільна ідемпотентна матриця порядку 2 над R має вигляд

$$P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},$$

де P деяка оборотна матриця. На основі леми 4.5 отримаємо дане доведення.

$\square$

Нагадаємо, що матриця A кільця R_2 є регулярною матрицею в сенсі Неймана, якщо існує така матриця X кільця R_2, що

$$AXA = A.$$

Якщо ж окрім того матриця $X \in R_2$ є оборотною матрицею кільця

R_2, то матриця A називається одинично регулярною. Очевидно, що ідемпотентна матриця є одинично регулярною.

Відмітимо наступний важливий результат даного підрозділу, а саме результатом є теорема, яка показує що довільна регулярна матриця над комутативною областю Безу є одинично регулярною.

Теорема 4.7. *Над комутативною областю Безу довільна регулярна матриця в сенсі Неймана порядку 2 є одинично регулярною.*

Доведення. Нехай R — комутативна область Безу і A — регулярна матриця кільця R_2, тобто для матриці $A \in R_2$ існує така матриця

$$X \in R_2, \quad \text{що} \quad AXA = A.$$

Відмітимо, що матриця XA є ідемпотентною. Згідно з лемою 4.6 XA є повною матрицею кільця R_2, яка діагоналізується. Відмітимо, що матриця $E - XA$ є також повною матрицею, яка діагоналізується, оскільки вона є ідемпотентною. Оскільки

$$XA + (E - XA) = E,$$

то

$$XR_2 + (E - XA)R_2 = R_2.$$

На підставі теореми 4.2 існує така повна матриця T кільця R_2, що

$$X + (E - XA)T = U$$

— оборотна матриця кільця R_2. Тоді

$$AUA = A(X + (E - XA)T)A = AXA + ATA-$$

$$-AXATA = A + ATA - ATA = A$$

тобто матриця A є одинично регулярною.

□

Як наслідок даної теореми, отримаємо такий очевидний результат.

Наслідок 4.8. *Довільна регулярна матриця в сенсі Неймана порядку 2 над комутативною областю Безу має вигляд FU, де F — ідемпотентна матриця кільця R, а U — оборотна матриця кільця R_2.*

Доведення. Для регулярної матриці другого порядку A згідно з теоремою 4.7 існує така оборотна матриця U другого порядку, що $AUA = A$ і тоді $AU = F$ є ідемпотентом кільця матриць другого порядку. А звідси $A = FU^{-1}$.

За симетрією означення регулярної матриці в сенсі Неймана показується, що довільна регулярна матриця другого порядку над комутативною областю Безу має вигляд UW, де U — оборотна матриця, а W — ідемпотентна матриця.

□

4.3 Висновки до розділу 4

В даному розділі

1. Наведено критерій взаємної простоти двох трикутних матриць порядку 2 над комутативним кільцем Безу стабільного рангу 2.

2. Показано, що стабільний ранг множини повних матриць порядку 2 над кільцем елементарних дільників рівний 1.

3. Доведено, що над кільцем елементарних дільників множина повних матриць порядку 2 володіє двочленним лівим (правим) алгоритмом подільності.

4. Показано, що над комутативною область Безу довільна регулярна матриця порядку 2 є одинично регулярною.

5. Описано всі регулярні матриці порядку 2 над комутативною областю Безу.

ВИСНОВКИ

У дисертації одержані такі результати:

1. У випадку комутативної області Безу показано, що клас роздільних кілець збігається з класом областей Безу, скінченні гомоморфні образи яких є чистими.

2. Показано, що комутативна адекватна область Безу є роздільною.

3. Роздільна комутативна область Безу є кільцем елементарних дільників.

4. Комутативна область Безу роздільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників.

5. Показано, що ефективна область Безу є кільцем елементарних дільників.

6. Показано, що комутативна область Безу, скінченні гомоморфні образи якої є кільцями з властивістю заміни є ефективною.

7. Показано, що стабільний ранг множини повних матриць порядку 2 над кільцем елементарних дільників дорівнює 1.

8. Доведено, що над комутативним кільцем елементарних дільників множина повних матриць порядку 2 володіє двочленним лівим алгоритмом подільності.

9. Описано всі регулярні матриці порядку 2 над комутативною областю Безу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Білявська С. І. *Стабільний ранг адекватного кільця* / С. І. Білявська, Б. В. Забавський // Математичні Студії. — 2008. — Т. 33, №2. — С. 212–214.

[2] Ван дер Варден Б. Л. *Алгебра* / Б. Л. Ван дер Варден // М.: Наука, — 1976.

[3] Васерштейн Л. Н. *Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств* / Л. Н. Васерштейн // Функционал. анализ и его прил. — 1971. — Т. 5, №2. — С. 17–27.

[4] Гаталевич А. І. *Про адекватні праві дуо-кільця* / А. І. Гаталевич // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 1996. — Т. 43. — С. 16–19.

[5] Гаталевич А. І. *Некомутативні кільця елементарних дільників* / А. І. Гаталевич, Б. В. Забавський // Мат. методи і фізико-механічні поля. — 1997. — Т. 40, №4. — С. 86–90.

[6] Гаталевич А. І. *Про адекватні та узагальнено-адекватні дуо-кільця і дуо-кільця елементарних дільників* / А. І. Гаталевич // Математичні Студії. — 1998. — Т.9, № 2. — С. 115–119.

[7] Головачёва Т. В. *О диагонализируемости регулярных матриц над кольцами* / Т. В. Головачёва // Фундаментальная и прикладная математика. — 1996. — Т. 2, №1. — С. 103–111.

[8] Джекобсон Н. *Теория колец* / Н. Джекобсон // М.: Издательство иностранной литератури. — 1947.

[9] Дубровин Н. И. *Проективный предел колец с элементарными делителями* / Н. И. Дубровин // Мат. сборник — 1982. — Т. 119, №1. — С. 88–95.

[10] Забавский Б. В. *О некоммутативных кольцах элементарных делителей* / Б. В. Забавский // Укр. мат. журн. — 1987. — Т. 39, №4. — С. 440–444.

[11] Забавський Б. В. *Про комутативні кільця елеметарних дільників* / Б. В. Забавський // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 1990. — Т. 34. — С. 51–53.

[12] Забавський Б. В. *Редукція матриць над правими кільцями Безу скінченного стабільного рангу* / Б. В. Забавський // Математичні Студії. — 2001. — Т. 16, №2. — С. 115–116.

[13] Забавський Б. В. *Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше 2* / Б. В. Забавський // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, №4. — С. 550–554.

[14] Забавський Б. В.*Дробово-регулярні мультиплікаційні кільця* / Б. В. Забавський, Б. М. Кузніцька // Сучасні проблеми механіки та математики: міжнар. наук. конф., Львів, 21 – 25 травня, 2013 р. : тези допов. : в 3–х т. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. — Т. 3. — С. 183.

[15] Забавський Б. В. *Ефективне кільце* [Електронний ресурс] / Б. В. Забавський, Б. М. Кузніцька // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання — 2014", 28 – 30 травня, 2014 р., Львів. — Електронні дані. — [Львів: Ін–тут приклад. проблем мех. і мат. ім. Я. С. Підстригача НАН України] — Режим доступу: http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2014/theses/Kuznicka.pdf (дата звернення 10.07.2015 р.). — Назва з екрана.

[16] Забавський Б. В. *Стабільний ранг множини повних матриць над кільцем елементарних дільників* / Б. В. Забавський, Кузніцька Б. М. // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, №5. — С. 708–711.

[17] Забавський Б. В. *Про стабільний ранг кілець матриць* / Б. В. Забавський, В. М. Петричкович // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, №11. — С. 1575–1578.

[18] Казімірський П. С. *Дослідження з теорії елементарних дільників* / П. С. Казімірський, Ф. П. Луник // Доповіді АН УРСР. — 1970. — Т. 1 — С. 7–9.

[19] Кон П. *Свободные кольца и их связи* / М. Мир — 1976.

[20] Кузніцька Б. М. *Регулярна матриця в сенсі Неймана над комутативною областю Безу є одинично регулярною* / Б. М. Кузніцька // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2013. Вип. 11. — С. 82–84.

[21] Кузніцька Б. М. *Кільця роздільного рангу 1* / Б. М. Кузніцька, О. В. Домша // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2014. Вип. 12. — С. 49–51.

[22] Кузніцька Б. М. *Роздільні кільця* / Б. М. Кузніцька, Б. В. Забавський // Математичні студії. — 2015. — Т. 43, №2. — С. 153–155.

[23] Романів О. М. *Кільця з елементарною редукцією матриць і квазіевклідові кільця* / О. М. Романів. // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 1998. — Т. 49. — С. 30–48.

[24] Романів А. М. *Найменше спільне праве кратне матриць, з одним відмінним від одиниці інваріантним множником* / А. М. Романів,

В. П. Щедрик // Математичні методи і фізико-механічні поля — 2013. — Вип. 56, №4. — С. 1–8.

[25] Степанов А. В. *Идеальный стабильный ранг колец* / А. В. Степанов // Вестн. Ленингр. Универ. — 1986. — №3. — С. 46–51.

[26] Anderson M. *Lattice Ordered Groups. An Introduction* / M. Anderson, T. Feil // Reidel, Dordrecht. — 1988.

[27] Ara P. *Diagonalization of matrices over regular rings* / P. Ara, K. Goodearl, K. C. O'Meara, E. Pardo // Linear algebra and Appl. — 1987. — V. 265. — P. 147–163.

[28] Arnold D. M. *Finite rank torsion free abelian groups and rings* / D. M. Arnold // Lecture Notes of Math,. Vol.931, Springer – Verlag, Berlin – Heidelberg – New York. — 1982.

[29] Asano K. *Neichtkommutative Hauptidealringe* / K. Asano // Act. Sci Ind, 696. — 1938. Hermann, Paris.

[30] Bass H. *K-theory and stable algebra* / H. Bass // Publ. Math. — 1964. — V. 22. — P. 50–60.

[31] Bass H. *K-theory and stable algebra* / H. Bass // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. — 1964. — №22. — P. 485–544.

[32] Brandal W. *Almost maximal integral domains and finitely generated modules* / W. Brandal // Trans. Amer. Math. Soc. — 1973. — V. 183. — P. 203–222.

[33] Brewer J. W. *Lattice - ordered groups and a conjecture for adequate domains* / J. W. Brewer, P. F. Conrad, P. R. Montgomery // Proc. Amer. Math. Soc. — 1974. — V. 43, №1. — P. 31–35.

[34] Camilo V. P. *Exchange rings, units and idempotents* / V. P. Camilo, H. P. Yu // Comm. Algebra. — 1994. — V. 22. — P. 4737–4749.

[35] Camilo V. P. *Stable range one for rings with many idempotents* / V. P. Camilo, H. P. Yu // Trans. Amer. Math. Soc. — 1995. — V. 34, №8. — P. 3141–3149.

[36] Canfel M. *Completion of diagrams by automorphisms and Bass' first stable range condition* / M. Canfel // J. Algebra. — 1995. — V. 176. — P. 480–504.

[37] Chen H. *Exchange rings with Artinian primitive factors* / H. Chen // Algebr. Represent. Theory 2. — №2. — 1999. — P. 201–207.

[38] Chen H. *Rings with many idempotents* / H. Chen // Int. J. Math. — V. 22. — 1999. — P. 547–558.

[39] Chen H. *Exchange rings satisfying unit 1-stable range* / H. Chen // Kyushu J. Math. — V. 54, №1. — 2000. — P. 1–6.

[40] Chen H. *Stable rings generated by their units* / H. Chen // Comm. Algebra. — 2000. — V. 26 — P. 759–761.

[41] Chen H. *Generalized exchange stable rings* / H. Chen // Sout. Asian. Bull. Math. — 2000. — V. 24. — P. 19–24.

[42] Chen H. *Stable ranges for Morita Context* / H. Chen // Comm. Algebra. — 2001. — V. 21. — P. 209–216.

[43] Chen H. *On unit 1-stable range* / H. Chen, M. Chen // J. Appl. Algebra Discrete Strut. — V. 1, №3. — 2003. — P. 189–196.

[44] Chen H. *Unit 1-stable range for ideals* / H. Chen, M. Chen // Int. J. Math. and Math. Scien. — V. 46. — 2004. — P. 2477–2482.

[45] Chen H. *Exchange rings in which all regular elements are one-sided unit-regular* / H. Chen // Czechoslovak Math. J. — 58(133). — 2008. — P. 899–910.

[46] Cohn P. M. *Two examples of principal ideal domains* / P. M. Cohn, A. H. Schofield // Bull. London Math. Soc. — 1985. — V. 17, №1. — P. 26–28.

[47] Cohn P. M. *Right principal Bezout domains* / P. M. Cohn // J. London Math. Soc. — 1987. — V. 35, №2. — P. 251–262.

[48] Colby R. *Rings which have flat injective modules* / R. Colby // J. Algebra. — 1975. — V. 35. — P. 239—252.

[49] Conrad P.*Epi-archimedean groups* / P. Conrad // Czech. Math. J. — 1974. — V. 24. — P. 192–218.

[50] Conrad P.*Complemented lattice-ordered groups* / P. Conrad, J. Martinez // Indag. Math. — 1(3). — 1990. — P. 281–298.

[51] Contessa M. *On PM-rings* / M. Contessa // Commun. Algebra — 1982. — V. 10. — P. 93–108.

[52] Contessa M. *On certain classes of PM-rings* / M. Contessa // Commun. Algebra — 1984. — V. 12. — P. 1447–1469.

[53] Crawley P., Jonnson B. *Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems* / P. Crawley // Pacific. J. Math. — 1964. — V. 14. — P. 797–855.

[54] Darnel M.*Theory of Lattice-Ordered Groups* / M. Darnel // Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics — V. 187. — Marcel Dekker, New York — 1995.

[55] Dickson L. E. *Algebras and their arithmetics* / L. E. Dickson // University of Chicago. Press. — Chicago. — 1923.

[56] Estes D. *Stable range in commutative rings* / D. Estes, J. Ohm // J.Algebra. — 1967. — V. 7. — P. 343–362.

[57] Gillman L. *Some remarks about elementary divisor rings* / L. Gillman, M. Henriksen // Trans. Amer. Math. Soc. — 1956. — V. 82. — P. 362–365.

[58] Gilmer R. *Multiplicative Ideal Theory* / R. Gilmer // Marcel Dekker, New York. — 1972.

[59] Gillman L. *Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal* / L. Gillman, M. Henriksen // Trans. Amer. Math. Soc. — 1956 — V. 82. — P. 366–391.

[60] Goodearl K. R. *Von Neumann regular rings* / K. R. Goodearl // Pitman, London – San Francisco – Melbourne — 1979.

[61] Goodearl K. R. *Stable range one for rings with many units* / K. R. Goodearl, P. Menal // J. Pure. Appl. Algebra. — 1998. — V. 54. — P. 261–287.

[62] Handelman D. *Stable range in AW* algebras* / D. Handelman // Proc. Amer. Soc. — 1979. — V. 76, №2. — P. 241–249.

[63] Helmer O. *The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions* / O. Helmer // Bull. Amer. Math. Soc. — 1943 — V. 49, №2. — P. 225–236.

[64] Henriksen M. *Some remarks about elementary divsor rings* / M. Henriksen // Michigan Math. J. 1955 – 1956. — V. 3. — P. 159–163.

[65] Henriksen M. *The space of minimal primes of a commutative ring* / M. Henriksen, M. Jerison // Trans. Amer. Math. Soc. — 1965. — V. 115. — P. 110–130.

[66] Henriksen M. *On a class of regular rings that are elementary divisor rings* / M. Henriksen // Arch. Math. — 1973. — V. 24, №2. — P. 133–141.

[67] Huyllebrouk D. *Diagonalization of idempotent matrices* / D. Huyllebrouk, J. Van – Geel // J. Algebra — 1987. — V. 105 — P. 196–206.

[68] Jacobson N. *Pseudo-linear transformation* / N. Jacobson // Ann. of Math. — 1937. — V. 38. — P. 484–507.

[69] Jain S. K. *Cyclic Modules and the Structure of rings* / S. K. Jain, K. Ashish, Srivastava, A. Askar, Tuganbaev // Oxford, University press. — 2012. — P. 219.

[70] Kaplansky I. *Elementary divisor ring and modules* / I. Kaplansky // Trans. Amer. Math. Soc. — 1949. — V. 66. — P. 464–491.

[71] Kaplansky I. *Infinite Abelian Groups* / I. Kaplansky // Univer. of Michigan Press. — 1965. — P. 91.

[72] Lam T.Y. *A crash course on stable range, cancellation, substitution, and exchange* / T.Y. Lam // University of California, Berkeley CA 94720.

[73] Larsen M. *Elementary divisor rings and finitely presented modules* / M. Larsen, W. Lewis, T. Shores // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — V. 187. — P. 231–248.

[74] Levy L. S. *Sometimes only square matrices can be diagonalized* / L. S. Levy // Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — V. 52. — P. 18–22.

[75] Lezowski P. *On some Euclidean properties of matrix algebras* // 2015 https: // hal. archives – ouvertes.fr // hal – 01135202v2.

[76] McDowell K. *Commutative Coherent rings* / K. McDowell // McMaster University — 1974. — P. 106.

[77] McGovern W. Wm. *Neat ring* / W. Wm. McGovern // J. of Pure and Appl. Algebra — 2006. — V. 205. — P. 243–265.

[78] McGovern W. *Bezout rings with almost stable range 1 are elementary divisor rings* / W. McGovern // J. Pure and Appl. Algebra — 2007. — V. 212. — P. 340–348.

[79] Menal P. *On π-regular rings whose primitive factor rings are artinian* / P. Menal // J. Pure Appl. Alg. — 1981. — V. 20. — P. 71–78.

[80] Menal P. *On regular rings with stable range 2* / P. Menal, J. Moncasi // J. Pure Appl. Algebra — 1982. — V. 24. — P. 25–40.

[81] Menal P. *K_1 of von Neumann regular rings* / P. Menal, J. Moncasi // J. Pure Appl. Alg. — 1984. — V. 33. — P. 295–312.

[82] Mott J. L. *Convex directed subgroups of a group of divisibility* / J. L. Mott // Canad. J. Math. — 26 (3). — 1974. — P. 532–542.

[83] Nicholson W. K. *I-Rings* / W. K. Nicholson // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — V. 207. — P. 361–373.

[84] Nicholson W. K. *Lifting idempotents and exchange rings* / W. K. Nicholson // Trans. Amer. Math. Soc. — 1977. — V. 229. — P. 269–278.

[85] Nicholson W. K. *Principally injective rings* / W. K. Nicholson, M. F. Yousif // J. Algebra — 1995. — V. 174. — P. 77–93.

[86] Rieffer M. *Dimension and stable rank in the K-theory of C^*-algebras* / M. Rieffer // Proc. Lond. Math. Soc. — 1983. — V. 46. — P. 301–333.

[87] Rubei L. A. *Solution to problem 6117* / L. A. Rubei // Amer. Math. Mouthly — 1978. — V. 85. — P. 505–506.

[88] Rush D. E. *Bezout domains with stable range 1* / D. E. Rush // J. Pure and Appl. Algebra — 2001. — V. 158. — P. 309–324.

[89] Smith H. J. S. *On systems of linear indeterminate equations and congruences* / H. J. S. Smith // Philos. Trans. Roy. Soc., London — 1861. — V. 151, №2. — P. 293–326.

[90] Steger A. *Diagonalizability of idempotent matrices* / A. Steger // Pacific. J. Math. — 1966. — V. 19, №3. — P. 535–542.

[91] Szucs J. *Diagonalization theorem for matrices over certain domains* / J. Szucs // Asta sci. Math. — 1974. — V. 36, №1. — 2. — P. 193–201.

[92] Teichmuller O. *Der Elementarteilsatz fur nichtkommutative ringe* / O. Teichmuller // Abh. Preuss. Acad. Wiss. Phys. Math. K1 — 1937. — P. 169–177.

[93] Vaserstein L. N. *The stable rank of ring and dimentionality of topological spaces* / L. N. Vaserstein // Funct. Anal. Appl. — 1971. — V. 5. — P. 102–110.

[94] Vaserstein L. N. *Bass' first stable range condition* / L. N. Vaserstein // J. Pure and Appl. Alg. — 1984. — V. 34. — P. 319–330.

[95] Vaserstein L. N. *An answer to a question of M.Newmann on matrix completion* / L. N. Vaserstein // Proc. Amer. Math. Soc. — 1997. — №2. — P. 189–196.

[96] Warfield R. B. *Stable equivalence of matrices and resolutions* / R. B. Warfield // Comm. Algebra. — 1978. — V. 17. — P. 1811–1828.

[97] Warfield R. B. *Exchange rings and decompositions of modules* / R. B. Warfield // Math. Ann. — 1972. — V. 199. — P. 31–36.

[98] Wedderburn J. H. M. *On matrices whose coefficients are functions of single variable* / J. H. M. Wedderburn // Trans. Amer. Math. Soc. — 1915. — V. 16, №2. — P. 328–332.

[99] Zabavsky B. V. *Diagonalization of matrices over ring with finite stable range* / B. V. Zabavsky // Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. — 2003. — V. 61. — P. 206–211.

[100] Zabavsky B. V. *Reduction of matrices over Bezout rings of stable rang not higher than 2* / B. V. Zabavsky // Ukrainian Mathematical Journal — 2003. — V. 55, №4. — P. 665–670.

[101] Zabavsky B. V. *Diagonalization of matrices* / B. V. Zabavsky // Matematychni Studii — 2005. — V. 23, №1. — P. 3–10.

[102] Zabavsky B. V. *Diagonalizability theorem for matrices over ring with finite stable range* / B. V. Zabavsky // Algebra and Discrete Math. — 2005. — №1. — P. 134–148.

[103] Zabavsky B.V. *Diagonal reduction of matrices over rings* / B. V. Zabavsky // Matematychni Studii., Monograph Series, volume XVI, VNTL Publishers, 2012, Lviv, P. 251.

[104] Zabavsky B. V. *Diagonal reduction of matrices over finite stable range rings* / B. V. Zabavsky // Mat. Stud. — 2014. — V. 41. — P. 101–108.

[105] Zabavsky B. V. *Every zero adequate ring is an exchange ring* / B. V. Zabavsky, S. Bilyavska // Fund i Prukl. Mat., 2011–2012. — V. 17, №3. — P. 61–66.

[106] Zabavsky B. V. *Full matrix over Bezout ring of stable range 2* / B. V. Zabavsky, B. M. Kuznitska // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: L'viv, July 8 – 13, 2013: Book of Abstract. — L'viv: Ivan Franko National University, 2013. — P. 221.

[107] Zabavsky B. V. *Avoidable rings* / B. V. Zabavsky, B. M. Kuznitska // International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin Kyiv, July 7 – 12, 2014: Book of abstracts. Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2014. — P. 50.

[108] Zabavsky B. V. *Effective ring* / B. V. Zabavsky, B. M. Kuznitska // Algebra and Discrete Mathematics — 2014. — V. 18, №1. — P. 151–158.

[109] Zabavsky B. V. *Questions related to the K-theoretical aspect of Bezout rings with various stable range conditions* / B. V. Zabavsky // Math. Stud. — 2014. — V. 42, №1. — P. 89–103.