

## Відгук

офіційного опонента на дисертацію

**Кузніцької Богдани Миколаївни**

**“Обмежені кільця з умовами адекватності”,**

подану на здобуття наукового ступеня кандидата

фізико-математичних наук за спеціальністю

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Дослідження адекватних кілець започатковані Веддерберном, який у 1915 році вказав, що кільце аналітичних функцій є кільцем елементарних дільників. Саме ці результати спричинили Хелмера у 1943 році ввести у розгляд адекватні комутативні області Безу як новий клас кілець елементарних дільників без умов обриву зростаючих ланцюгів ідеалів. З дослідженнями адекватних кілець пов'язані роботи таких відомих математиків як Капланський, Хенріксен, Ларсен, Левіс, Шорес. Так Хенріксен показав, що адекватна область Безу є  $PM^*$ -кільцем. А Ларсен, Левіс, Шорес поставили питання: чи є комутативна  $PM^*$ -область Безу адекватною? У 1974 році було побудовано контрприклад на це питання. Окрім цих результатів ніяких суттєвих подвигів по адекватних кільцях не було до 2011 року, коли Забавський, Білявська, Мак Говерн показали, що комутативна область Безу є адекватною тоді і лише тоді, коли всі її нетривіальні скінченні гомоморфні образи є напіврегулярними. Клас напіврегулярних кілець міститься в класі кілець з властивістю заміни, які в свою чергу є напівпотужними. А актуальність досліджень кілець з властивістю заміни і напівпотужних кілець не викликає сумніву. Достатньо мимовільного погляду в інтернет – кількість робіт по дослідженню таких класів кілець і пов'язаних з ними кілець ідемпотентного рангу 1 просто зашкалює. Тому вивчення комутативних кілець, скінченні гомоморфні образи яких є кільцями з властивістю заміни (чистими кільцями, кільцями ідемпотентного рангу 1) або напівпотужними є актуальною і затребованою задачею, як теорії кілець і модулів, так і алгебраїчної  $K$ -теорії. Саме такого роду дослідження і присвячена дана робота. Із вказаного можна зробити висновок, що актуальність вибраної автором Кузніцької Б.М. теми дисертаційного дослідження не викликає сумніву.

Охарактеризуємо коротко зміст дисертаційної роботи. Вона складається із вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаної літератури. У першому розділі наведено перелік основних позначень, подані спеціальні терміни, відомі поняття та означення, викладено допоміжні твердження.

Особливо слід відмітити насиченість цього розділу різноманітними прикладами та контрприкладами.

Основні результати містяться у наступних трьох розділах. Другий розділ присвячений вивченню роздільних кілець, а саме комутативних областей Безу, нетривіальні скінченні гомоморфні образи яких є кільцями з властивістю заміни. Встановлено існування таких кілець, а саме показано, що адекватні області Безу, акуратні області Безу є такими, а також відомий контрприклад  $PM^*$ -області Безу, яка не є адекватною, є прикладом роздільної області. У випадку  $FGC$ -областей встановлено, що роздільна область є адекватною. Доведено, що роздільна область Безу є кільцем елементарних дільників (Теорема 2.5, яка є відповіддю на відкрите питання Забавського).

У другому підрозділі цього розділу вивчаються комутативні області Безу на основі введеного поняття кільця роздільного рангу 1. А саме встановлено, що локально роздільне кільце є кільцем роздільного рангу 1. Також показано, що комутативна область Безу роздільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників (Теорема 2.13, яка є відповіддю на відкрите питання Забавського). Слід відмітити, що у 2014 році Чен анонсував відповідь на теж саме відкрите питання.

В третьому розділі вивчаються комутативні області Безу, скінченні гомоморфні образи яких є напівпотужними кільцями. Встановлено умови існування таких кілець (Теореми 3.4, 3.5, 3.6), а також в класі таких кілець виділено клас ефективних кілець. Показано, що ефективні кільця є кільцями елементарних дільників (Теорема 3.7). Показано, що роздільне кільце є ефективним (Теорема 3.9), а також вказано умови, коли ефективне кільце є роздільним (Теорема 3.11).

Четвертий розділ присвячено вивченню властивостей матриць над кільцями елементарних дільників. Зокрема показано, що множина повних матриць над кільцем елементарних дільників є множиною елементів стабільного рангу 1 (Теорема 4.3), а також показано (Теорема 4.4), що вони володіють двочленним лівим (правим) ланцюгом подільності (Теорема 4.6).

Відмітимо, що анонсовані у 2015 році результати Лезовського говорять, що матриці порядку 2 над комутативним кільцем елементарних дільників володіють тричленним ланцюгом подільності і цей алгоритм подільності не є покращуваним.

Виходячи з наведеного огляду, можна зробити висновки, що дисертація Кузніцької Б.М. є цілісною та завершеною роботою. Ці результати в сукупності розв'язують актуальні і важливі задачі теорії кілець і модулів, а також

алгебраїчної  $K$ -теорії. Результати роботи можна рекомендувати до використання фахівцями з теорії кілець, які працюють в Інституті математики НАН України, Львівському національному університеті імені Івана Франка, Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Дніпропетровському національному університеті імені Олеся Гончара та Ужгородському національному університеті.

У дисертації автором отримано такі нові наукові результати:  
показано, що множина повних матриць порядку 2 над кільцем елементарних дільників має стабільний ранг 1;  
доведено, що регулярна матриця в сенсі Неймана порядку 2 над комутативною областю Безу є одинично регулярною;  
досліджено комутативні кільця Безу, гомоморфні образи яких є напівпотужними кільцями;  
доведено, що ефективні кільця є кільцями елементарних дільників;  
показано, що локально роздільне кільце є кільцем роздільного рангу 1;  
доведено, що комутативна область Безу роздільного рангу 1 є кільцями елементарних дільників.

Результати дисертаційної роботи є новими, науково обґрунтованими і отримані її автором самостійно.

Результати дисертації опубліковано у 9 наукових працях, з них 3 – у виданнях, що входять до Переліку наукових фахових видань України, 2 – у наукових фахових виданнях, які включені до міжнародної наукометричної бази даних “Scopus”, 3 – у матеріалах міжнародних наукових конференцій, 1 – у матеріалах всеукраїнської наукової конференції. Вони доповідались на алгебраїчних семінарах м. Львова.

Дисертація написана на належному науковому рівні, автореферат правильно відображає зміст дисертаційної роботи. Дисертація та автореферат оформлені згідно чинних вимог. За своїм науковим спрямуванням дисертація Б.М. Кузніцької відповідає спеціальності 01.01.06 – алгебра та теорія чисел.

До тексту роботи та її оформлення можна зробити наступні зауваження:  
у прикладі 1.1 одне кільце позначається двома різними буквами  $R$  та  $S$  (с. 22, 23);  
замість слів « $S$  складається більше ніж з одного максимального ідеалу» треба писати « $S$  має більше ніж один максимальний ідеал» (с. 24);  
замість ст.р. ( $P[[x_1, \dots, x_n]] = 1$ ) треба писати ст.р. ( $P[[x_1, \dots, x_n]] = 1$ ) (с. 27);  
замість слів « $\text{spec } R$  є завжди  $T_0$ ,  $\text{Max}(R)$  є завжди  $T_1$ » краще писати « $\text{spec } R$  є завжди  $T_0$  простором,  $\text{Max}(R)$  є завжди  $T_1$  простором» (с. 32);  
замість слів «для комутативного кільця  $R$  з 1» краще писати просто «для комутативного кільця  $R$  з одиницею» (див. с. 33);

робота також містить невелику кількість друкарських помилок.

Зауважимо, що зазначені недоліки ніяк не впливають на загальний високий рівень дисертаційної роботи.

На основі наведеного аналізу роботи можна зробити загальний висновок. Дисертаційна робота є завершеною науковою працею, що виконана на актуальну тему і містить нові науково обґрунтовані теоретичні результати, які в сукупності є суттєвим вкладом у теорію кілець. Усі викладені в дисертації результати вчасно опубліковані автором у фахових виданнях і пройшли належну апробацію. Отже, дисертаційна робота "Обмежені кільця з умовами адекватності" відповідає всім вимогам Постанови Кабінету Міністрів від 24 липня 2013 року № 567 до кандидатських дисертацій, а її автор, Кузніцька Богданна Миколаївна, заслуговує на присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел.

Офіційний опонент –

кандидат фізико-математичних наук,

доцент кафедри геометрії

Київського національного університету

імені Тараса Шевченка

В.М. Журавльов

