

**Голові спеціалізованої вченої ради  
ДФ 20 051.129  
Прикарпатського національного  
університету імені Василя Стефаника  
доктору фізико-математичних наук,  
професору Дмитришину Роману Івановичу  
(76018, м. Івано-Франківськ,  
вул. Шевченка, 57)**

### **ВІДГУК**

офіційного опонента, кандидата фізико-математичних наук, доцента, заступника директора з науково-педагогічної роботи Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету "Львівська політехніка" **Гладуна Володимира Романовича** на дисертаційну роботу **Чоп'юка Юрія Юрійовича** «**Аналіз в кільцях мультимножин, породжених алгебрами суперсиметричних поліномів на банахових просторах**», подану на здобуття ступеня доктора філософії в галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика

**Актуальність теми дослідження.** Дисертаційну роботу присвячено сучасним проблемам функціонального аналізу та абстрактної алгебри, а саме вивченню кілець так званих мультимножин, породжених алгебрами суперсиметричних поліномів на банахових просторах. Ця тематика є актуальною, оскільки розширює класичні результати теорії симетричних поліномів та симетричних аналітичних функцій на нові абстрактні алгебраїчні структури. Проблеми опису структури та властивостей таких кілець є далеко не тривіальними. Зокрема, питання факторизації елементів у скінченних кільцях цілих мультисисел та умови їх оборотності є актуальними і мають важливе теоретичне та прикладне значення у криптографії. Важливим аспектом дослідження є встановлення гомоморфізмів та ізоморфізмів між новими абстрактними кільцевими структурами та відомими класичними кільцями, що поглиблює розуміння зв'язків між різними алгебраїчними структурами. Отримані результати також інтегруються в потенційні прикладні розробки. У роботі запропоновано протокол шифрування, що додатково підтверджує актуальність обраної тематики дослідження.

**Зміст роботи.** Дисертація (її повний обсяг становить 139 сторінок друкованого тексту) складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 60 найменувань, і додатка.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми та її зв'язок із науковими програмами, визначено об'єкт, предмет, мету і завдання дослідження, окреслено методи дослідження. Наведено наукову новизну і практичну цінність отриманих результатів, особистий внесок здобувача, а також інформацію про публікації та апробацію основних результатів дисертації.

**Розділ 1** містить огляд літератури та теоретичні основи дослідження. Зокрема, в підрозділі 1.1 простежено історичний розвиток ідеї симетричних та суперсиметричних поліномів – від класичних результатів (Ф. Вієт, І. Ньютон, Е. Галуа та ін.) до сучасних узагальнень у теорії інваріантів, що формує концептуальне підґрунтя для подальших досліджень. У підрозділі 1.2 введено основні означення й теореми, які надалі використовуються в роботі; таким чином закладено необхідний апарат для дослідження кілець мультимножин.

**Розділ 2** присвячено аналізу кілець мультимножин  $M^{\omega_2}$  та  $Z^{\omega_2}$  (кілець цілих мультичисел), а також скінченних фактор-кілець  $Z_{(p,q)}^{\omega_2}$ . У цьому розділі отримано умови розв'язності алгебраїчних рівнянь у кільці  $M^{\omega_2}$ . Встановлено зв'язок між досліджуваними кільцями мультимножин та класичними об'єктами: зокрема, показано, що кілець цілих мультичисел  $Z^{\omega_2}$  ізоморфне кільцю скінченних рядів Діріхле  $D_0(Z)$ . Окрему увагу приділено структурі скінченних кілець  $Z_{(p,q)}^{\omega_2}$ : досліджено існування і властивості нільпотентних елементів, дільників нуля та оборотних елементів у цих кільцях (як наслідок, зокрема, доведено відсутність ненульових нільпотентів у кільці  $Z_{(p,p)}^{\omega_2}$  для простого  $p$ ). Наприкінці розділу 2 сформульовано висновки, що підсумовують отримані проміжні результати.

**Розділ 3** має на меті розширення розглянутих кільцевих структур шляхом уведення комплексної структури. В підрозділі 3.1 описано продовження визначених раніше алгебраїчних операцій на більш широкий клас і, зокрема, наводиться побудова нового кільця  $M^{\omega_4}$  як узагальнення  $M^{\omega_2}$ . У підрозділі 3.2 детально доведено, що  $M^{\omega_4}$  є комутативне кільцем, що містить дільники нуля.

**Розділ 4** присвячено узагальненню на випадок  $\omega_n$  – **симетричних поліномів** та відповідних кілець мультимножин, пов'язаних із скінченними циклічними групами. У підрозділі 4.1 досліджено  $\omega_n$ -симетричні поліноми на банахових просторах  $l_1(N_{\omega_n})$ , (просторах абсолютно збіжних послідовностей індексованих в  $N_{\omega_n}$ ). Підрозділ 4.2 присвячено побудові алгебраїчних базисів в алгебрах  $\omega_n$ -симетричних поліномів і вивченню їх властивостей. Далі, у підрозділі 4.3, введено і досліджено кільця мультимножин  $M^{\omega_n}$ , породжені алгебрами  $\omega_n$ -симетричних поліномів на  $l_1(N_{\omega_n})$ . У підрозділі 4.4 розглянуто кільця цілих мультичисел  $Z^{\omega_n}$  та досліджено їх основні характеристики. Таким чином, у четвертому розділі здобувач переходить від конкретних випадків до загального теоретичного опису кілець мультимножин для довільного скінченного  $n$ .

**Розділ 5** має прикладний та оглядовий характер, демонструючи можливі застосування і подальші узагальнення отриманих результатів. У підрозділі 5.1 запропоновано **застосування в криптографії**: зокрема, розроблено протокол шифрування та дешифрування, який використовує елементи кільця  $Z_{(p,q)}^{\omega_2}$  як основу криптосистеми. Такий протокол є новим практичним виходом із теоретичних результатів роботи. Складність дешифрування потребує додаткових досліджень. У підрозділі 5.2 розглянуто **блочно-симетричні поліноми** на банахових просторах  $L_p[0,1]$  та  $L_\infty[0,1]$  як один із напрямків

узагальнення теорії симетричних поліномів. Отримано опис структури таких поліномів: доведено, що кожен  $n$ -блочно-симетричний неперервний  $N$ -однорідний поліном на зазначених просторах може бути єдиним чином поданий через базисні елементи.

Загальні висновки дисертації чітко відображають реалізацію поставлених завдань і наукову цінність отриманих результатів. Список використаних джерел включає сучасні праці науковців. У додатку представлено перелік публікацій за темою дисертації і дані про апробацію результатів, що підтверджує впровадження та обговорення результатів дослідження у науковому співтоваристві.

**Наукова новизна.** Наукова новизна дисертації є суттєвою і полягає у тому, що всі отримані результати є новими. Зокрема, вперше встановлено існування ізоморфізму  $\Psi$  між кільцем цілих мультичисел  $Z^{\omega_2}$  та кільцем скінченних рядів Діріхле  $D_0(Z)$ , а також досліджено властивості цього ізоморфізму (зокрема, композиції  $\Psi \circ \nu^{-1}$ ) між кільцем формальних поліномів  $Z[C^\infty]$  та  $D_0(Z)$ . Уперше отримано умови розв'язності певних алгебраїчних рівнянь у кільці  $M^{\omega_2}$ . На основі введеного автором відношення еквівалентності за модулем  $(p, q)$  на множині мультичисел  $Z^{\omega_2}$ , вперше доведено, що множина класів еквівалентності  $Z_{(p,q)}^{\omega_2}$  утворює комутативне кільце з одиницею (для  $p, q > 1$ ). Визначено також характеристики цього нового кільця: зокрема, встановлено його порядок (потужність елементів) та з'ясовано, що відображення  $I_{(p,q)}: Z^{\omega_2} \rightarrow Z_{(p,q)}^{\omega_2}$  є кільцевим гомоморфізмом. У дисертації вперше охарактеризовано наявність дільників нуля, оборотних та нільпотентних елементів у кільцях  $Z_{(p,q)}^{\omega_2}$  залежно від параметрів  $p$  та  $q$ . Здобувачем узагальнено малу теорему Ферма на випадок мультичисел у кільцях  $Z_{(p,p)}^{\omega_2}$  для простого  $p$ . Вперше запропоновано криптографічний протокол шифрування та дешифрування, побудований на використанні елементів кільця мультичисел  $Z_{(p,q)}^{\omega_2}$ , що є інноваційним практичним застосуванням теоретичних знахідок. Таким чином, дисертація суттєво розвиває та узагальнює існуючі результати в теорії симетричних і суперсиметричних поліномів, алгебрах аналітичних функцій на банахових просторах, а також пропонує нові напрямки їх практичного застосування.

**Відсутність порушення академічної доброчесності.** За результатами перевірки дисертаційної роботи та публікацій не виявлено ознак академічного плагіату, елементів фабрикації та фальсифікації. Результати перевірки підтверджують, що текст дисертації є оригінальним. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. У дисертаційній роботі порушень академічної доброчесності не виявлено.

**Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів.** Отримані в дисертації результати є **достовірними і строго обґрунтованими**. Усі теоретичні положення супроводжуються чіткими математичними доведеннями або аргументацією, достатньою для підтвердження їх істинності. Здобувач продемонстрував глибоке розуміння застосованого апарату і методів: висновки кожного розділу логічно випливають із наведених результатів, а загальні

висновки – із змісту роботи в цілому. Коректність доказів і послідовність викладу свідчать про високий рівень обґрунтованості результатів сформульованих у дисертації.

**Апробація результатів і публікації.** Основні наукові результати дисертаційної роботи повною мірою висвітлені у публікаціях автора. Зокрема, положення дисертації викладено в трьох наукових статтях, опублікованих у фахових виданнях, що індексуються в міжнародних наукометричних базах даних Scopus та/або Web of Science, а також результати дисертації апробовано на міжнародних наукових конференціях. Загалом за темою дисертації опубліковано достатню кількість праць, що відповідає встановленим вимогам до докторів філософії. Опубліковані роботи відтворюють основний зміст дисертації, відображаючи обсяг і характер проведених досліджень. Це свідчить про те, що здобувач належним чином апробував результати своєї роботи в науковому співтоваристві.

**Практичне значення результатів дисертації.** Дисертація має переважно теоретичний характер, проте її результати можуть знайти застосування в ряді напрямів. Теоретичні напрацювання здобувача становлять інтерес для подальших досліджень у **теорії поліномів на банахових просторах** та **теорії аналітичних функцій на банахових просторах**, а також у суміжній **теорії алгебр Фреше**. Отримані узагальнення щодо алгебраїчних базисів, ізоморфізмів і еквівалентностей у зліченно-породжених алгебрах можуть бути використані при дослідженні інших абстрактних алгебричних систем і функціональних просторів. Окрім цього, запропонований у роботі криптографічний протокол на основі кілець цілих мультичисел становить практичний інтерес для **криптографії** та комп'ютерної безпеки – його можна розглядати як основу для розробки нових криптосистем або вдосконалення існуючих методів шифрування. Таким чином, результати дисертації мають потенціал як для подальшого теоретичного розвитку відповідних галузей математики, так і для прикладного впровадження в інших науках та технологіях.

**Зауваження.** Є деякі зауваження до змісту та оформлення дисертації:

1. Терміни “мультимножина” та “мультичисло” використані автором для різних, хоча й пов'язаних понять. В тексті варто особливо наголосити різницю між цими поняттями та забезпечити їх послідовне вживання.

2. В оформленні визначень і позначень інколи спостерігається відхилення від загальноприйнятої стилістики. Зокрема, замість зворотів типу “Позначимо  $M$ ...” (ст. 54) доцільніше писати “Позначимо через  $M$  множину ...” або “Нехай  $M$  – множина, ...”.

3. Деякі формули виходять за межі полів сторінки (стор. 78, 90, 92, 107, 125).

4. Хоча в розділі 5 описано криптографічний протокол, параметри безпеки обговорені частково. Для практичної цінності варто було навести оцінки складності та більше прикладів реалізації.

Втім, зазначені зауваження не впливають на загальне позитивне враження від дисертаційної роботи та жодним чином не применшують наукової цінності отриманих результатів.

**Висновок.** Вважаю, що дисертаційна робота «Аналіз в кільцях мультимножин, породжених алгебрами суперсиметричних поліномів на банахових просторах» є самостійною, завершеною науковою працею, виконаною автором на високому теоретичному рівні. Отримані результати свідчать про наукову зрілість здобувача, його вміння проводити дослідження та робити обґрунтовані узагальнення. Основні результати дисертаційного дослідження добре висвітлені у наукових працях. Робота повністю відповідає усім вимогам спеціальності 111 Математика та вимогам наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» (зі змінами), «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 (зі змінами). Її автор, Чоп'юк Юрій Юрійович, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії у галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 Математика.

**Офіційний опонент:**

кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
заступник директора з науково-педагогічної роботи  
Інституту прикладної математики та фундаментальних наук  
Національного університету "Львівська політехніка"

\_\_\_\_\_ Володимир ГЛАДУН