

Голові спеціалізованої вченої ради
ДФ 20 051.148
Прикарпатського національного
університету імені Василя Стефаника
доктору фізико-математичних наук,
професору Шарину Сергію
Володимировичу
(76018, м. Івано-Франківськ,
вул. Шевченка, 57)

ВІДГУК

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук, професора, завідувача кафедри фізико-математичних наук Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу **Бандури Андрія Івановича** на дисертаційну роботу **Грибель Ольги Богданівни** «Асимптотичні оцінки сум рядів Діріхле», подану на здобуття ступеня доктора філософії в галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика

Актуальність теми дослідження. Аналітична функція однієї комплексної змінної завжди допускає розвинення у степеневий ряд, що локально збігається до самої функції. Водночас, природним узагальненням степеневого ряду слугують ряди Діріхле, для яких степеневі ряди — частинний випадок, коли послідовність показників ряду Діріхле збігається з послідовністю невід'ємних цілих чисел. До того ж загальновідома дзета-функція Рімана також легко записується через ряд Діріхле, а знаменита проблема тисячоліття — гіпотеза Рімана про розподіл її нулів зводиться до доведення відсутності нетривіальних нулів поза так званою критичною прямою, дійсна частина якої рівна $1/2$. В Україні ряди Діріхле — це перш за все дослідження львівської школи комплексного аналізу.

Зокрема, М.М. Шереметою було розроблено модифікацію методу Вімана-Валірона для дослідження асимптотичних властивостей цілих рядів Діріхле. Ймовірнісні методи до дослідження властивостей абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле адаптував О.Б. Скасків. Ці два аналітики зуміли знайти необхідні та достатні умови на послідовність показників ряду Діріхле для виконання верхніх оцінок супремуму модуля суми ряду на прямій вигляду $\sigma + it$ ($t \in \mathbb{R}$) через максимальний член цього ряду при кожному фіксованому σ зовні деякої виняткової множини. Існуванню та розмірам виняткових множин присвячені статті П.В. Філевича, О.Б. Скасківа, Т.М. Сало, А.О. Куриляка. Відомі також умови, за яких виконуються певні верхні оцінки супремуму модуля суми ряду Діріхле через його максимальний член без виняткових множин. Зрозуміло, що останні умови стосуються вужчого підкласу рядів Діріхле. Водночас такі оцінки необхідні для опису зростання як самого ряду, так і аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь, коефіцієнти яких є експоненційними багаточленами. Саме зростання можна описувати не тільки через класичну шкалу зростання за допомогою понять порядку та типу, а й використовуючи характеристики, розроблені львівською школою комплексного аналізу на кшталт узагальненого порядку ($\alpha\beta$ -порядок), модифікованого порядку ($\alpha\beta\gamma$ -порядку). До того ж супремум модуля суми цілого ряду Діріхле можна оцінювати через ряд, коефіцієнти якого задаються через суму модулів коефіцієнтів початкового ряду.

Зважаючи на це, тематика роботи цікава, актуальна і породжує чимало питань, які чекають свого дослідження. Насамкінець зазначу, що крім згаданих математиків певний внесок у теорію рядів Діріхле зробили їхні учні та колеги, яких дозволю собі перерахувати за останні 20 років — О.Ю. Задорожна, Т.Я. Глова, О.М. Мулява, Л.Л.

Лугова, М.Р. Куриляк, І.Є. Овчар, Ю.В. Стець, О.М. Сумик (Головата), Я.В. Микитюк, М.М. Зеліско, А.Ю. Боднарчук, Ю.С. Трухан, Л.Я. Микитюк, С.І. Фединяк. Однак там лишається доволі багато цікавих питань, які ще чекають на своє дослідження.

Зміст роботи і новизна одержаних результатів. Дисертація (її повний обсяг становить 147 сторінок друкованого тексту) складається з переліку мовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 74 найменування, і одного додатку, що містить перелік наукових праць, в яких опубліковано основні результати дисертації, список публікацій, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації на конференціях, а також відомості про апробацію дисертації.

У **вступі** обґрунтовано актуальність обраної теми дисертації, зазначено зв'язок дослідження з науково-дослідними роботами, планами та апроєктами, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання та методи дослідження, описано наукову новизну, практичне значення отриманих результатів та виокремлено особистий внесок здобувача, перераховано конференції та семінарів, де здійснювалася апробація здобутків дисертаційного дослідження, і наведено підсумок по публікаціях, структурі та обсягу дисертації.

Перший розділ розпочинається з огляду літератури за тематикою дослідження та завершується глибоким якісним аналізом відомих результатів і обґрунтуванням напрямків дослідження.

Другий розділ зосереджений на відшуканні умов виконання всіляких оцінок для суми цілого ряду Діріхле з додатними показниками через пов'язаний з ним інший ряд Діріхле. Кожний коефіцієнт допоміжного ряду задається як сума модулів тих коефіцієнтів початкового ряду, значення відповідних показників яких перебуває між показником початкового ряду з номером рівним номеру шуканого коефіцієнта та сумою цього показника і деякого фіксованого додатного числа. Зокрема, обґрунтовано можливість апроксимації суми початкового ряду через максимальний член пов'язаного ряду. Найвагоміші здобутки другого розділу отримано у підрозділі 2.5, де знайдено необхідні і достатні умови виконання верхніх оцінок логарифма суми модулів членів початкового ряду через допоміжну функцію порівняння. Відповідні результати істотно узагальнюють результати М. М. Шеремети, адже вони отримані для довільних функцій з \mathbb{R} у \mathbb{R} . Натомість у відповідних теоремах Шеремети припускається, що функція порівняння є неперервно диференційовною, додатною, а її похідна також додатна та зростає на \mathbb{R} . Ба більше, відповідні умови виконання таких оцінок, отримані здобувачкою, перевірити легше, ніж умови Шеремети. На думку опонента, саме другий розділ у дисертації є найсильнішим.

Третій розділ подібний до другого, однак тут об'єктом вивчення виступають абсолютно збіжні у лівій півплощині ряди Діріхле. Для такого ряду вводяться у розгляд два пов'язані ряди, один з яких будується за схемою попереднього розділу, а коефіцієнти іншого визначаються як відповідна частинна сума модулів коефіцієнтів початкового ряду. Відповідно, тут отримано аналоги результатів другого розділу для абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле та першого пов'язаного з ним ряду. Натомість для абсолютно збіжного у лівій півплощині ряду та другого пов'язаного з ним ряду встановлено аналоги теорем Шеремети, які були ним вперше отримані для цілих рядів Діріхле.

Нарешті **четвертий розділ** зосереджений на відкритих задачах, що виникають при розгляді відносного зростання ряду Діріхле та його максимального члена. Зокрема, тут обґрунтовано необхідність умови Філевича-Шеремети для одночасної правильної зміни логарифма супремуму модуля цілого ряду Діріхле та логарифма його максимального члена. Також знайдено формулу типу Коші-Адамара для обчислення узагальненого порядку логарифма максимального члена за послідовністю модулів його коефіцієнтів, а також отримано необхідні та достатні умови рівності модифікованого порядку ($\alpha\beta\gamma$ -порядку) логарифма супремуму модуля суми та модифікованого порядку логарифма максимального члена ряду Діріхле з невід'ємною абсцисою абсолютної збіжності. Як наслідок такого дослідження, виведено формули для обчислення модифікованого по-

ряду логарифма максимального члена через модулі коефіцієнтів ряду Діріхле.

У додатку наведено список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації. Усі описані вище результати дисертаційної роботи є новими.

Відсутність порушення академічної доброчесності. За результатами перевірки дисертаційної роботи та публікацій не виявлено ознак академічного плагіату. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. У дисертаційній роботі відсутні порушення академічної доброчесності.

Обґрунтованість і правильність отриманих результатів. Усі отримані у дисертаційній роботі результати нові, правильні та строго обґрунтовані, що забезпечено наявністю чітких, повних і правильних доведень для усіх наведених у цій роботі основних тверджень та зазначенням схеми, за якою можуть бути доведені за аналогією інші сформульовані неосновні твердження.

Апробація результатів і публікації. Результати дисертації опубліковані у провідних наукових журналах України. Усі 5 статей зі списку публікацій повністю відповідають вимогам щодо публікацій результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук: вони опубліковані у виданнях, проіндексованих у базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection. До того ж ці журнали мають 1, 2 або 3 квартиль залежно від року видання, а саме: одна публікація з першого квартилю, одна — з другого квартилю та дві — з третього квартилю та одна без квартилю. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на чотирьох конференціях, в тому числі на трьох міжнародних конференціях.

Практичне значення результатів дисертації. Дисертаційне дослідження має теоретичний характер. Одержані результати можуть мати подальше застосування у теорії аналітичних функцій однієї комплексної змінної, теорії рядів Діріхле, аналітичній теорії диференціальних рівнянь та в інших розділах математики, де виникають степеневі ряди або ряди Діріхле. Про можливість застосування цих результатів для вивчення асимптотичних властивостей аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь свідчать недавні статті М.М. Шеремети, де він розглядає окремі диференціальні рівняння, коефіцієнти яких є експоненціальними багаточленами.

Зауваження.

1. Враховуючи, що анотація зараз замінює автореферат, на с. 3 варто вказати формулою, що таке спряжена за Юнгом функція, а на сторінці 4, що таке $\overline{\mathbb{R}}$.
2. На с.4 анотації йде доволі хитромудрий формульний опис результатів підрозділу 2.5. Водночас там же стверджується, що ці результати істотно узагальнюють результати, отримані М. Шереметою у 1999 р. Як опонент, я згідний з цим. Втім, гадаю, що тут пасувало б докладніше словесно описати напрямок цього узагальнення.
3. С.8, рядок 7 знизу — "The main focus of the work is on obtaining" варто замінити на "The main focus of the work is obtaining".
4. С.9, рядок 11 та 14 зверху, та с.11, рядок 13 маємо відповідно такі фрази in the neighborhood, in some neighborhood, in some neighbourhood, перші дві з них написані американською англійською, а друга — британською англійською і до того ж у математиці фраза в околі переважно вживається з прийменником "at" замість "in".
5. С.9, рядок 12 зверху, замість "Jung" має бути "Young".
6. С.9, рядок 14 зверху, замість "unbounded function from above" має бути "upper unbounded function".
7. С.10, рядок 13 зверху, замість "denotes the Young conjugate of" має бути "denotes the Young conjugate function of".
8. С.10, рядок 9-10 знизу, замість "These results significantly generalise those obtained by M. M. Sheremeta in 1999" має бути "These results significantly generalise the results obtained by M. M. Sheremeta in 1999".

9. С.11, рядок 16, замість "unbounded above" має бути "upper unbounded".
10. С.9-13, у багатьох місцях в середині речень є "section якийсь-номер" та "subsection якийсь номер" має бути "Section ..." та "Subsection ..." відповідно.
11. С.13, рядок 7 знизу "formulas are established for" замінити на "there are established formulas for".
12. С.19-21, у переліку умовних позначень треба розшифрувати $\overline{\mathbb{R}}$.
13. С.20, 1 рядок знизу, в означенні класу C_A можна забрати $A \in (-\infty, +\infty]$, бо цей клас означається через клас Y_A рядком вище, де вже наявна ця умова.
14. С.21, в означенні узагальненого та модифікованого порядків логарифма максимального члена ряду Діріхле пропущено верхній індекс *, тобто замість $R_{\alpha,\beta}(F) = R_{\alpha,\beta}[\eta]$ та $R_{\alpha,\beta,\gamma}(F) = R_{\alpha,\beta,\gamma}[\eta]$ має бути $R_{\alpha,\beta}^*(F) = R_{\alpha,\beta}[\eta]$ та $R_{\alpha,\beta,\gamma}^*(F) = R_{\alpha,\beta,\gamma}[\eta]$, відповідно.
15. С.139, позиція 39 у списку літератури містить Kővari. Втім саме ця стаття опублікована насправді з прізвиськом Kovari. А саме прізвисько Kővari закарпатські мадяри в українських паспортах транскрибують як Кеварі (на с. 22 транскрибовано як Кьоварі).
16. С.24, рядок 15-16, замість "були одночасно правильно змінними функція порядку ρ " має бути "були одночасно правильно змінними функціями порядку ρ ".
17. С.30, опис наукової новизни одержаних результатів породжує таке питання „Що можна сказати про точність оцінок описаних у пунктах 2 та 4?“
18. С. 31, практичне значення одержаних результатів, замість "у яких в якості природних об'єктів" краще написати "у яких як природні об'єкти".
19. С.36, написано "результату, який була доведено О.Б. Скасківим [58]." Має бути "результату, який було доведено О.Б. Скасківим [58]."
20. С.37, у формулюванні результату М. Шеремети - теореми 1.3 використовується поняття верхньої щільності, яке ніде не означене в дисертації.
21. С.55, формулюються леми 2.5, 2.6, 2.7 з дисертації Глови Т.Я., однак крім дисертації Глови Т.Я., вони більше ніде не опубліковані, тому пасувало б зазначити точну сторінку чи розділ його дисертації.
22. С.56, лема 2.8 у дисертації сформульована без доведення і зазначено, що вона опублікована у [29]. Але позиція [29] — це спільна стаття Грибель О.Б. та її керівника Філевича П.В. До того ж, у [29] наведено невеличке доведення цієї леми обсягом 5 рядків. Тому виникає питання, чому ця лема у дисертації міститься без доведення.
23. С.57-59, с. 84-86 часто використовується фраза „друга спряжена з Ψ функція“ без уточнення, що мається на увазі спряжена за Юнгом.
24. Підрозділи 2.4 та 3.3 містять багато теорем без доведень. Авторка стисло описує їхню схему та ідею доведення з використанням раніше доведених тверджень. Але може варто було б оці нові факти назвати не теоремами, а твердженнями. Адже сама здобувачка визнала, що доведення подібні.
25. С. 79-80, T_n неявно визначено як частинна сума модулів коефіцієнтів ряду Діріхле, але водночас у теоремах 1.9-1.10 T_0 — це додатна стала, що задовольняє деяку нерівність. До того ж таке саме розшифрування як частинна сума має S_n . Тому трохи неузгоджена система позначень у дисертації.
26. С.108, функція $l(\sigma)$ — вимірна за Лебегом? Там просто не уточнено.
27. С.120. У доведенні твердження 4.2 написано, що "Ми отримаємо частину (i) з наведеного далі доведення частини (ii) у випадку $k_0 = 0$." Так-от, чому з $k_0 = 0$ випливає, що $a_n \in \{0, 1\}$?
28. С.142, позиція 63. Там пропущено номер doi до цієї позиції. А саме <https://doi.org/10.30970/ms.38.1.106-112>.
29. С.138-143, позиції 32, 33, 34, 35, 36, 39, 43, 50, 51, 52, 55, 60, 61, 62 містять некоректний запис „<https://doi:10>.“, хоча насправді мали б містити такий „<https://doi.org/10>.“

Висновок. Підсумовуючи перераховані зауваження, зазначу, що вони не впливають

на розуміння та якість дисертаційної роботи, а також не знецінюють значущість отриманих результатів. Тому дисертаційна робота «Асимптотичні оцінки сум рядів Діріхле» завершена наукова праця, що містить нові важливі та вагомні результати з комплексного аналізу. Ця праця повністю відповідає усім вимогам спеціальності 111 Математика та вимогам наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» (зі змінами), «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 (зі змінами), а її авторка, Грибель Ольга Богданівна, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії у галузі знань 11 „Математика та статистика“ за спеціальністю 111 „Математика“.

Офіційний опонент:

доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри фізико-математичних наук
Івано-Франківського національного технічного
університету нафти і газу

_____ Андрій БАНДУРА