

Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Кафедра алгебри та геометрії

Методичні вказівки для розв'язування практичних завдань
з курсу

“Вища математика”

для студентів природничих спеціальностей

Ліщинський І.І.

Івано-Франківськ 2021

Дії над векторами в координатній формі.

Завдання 1

Дано точки $A(2; -1; -2)$, $B(-1; 0; 2)$, $C(1; 2; -3)$, $D(4; -2; 3)$. Знайти координати і довжини векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

Розв'язання. Як відомо з шкільного курсу геометрії, якщо відомі координати точок $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$, то щоб знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$ потрібно від координат кінця цього вектора відняти відповідні координати його початку. Тобто $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Тоді отримаємо: $\overrightarrow{AB}(-1 - 2; 0 - (-1); 2 - (-2)) = (-3; 1; 4)$; $\overrightarrow{BC}(2; 2; -5)$; $\overrightarrow{CD}(3; -4; 6)$; $\overrightarrow{DA}(-2; 1; -5)$.

Якщо для вектора $\vec{a}$ відомі його координати $\vec{a}(x; y; z)$, то його довжину можна обчислити за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Тоді отримаємо: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 1 + 16} = \sqrt{26}$; $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4 + 4 + 25} = \sqrt{33}$; $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{9 + 16 + 36} = \sqrt{61}$; $|\overrightarrow{DA}| = \sqrt{4 + 1 + 25} = \sqrt{30}$.

Завдання 2

Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють між собою кут $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, причому $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$. Обчислити:

1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $(2\vec{a} - \vec{b})(3\vec{a} + 2\vec{b})$.

Розв'язання. 1) Нам потрібно обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, коли відомі їх довжини та кут між ними. Використовуємо формулу (1) з лекції:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi = 2 \cdot 5 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -5.$$

2) Для розв'язання цього завдання спочатку розкриваємо дужки так само як і при множенні многочленів, а далі використовуємо властивості скалярного добутку векторів, зокрема такі: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ та $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

$$(2\vec{a} - \vec{b})(3\vec{a} + 2\vec{b}) = 6\vec{a} \cdot \vec{a} + 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{a} - 2\vec{b} \cdot \vec{b} = 6|\vec{a}|^2 + \vec{a}\vec{b} - 2|\vec{b}|^2 = 24 - 5 - 50 = -31.$$

Завдання 3

Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(5; 2; 1)$, $\vec{b}(-1; 4; 2)$; 2) $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

Розв'язання. 1) Використовуємо формулу (3) з лекції для скалярного добутку векторів заданих своїми координатами: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = -5 + 8 + 2 = 5$.

2) Знайдемо координати векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Як відомо базис у просторі утворюють будь які три не компланарні вектори. Зокрема вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$, які мають одиничну довжину, а їх напрям збігається з напрямом координатних осей Ox , Oy та Oz відповідно. Тоді за теоремою про розклад вектора за базисом, отримо $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$, де $\vec{a}(x; y; z)$. З викладеного вище маємо, що координатами вектора $\vec{a}$ є коефіцієнти біля векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$ у відповідному розкладі вектора.

Тому з умови маємо: $\vec{a}(2; -3; 1)$, $\vec{b}(1; 2; -5)$. Значить $\vec{a}\vec{b} = 2 - 6 - 5 = -9$.

Завдання 4

Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють між собою кут $\varphi = \frac{5\pi}{6}$, причому $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$. Обчислити:

1) $|\vec{a} \times \vec{b}|$; 2) $|(2\vec{a} - \vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})|$.

Розв'язання. 1) Використовуємо означення векторного добутку векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, а саме $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = 2 \cdot 5 \cdot \sin \frac{5\pi}{6} = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$.

2) Як і в завданні 2 спочатку розкриваємо дужки і використовуємо властивості векторного добутку векторів, зокрема $[\vec{a} \times \vec{b}] = -[\vec{b} \times \vec{a}]$, $[\vec{a} \times \vec{a}] = 0$.

Тоді отримаємо $\left| (2\vec{a} - \vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b}) \right| = \left| 6\vec{a} \times \vec{a} + 4\vec{a} \times \vec{b} - 3\vec{b} \times \vec{a} - 2\vec{b} \times \vec{b} \right| = 7 \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = 7 \cdot 5 = 35$.

Завдання 5.

Знайти векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(5; 2; 1)$, $\vec{b}(-1; 4; 2)$; 2) $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

Розв'язання. 1) Використовуємо формулу (7) з лекції для обчислення векторного добутку векторів

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}. \text{ Щоб обчислити останній визначник скористаємось розкладом}$$

визначника за першим рядком. В результат отримаємо:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = -11\vec{j} + 22\vec{k}.$$

$$2) \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 13\vec{i} + 11\vec{j} + 7\vec{k}.$$

Завдання 6.

Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}(5; 2; 1)$, $\vec{b}(-1; 4; 2)$ та $\vec{c}(-1; 2; 0)$. З'ясувати чи є ці вектори компланарними. У випадку не компланарності векторів вказати яку трійку векторів вони утворюють..

Розв'язання. Якщо відомі координати трьох векторів, то їх мішаний добуток обчислюється за

формулою $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$. Тому в нашому випадку маємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 4 + 4 - 20 = -22.$$

Оскільки $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = -22 \neq 0$, то дані вектори не є компланарними (не лежать в одній площині). Так як $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = -22 < 0$, то ці вектори утворюють ліву трійку векторів.

Завдання для самостійного розв'язування.

Завдання 1

Дано точки $A(1; 2; 0)$, $B(3; -2; 1)$, $C(0; -2; -3)$, $D(3; -1; 4)$ та $E(-2; 3; 2)$. Знайти:

1. координати і довжини векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$;
2. скалярні добутки $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$;
3. векторні добутки $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE}$;
4. мішані добутки $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC}$. Чи лежать точки A , B , C та D в одній площині?

Завдання 2

Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють між собою кут $\varphi = \frac{\pi}{3}$, причому $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$. Обчислити:

1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $(2\vec{a} - 3\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b})$; 3) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; 4) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 5) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$.

ГЕОМЕТРИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ СКАЛЯРНОГО, ВЕКТОРНОГО ТА МІШАНОГО ДОБУТКУ ВЕКТОРІВ

Завдання 1

Знайти кут між векторами $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ та $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$.

Розв'язання. Кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ можна обчислити за формулою $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, де $\vec{a} \cdot \vec{b}$

– скалярний добуток векторів, $|\vec{a}|$ та $|\vec{b}|$ – довжини векторів.

В нашому випадку маємо: $\vec{a}(2; -3; 1)$, $\vec{b}(1; 4; -5)$. Обчислюємо скалярний добуток та довжини даних векторів: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 12 - 5 = -15$; $|\vec{a}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$; $|\vec{b}| = \sqrt{1 + 16 + 25} = \sqrt{42}$.

Тоді отримаємо $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-15}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{42}} = -\frac{15}{\sqrt{14 \cdot 3 \cdot 14}} = -\frac{15}{14\sqrt{3}} = -\frac{5\sqrt{3}}{14}$ звідси

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{5\sqrt{3}}{14}\right) = \pi - \arccos \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

Завдання 2

Трикутник ABC задано вершинами $A(0; -1; 2)$, $B(2; 0; 6)$, $C(-3; 2; 3)$. Знайти його внутрішній кут при вершині A .

Розв'язання. Внутрішній кут трикутника можна розглядати, як кут між векторами, з початком у цій вершині. В даному випадку $\angle A$ – це кут між векторами $\vec{AB}(2; 1; 4)$ та $\vec{AC}(-3; 3; 1)$. Оскільки $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1$; $|\vec{AB}| = \sqrt{21}$; $|\vec{AC}| = \sqrt{19}$, то $\cos \angle A = \frac{1}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{19}} = \frac{1}{\sqrt{399}}$ звідси $\angle A = \arccos \frac{1}{\sqrt{399}}$.

Завдання 3

Знайти площу паралелограма побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ та $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$.

Розв'язання. Згідно властивості 6 векторного добутку векторів, площа паралелограма, побудованого векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, обчислюється за формулою $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$, де $\vec{a} \times \vec{b}$ – векторний добуток векторів.

Оскільки $\vec{a}(2; -3; 1)$, $\vec{b}(1; 4; -5)$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 11\vec{i} + 11\vec{j} + 11\vec{k}$. Звідси маємо

$\vec{a} \times \vec{b}(11; 11; 11)$. Тоді $S = \sqrt{11^2 + 11^2 + 11^2} = 11\sqrt{3}$ (кв.од.довж.).

Завдання 4.

Трикутник ABC задано вершинами $A(0; -1; 2)$, $B(2; 0; 6)$, $C(-3; 2; 3)$. Знайти довжину висоти, проведеної з вершини B .

Розв'язання. Позначимо потрібну висоту через BK . Обчислимо площу трикутника ABC , як площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{AB}(2; 1; 4)$ та $\vec{AC}(-3; 3; 1)$.

Спочатку обчислюємо векторний добуток цих векторів: $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -11\vec{i} - 16\vec{j} + 9\vec{k}$.

Тоді $S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{121 + 256 + 81} = \frac{1}{2} \sqrt{458}$ (кв.од.довж.).

З іншого боку (за відомою формулою з шкільного курсу геометрії) $S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, де a – сторона трикутника, h_a – висота, проведена до цієї сторони. Звідси отримаємо: $h_a = \frac{2S}{a}$.

$$\text{Оскільки } AC = |\vec{AC}| = \sqrt{19}, \text{ то } BK = \frac{2S_{\Delta}}{AC} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{458}}{\sqrt{19}} = \frac{\sqrt{458}}{\sqrt{19}} = \sqrt{\frac{458}{19}} \text{ (од. довж.)}.$$

Завдання 5.

Знайти об'єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ та $\vec{c} = 4\vec{i} - 3\vec{k}$.

Розв'язання. Об'єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$, можна обчислити за формулою $V = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|$, де $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ – мішаний добуток векторів.

$$\text{Оскільки } \vec{a}(2; -3; 1), \vec{b}(1; 4; -5), \vec{c}(4; 0; -3), \text{ то } \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -24 + 60 - 16 - 9 = 11.$$

$$\text{Тоді } V = \frac{1}{6} \cdot |11| = \frac{11}{6} \text{ (куб.од. довж.)}.$$

Завдання 6.

Піраміду $ABCD$ задано вершинами $A(0; -1; 2)$, $B(2; 0; 6)$, $C(-3; 2; 3)$, $D(2; 1; -4)$. Обчислити довжину висоти піраміди, проведеної з вершини D .

Розв'язання. Як відомо з шкільного курсу геометрії об'єм піраміди обчислюється за формулою $V = \frac{1}{3} S_o \cdot h$, де S_o – площа основи піраміди, h – довжина висоти, проведеної до цієї основи. З цієї формули знайдемо довжину висоти: $h = \frac{3V}{S_o}$.

З завдання 4 маємо $S_o = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{458}$. Об'єм піраміди обчислимо, як об'єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{AB}(2; 1; 4)$, $\vec{AC}(-3; 3; 1)$ та $\vec{AD}(2; 2; -6)$.

$$\text{Маємо } \vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -36 - 24 + 2 - 24 - 4 - 18 = -104. \text{ Тому } V = \frac{1}{6} \cdot |-104| = \frac{52}{3}$$

$$\text{Отже, } h = \frac{3 \cdot \frac{52}{3}}{\frac{1}{2} \sqrt{458}} = \frac{104}{\sqrt{458}} \text{ (од. довж.)}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

- Обчислити кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ та площу паралелограма, побудованого на цих векторах, якщо:
 - $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 10\vec{k}$; 2) $\vec{a}(-5; -6; 1)$, $\vec{b}(3; 7; 0)$
- Знайти висоти трикутника ABC з вершинами в точках $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 3; 0)$, $C(-2; -3; -5)$.
- Площа трикутника дорівнює $\frac{\sqrt{35}}{2}$, а дві його вершини лежать у точках $A(2; -1; 3)$ та $B(1; 2; 1)$. Знайти координати вершини C , якщо вона лежить на осі Oz .
- Задано координати вершин піраміди $ABCD$: $A(3; -2; 1)$, $B(0; -1; 2)$, $C(3; -1; 4)$, $D(2; 3; 2)$. Знайти:
 - Кут $\varphi = \angle BAC$;
 - Площу основи ΔABC ;
 - Об'єм піраміди $ABCD$;
 - Довжину висоти DO піраміди.

Практичне заняття Системи лінійних рівнянь

1. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -5x + 6y = -2 \end{cases}; \text{ б) } \begin{cases} 2x + 3y - z = 8 \\ x - y + 2z = -1 \\ 2x + 3y + z = 6 \end{cases}$$

Розв'язання: а) Обчислюємо визначники Δ , Δ_1 , Δ_2 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 20 = -2, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 5 = -1.$$

За формулами Крамера: $x = \frac{-2}{-2} = 1$, $y = \frac{-1}{-2} = 0,5$.

б) Обчислюємо визначники Δ , Δ_1 , Δ_2, Δ_3 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 3 + 12 - 2 - 12 - 3 = -10.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 3 + 36 - 6 - 48 + 3 = -20.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 6 + 32 - 2 - 24 - 8 = -10.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -12 + 24 - 6 + 16 + 6 - 18 = 10.$$

За формулами Крамера: $x = \frac{-20}{-10} = 2$, $y = \frac{-10}{-10} = 1$, $z = \frac{10}{-10} = -1$.

2. Розв'язати системи лінійних рівнянь матричним методом:

$$\text{а) } \begin{cases} 6x + 7y = -13 \\ 5x - 19y = 14 \end{cases}; \text{ б) } \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 7 \\ x - y = -1 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

Розв'язання:

а) Записуємо систему рівнянь у матричній формі $AX = B$, де $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & -19 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -13 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Знайдемо матрицю A^{-1} : $\Delta A = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 5 & -19 \end{vmatrix} = -114 - 35 = -149$,

$A_{11} = -19$, $A_{12} = -5$, $A_{21} = -7$, $A_{22} = 6$. Тоді $A^{-1} = -\frac{1}{149} \begin{pmatrix} -19 & -7 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ і за формулою (9)

маємо:

$X = -\frac{1}{149} \begin{pmatrix} -19 & -7 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 14 \end{pmatrix} = -\frac{1}{149} \begin{pmatrix} 247 - 98 \\ 65 + 84 \end{pmatrix} = -\frac{1}{149} \begin{pmatrix} 149 \\ 149 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Отже, $x = -1$, $y = -1$.

б) Записуємо систему рівнянь у матричній формі $AX = B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Тоді маємо:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 6 - 3 - 2 = -1.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5, \\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

$$\text{Тоді } A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 4 - 9 \\ 7 + 5 - 9 \\ -7 - 6 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x = 2$, $y = 3$, $z = -1$.

$$3. \quad \text{Розв'язати систему лінійних рівнянь} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7 \end{cases} \quad \text{методом Гауса.}$$

Розв'язання: Проведемо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці системи:

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{EP1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{EP2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Зауваження: 1) При *EP1* виконали такі дії: а) перший рядок помножили на число (-3) і додали до другого рядка; б) перший рядок помножили на число (-2) і додали до третього рядка; в) від четвертого рядка відняли перший рядок.

2) При *EP2* виконали такі дії: від третього та четвертого рядків відняли другий рядок.

З останньої матриці маємо таку систему рівнянь: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 10 \end{cases}$. З другого рівняння

системи отримаємо: $x_2 = 2 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4$. Підставляємо знайдене значення змінної x_2 в перше рівняння і знаходимо: $x_1 = 1 + \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4$.

$$\text{Отже, загальний розв'язок системи має вигляд} \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_2 = 2 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 \\ x_3, x_4 \in R \end{cases}$$

5. Задачі для самостійного розв'язування

1. Розв'язати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера та матричним методом:

$$\text{a) } \begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}, \text{ б) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}.$$

2. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гауса:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}, \text{ б) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}, \text{ в) } \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = -1 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases},$$

$$\text{г) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}.$$

ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

Завдання 1

Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$. Знайти: 1) $A+B$; 2) $B-A$; 3) $2A-3B$.

Розв'язання. 1) Як відомо з лекційного матеріалу, додавати (віднімати) можна лише матриці однакового розміру і щоб знайти суму чи різницю матриць потрібно додати або відняти їхні відповідні елементи.

$$\text{Тому } A+B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & -1+3 & 4-4 \\ -3+2 & 1+1 & 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$2) B-A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

3) Спочатку потрібно матрицю A помножити на число 2, а матрицю B – на 3. Для цього потрібно кожен елемент матриці помножити на відповідне число. В результаті отримаємо:

$$A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & -1 \cdot 2 & 4 \cdot 2 \\ -3 \cdot 2 & 1 \cdot 2 & 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -12 \\ 6 & 3 & -15 \end{pmatrix}.$$

$$2A-3B = \begin{pmatrix} 7 & -11 & 20 \\ -12 & -1 & 15 \end{pmatrix}.$$

Завдання 2

$$\text{Знайти добутки } AB \text{ та } BA, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. а) Щоб знайти добуток AB спочатку потрібно перевірити чи матриця A буде узгодженою з матрицею B . Матриця A має розмірність 2×3 (два рядки і 3 стовпці), а матриця B – 3×2 . Оскільки число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B , то матриця A є узгодженою з B . Тому добуток AB існує. Кожен елемент добутку AB дорівнює сумі добутків рядка матриці A та відповідних елементів стовпця матриці B :

$c_{11} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 + 4 \cdot (-4) = -21$ (елементи першого рядка матриці A помножили на відповідні елементи першого стовпця матриці B і знайшли суму цих добутків);

$c_{12} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 4 \cdot (-5) = -17$ (елементи першого рядка матриці A помножили на відповідні елементи другого стовпця матриці B і знайшли суму цих добутків);

$c_{21} = -3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-4) = 6$ (елементи другого рядка матриці A помножили на відповідні елементи першого стовпця матриці B і знайшли суму цих добутків);

$c_{22} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-5) = -5$ (елементи другого рядка матриці A помножили на відповідні елементи другого стовпця матриці B і знайшли суму цих добутків).

$$\text{Тоді зі знайдених елементів утворюємо матрицю } AB = \begin{pmatrix} -21 & -17 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

б) Матриця B є узгодженою з матрицею A . Тому добуток BA теж існує. Виконавши множення елементів рядків матриці B на відповідні елементи стовпців матриці A , отримаємо:

$$c_{12} = 1 + 2 = 3; \quad c_{11} = -2 - 6 = -8; \quad c_{13} = -4 + 0 = -4;$$

$$c_{21} = 6 - 3 = 3; \quad c_{22} = -3 + 1 = -2; \quad c_{23} = 12 + 0 = 12;$$

$$c_{31} = -8 + 15 = 7; \quad c_{32} = 4 - 5 = -1; \quad c_{33} = -16 + 0 = -16;$$

$$\text{Отже, } BA = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -4 \\ 3 & -2 & 12 \\ 7 & -1 & -16 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного розв'язування

1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ знайти:

1) $A+B$; 2) $A-B$; 3) $3A-4B$; 4) $-2A+B$.

2. Знайти добутки AB та BA , якщо:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix};$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ знайти:

1) $AB-BA$; 2) $AB-3A+4B$; 3) A^2 (**Вказівка.** Використати рівність $A^2 = A \cdot A$).

ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ.

I. Теоретичний матеріал

Нехай A – деяка квадратна матриця порядку n , ΔA – визначник цієї матриці.

Матриця A називається не виродженою, якщо її визначник $\Delta A \neq 0$. Якщо $\Delta A = 0$, то матриця A називається виродженою.

Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A , якщо виконується рівність $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де E – одинична матриця порядку n .

Теорема. Квадратна матриця A має обернену тоді і тільки тоді, коли вона не вироджена. Обернена матриця для даної матриці єдина і її можна знайти за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \text{ де } \Delta A - \text{визначник цієї матриці, } A_{ij} - \text{алгебраїчні доповнення}$$

елементів матриці A .

II. Приклади розв'язування задач

1. Знайти матрицю, обернену до матриці A :

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

- 1) Обчислюємо визначник матриці A та алгебраїчні доповнення її елементів:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 6 - 3 - 2 = -1;$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

З формули, наведеної в теоремі, у випадку квадратної матриці порядку 3, отримаємо формулу для знаходження оберненої матриці до матриці 3 порядку:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Тоді в нашому випадку матимемо:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Примітка: Зверніть увагу на те, що при використанні формули з теореми, ми алгебраїчні доповнення елементів першого рядка матриці A записуємо у перший стовпчик оберненої матриці, алгебраїчні доповнення елементів другого рядка матриці A – у другий стовпчик, і т.д.

2) У випадку квадратної матриці 2 порядку формула для знаходження оберненої матриці

$$\text{буде мати вигляд: } A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Для даної матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ маємо:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{11} = 4; \quad A_{12} = -3; \quad A_{21} = -2; \quad A_{22} = -1.$$

$$\text{Отже, } A^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Розв'язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Розв'язання: Введемо позначення $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді отримаємо рівняння вигляду $A \cdot X = B$ (1). Таке рівняння називають лінійним матричним рівнянням.

Щоб розв'язати рівняння (1) домножимо його обидві частини на матрицю A^{-1} зліва. В результаті отримаємо рівняння: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$ (2).

Оскільки за означенням оберненої матриці $A^{-1} \cdot A = E$, а за властивістю одиничної матриці $E \cdot X = X$, то з рівняння (2), отримаємо: $X = A^{-1} \cdot B$ (3).

$$\text{Знайдемо обернену до матриці } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Маємо: } \Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{11} = 3; \quad A_{12} = -1; \quad A_{21} = -5; \quad A_{22} = 2.$$

$$\text{Тоді } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ З формули (3) отримаємо: } X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В останній рівності виконуємо множення матриць і в результаті отримаємо: } X = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Примітка: 1) У випадку матричного рівняння $X \cdot A = B$ (4) його розв'язок шукають за формулою $X = B \cdot A^{-1}$.

2) У випадку матричного рівняння $A \cdot X \cdot B = C$ (5) його розв'язок шукають за формулою $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

3) Якщо у рівняннях (1) та (4) матриця A немає оберненої, то рівняння немає розв'язків; якщо в рівняння (5) одна з матриць A або B немає оберненої, то рівняння немає розв'язків.

РАНГ МАТРИЦІ

I. Теоретичний матеріал і приклади розв'язування задач

Нехай A – деяка матриця розмірності $m \times n$. Виділимо в ній довільні k рядків і k стовпців, де число k не більше кожного з чисел m і n ($k \leq m$, $k \leq n$).

Визначник порядку k , утворений з елементів, що стоять на перетині виділених k рядків і k стовпців матриці A , називається **мінором** k -го порядку матриці A . Оскільки для матриці A мінорів k -го порядку може бути декілька, то позначатимемо мінор k -го порядку так: M_{ki} , де k – порядок мінора, i – номер відповідного мінора.

Приклад. Знайти мінори всіх можливих порядків матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$

Розв'язання: Матриця A має розмірність 2×4 . Тому число $k=1$ або $k=2$. Якщо $k=1$, то мінорами 1-го порядку матриці A є кожен елемент цієї матриці.

Якщо $k=2$, то мінорами 2-го порядку будуть такі визначники:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11 \text{ (у матриці } A \text{ виділили перші 2 рядки та перші 2 стовпці);}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11 \text{ (у матриці } A \text{ виділили перші 2 рядки та перший і третій стовпці);}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 \text{ (у матриці } A \text{ виділили перші 2 рядки та перший і четвертий стовпці);}$$

$$M_{24} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 11 \text{ (у матриці } A \text{ виділили перші 2 рядки та другий і третій стовпці);}$$

$$M_{24} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 11 \text{ (у матриці } A \text{ виділили перші 2 рядки та другий і третій стовпці);}$$

$$M_{25} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 17 \text{ (у матриці } A \text{ виділили перші 2 рядки та другий і четвертий стовпці);}$$

$$M_{26} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 20 \text{ (у матриці } A \text{ виділили перші 2 рядки та третій і четвертий стовпці).}$$

Рангом матриці A називається найбільший з її порядків ненульових мінорів. Позначається $r(A)$ або $\text{rang}(A)$.

Ранг матриці A має такі властивості:

1. $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$
2. $r(A) = 0$, якщо $A = O$ (A – нульова матриця).
3. Для квадратної матриці n -го порядку $r(A) = n$ тоді і тільки тоді, коли матриця A – не вироджена.

Приклад 1. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Розв’язання: Оскільки матриця A не є нульовою матрицею, то її ранг буде $1 \leq r(A) \leq 4$.

Знайдемо довільний мінор 2 порядку: $M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7$ (у матриці виділили перші 2 рядки і перші 2 стовпці). Оскільки $M_{21} \neq 0$, то ранг матриці буде $2 \leq r(A) \leq 4$.

Зауваження Якщо б вийшло, що $M_{21} = 0$, то потрібно розглядати інший мінор 2 порядку і перевіряти чи він дорівнює 0 чи ні і т.д. Такий розгляд мінорів другого порядку триває до появи першого ненульового мінора. Якщо всі мінори другого порядку дорівнюють 0, то $r(A) = 1$.

Обчислюємо мінори третього порядку. Оскільки у матриці A перший і третій рядок є однаковими, то розглядаючи мінори третього порядку, які утворюються на перетині перших трьох рядків і довільних трьох стовпців, то за властивістю визначників отримаємо, що всі вони дорівнюють 0. Тому виділятимемо у матриці A перший, другий та четвертий рядок і довільні 3 стовпці. Можливі такі випадки:

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \text{ (у матриці } A \text{ виділили перший, другий та четвертий рядок та перші три стовпці);}$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \text{ (у матриці } A \text{ виділили перший, другий та четвертий рядок та перший,}$$

другий і четвертий стовпці);

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \text{ (у матриці } A \text{ виділили перший, другий та четвертий рядок та другий,}$$

третій і четвертий стовпці).

Самостійно переконатися, що $M_{31} = M_{32} = M_{33} = 0$.

Отже, $r(A) = 2$.

Зауваження. З прикладу 1 бачимо, що знаходження рангу матриці за означенням є громіздким і вимагає обчислення великої кількості визначників. Тому на практиці для знаходження рангу матриці застосовують метод елементарних перетворень її рядків, після яких стає очевидним ранг матриці. До таких перетворень належать:

- 1) перестановка місцями будь яких двох рядків;
- 2) множення (ділення) будь якого рядка на число відмінне від нуля;
- 3) додавання (віднімання) до елементів будь якого рядка відповідних елементів іншого рядка помножених на одне й те саме відмінне від 0 число.

При таких перетвореннях матриці її ранг не змінюється.

Приклад 2. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання: З властивостей рангу матриці випливає, що $1 \leq r(A) \leq 4$. Виконаємо елементарні перетворення рядків матриці A .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{ЕП1} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{ЕП2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 3 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{ЕП3} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матриця, яку одержали в результаті елементарних перетворень, називається матрицею ступінчастого вигляду.

З останньої матриці видно, що $M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ (у матриці виділили перші два

рядки і перші два стовпці); $M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ (у матриці виділили перші три рядки та

перший, другий і п'ятий стовпець). Якщо розглядати всі можливі мінори четвертого порядку, то у кожному з цих визначників буде рядок, який складається лише з нулів. За властивістю визначників такий визначник дорівнюватиме 0. Тому $r(A) = 3$.

Зауваження 1. Після зведення матриці до ступінчастого вигляду не обов'язково виписувати і обчислювати мінори різних порядків. Можна побачити, що **ранг** матриці дорівнює кількості **ненульових рядків** після зведення матриці до ступінчастого вигляду.

Зауваження 2. Пояснення елементарних перетворень матриці A :

ЕП1:

- 1) помножили елементи першого рядка на число «-3» і додали до відповідних елементів другого рядка (коротко це при розв'язуванні задач можна записати так: $I \cdot (-3) + II$);
- 2) від елементів третього рядка відняли відповідні елементи другого рядка ($III - II$);
- 3) помножили елементи першого рядка на число «-5» і додали до відповідних елементів четвертого рядка ($I \cdot (-5) + IV$).

ЕП2:

- 1) помножили всі елементи другого рядка на число «-1»;
- 2) від елементів третього рядка відняли відповідні елементи другого рядка;
- 3) поділили всі елементи четвертого рядка на число «-2».

ЕП3: від елементів четвертого рядка відняли відповідні елементи другого рядка і поміняли місцями утворений четвертий рядок з третім.

Зауваження 3. Якщо в результаті елементарних перетворень матриці будуть утворюватися однакові рядки, то на наступному кроці при відніманні відповідних елементів цих рядків буде утворюватися рядок, який складається лише з нулів. Такий нульовий рядок для зручності краще зразу записувати останнім.

Зауваження 4. При виконанні **ЕП1** (коли ми утворюємо нулі в першому стовпчику) в більшості задач бажано, щоб елемент a_{11} матриці A дорівнював ± 1 (в нашому випадку так і було). Якщо при знаходженні рангу $a_{11} \neq 1$, а будь який інший елемент першого стовпчика дорівнює 1, то на першому кроці міняємо цей рядок з першим місцями. Якщо жоден елемент першого стовпчика не дорівнює 1, то виконавши перетворення рядків завжди можна добитись того, щоб $a_{11} = \pm 1$ (крім випадку, коли всі елементи першого стовпчика є кратними деякому цілому числу.) Якщо всі елементи першого стовпчика кратні деякому числу, то на місце першого рядка ставимо, той рядок, який починається з цього числа.

При виконанні **ЕП2** бажано зробити так, щоб $a_{22} = \pm 1$. (В цьому випадку ми розглядаємо елементи другого стовпчика, крім елементів першого рядка). І т.д.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Знайти матрицю, обернену до матриць:

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Розв'язати матричні рівняння:

$$1) X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриць:

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

Похідна функції

Знайти похідну функції $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

$$\begin{aligned}\text{Розв'язання: } y' &= \frac{(\sin x + \cos x)'(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= (1) \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = (2) \frac{-(\cos x - \sin x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= (3) -\frac{(\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} = (4) -\frac{\cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x} = \\ &= (5) -\frac{2\cos^2 x + 2\sin^2 x}{1 - \sin 2x} = (6) -\frac{2}{1 - \sin 2x} = (7) \frac{2}{\sin 2x - 1}.\end{aligned}$$

Пояснення:

- (1) В чисельнику знайдено похідні функцій;
- (2) Використано властивість $\sin x - \cos x = -(\cos x - \sin x)$ та $\cos x + \sin x = \sin x + \cos x$ та властивість $A \times A = A^2$;
- (3) В чисельнику винесено знак «-» за дужки;
- (4) В чисельнику і знаменнику виконано піднесення до квадрату за формулами $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ та $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- (5) В чисельнику і знаменнику використано тригонометричні формули $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ та $2\sin x \cos x = \sin 2x$;
- (6) В чисельнику винесено число 2 за дужки і використано формулу $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;
- (7) Знак «-», який є перед дробом помножено на знаменник.

Завдання для самостійного розв'язування

Знайти похідні заданих функцій

1. $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x^5} + \frac{1}{x^3}$;

2. $y = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$;

3. $y = \frac{\pi}{x} + \ln 2$;

4. $y = x \times \arcsin x$;

5. $y = (x^2 + 2) \sin x + 2x \cos x$;

6. $y = \frac{2x^2 + 3x - 7}{4x + 3}$;

7. $y = \frac{3x^2 - 1}{\sqrt{x}}$;

8. $y = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$.