Шифр: **Сан Філіпе**

Назва роботи:

Проникнення електромагнітної хвилі в однорідну плазму без зовнішнього магнітного поля при падінні під прямим кутом

ЗМІСТ

ВСТУП 3

1. ФІЗИЧНА МОДЕЛЬ 6

2. ПЕРЕХІДНЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ У ПЛАЗМІ.................................. 9

3. ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ У НАБЛИЖЕННІ СТАЦІОНАРНОГО РОЗВ’ЯЗКУ.. 12

4. ТРИВАЛІСТЬ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ 18

5. ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ У ПЛАЗМІ 21

ВИСНОВКИ.. 23

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.. 24

ВСТУП

У роботі досліджується явище проникнення електромагнітної хвилі в однорідну плазму.

Актуальність роботи обумовлена використанням даного явища, наприклад, для проведення діагностики плазми[1-4], в іоносферних та радарних дослідженнях[1-4], в технологічних процесах та у дослідженнях з керованого термоядерного синтезу[3;4].

Явище проникнення електромагнітної хвилі у плазму вивчається протягом багатьох років як теоретично, так і експериментально. Але існуючі теорії не дають уявлення про перехідні процеси у плазмі при проникненні електромагнітної хвилі, а лише дають значення амплітуди хвилі, що проникла у плазму і відбилася від її поверхні (коефіцієнти проходження та відбиття) при $t \to \infty$.

У статтях [5] і [6] вивчалось проходження і відбиття електромагнітної хвилі від межі плазми для двох випадків – ізотропної та анізотропної плазми. Дана задача була розв'язана теоретично методом перетворення Лапласа. У випадку анізотропної плазми вираз для відбитої хвилі являє собою інтеграл, який містить залежність від часу та є достатньо складним для подальшого аналізу. Розв'язок для хвилі, що проникла у плазму, аналогічний, але має ще більш складну структуру. У випадку ізотропної плазми при падінні синусоїдальної хвилі розв'язок стає простішим: відбита хвиля виражається як простий одиночний інтеграл за часом, але хвиля, що проникла у плазму, як раніше, виражається через інтеграл доволі складної структури. Дані розв'язки знайдені у незручній формі та важкі для подальшого аналізу.

Поширення скінченного синусоїдального сигналу у дисперсійному середовищі розглядалося у [7] також за допомогою метода перетворення Лапласа. Синусоїдальний сигнал був розкладений у збіжний ряд за функціями Бесселя. Результат, який був отриманий зворотним перетворенням Лапласа, свідчить про те, що середовище реагує на скінченний синусоїдальний сигнал, як скінченна сумма функцій Бесселя. Пізніше у [8] було показано, що даний розв'язок можна переписати у іншій формі – через функції Ломмеля.

Дану задачу та схожі не неї розв'язували числовими методами у [8]–[10]. У цих дослідженнях було проведено чисельне моделювання процесу за допомогою FDTD методу. Зазначимо, що дана задача може широко використовуватися для перевірки чисельних FDTD кодів, у яких можуть виникати проблеми через різку межу вакуум-плазма. Через цю проблему при числовому моделюванні виникають похибки та отриманий результат буде відрізнятися від аналітичного, про що зазначено у [9].

Найбільш схожою на нашу є задача, що була розв'язана шляхом числового моделювання у [11]. Задача досліджувалась для кількох випадків холодної та гарячої плазми – ізотропна і анізотропна плазма. Представлені результати порівнюються і дуже добре відповідають результатам оберненого перетворення Фур'є для розв'язку в частотній області замкнутої форми. У роботі детально розглянута методологія числового коду і представлені графіки поширення електромагнітної хвилі у плазмі для різних випадків.

Коефіцієнти проходження і відбиття електромагнітної хвилі від межі плазми в загальному випадку і для деяких конкретних значень частоти падаючої хвилі наведені у [12]. Але дані значення коефіцієнтів вірні лише при наближенні $t \to \infty$. Також у даному джерелі наведені глибина скін слою та інші параметри, пов'язані з проникненням електромагнітної хвилі у плазму. Також у [12] розповідається про метод СВЧ-діагностики плазми.

Про практичне використання результатів, які вже отримані або будуть отримані при вивчені даного явища, у діагностиці плазми розповідається у статтях [13] та [14], де також зазначено важливість саме перехідних осциляцій відбитого сигналу. Основи аналітичної та експериментальної діагностики плазми за допомогою перехідних електромагнітних імпульсів описуються у [15].

У [16] представлено огляд статей, у яких вже вивчалося проходження та відбиття електромагнітних імпульсів від межі плазми, які можуть бути корисними при вивченні проходження сигналів через іоносферу, що також є прикладом практичного використання результатів дослідження даного явища.

Статті [17]–[19] також можуть бути корисними для таких теоретичних досліджень. В них розв’язується задача розповсюдження електромагнітних імпульсів у дисперсійному середовищі різними методами (метод стаціонарних фаз [17], асимптотичний опис [18], метод перетворення Фур’є [19]).

Зазначимо ще кілька досліджень даного явища. У [20] розглянуто область відбиття радіохвиль, що поширюються в неоднорідній плазмі з урахуванням впливу змінного електричного поля хвилі на діелектричну проникність плазми; показано, що точка відбиття зміщується у плазму зі збільшенням амплітуди падаючої хвилі. Величина цього зміщення рахується. У [21] отримано структуру електромагнітного поля в слабо іонізованій плазмі в умовах, коли електромагнітна хвиля впливає на іонізаційний баланс.

Метою роботи є отримання точних аналітичних виразів для електромагнітної хвилі, що проникла в однорідну плазму без зовнішнього магнітного поля; дослідження перехідних процесів (знаходження часу перехідних процесів в залежності від характерних параметрів); дослідження переносу енергії електромагнітної хвилі (вектор Пойнтінга); числові розрахунки і отримання структури електромагнітної хвилі у плазмі.

1. ФІЗИЧНА МОДЕЛЬ

У роботі розглядається наступна геометрія задачі. Однорідна воднева плазма займає півпростір $x>0$ (Рисунок 1). Електромагнітна хвиля з вакууму $x<0$ падає перпендикулярно на поверхню плазми. Вісь y спрямована вздовж електричного поля хвилі, а вісь z – вздовж магнітного. Падаюча з вакууму на плазму електромагнітна хвиля буде проходити через цю межу та відбиватися від неї.

В області вакууму поширення електромагнітної хвилі описується, як відомо, хвильовим рівнянням (1):

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Електромагнітні коливання у плазмі без зовнішнього магнітного поля описуються телеграфним рівнянням (2):

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + \frac{\omega_{pl}^2}{c^2} U_2, \tag{2}$$

де:

- c – швидкість світла у вакуумі;
- ω_{pl} – плазмова частота;
- $U_1(x,t), U_2(x,t)$ – компоненти електричного або магнітного поля в області вакууму та плазми відповідно.

Нехай через вакуум перпендикулярно до межі плазми поширюється синусоїдальна хвиля одиничної амплітуди – $sin(\omega t - kx)$, де:

- ω – частота хвилі;
- k – хвильове число у вакуумі, $k = {}^{\omega}/_{c}$.

Знаючи вираз для падаючої хвилі, отримаємо початкові умови для задачі на електромагнітне поле у вакуумі (3) (в області плазми початкові умови на електромагнітне поле нульові (4)):

$$\begin{cases} U_1(x,0) = -sin(kx) \\ \left.\frac{\partial U_1}{\partial t}\right|_{t=0} = \omega cos(kx) \end{cases}, \tag{3}$$

$$\begin{cases} U_2(x,0) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial U_2}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \end{cases}. \tag{4}$$

В якості граничних умов (5) можна використати умову на неперервність електромагнітного поля на межі розділу двох середовищ та неперервність перших похідних від нього за координатою:

$$\begin{cases} U_1(0,t) = U_2(0,t) \\ \left.\dfrac{\partial U_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial U_2}{\partial x}\right|_{x=0} \end{cases}. \tag{5}$$

Для того, щоб розв'язати задачу на поширення електромагнітної хвилі в області плазми, треба знати граничну умову (одну – тому що область плазми обмежена тільки з одного боку) на електромагнітне поле саме в плазмі, а не його зв'язок з полем у вакуумі, тобто треба зробити граничну умову на поле у плазмі незалежною від поля у вакуумі.

Розв'язок задачі в області вакууму – дві біжучі хвилі (хвиля, що падає, та хвиля, що відбивається від межі плазми). Падаючу хвилю знаємо, а відбиту позначимо за деяку функцію і отримаємо

$$U_1(x,t) = \sin(\omega t - kx) + f(x + ct) \tag{6}$$

Використовуючи граничні і початкові умови (3)–(5) та розв'язок в області вакууму (6), шляхом математичних операцій отримаємо граничну умову на поле в області плазми

$$\left.\frac{\partial U_2}{\partial t}\right|_{x=0} - c\left.\frac{\partial U_2}{\partial x}\right|_{x=0} = 2\,\omega\cos(\omega t) \tag{7}$$

Тепер сформулюємо отримані результати у термінах методів математичної фізики (рівняння (8), гранична (9) та початкові (10) умови) задачу на проникнення електромагнітної хвилі у плазму

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + \frac{\omega_{pl}^2}{c^2}U_2, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial U_2}{\partial t}\right|_{x=0} - c\left.\frac{\partial U_2}{\partial x}\right|_{x=0} = 2\omega\cos(\omega t), \tag{9}$$

$$\begin{cases} U_2(x,0) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial U_2}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \end{cases} \cdot \tag{10}$$

2. ПЕРЕХІДНЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ У ПЛАЗМІ

Даний розділ присвячений розв'язку задачі (8)–(10), що була сформульована у попередньому розділі.

Задля спрощення задачі зробимо наступну заміну:

$$U_2(x,t) = c\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}, \tag{11}$$

де $\varphi(x,t)$ – деяка функція, що є розв'язком телеграфного рівняння (лінійна комбінація таких функцій та їх похідних також є розв'язком даної задачі). Зробивши дану заміну отримаємо телеграфне рівняння (12) з нульовими початковими умовами (13) та зі зручнішою граничною умовою (14) – це гранична умова першого роду:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\omega_{pl}^2}{c^2}\varphi, \tag{12}$$

$$\begin{cases} \varphi(x,0) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \end{cases}, \tag{13}$$

$$\varphi(0,t) = -\frac{2\omega}{\omega_{pl}^2}cos(\omega t). \tag{14}$$

Телеграфне рівняння з нульовими начальними умовами та граничною умовою першого роду має відомий розв'язок (15), така задача була розв'язана у [4;22] методом Фур'є.

$$\varphi(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_{x-ct}^{0}\psi(-\tau)\mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-(x-\tau)^2}\right)d\tau\right\}, \tag{15}$$

де:

- $\mathcal{J}_0(z)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку;
- $\psi(-\tau)$ – функція, що визначається через граничну умову задачі.

Для того, щоб впевнитись у правильності такого розв'язку, достатньо підставити його до телеграфного рівняння (12) та отримати тотожність.

Для того, щоб задовольнити граничній умові (14) виберемо функцію $\psi(-\tau)$ у вигляді $\psi(-\tau) = Acos(-Bt)$. Підставимо цю функцію до граничної умови та знайдемо коефіцієнти. Для цього використовується табличний інтеграл [23]:

$$\int_0^a \cos(c\tau)\, \mathcal{J}_0\left(b\sqrt{a^2-\tau^2}\right) d\tau = \frac{sin\left(a\sqrt{b^2+c^2}\right)}{\sqrt{b^2+c^2}}. \qquad (16)$$

Підставивши коефіцієнти a, b і c, що відповідають нашій задачі, знайдемо коефіцієнти A та B функції $\psi(-\tau)$:

- $A = -\frac{2\omega}{\omega_{pl}^2 c} = \frac{2k}{\omega_{pl}^2}$,
- $B = k\sqrt{\varepsilon}$, (17)

де $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}$ – діелектрична проникність плазми.

Тепер можна підставити у (15) знайдені коефіцієнти (17) та, помінявши границі інтегрування місцями, отримати остаточний розв'язок задачі (12)-(14):

$$\varphi(x,t) = \frac{2k}{\omega_{pl}^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^{x-ct} cos\left(-k\tau\sqrt{\varepsilon}\right)\mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-(x-\tau)^2}\right) d\tau\right\}. \qquad (18)$$

Підставимо (18) до (11) та повернемося до функції $U_2(x,t)$. Зробимо заміну змінної інтегрування $(x-\tau)=\xi$ та отримаємо розв'язок основної задачі (8)–(10):

$$\begin{aligned} U_2(x,t) = &-\frac{2kc}{\omega_{pl}^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left\{\int_x^{ct} cos\left(k\sqrt{\varepsilon}(\xi-x)\right)\mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-\xi^2}\right) d\xi\right\} \\ &-\frac{2k}{\omega_{pl}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\int_x^{ct} cos\left(k\sqrt{\varepsilon}(\xi-x)\right)\mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-\xi^2}\right) d\xi\right\}. \end{aligned} \qquad (19)$$

Використовуючи рівняння Максвела та граничні умови до них, з'ясуємо, що $U_2(x,t)$ – z-компонента електричного поля, тобто $U_2(x,t) \equiv E_{2z}(x,t)$.

Як було вище зазначено, інтеграл, що міститься у розв'язку задачі також є розв'язком телеграфного рівняння. Можна отримати інший вид запису для $E_{2z}(x,t)$, якщо виразити $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\ldots\}$ з телеграфного рівняння (8) та підставити у (19). Виконавши тривіальні математичні операції, отримаємо:

$$E_{2z}(x,t) = \frac{2k}{1-\varepsilon}\int_x^{ct} cos\left(k\sqrt{\varepsilon}(\xi - x)\right)\mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-\xi^2}\right)d\xi$$

$$-\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon}\frac{\partial}{c\partial t}\left\{\int_x^{ct} sin\left(k\sqrt{\varepsilon}(\xi - x)\right)\mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-\xi^2}\right)d\xi\right\} \quad (20)$$

$$-\frac{2}{(1-\varepsilon)^{1/2}}\left(\frac{ct-x}{ct+x}\right)^{1/2}\mathcal{J}_1\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-x^2}\right).$$

Знайдемо магнітне поле у плазмі (воно має тільки y-компоненту) з рівняння Максвела, що у термінах нашої задачі запишеться наступним чином

$$\frac{\partial}{\partial t}B_{2y}(x,t) = c\frac{\partial}{\partial x}E_{2z}(x,t). \quad (21)$$

Підставимо (20) у (21) і отримаємо вираз для магнітного поля у плазмі:

$$B_{2y}(x,t) = -\frac{2kc^2}{\omega_{pl}^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\int_x^{ct} cos\left(k\sqrt{\varepsilon}(\xi - x)\right)\mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-\xi^2}\right)d\xi\right\}$$

$$-\frac{2kc}{\omega_{pl}^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left\{\int_x^{ct} cos\left(k\sqrt{\varepsilon}(\xi - x)\right)\mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-\xi^2}\right)d\xi\right\}. \quad (22)$$

Виконаємо дії аналогічні тим, що робились для електричного поля, та отримаємо вираз для магнітного поля в іншому виді:

$$B_{2y}(x,t) = -\frac{2k\varepsilon}{1-\varepsilon}\int_x^{ct} cos\left(k\sqrt{\varepsilon}(\xi - x)\right)\mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-\xi^2}\right)d\xi$$

$$+\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon}\frac{\partial}{c\partial t}\left\{\int_x^{ct} sin\left(k\sqrt{\varepsilon}(\xi - x)\right)\mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-\xi^2}\right)d\xi\right\} \quad (23)$$

$$+\frac{2}{(1-\varepsilon)^{1/2}}\left(\frac{ct-x}{ct+x}\right)^{1/2}\mathcal{J}_1\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-x^2}\right).$$

Отримані електричне (20) та магнітне (23) поля разом описують електромагнітну хвилю, що проникає у плазму з вакууму. Даний розв'язок є точним і підходить для падаючої хвилі будь-якої частоти на плазму з будь-якою діелектричною проникністю на будь-яких відстанях для будь-якого часу.

3. ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ У НАБЛИЖЕННІ СТАЦІОНАРНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Щоб отримати асимптотичні вирази для електричного та магнітного полів, треба розкласти точні формули (20) і (23) за малими параметрами. Нижче аргументується фізичний сенс цих малих параметрів.

Коли електромагнітна хвиля падає на плазму, у другій починають збурюватися електромагнітні коливання, після переформування (підлаштування) яких під падаючу хвилю у плазмі буде поширюватися плоска монохроматична хвиля. Така хвиля буде формуватися у плазмі дуже тривалий час, а довжина такої хвилі буде визначатися з дисперсійного співвідношення.

Теорія, що на даний момент розроблена, може дати відповідь тільки на питання про коефіцієнти проходження та відбиття електромагнітної хвилі від межі розділу двох середовищ при $t \to \infty$. Відповідь саме на питання коефіцієнтів проходження і відбиття, що еквівалентно питанню про амплітуду хвилі, що проникла у плазму, є у [12]. Після виконання дій, що описані нижче, можна буде перевірити достовірність отриманих результатів порівнявши коефіцієнти, отримані нами з коефіцієнтами, що надані у [12].

Перехідні процеси, що виникають у плазмі, поширюються зі швидкістю набагато меншою за швидкість поширення світла у вакуумі, що є фізичним змістом наближення $x \ll ct$, яке можна використати для аналізу (20) і (23). Також варто зазначити про великий час тривалості перехідних процесів.

Можна отримати ще один вид запису розв'язку задачі, якщо у (20) і (23) розписати інтеграли наступним чином:

$$\int_x^{ct} \dots d\xi = \int_0^{ct} \dots d\xi - \int_0^{x} \dots d\xi. \qquad (24)$$

Виконавши дію (24) та використавши формули косинусу та синусу різниці, можна отримати табличні інтеграли ($\int_0^{ct} \dots d\xi$), які є у [19], та інтеграли ($\int_0^{x} \dots d\xi$), які у випадку $x \ll ct$ можна привести до сум по похідним функцій

Бесселя. Один з інтегралів з межею інтегрування по ct був зазначений вище – (16). А інший має наступний вигляд [23]:

$$\int_0^{ct} sin\left(k\sqrt{\varepsilon}\xi\right)\mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-\xi^2}\right)d\xi$$
$$= \frac{1}{k}\left\{-\cos(\omega t)+\mathcal{J}_0\left(\omega_{pl}t\right)+2\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{1+\sqrt{\varepsilon}}\right]^m \mathcal{J}_{2m}(\omega_{pl}t)\right\}. \quad (25)$$

В інтегралах $(\int_0^x \dots d\xi)$ у випадку $x \ll ct$ можна розкласти функцію Бесселя у ряд Тейлора, як зазначено у [20]:

$$\mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-\xi^2}\right) \approx \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{\omega_{pl}\xi^2}{2c^2t}\right)^m \mathcal{J}_0{}^{(m)}(\omega_{pl}t). \quad (26)$$

Тоді похідні функції Бесселя можна винести за знак інтегрування і отримати табличні інтеграли [23] зі степеневою та тригонометричними функціями. Маємо наступні інтеграли:

$$\int_0^{x} cos\left(k\sqrt{\varepsilon}\xi\right)\mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-\xi^2}\right)d\xi = \sin\left(k\sqrt{\varepsilon}x\right)\Sigma_1 + cos\left(k\sqrt{\varepsilon}x\right)\Sigma_2, \quad (27)$$

$$\int_0^{x} sin\left(k\sqrt{\varepsilon}\xi\right)\mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-\xi^2}\right)d\xi = \sin\left(k\sqrt{\varepsilon}x\right)\Sigma_2 - cos\left(k\sqrt{\varepsilon}x\right)\Sigma_1$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m)!}{m!}\frac{1}{\left(k\sqrt{\varepsilon}\right)^{2m+1}}\left(\frac{\omega_{pl}}{2c^2t}\right)^m \mathcal{J}_0{}^{(m)}(\omega_{pl}t). \quad (28)$$

Де Σ_1та Σ_2 мають наступний вигляд:

$$\Sigma_1 = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\left(k\sqrt{\varepsilon}\right)^{2m+1}}\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}\mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-x^2}\right), \quad (29)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\left(k\sqrt{\varepsilon}\right)^{2m+2}}\frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m+1}}\mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-x^2}\right). \quad (30)$$

Підставимо отримані результати до (20) та, виконавши математичні операції, отримаємо наступний вираз для електричного поля:

$$E_{2z}(x,t) \cong \frac{2}{1+\sqrt{\varepsilon}} sin(\omega t - kx)$$
$$- \frac{2}{(1-\varepsilon)^{1/2}} \left(\frac{ct-x}{ct+x}\right)^{1/2} \mathcal{J}_1\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-x^2}\right)$$
$$- \frac{2}{(1-\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\left(k\sqrt{\varepsilon}\right)^{2m+1}} \frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m+1}} \mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-x^2}\right) \quad (31)$$
$$- \frac{2}{1-\varepsilon} \frac{\partial}{\omega \partial t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\left(k\sqrt{\varepsilon}\right)^{2m}} \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} \mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-x^2}\right).$$

Виконаємо аналогічні процедури для магнітного поля і отримаємо наступне:

$$B_{2y}(x,t) \cong \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}} sin(\omega t - kx)$$
$$+ \frac{2}{(1-\varepsilon)^{1/2}} \left(\frac{ct-x}{ct+x}\right)^{1/2} \mathcal{J}_1\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-x^2}\right)$$
$$+ \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{(1-\varepsilon)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\left(k\sqrt{\varepsilon}\right)^{2m+1}} \frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m+1}} \mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-x^2}\right) \quad (32)$$
$$+ \frac{2}{1-\varepsilon} \frac{\partial}{\omega \partial t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\left(k\sqrt{\varepsilon}\right)^{2m}} \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} \mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-x^2}\right).$$

Вище було зазначено про схожість виразів для електричного та магнітного полів у точних розв'язках, тепер у наближених формулах (при $x \ll ct$) спостерігається теж саме. Маємо члени, що відповідають за плоску монохроматичну хвилю – (33) і (34) для електричного і магнітного поля відповідно, і члени, що відповідають саме за перехідні процеси у плазмі – два з яких цілком ідентичні, а третій член відрізняється на коефіцієнт, що дорівнює діелектричній проникності плазми.

Запишемо окремо вирази для плоских хвиль, індекс p означає плоску (*plane*) хвилю:

$$E_{2z}^{p}(x,t) \cong \frac{2}{1+\sqrt{\varepsilon}} sin(\omega t - kx), \quad (33)$$

$$B_{2y}^{p}(x,t) \cong \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}} sin(\omega t - kx). \tag{34}$$

Вирази (33) і (34) описують плоску хвилю при $t \to \infty$, при цьому інші члени з функціями Бесселя не дають внесок у (31) і (32). Амплітуди отриманих плоских хвиль відповідають вже відомим [12].

Для спрощення аналізу членів, що відповідають за перехідні процеси, можна використати наближення $\omega_{pl}t \gg 1$ або $\omega t \gg 1$, що означає великий час тривалості перехідних процесів у плазмі. Перепишемо наближення у наступному вигляді:

$$x \ll ct \Leftrightarrow \frac{kx}{\omega t} \ll 1, \tag{35}$$

$$\omega t \gg 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\omega t} \ll 1. \tag{36}$$

Використавши наближення (35), (36) і рекурентні співвідношення функцій Бесселя можна легко обірвати нескінченні ряди наступним чином:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\left(k\sqrt{\varepsilon}\right)^{2m+1}} \frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m+1}} \mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2 - x^2}\right) \\ &\qquad \approx \frac{(1-\varepsilon)^{1/2}}{\varepsilon} \frac{kx}{\omega t}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{kx}{\omega t}\right)^2\right\} \mathcal{J}_1\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2 - x^2}\right) \\ &\qquad + \frac{3(1-\varepsilon)}{\varepsilon^2} \frac{kx}{\omega t} \frac{1}{\omega t}\left\{1 + \frac{3}{2}\left(\frac{kx}{\omega t}\right)^2\right\} \mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2 - x^2}\right) \\ &\qquad - \frac{6(1-\varepsilon)^{1/2}}{\varepsilon^2} \frac{kx}{\omega t} \frac{1}{(\omega t)^2} \mathcal{J}_1\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2 - x^2}\right) \\ &\qquad + \frac{(1-\varepsilon)^{3/2}}{\varepsilon^2}\left(\frac{kx}{\omega t}\right)^3 \mathcal{J}_1\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2 - x^2}\right), \end{aligned} \tag{37}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\omega\partial t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\left(k\sqrt{\varepsilon}\right)^{2m}}\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}\mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-x^2}\right)$$

$$\approx -\frac{(1-\varepsilon)^{1/2}}{\varepsilon}\mathcal{J}_1\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-x^2}\right)$$

$$-\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^2}\frac{1}{\omega t}\left\{1+5\left(\frac{kx}{\omega t}\right)^2\right\}\mathcal{J}_0\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-x^2}\right) \qquad (38)$$

$$-\frac{(2-\varepsilon)(1-\varepsilon)^{1/2}}{2\varepsilon^2}\left(\frac{kx}{\omega t}\right)^2\mathcal{J}_1\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-x^2}\right)$$

$$+\frac{2(1-\varepsilon)^{1/2}}{\varepsilon^2}\frac{1}{(\omega t)^2}\left\{1+\frac{11}{2}\left(\frac{kx}{\omega t}\right)^2\right\}\mathcal{J}_1\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-x^2}\right).$$

Для того, щоб перейти від функції Бесселя до тригонометричних функції, скористаємося (35) і (36). Такі наближення дають змогу використати асимптотичні наближення функцій Бесселя при $z \to \infty$, що наведені у [24]:

$$\mathcal{J}_0(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{z^{1/2}}\left\{1-\frac{9}{128z^2}\right\}cos\left(z-{\pi}/{4}\right)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{8z^{3/2}}sin\left(z-{\pi}/{4}\right), \qquad (39)$$

$$\mathcal{J}_1(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{z^{1/2}}\left\{1+\frac{15}{128z^2}\right\}sin\left(z-{\pi}/{4}\right)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{3}{8z^{3/2}}cos\left(z-{\pi}/{4}\right). \qquad (40)$$

Тепер можна отримати зручні вирази електричного (36) та магнітного (37) полів при асимптотичній поведінці аргументів для подальшого аналізу і знаходження часу перехідних процесів:

$$E_{2z}(x,t) \cong \frac{2}{1+\sqrt{\varepsilon}}sin\left(\omega t-k\sqrt{\varepsilon}x\right)$$

$$-\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{(1-\varepsilon)^{1/4}}{\varepsilon}\frac{1}{(\omega t)^{1/2}}\left\{\frac{kx}{\omega t}-\left(\frac{kx}{\omega t}\right)^2+\frac{3\varepsilon+4}{4\varepsilon}\left(\frac{kx}{\omega t}\right)^3\right\} \qquad (41)$$

$$* \, sin\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2-x^2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

$$B_{2y}(x,t) \cong \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}} sin\big(\omega t - k\sqrt{\varepsilon}x\big)$$
$$- \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{(1-\varepsilon)^{1/4}}{\varepsilon} \frac{1}{(\omega t)^{1/2}} \left\{ \left(\frac{kx}{\omega t}\right)^2 - \left(\frac{kx}{\omega t}\right)^3 \right\} \tag{42}$$
$$* \, sin\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2 - x^2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

У виразах (41) і (42) було збережено тільки домінуючі терми по степеням малих параметрів (35) і (36), але цього достатньо для подальшого аналізу і знайдення тривалості перехідних процесів з достатньо великою точністю.

Маючи наближені вирази для електричного та магнітного поля, можемо знайти вектор Пойнтінга по відомій формулі, зберігаючи тільки домінуючі терми, які залишили у виразах для електричного (41) і магнітного (42) полів:

$$S_{2x}(x,t) \cong \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{\pi(1+\sqrt{\varepsilon})} \Bigg[\frac{1}{1+\sqrt{\varepsilon}} sin^2\big(\omega t - k\sqrt{\varepsilon}x\big)$$
$$- \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1-\varepsilon)^{1/4}}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{(\omega t)^{1/2}} \Bigg\{ \frac{kx}{\omega t} + \frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{kx}{\omega t}\right)^2 \tag{43}$$
$$+ \frac{3\varepsilon + 4 - 4\sqrt{\varepsilon}}{4\varepsilon} \left(\frac{kx}{\omega t}\right)^3 \Bigg\} * sin\left(\frac{\omega_{pl}}{c}\sqrt{c^2t^2 - x^2} - \frac{\pi}{4}\right) \Bigg].$$

4. ТРИВАЛІСТЬ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

Використовуючи (41)–(43), можна отримати залежність часу перехідних процесів від інших параметрів задачі. При отриманні наближених формул було збережено доданки другого порядку малості за параметром (35).

Введемо параметр η – відхилення амплітуди електромагнітної хвилі у плазмі від відповідного значення амплітуди плоскої хвилі. Для зручності віднормуємо час і координату по періоду хвилі у вакуумі і довжині хвилі у плазмі відповідно:

$$T \equiv \frac{2\pi}{\omega}, \tag{44}$$

$$\lambda_{pl} \equiv \frac{2\pi}{k\sqrt{\varepsilon}}. \tag{45}$$

Зробивши нормування (44) і (45), знайдемо залежність часу перехідних процесів від інших аргументів. Для електричного поля і вектора Пойнтінга зручніше виразити значення координати від часу, а для магнітного поля можна виразити як час через координату, так і координату через час.

Для електричного поля:

$$\frac{x}{\lambda_{pl}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\left(\frac{t}{T}\right)\left\{1-\left(1-\frac{4\pi\varepsilon\eta}{(1+\sqrt{\varepsilon})(1-\varepsilon)^{1/4}}\left(\frac{t}{T}\right)^{1/2}\right)^{1/2}\right\}. \tag{46}$$

Для магнітного поля:

$$\frac{t}{T} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{(1+\sqrt{\varepsilon})(1-\varepsilon)^{1/4}}{\pi\eta}\left(\frac{x}{\lambda_{pl}}\right)^{2}\right)^{2/5}. \tag{47}$$

Для вектора Пойнтінга:

$$\frac{x}{\lambda_{pl}} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{1-\sqrt{\varepsilon}}\left(\frac{t}{T}\right)\left\{\left(1+\frac{4\pi\eta(1-\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon}}{(1+\sqrt{\varepsilon})(1-\varepsilon)^{1/4}}\left(\frac{t}{T}\right)^{1/2}\right)^{1/2}-1\right\}. \tag{48}$$

Фіксуючи різні комбінації параметрів, можна побудувати графічну залежність часу перехідних процесів від відстані від межі розділу вакуум-плазма. Виберемо, наприклад, параметри наступним чином: для η=0.02 (це означає, що амплітуда «поправочного» доданку, що відповідає перехідним процесам, складає 2% від амплітуди плоскої хвилі, яка формується у плазмі протягом перехідних процесів); для фіксованого значення η виберемо набір з кількох значень діелектричної проникності плазми наступним чином – $\varepsilon=\{0.16, 0.25, 0.36, 0.64\}$.

Побудуємо графіки залежності нормованого на період падаючої хвилі часу перехідних процесів від нормованої на довжину хвилі у плазмі координати для вищезазначеного випадку для електричного (Рисунок 2), магнітного (Рисунок 3) полів та вектора Пойнтінга (Рисунок 4):

З отриманих вище графіків (Рисунки 2–4) можна зробити наступні висновки: на формування плоскої хвилі на більших відстанях треба більше часу; плоска хвиля у плазмі з більшою діелектричною проникністю формується за менший час.

Використовуючи формули (46)–(48), можна отримати графіки залежності часу перехідних процесів і від інших параметрів (наприклад, від діелектричної проникності при фіксованих значеннях координати для фіксованого значення відношення амплітуд η). Також можна отримати залежність відхилення амплітуди електромагнітної хвилі у плазмі від відповідного значення амплітуди плоскої хвилі від часу для фіксованої діелектричної проникності для характерних значень нормованої координати.

Наведемо графік саме для останнього випадку для електричного (Рисунок 5), магнітного (Рисунок 6) полів та вектора Пойнтінга (Рисунок 7): залежність відхилення амплітуди електромагнітної хвилі у плазмі від відповідного значення амплітуди плоскої хвилі від часу перехідних процесів для фіксованої діелектричної проникності плазми $\varepsilon=0.16$ при значеннях координати $x=\{1, 2, 5, 10\}\lambda_{pl}$.

На трьох наступних графіках по осі відхилення амплітуди електромагнітної хвилі у плазмі від відповідного значення амплітуди плоскої хвилі відкладені значення від *0* до *0.2* через те, що при $\eta>0.02$ амплітуда «поправочного» терму, що відповідає перехідним процесам істотна, тому хвилю, що буде поширюватися у плазмі не можна вважати плоскою.

З отриманих вище графіків (Рисунки 5–7) можна зробити наступні висновки: електромагнітна хвиля у плазмі буде тим більш наближена до плоскої хвилі, чим більше пройде часу. При часах більших за 200 періодів падаючої хвилі відхилення електромагнітної хвилі від плоскої буде складати менше 5% на відстанях до 10 довжин хвиль у плазмі. Результат відповідає існуючим теоріям – при $t \to \infty$ відхилення від плоскої хвилі майже не буде.

Використовуючи (46)–(48) можна отримати графіки залежності й інших аргументів одне від одного при фіксуванні тих, чи інших параметрів.

5. ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ У ПЛАЗМІ

Використовуючи отримані формули (46)–(48), можна отримати тривалість перехідних процесів у періодах падаючої хвилі для різних параметрів задачі(це можна також дізнатись і з вищезазначених графіків). Отриману інформацію можна використати для отримання «структури» електромагнітної хвилі у плазмі (моделювання поширення хвилі у плазмі).

Наприклад, на відстані до п'яти довжин хвилі у плазмі від межі розділу вакуум-плазма у плазмі з діелектричною проникністю $\varepsilon=0.16$ з точністю у 95% для магнітного поля встановиться «стаціонарний режим» за $53T$, для електричного поля за $66T$, а для вектора Пойнтінга – за $87T$, де T – період падаючої хвилі. Тобто через час, що дорівнює п'ятдесяти трьом періодам падаючої хвилі магнітне поле на відстані до п'яти плазмових хвиль від межі розділу вакуум-плазма можна буде описувати плоскою хвилею; через шістдесят шість періодів – плоскою хвилею можна буде описувати при таких самих умовах електричне поле, а через вісімдесят сім – вектор Пойнтінга.

Знаючи тривалість перехідних процесів можна, використовуючи нормування (44)–(45), підставити значення часу у формули (20) і (23) або (41) і (42) та отримати залежність електричного і магнітного полів електромагнітної хвилі у плазмі від відстані від межі розділу вакуум-плазма.

Для вищезазначеного випадку (у плазмі з відхиленням амплітуди електромагнітної хвилі від відповідного значення амплітуди плоскої хвилі $\eta=0.05$ для плазми з діелектричною проникністю $\varepsilon=0.16$) побудуємо графіки поширення електромагнітної хвилі у плазмі при характерних часах для магнітного ($t=53T$) та електричного ($t=66T$) полів.

На графіку (Рисунок 9) видно загальну залежність електромагнітного поля від відстані від межі розділу вакуум-плазма. також видно, що на відстанях до п'яти плазмових довжин хвилі магніте поле є плоскою хвилею з точністю від 95% (графік не виходить за межі зафарбованого діапазону). На більших відстанях відхилення від плоскої хвилі для даного часу буде більше, ніж 5%.

Електричне поле за цей час ще не встигло «досягнути» плоскої хвилі – на відстанях до п’яти плазмових довжин хвилі графік виходить за межі зафарбованого діапазону.

Наведемо аналогічний графік для наступного характерного часу – шістдесят шість періодів падаючої хвилі. За такий час по отриманим формулам (46)–(48) і залежностям електричне поле на відстанях до п’яти плазмових довжин хвилі має бути плоскою хвилею з точністю від 95%

На рисунку 9 видно, що електричне поле на відстанях до п’яти плазмових довжин хвилі є плоскою хвилею з точністю від 95% (графік не виходить за межі зафарбованого діапазону). На більших відстанях відхилення від плоскої хвилі для даного часу буде більше, ніж 5%. Магнітне поле на відстанях до п’яти плазмових довжин хвилі з точністю від 95% можна було описувати плоскою хвилею ще при п’ятдесяти трьох періодах падаючої хвилі, тому при даних часах точність тільки збільшилась.

З отриманих графіків (Рисунки 8–9) видно, що при збільшені часу електромагнітна хвиля буде ще більше наближатися до плоскої хвилі, що добре узгоджується з уже існуючими теоріями при наближенні $t \to \infty$.

ВИСНОВКИ

Перехідне електромагнітне поле в однорідній плазмі було досліджено для випадку перпендикулярного падіння електромагнітної хвилі з вакууму на поверхню плазми. У дипломній роботі було отримано наступні результати:

1. Записано точні аналітичні вирази для електричного (20) та магнітного (23) полів у плазмі, які дозволяють обчислити електромагнітне поле у плазмі на будь-якій відстані від поверхні розподілу вакуум-плазма у будь-який момент часу;
2. Наведено наближені вирази для обчислення електричного поля (41), магнітного поля (42) та вектора Пойнтінга (43) у плазмі у квазістаціонарному наближені (35) і (36), коли електромагнітне поле у плазмі є близьким до електромагнітного поля плоскої хвилі;
3. Досліджено тривалість перехідних процесів у залежності від відстані від межі розподілу вакуум-плазма, діелектричної проникності плазми та відхилення амплітуди електромагнітного поля від амплітуди плоскої хвилі;
4. Досліджено процеси переносу електромагнітної енергії у плазмі та формування стаціонарного енергетичного потоку;
5. Числовими методами виконано перевірку отриманих аналітичних результатів. Продемонстровано повну відповідність аналітичного та числового розв'язків задачі.

Результати, отримані у дипломній роботі, будуть корисними, наприклад, для проведення діагностики плазми, в іоносферних та радарних дослідженнях, в технологічних процесах та у дослідженнях з термоядерного синтезу. Аналітичні формули вже активно використовуються для перевірки достовірності числових розрахунків. У дипломній роботі детально описано перехідні процеси для випадку $\omega > \omega_{pl}$. Випадки $\omega = \omega_{pl}$ та $\omega < \omega_{pl}$ потребують додаткових аналітичних досліджень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] J. Simpson, “ELF radar system proposed for localized D-region ionospheric anomalies”, IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, vol.3, no.4 (Oct. 2006), pp. 500–503.

[2] Pavlenko, D. Melnyk, Ye. Velizhanina, O. Trush, I. Girka, “Electromagnetic surface wave excitation and energy transport along a plane plasma boundary”, Problems of Atomic Science and Technology, vol.118 (2018), pp. 105-108.

[3] P.Aleynikov, N.Marushchenko. «3D full-wave computation of RF modes in magnetised plasmas», Computer Physics Communications, vol.241 (Aug. 2019), pp. 40-47.

[4] I. Pavlenko, I. Girka, O. Trush, D. Melnyk, Ye. Velizhanina “Plasma transient processes and plane wave formation in simulations by FDTD method”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol.67, no.11 (Nov. 2019), pp. 6957-6964.

[5] C. Case. “On transient wave propagation in a plasma”. Proceedings of the IEEE, vol.15, no.4 (Jul. 1965), pp. 730–731.

[6] C. Case. “Transient reflection and transmission of a plane wave normally incident upon a semi-infinite anisotropic plasma”. Physical Sciences Research Papers (July 1964), pp. 1–27.

[7] C. Knop. “Pulsed electromegnetic wave propagation in dispersive media”. IEEE Transactions on Antennas and Propagation AP-12 (Jul. 1964), pp. 494–496.

[8] R. Luebbers, F. Hunsberger, and K. Kunz. “A frequency-dependent finite-difference time-domain formulation for transient propagation in plasma”. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol.39, no.1 (Jan. 1991), pp. 29–34.

[9] J. Young. “A higher order FDTD method for EM propagation in a collisionless cold plasma”. IEEE Trans. Antennas Propag., vol.44, no.5 (Sep. 1996), pp. 1283–1289.

[10] E. Gamliel. “Direct integration 3-D FDTD method for single-species cold magnetized plasma”. IEEE Trans. Antennas Propag., vol.65, no.1 (Jan. 2017), pp. 295–308.

[11] J. Young. “A full finite difference time domain implementation for radio wave propagation in a plasma”. Radio Science, vol.29, no.6 (Dec. 1994), pp. 1513–1522.

[12] Н. Кролл, А. Трайвелпис. “Основы физики плазмы”. М.: Мир, 1975, p. 526.

[13] C. Knop. “Further comments on ’the transient phenomenon in an isotropic plasma without collision loss”. Proceedings of the IEEE, vol.53 (Jul. 1965), pp. 751–752.

[14] C. Knop. “On plasma diagnostics with electromagnetic pulses”. IEEE Transactions on Antennas and Propagation (Jul. 1965), pp. 647–649.

[15] H. Schmitt. “Plasma diagnostics with short electromagnetic pulses”. IEEE Transactions on Nuclear Science, vol.11 (Jan. 1964), pp. 125–136.

[16] D.-H. Lam. “A difference equation for transient signal propagation in cold homogeneous lossy isotropic plasmas”. Proceedings of the IEEE, vol.62 (Jan. 1974), pp. 1708–1709.

[17] J. Wait. “Propagation of pulses in dispersive media”. Radio Science, vol.69 (Nov. 1965), pp. 1387–1401.

[18] K. Oughstun. “Pulse propagation in a linear, causally dispersive medium”. Proceedings of the IEEE, vol.79 (Oct. 1991), pp. 1379–1390.

[19] P. Zablocky and N. Engheta. “Transients in chiral media with singleresonance dispersion”. J.Opt.Soc.Am.A, vol.10 (Apr.1993), pp. 740–758.

[20] A. Gurevich. “Penetration of an electromagnetic wave into a plasma with account of non-linearity”. Theoret. Phys., vol.21, no.2 (Aug. 1965), pp. 701–707.

[21] M. Liberman, A. Rakhimov. “Penetration of an electromagnetic wave into a plasma, taking nonlinearity into account”. Zh. Eksp. Teor. Fiz., vol.34, no.3 (Mar. 1972), pp. 1047–1056

[22] Б. М. Будак, А. А. Самарский и А. Н. Тихонов. “Сборник задач по математической физике”. М.: Наука, 1979, p. 42.

[23] I. Gradshteyn and I. Ryzhik. “Table of Integrals, Series, and Products”. Elsevier Academic Press, 2007, p. 1180.

[24] G.N.Watson, “A Treatise on the Theory of Bessel Functions”. Cambridge University Press, 1944, p. 799.