Факультет математики та інформатики

БАЗИ У СКІНЧЕННИХ ГРУПАХ

Гаврилків Володимир Михайлович,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри алгебри та геометрії

Підмножина B групи G називається *базою* групи G, якщо кожен елемент $g \in G$ можна подати у вигляді $g = ab$ для деяких елементів $a, b \in B$. Найменша потужність $|B|$ бази $B \subset G$ називається *базовим розміром* групи G та позначається через $r[G]$. Проблему обчислення базового розміру циклічних груп вперше було поставлено І. Шуром, а різні оцінки були отримані Рорбахом [5], Мосером [4], Клоцом та іншими авторами. Бази довільних груп вивчалися Рорбахом, Черлі, Бертрамом та Герцогом [2], Козмою та Левом [6].

З означення бази B групи G випливає, що $|G| \le |B|^2$, а тому $r[G] \ge \sqrt{|G|}$. Дріб

$$\delta[G] = \frac{r[G]}{\sqrt{|G|}}$$

називається *базовою характеристикою* групи G.

Наступна фундаментальна теорема була доведена Козмою та Левом, використовуючи класифікацію скінченних простих груп.

Теорема [Козма, Лев]. *Кожна скінченна група* G має базову характеристику

$$\delta[G] \le \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Наступні теореми про оцінки для базових характестик та базових розмірів діедральних та булевих груп були доведені автором у статті [3].

Теорема [Гаврилків]**.** *Нехай* D_{2n} *– дідральна група порядку* $2n$, *де* $n \in \mathbb{N}$. *Для базової характеристики діедральної групи має місце нерівність* $\delta[\mathrm{D}_{2n}] \le \frac{24}{\sqrt{146}}$. *Якщо* $n \ge 2 \cdot 10^5$, *то* $\delta[\mathrm{D}_{2n}] < \frac{4}{\sqrt{6}}$.

Група G називається *булевою*, якщо $g^{-1} = g$ для кожного елемента $g \in G$. Добре відомо, що кожна булева група є абелевою групою, ізоморфною деякому степеню двохелементної циклічної групи C_2.

Теорема [Гаврилків]. *Для базового розміру булевої групи* G *має місце нижня оцінка*

$$r[G] \geq \frac{1+\sqrt{8|G|-7}}{2}.$$

Наступні теореми про нижні оцінки для базових розмірів та базових характестик скінченних груп були доведені автором та Т. Банахом у статті [1].

Теорема [Банах, Гаврилків]. *Для скінченної абелевої групи* G *мають місце нерівності*

$$r[G] \geq \sqrt{2|G|\text{-}|G|/|G_2|} \quad \text{та} \quad \delta[G] \geq \sqrt{2\text{-}1/|G_2|},$$

де $G_2 = \{g \in G : g^{-1} = g\}$.

Теорема [Банах, Гаврилків]. *Для базового розміру кожної нетривіальної скінченної групи* G *має місце нижня оцінка* $r[G] > \sqrt{|G|}$.

1. Banakh T., Gavrylkiv V. Bases in finite groups of small cardinality (submitted).

2. Bertram E. A., Herzog M. On medium-size subgroups and bases of finite groups. *J. Combin. Theory, Series A 57*. 1991. P, 1–14.

3. Gavrylkiv V. Bases in dihedral and Boolean groups. *J. Integer Seq.* 2017. № 20 (8). Article 17.8.1.

4. Moser L. On the representation of 1, 2, ..., n by sums. *Acta Arith. 6*. 1960. P, 11–13.

5. Rohrbach H. Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie. *Math. Z. 42*. 1937. P. 1–30.

6. Kozma G., Lev A. Bases and decomposition numbers of finite groups. *Arch. Math (Bazel.)* 1992. № 58 (5). P. 417–424.

АПРОКСИМАЦІЇ ЄМНОСТЕЙ: ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

Глушак Інна Дмитрівна,

кандидат фізико-математичних наук,

асистент кафедри алгебри та геометрії

Ємністю на компакті X називається [1] функція $c\colon \exp X \cup \{\emptyset\} \to R_+$, для якої виконуються три наступні властивості для всіх замкнених підмножин $F, G \subset X$:

(1) $c(\emptyset) = 0$;

(2) якщо $F \subset G$, то $c(F) \leq c(G)$ (монотонність);

(3) якщо $c(F) < a$, то існує така відкрита множина $U \supset F$, що для кожного $G \subset U$ виконано $c(G) < a$ (напівнеперервність згори).

Якщо крім того виконано