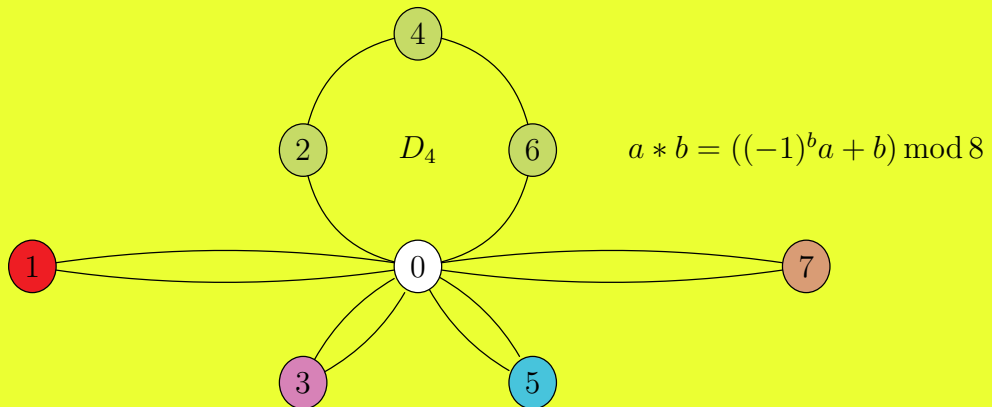
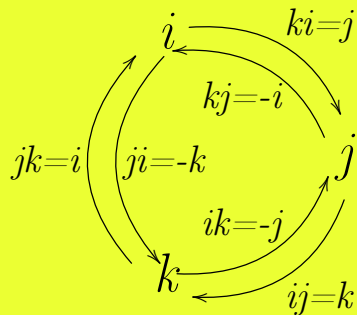


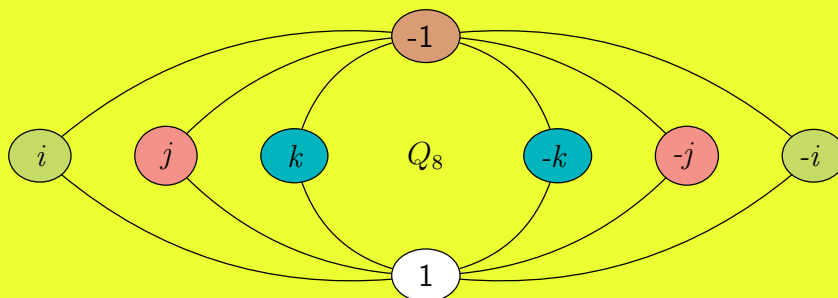
Володимир Гаврилків



ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРУП ТА ТЕОРІЇ КІЛЕЦЬ



Навчальний посібник



ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРУП ТА ТЕОРІЇ КІЛЕЦЬ

Теорема Лагранжа

Якщо H – підгрупа скінченної групи G , то

$$|G| = |H| \cdot |G : H|.$$

Зокрема порядок скінченної групи ділиться на порядок кожної її підгрупи.

Доведення. Розглянемо лівостороннє розбиття групи G за підгрупою H . Одним з лівих суміжних класів є підгрупа $H = eH$. Нехай gH – довільний лівий суміжний клас.

Розглянемо відображення

$$l_g : H \rightarrow gH, \quad l_g(h) = gh.$$

Якщо $l_g(h_1) = l_g(h_2)$, то $gh_1 = gh_2$, а тому $h_1 = h_2$, і відображення l_g є ін'єкцією. Оскільки $g^{-1}a \in H$ для кожного $a \in gH$ і $l_g(g^{-1}a) = a$, то l_g – сюр'єкція. Таким чином, l_g – бієкція.

Отже, потужність кожного лівого суміжного класу дорівнює порядку підгрупи H . Оскільки скінченна група містить скінченну кількість лівих суміжних класів і дані класи попарно не перетинаються, то $|G| = |H| \cdot m$, де m – кількість лівих суміжних класів. Таким чином,

$$|G| = |H| \cdot |G : H|,$$

і порядок групи G ділиться на порядок підгрупи H .

□

