Лекція 3

Тема 1. Робота та енергія.

1. Робота і потужність. Потенціальні і дисипативні сили.
2. Кінетична енергія.
3. Потенціальна енергія пружно-деформованого тіла.
4. Закон збереження енергії.

1. Робота і потужність. Потенціальні і дисипативні сили.

Поняття роботи зв'язане з поняттям сили, швидкості і переміщення. Якщо під дією сили змінюється абсолютне значення швидкості, то говорять, що сила виконує роботу. У випадку, коли швидкість збільшується, то вважається, що робота додатна, а коли зменшується, то робота від'ємна.

Фізичну величину, яка вимірюється скалярним добутком вектора сили на вектор переміщення, називають **механічною роботою** сили.

Завжди коли сила діє на рухоме тіло і напрями сили та швидкості руху тіла збігаються, відбувається перехід енергії від тіла, з боку якого діє сила, до того тіла, на яке вона діє. Якщо тіло під дією сталої сили $\vec{F}$ переміщається на $\Delta\vec{r}$, то за означенням, величина роботи

$$\Delta A = \vec{F}\Delta\vec{r} . \tag{3.1}$$

Формулу (3.1) можна записати так:

$$\boxed{\Delta A = F\Delta r\cos\alpha}, \tag{3.2}$$

де α – кут між векторами $\vec{F}$ та $\Delta\vec{r}$. Оскільки добуток двох векторів $\vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F\Delta r\cos\alpha$ є скалярним добутком, то робота є **скалярною** величиною.

Якщо діє стала сила і рух відбувається прямолінійно, то робота

$$\boxed{A = F_s s = Fs\cos\alpha}, \tag{3.3}$$

де $F_s = F\cos\alpha$ – проекція вектора сили на напрям руху тіла.

З формул (3.2) і (3. 3) випливає, що при $\alpha < 90^\circ$ робота сили додатна, при $\alpha > 90^\circ$ вона від'ємна, а при $\alpha = 90^\circ$ робота дорівнює нулю. Отже, сила, нормальна до швидкості руху тіла, роботи не виконує.

Якщо сила з часом змінюється, то для обчислення величини роботи траєкторію руху тіла поділяють на елементарні ділянки Δs_i, в межах яких можна вважати величину сили сталою. Робота сили на кожній ділянці шляху $\Delta A_i = F_{si}\Delta s_i$, а на шляху s

$$A = \sum F_{si}\Delta s_i . \tag{3.4}$$

При $\Delta s \to 0$ з (3.4) дістаємо

$$\boxed{A = \int F(s)ds}, \tag{3.5}$$

де $F(s)$ – залежність сили від шляху.

Сили, що розглядаються у фізиці, поділяються на консервативні і неконсервативні. Сили, робота яких не залежить від форми траєкторії, а визначається тільки початковим і кінцевим розташуванням тіла в просторі, називають **консервативними**, або **потенціальними.** До них належать сили тяжіння, сили пружності, електростатичні сили взаємодії між зарядженими тілами. Сили будуть консервативними при умові, коли в системі немає переходу механічного руху в інші форми руху матерії або перетворення інших форм руху в механічний.

Сили, що не належать до консервативних, називають **неконсервативними** або **дисипативними**. Це сили тертя, що виникають при ковзанні одного тіла по поверхні іншого, сили опору, якого зазнає тіло, рухаючись у рідкому або газоподібному середовищах. Ці сили залежать не тільки від форми тіл, а й від їхньої відносної швидкості. Вони напрямлені завжди проти напряму швидкості, тому робота сил тертя завжди від'ємна.

Одиницею роботи в СІ є джоуль (Дж) на честь англійського фізика Джоуля (1818 – 1889), праці якого були присвячені розкриттю понять роботи і енергії: *1 Дж = 1 Н · 1 м*.

В атомній і ядерній фізиці в якості одиниці роботи користуються електрон-вольтом (еВ): $1 eB = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *Дж*.

Робота завжди виконується на протязі деякого відтинку часу Δt. Роботу, яка виконується за одиницю часу, називають **потужністю:**

$$\boxed{N = \frac{\Delta A}{\Delta t}.} \tag{3.6}$$

Якщо потужність з часом змінюється, то інтенсивність виконання роботи характеризують миттєвою потужністю

$$N = \frac{dA}{dt}. \tag{3.7}$$

Оскільки $dA = \vec{F} d\vec{r}$, то

$$\boxed{N = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{\upsilon}}. \tag{3.8}$$

Одиницею потужності в СІ є джоуль на секунду (Дж/с). Ця одиниця отримала назву ват (Вт) на честь шотландського інженера Джеймса Ватта (1736 – 1819): $1 Дж / 1 с = 1 Вт$.

2. Кінетична енергія.

Енергія є одним із найбільш важливих фізичних понять. Однак, дати просте і разом з тим достатньо строге і повне визначення енергії не так просто. Для випадку механічної енергії її можна визначити як **"здатність тіла (системи) виконувати роботу"**. Отже, в процесі роботи енергія системи змінюється. До здійснення роботи у системи була одна певна енергія, після виконання роботи – інша.

Енергію вимірюють в одиницях роботи. В механіці розрізняють два види енергії – **кінетичну** і **потенціальну.**

Кінетична енергія – це енергія, якою володіє тіло завдяки його руху.

Знайдемо роботу, яку виконує сила при переміщенні матеріальної точки масою m з положення 1 в положення 2 (рис.3.1, Дущенко). При нескінченно малому переміщенні $d\vec{r}$ робота сили $dA = \vec{F} d\vec{r}$. Повна робота на ділянці шляху від точки 1 до точки 2

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} d\vec{r} = m\int_1^2 \frac{d\vec{r}}{dt} d\vec{\upsilon} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}, \tag{3.9}$$

де υ_1 і υ_2 – відповідно початкова і кінцева швидкості матеріальної точки.

Величину

$$\boxed{W_к = \frac{m\upsilon^2}{2}.} \tag{3.10}$$

Називають **кінетичною енергією**. За допомогою цього поняття формулу (3.9) можна записати

$$\boxed{A_{12} = W_{к2} - W_{к1}}. \tag{3.11}$$

Отже, робота сили при переміщенні матеріальної точки дорівнює зміні кінетичної енергії цієї точки.

3. Потенціальна енергія пружно-деформованого тіла.

Якщо на систему діють тільки консервативні сили, то для неї можна ввести поняття потенціальної енергії.

Потенціальна енергія ($W_п$) – це енергія взаємодіючих тіл, що не залежить від швидкості їхнього руху. Оскільки робота консервативних сил не залежить від форми шляху переходу системи з одного стану в інший, то потенціальна енергія залежить тільки від координат матеріальних точок системи в заданому стані. Значення потенціальної енергії залежить від того, яке положення системи умовно взяти за початок відліку.

Піднімаючи тіло масою m на певну висоту h над вихідним рівнем, ми виконуємо роботу проти сил тяжіння, завдяки чому тіло набуває **гравітаційної потенціальної енергії**. В даному положенні тіло володіє здатністю виконати роботу, якщо йому дати можливість впасти.

Так, у системі Земля – матеріальна точка за нульовий рівень беруть поверхні Землі .Тіло масою m, підняте над поверхнею Землі на висоту h, має потенціальну енергію

$$\boxed{W_n = mgh}. \tag{3.12}$$

Розрахуємо потенціальну енергію пружно-деформованого тіла.

Нехай пружина вже розтягнута на величину x_1. Розтягнемо її ще на величину x_2 (рис. 6.11,). Будемо рахувати, що сила пружності відчиняється закону Гука і зовнішня сила $F_{зовн} = -F_{пр} = kx$, де x – величина деформації пружини, k – коефіцієнт пропорційності, який залежить від властивостей матеріалу, з якого виготовлена пружина, та її конструкції і визначається експериментально. Тоді робота зовнішньої сили рівна

$$A = \frac{kx_2 + kx_1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}. \tag{3.13}$$

Таким чином, робота зовнішньої сили по розтягненню пружини залежить тільки від значень кінцевої і початкової деформації пружини. Вираз для роботи можна записати як:

$$\boxed{A = W_{n2} - W_{n1}}, \tag{3.14}$$

де $\boxed{W_{n1} = \frac{kx_1^2}{2}}$, $\boxed{W_{n2} = \frac{kx_2^2}{2}}$ – потенціальна енергія пружно-деформованого тіла в початковому і кінцевому станах.

Потенціальною енергією володіє, наприклад, заведена пружина годинника. Пружина набула цієї енергії завдяки роботі, яку здійснила над нею людина. При розкручуванні вона виконує роботу, повертаючи стрілки годинника.

Отже, **потенціальна енергія пружини** залежить від природи матеріалу, із якого виготовлена пружина, і ні в якому разі не залежить від її інертної маси, як це спостерігається у випадку **гравітаційної потенціальної енергії**.

4. Закон збереження і перетворення енергії.

Нехай тіло масою m вільно падає з висоти h. На висоті h_1 його швидкість нехай дорівнює υ_1, а дещо пізніше на висоті h_2 вона дорівнює υ_2 (рис.). За цей час потенціальна енергія тіла зменшилася на $\Delta W_n = \, = mgh_1 - mgh_2$, при цьому його кінетична енергія збільшилася на величину $\Delta W_к = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}$. Відомо (3.11), що зміна кінетичної енергії тіла дорівнює роботі сил тяжіння, яка з іншого боку дорівнює ΔW_n. Тоді

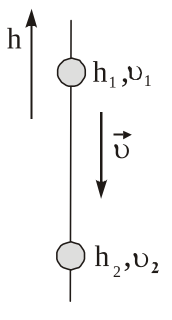

Рис. 5.7

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = mgh_1 - mgh_2,$$

або

$$\boxed{\frac{m\upsilon_1^2}{2} + mgh_1 = \frac{m\upsilon_2^2}{2} + mgh_2}. \tag{3.15}$$

Суму кінетичної і потенціальної енергій тіла (системи) називають його **повною енергією *W*.** Із формули (3.15) маємо, що $W_1 = W_2$ або

$$\boxed{W = W_к + W_n = const.} \tag{3.16}$$

Це означає, що **сума кінетичної і потенціальної енергії тіла, що вільно падає, стала.** Однак, останнє має місце тільки в тому випадку, коли на тіло або на систему тіл, діють консервативні сили. Отже, в системі, в якій діють тільки консервативні сили, повна механічна енергія залишається сталою. Це твердження називається **законом збереження механічної енергії в системі.**

Тема 2. Динаміка обертального руху твердого тіла.

1. Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла.
2. Теорема Штейнера. Кінетична енергія обертального руху.
3. Закон збереження моменту імпульсу твердого тіла, що обертається навколо закріпленої осі.

1. Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла.

На основі уявлень про тверде тіло як систему матеріальних точок розглянемо рух однієї з них – масою m_i, що знаходиться на відстані r_i від осі обертання і перебуває під дією сили $\vec{F}_i$ (рис. 4.6, Дущенко). У загальному випадку напрям сили $\vec{F}_i$ може бути довільний. Розкладемо її на складові $\vec{F}_{1i}$ і $\vec{F}_{2i}$ так, щоб сила $\vec{F}_{2i}$ лежала у площині, перпендикулярній осі обертання, а сила $\vec{F}_{1i}$ була паралельна осі обертання. Оскільки сила $\vec{F}_{1i}$ паралельна осі обертання, то вона не зумовлює обертального руху тіла навколо цієї осі.

Дія сили $\vec{F}_{2i}$ зумовлює тангенціальне прискорення a_τ матеріальної точки. За другим законом Ньютона, запишемо

$$\vec{F}_{2i} = m_i \vec{a}_{\tau i}. \tag{3.17}$$

Оскільки між кутовим прискоренням і тангенціальним прискоренням існує взаємозв’язок $\vec{a}_{\tau i} = \left[\vec{\varepsilon}, \vec{r}_i\right]$, то

$$\vec{F}_{2i} = m_i \left[\vec{\varepsilon}, \vec{r}_i\right]. \tag{3.18}$$

Помножимо обидві частини рівності (3.18) векторно на $\vec{r}_i$:

$$\left[\vec{r}_i, \vec{F}_{2i}\right] = m_i \left[\vec{r}_i \left[\vec{\varepsilon}, \vec{r}_i\right]\right]. \tag{3.19}$$

Ліва частина рівняння (3.19) являє собою **момент сили відносно нерухомої осі**

$$\boxed{\vec{M}_i = \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{2i}\right]}. \tag{3.20}$$

Запишемо вираз (3.20) у скалярній формі:

$$\boxed{M_i = r_i F_{2i} \sin\alpha}. \tag{3.21}$$

Звідси видно, що $\boxed{r_i \sin\alpha = l_i}$. Величину l_i називають **плечем сили** $\vec{F}_{2i}$ відносно осі обертання. **Плече** – це найкоротша відстань від осі обертання до напряму дії сили. Отже, момент сили відносно осі обертання є добуток сили на її плече. Вважають момент додатним, якщо складова сили $\vec{F}_{2i}$ змушує обертатись тіло за годинниковою стрілкою, а від’ємним – при обертанні тіла проти годинникової стрілки.

Права частина рівності (3.19) у скалярній формі має такий вигляд: $m_i r_i^2 \varepsilon$. Величину $m_i r_i^2$ називають моментом інерції матеріальної точки відносно осі обертання. Тоді співвідношення (3.19) перепишемо у вигляді

$$M_i = m_i r_i^2 \varepsilon. \tag{3.22}$$

Очевидно, для кожної матеріальної точки твердого тіла можна записати дане співвідношення. Сума по всіх матеріальних точках твердого тіла дає

$$\sum M_i = \varepsilon \sum m_i r_i^2. \tag{3.23}$$

Алгебраїчну суму $\boxed{\sum M_i = M}$ називають **моментом сил тіла** відносно осі обертання. Величину $\boxed{I = \sum m_i r_i^2}$, що дорівнює сумі добутків мас матеріальних точок на квадрати їхніх відстаней від осі обертання, називають моментом інерції тіла відносно тіла відносно цієї осі. Тоді вираз (3.23) набирає вигляду

$$\boxed{M = I\varepsilon}. \quad (3.24)$$

Це рівняння є **основним рівнянням динаміки обертального руху**.

2. Теорема Штейнера. Кінетична енергія обертального руху.

Момент інерції характеризує інерційні властивості твердого тіла при його обертальному русі. Кожне тіло, незалежно від того, чи воно перебуває в обертальному русі, чи в спокої, має конкретне значення моменту інерції відносно конкретної осі обертання. Величина моменту інерції тіла залежить від розташування осі, відносно якої його визначають. Найменші значення моментів інерції тіло має тоді, коли вісь обертання проходить через його центр мас. Такі моменти інерції називають **головними**. Головні моменти інерції однорідних тіл правильної геометричної форми визначають за допомогою інтегрального числення.

Якщо момент інерції тіла визначено відносно якоїсь осі, що проходить через центр мас, то момент інерції цього тіла відносно будь-якої осі, паралельної першій, визначаються за **теоремою Штейнера**. Відповідно до неї **момент інерції відносно будь-якої осі дорівнює сумі моменту інерції I_0 відносно осі, що паралельна даній і проходить через центр мас тіла, і добутку маси тіла *m* на квадрат відстані *a* між осями**:

$$\boxed{I = I_0 + ma^2}. \quad (3.25)$$

Під час обертання твердого тіла різні його точки мають різну лінійну швидкість, а отже, і різну кінетичну енергію. Кінетична енергія матеріальної точки

$$T_i = \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} = \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2}. \quad (3.26)$$

Кінетична енергія обертального руху всього тіла дорівнює сумі кінетичних енергій його елементів

$$T = \sum \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 . \quad (3.27)$$

Оскільки величина $\sum m_i r_i^2 = I$ є момент інерції тіла, то (3.27) набирає вигляду

$$\boxed{T = \frac{I\omega^2}{2}}. \quad (3.28)$$

Оскільки плоский рух твердого тіла можна уявити як рух, що складається з поступального руху центра мас і обертального руху навколо осі, яка проходить через центр мас і має незмінний напрям у просторі, то кінетична енергія тіла, що здійснює плоский рух, складається з кінетичної енергії поступального руху і кінетичної енергії обертального руху, тому повна кінетична енергія

$$\boxed{T = \frac{m\upsilon_0^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}}, \quad (3.29)$$

де υ_0 – лінійна швидкість центра мас тіла.

Нехай тіло обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі *z*, що не проходить через центр мас. У цьому випадку кінетична енергія дорівнює

$$T = T_{об} = \frac{I_z \omega^2}{2} , \quad (3.30)$$

де I_z – момент інерції відносно заданої осі *z*.

Згідно формули (3.29) кінетична енергія тіла дорівнює

$$T = \frac{m\upsilon_0^2}{2} + \frac{I_0 \omega^2}{2}, \quad (3.31)$$

де I_0 – момент інерції тіла відносно осі z_0, що паралельна даній і проходить через центр мас.

Швидкість руху центра мас визначається з умови, що ця точка, як і всі решту, обертається навколо осі, яка паралельна тій, що проходить через центр мас, з кутовою швидкістю ω. Якщо a – відстань від центру мас до осі, то $\upsilon_0 = a\omega$. Підставляючи це у ф-лу (3.31), отримаємо:

$$T = \frac{1}{2}(ma^2 + I_0)\omega^2. \tag{3.32}$$

Порівнюючи цю формулу з (3.28), прийдемо до рівності

$$\boxed{I = I_0 + ma^2}. \tag{3.33}$$

3. Закон збереження моменту імпульсу твердого тіла, що обертається навколо закріпленої осі.

Із основного рівняння динаміки обертального руху (3.24) видно, що:

$$\frac{d}{dt}(I_z\vec{\omega}_z) = M_z,$$

випливає, що якщо на тіло ніякі зовнішні сили не діють чи діють такі сили, результуючий момент яких відносно заданої осі z дорівнює нулю, то момент імпульсу тіла відносно цієї осі буде сталим:

$$\boxed{I_z\vec{\omega}_z = const}. \tag{3.34}$$

В цьому і полягає закон збереження моменту імпульсу тіла, що обертається навколо нерухомої осі. Якщо момент інерції тіла не змінюється, то з (3.34) випливає сталість кутової швидкості $\vec{\omega}_z$.

З іншої сторони, як видно з (3.34), зменшення (чи збільшення) моменту інерції тіла в декілька раз повинно супроводжуватись збільшенням (чи зменшенням) кутової швидкості у стільки ж раз. Якісно цей висновок можна спостерігати в досліді Жуковського зі стільцем, закріпленим на горизонтальній платформі, яка може обертатись з дуже малим тертям навколо вертикальної осі. Дослід проводиться так: експериментатор бере у руки важкі гирі і сідає на стілець, а ноги ставить на платформу. Потім витягує руки з вантажем в сторони, після чого інша людина надає платформі деякого обертання. Під час обертання експериментатор підносить руки до грудей; швидкість його обертання при цьому різко зростає; якщо він розведе руки в сторони знову, кутова швидкість знову зменшиться. Такий ефект пояснюється тим, що при згинанні рук до грудей, експериментатор зменшує момент інерції системи, що складається з тіла і вантажів. При розгинанні рук момент інерції системи зростає. Зміною моменту інерції свого тіла для отримання швидкого обертання користуються фігуристи, балерини, акробати.