Розв'язки завдань відбору на всеукраїнський тур олімпіади з математики для учнів 5-7 класів

Карпатський національний університет

2026 рік

5 клас

1. Забобонний власник готелю захотів, щоб всі 30 його апартаментів мали номери тільки з щасливих цифр 3 і 7 (довільні, але різні), і цих цифр він закупив по 50 штук. Чи здійсниться його план?

Відповідь: так.

Розв'язання. Одноцифрових чисел, утворених з цифр 3 і 7 є два — власне 3 і 7, двоцифрових — чотири (33, 37, 73 і 77). Неважко здогадатись, що трицифрових чисел з трійок і сімок є вісім ($2 \cdot 2 \cdot 2$), а чотирицифрових — шістнадцять ($2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$). Разом цих чисел $2 + 4 + 8 + 16 = 30$, тобто стільки, скільки всіх апартаментів, а цифр у них $2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 16 \cdot 4 = 2 + 8 + 24 + 64 = 98$, по 49 трійок і сімок. У такий спосіб всі апартаменти отримають різні номери, і по одній цифрі залишиться про запас.

2. Знайдіть всі такі натуральні числа, які не перевищують 1000, для яких сума цифр в чотири рази менша самого числа.

Відповідь: 12, 24, 36, 40.

Розв'язання. Одноцифрових таких чисел немає. Трицифрових чисел таких немає, бо тоді сума цифр не перевищує 27, тому таке число не більше 108, і тоді сума цифр не більше 9. Для двоцифрового числа маємо рівняння $4(a + b) = 10a + b$ або ж $b = 2a$.

3. У клітинки таблиці 3x3 впишіть всі числа 11,13,15,17,19,21,23,25,27 так, щоб суми чисел у кожному рядку, у кожному стовпці і на обох діагоналях були однаковими. При цьому у яких клітинках може бути вписано число 27?

Відповідь: Наприклад, так:

25	11	21
15	19	23
17	27	13

При цьому число 27 може стояти тільки в одній з чотирьох клітинок, у яких у прикладі стоять числа 11,15,23 або 27.

Розв'язання. Сума всіх чисел, поділена на три, і є сумою чисел в кожному рядку, стовпці і на діагоналях. Це число 57. Якщо додати всі числа на обох діагоналях і числа у другому стовпці, то вийде сума всіх чисел у першому рядку, у третьому рядку плюс потроєне число з центральної клітинки. Тоді це число рівне $\frac{3 \cdot 57 - 2 \cdot 57}{3} = 19$. Далі, якщо 27 поставити у кутову клітинку, тоді ми послідовно мусимо вписати 11 у центральносиметричну кутову клітинку, далі для 25 залишається лише місце у сусідній клітинці з клітинкою з число 11, і тоді у тому ж рядку дописуємо 21. Тоді у клітинці між 27 і 21 мало б стояти число 9. Отримане протиріччя доводить, що число 27 не може стояти ні в центральній, ні в кутовій клітинках.

4. Семеро гномів порівну поділили видобуті самоцвіти і замкнули їх у семи однакових скриньках. Однак вночі один жадібний гном відімкнув сусідську скриньку, переклав з неї у свою один самоцвіт і замкнув скриньки. За яку найменшу кількість зважувань на терезах з шальками без гир ви зможете гарантовано знайти скриньку злодія і скриньку обікраденого, не відмикаючи їх.

Відповідь: 4.

Розв'язання. Скринька обікраденого може виявитись будь-якою з 7-ми, а скринька злодія — будь-якою з інших 6-ти, тому всіх варіантів існує $7 \cdot 6 = 42$. Звідси випливає, що за три зважування не можна знайти обидві скриньки, бо у кожному з них можливі три результати — ліва шалька важча, права шалька важча чи рівновага, тому можливі $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ випадків, що не дозволяє розрізнити 42 варіанти.

Покажемо, що чотирьох зважувань достатньо. Покладемо на шальки по дві скриньки, а три відкладемо. Якщо одна з них важча, то або на ній скринька злодія, або на іншій скринька обікраденого, або правдиве і те, і інше.

Порівняємо дві скриньки на важчій шальці. Якщо одна з них важча, то вона належить злодієві, інакше це скриньки непричетних.

Аналогічно порівняємо дві скриньки на легшій шальці. Легша з них (якщо вона є) належить постраждалому.

Тепер ми знаємо, чи серед трьох відкладених є скринька злодія, чи скринька обікраденого, чи немає жодної з них. Наприклад, якщо там скринька злодія, то порівняємо дві скриньки з цих трьох. Якщо вони різної ваги, то важча з них належить злодієві, а якщо однакової, то його — третя скринька.

Залишається випадок, коли під час першого зважування обидві шальки по дві скриньки були в рівновазі. Тоді або скринька злодія разом зі скринькою обікраденого є на одній з шальок, або вони серед трьох відкладених. У першому випадку три відкладені скриньки однакової ваги, у другому — всі їх ваги різні. Щоб з'ясувати, що з цього істинне, порівняємо дві з трьох відкладених скриньок. У випадку рівноваги маємо ще два зважування, щоб порівняти вагу скриньок, які були на кожній шальці під час першого зважування, і скриньку злодія та скриньку обікраденого буде знайдено. Інакше ще за два зважування з'ясуємо, яка з трьох відкладених скриньок найважча (злодія) і найлегша (обікраденого).

6 клас

1. Мама попросила Марічку купити у магазині 200 грамів цукерок та кілограм картоплі, які коштували б m гривень. Донька все переплутала і купила 200 грамів картоплі та кілограм цукерок, заплативши за це n гривень. Виявилося, що двоцифрове число n більше від m, але записується тими ж цифрами, що й m. Визначте ціну кілограма цукерок та ціну кілограма картоплі, якщо відомо, що вони теж виражаються цілими числами.

Відповідь: 50 і 5.

Розв'язання. Оскільки як вартість кілограма картоплі, так і вартість кілограма картоплі і 200 грамів цукерок є цілими числами, то 200 грамів цукерок коштують ціле число x гривень, і аналогічно 200 грамів картоплі коштують ціле число y гривень. Відповідно кілограм цукерок і кілограм картоплі коштують $5x$ і $5y$ гривень. За умовою вартість кілограма цукерок і 200 грамів картоплі є двоцифровим числом $\overline{ab} = 10a + b = 5x + y$, а кілограм картоплі і 200 грамів цукерок коштують $\overline{ba} = 10b + a = 5y + x$.

Додавши і віднявши ці рівності, отримаємо

$$\begin{cases} 11(a+b) = 6(x+y), \\ 9(a-b) = 4(x-y), \end{cases}$$

звідки бачимо, що $a + b$ ділиться на 6, а $a - b$ — на 4. Оскільки a і b — десяткові цифри, причому зрозуміло, що $a > b$, бо цукерки дорожчі за картоплю, то можливі тільки випадки $a = 5$, $b = 1$ та $a = 8$, $b = 4$. Знайшовши для них x, y, отримаємо відповідно $x = 10$, $y = 1$ та $x = \frac{31}{2}$, $y = \frac{13}{2}$. Друга пара значень не задовольняє умову цілочисельності, тому кілограм цукерок коштує $5 \cdot 10 = 50$ гривень, кілограм картоплі — $5 \cdot 1 = 5$ гривень, і Марічка заплатила 51 гривню замість 15.

2. Знайдіть всі трійки простих чисел (a, b, c) таких, що

$$a^2 + 13b + 11c = 196.$$

Відповідь: $(7, 2, 11)$.

Розв'язання. $a, b, c \geq 2$. Тому з рівняння для простих a, b, c встановлюємо оцінки: $a \leq 11$, $b \leq 13$, $c \leq 11$. Перебираємо всі можливі трійки чисел, враховуючи, що серед них є парне просте, рівне 2. Знаходимо єдиний варіант $a = 7$, $b = 2$, $c = 11$.

3. Нехай $S(n)$ – сума цифр натурального числа n. Знайдіть два найбільших значення $S(n)$ таких, що $S(n)$ є дільником трицифрового числа n.

Відповідь: 27, 24.

Розв'язання. Проаналізуємо максимальні значення $S(n)$ для трицифрових чисел: 24,25,26,27. Для 27 і 24 знаходимо $n = 999\vdots 27 = S(n)$ і $n = 888\vdots 24 = S(n)$. Для 26, 25 знаходимо числа-кандидати: 889, 898, 988, 899, 989, 998, 799, 979, 997. Перевіркою встановлюємо, що всі ці числа не кратні сумі своїх цифр.

4. Марічка запропонувала Володі гру: у купці 2018 камінців, і гравці по черзі беруть з неї кількість камінців, яка має бути степенем десятки, тобто 1, або 10, або 100, або 1000 камінців. Програє той, хто забере останній камінець. До наступного ранку Володя повинен обрати, хто ходить першим. Що йому варто обрати?

Відповідь: Володі варто поступитись першим ходом Марічці.

Розв'язання. Щоб описати виграшну для Володі стратегію, зауважимо, що для кожного ходу (взяття 1, 10, 100 чи 1000 камінців), крім одного винятку, можна знайти "доповнюючий" хід так, щоб сума кількостей взятих камінців була подільною на 11 (до 1 можна допасувати 10 чи 1000, до 10 — 100 чи 1). Тоді після цих двох ходів остача від ділення кількості камінців не зміниться. На початку вона є рівною 5, тому, якщо дбати, щоб остача була незмінною, отже, залишалась непарною, то Марічці зрештою залишиться непарне одноцифрове число, а тоді вона муситиме взяти останній камінець.

Єдиний виняток — коли кількість камінців менша за 110, але більша за 100. Тоді Марічка може взяти 100 камінців, залишивши Володі менш, ніж 10, і він муситиме взяти один камінець. Разом вони заберуть $101 = 9 \cdot 11 + 2$ камінці, і остача з 5 стане 3, однак залишиться непарною, тому метод працюватиме і у цьому випадку.

6 клас

1. Коли ведмедя, вовка і лисицю демократично обрали в уряд лісу, першим указом вони постановили з'їсти зайця. Щоб з'ясувати, кому він дістанеться, вигадали гру. Ведмідь, вовк, лисиця і заєць по черзі записують по одній цифрі. Якщо утворене з цифр (саме у цій послідовності) чотирицифрове число ділиться на 7, зайця з'їдає ведмідь, інакше, якщо воно ділиться на 4 —вовк, інакше, якщо число ділиться на 3, заєць дістається лисиці. В іншому випадку зайця відпускають. Сова втішає зайця, що він точно може врятуватись. Чи правду вона каже?

Відповідь: Так, заєць напевне зможе врятуватись.

Розв'язання. Якщо ведмідь, вовк і лисиця записали цифри a, b і c, то залежно від своєї цифри заєць може отримати будь яке з розташованих підряд десяти чисел від $\overline{abc0} = 1000a + 100b + 10c$ до $\overline{abc9} = 1000a + 100b + 10c + 9$. Серед 10 натуральних чисел підряд подільних на 7 — щонайбільше 2, подільних на 4 — максимум 3, а подільних на 3 — не більше, ніж 4. Разом цих чисел не більше, ніж $2 + 3 + 4 = 9$, тому залишається принаймні одне число, яке пасує зайцеві, тобто сова каже правду.

2. На далекій планеті живуть трипалі гуманоїди, які цілі числа 0, 2, 3 і 7 позначають так: $\circ$, $+-$, $+\circ$ і $+-+$. Як вони позначають число 13?

Відповідь: Наприклад, як $+++$.

Розв'язання. Один з можливих варіантів — це позиційна трійкова система числення, де перед степенями $\ldots, 3^2 = 9, 3^1 = 3, 3^0 = 1$ можна писати "$+$", "$-$" та нуль, позначений $\circ$. Тому $\circ$ позначає $0 \cdot 1 = 0$, $+-$ позначає $(+3) + (-1) = 2$, , $+\circ$ позначає $(+3) + (0 \cdot 1) = 3$, а $+-+$ позначає $(+9) + (-3) + (+1) = 7$. Тоді $13 = 9 + 3 + 1$ треба позначати $+++$.

3. Петрик написав на дошці приклад, у якому випадково стер три цифри, які позначені літерами a, b і c. Допоможіть Петрику відновити ці цифри.

$$a^{66} = 737869629483820646$$

Відповідь: $a = 2, b = 7, c = 4$.

Розв'язання. Оскільки $a^{66} = 737869b629483820646c < 10^{20}$, то $a < 3$, бо $3^{66} = 729^{11} > 100^{11} = 10^{22} > 10^{20}$. Отже, $a = 2$. Далі, $2^{66} = 4 \cdot 16^{16}$, і остання цифра числа 16^{16} дорівнює 6, тому остання цифра c числа 2^{66} рівна 4. Далі, $2^{66} = 64^{11} = (7 \cdot 9 + 1)^{66} = 9B + 1$ при деякому цілому B. Тому сума цифр числа 2^{66} має давати остачу 1 при діленні на 9. Після обчислення суми цифр числа $737869b6294838206464$ визначаємо єдине можливе значення $b = 7$.

4. Петрик і Миколка грають у таку гру. Хлопці по черзі за один хід можуть вибрати одне з натуральних чисел від 1 до 2025, яке до цього моменту ще не було вибране, і яке відрізняється більше ніж на один від кожного з чисел, які були вибрані до цього. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто з хлопців зможе виграти, якщо першим ходить Петрик?

Відповідь: Петрик.

Розв'язання. Першим ходом він вибирає число 1013, а з кожним наступним ходом Миколки, який вибирає число c, Петрик вибирає $2026 - c$. Зрозуміло, що Петрик у кожному разі зможе зробити свій хід у відповідь, тому не програє. Враховуючи, що гра скінченна, розуміємо, що у якийсь момент Миколка не зможе зробити свій хід.