

ТЕМА: МАТЕМАТИЧНЕ ПЛАНУВАННЯ АКТИВНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ. ПЛАНИ І ПОРЯДКУ. ЛІНІЙНА МОДЕЛЬ.

Вступ

1. Математична модель експерименту або спостережень.

Розглянемо математичну модель експерименту у вигляді «чорної скриньки» експериментального об'єкта дослідження (рис. 1). На рис. 1: $\mathbf{X}$ [$x_1, \dots, x_4, \dots$] – матриця контрольованих та керованих факторів (вхідні змінні), зміна яких відбивається на функції відгуку $\mathbf{Y}$ [$y_1, \dots, y_6, \dots$]; $\mathbf{K}$ [$k_1, k_2, \dots, k_m$] – матриця некерованих, але контрольованих змінних (наприклад, атмосферний тиск, вологість, температура та швидкість вітру повітря тощо); $\mathbf{Z}$ [$z_1, z_2, \dots, z_n$] – матриця неконтрольованих та некерованих змінних (частіше $\mathbf{K}$ і $\mathbf{Z}$ впливають на $\mathbf{Y}$ випадковим чином).

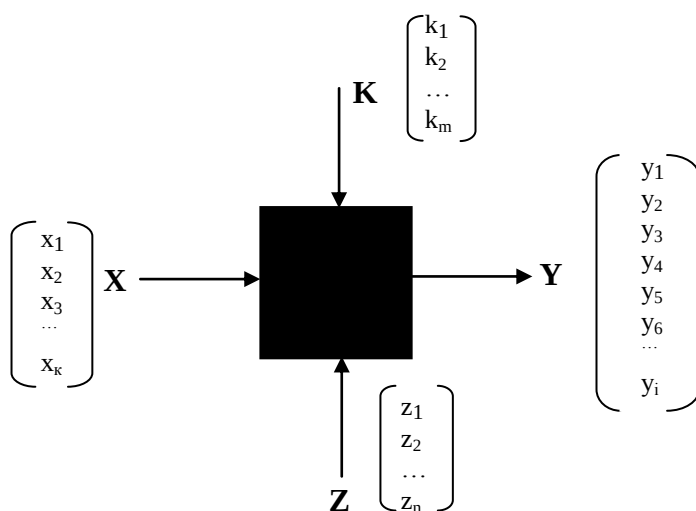


Рис. 1. Математична модель експерименту у вигляді «чорної скриньки»: $\mathbf{X}$ – матриця вхідних змінних; $\mathbf{Y}$ – матриця функцій відгуку; $\mathbf{K}$, $\mathbf{Z}$ – матриці збурюючих [контрольованих, некерованих ($\mathbf{K}$) та неконтрольованих, некерованих ($\mathbf{Z}$)] змінних.

2. Метою математичних методів в біології є:

2.1. Порівняння двох або ряду матриць вимірювань або спостережень, а саме:

за дисперсійною аналізою:

- виявлення суттєвої статистичної різниці між двома або рядом дисперсій;
- виявлення суттєвої статистичної різниці між двома або рядом середніх;
- виявлення суттєвої статистичної різниці між двома або рядом матриць в цілому тощо;

2.2. За кореляційною аналізою:

- виявлення лінійного зв'язку між випадковими величинами та оцінка сили зв'язку;
- те ж саме для нелінійного зв'язку.

2.3. За регресійною аналізою:

- пошук математичних моделей (функцій), що адекватно описують об'єкт досліджень або спостережень.

2.4. Математичне планування експерименту або спостереження:

- пошук математичних моделей при мінімізації числа експериментів;
- пошук оптимальних рішень.

3. Методологічні концепції математичного планування експерименту:

3.1. Методологія «активного» експерименту:

- Відомі традиційні методи дослідження – «пасивний» експеримент, коли один фактор варіюється, а на решта накладені обмеження – сталість величин. Так, для $k=5$ факторів, n – повторних дослідів на $p=5$ рівнях необхідно за «пасивним» експериментом провести дослідів:

$$N=p^k \cdot n=5^5 \cdot 5=15.625 \quad (1)$$

- Математичні методи планування експерименту дозволяють «активним» експериментом часто досить $n=2$):

а) значно зменшити число дослідів:

$$N=p^k \cdot n=2^5 \cdot 2=64 \quad (2)$$

- б) вирішувати багатофакторні завдання за малу кількість дослідів, врахувати ефекти взаємодії, отримати точні та надійні результати і знайти локальний та глобальний оптимуми;

в) «активний експеримент» дозволяє використати математичні методи на всіх стадіях наукового пошуку, в т.ч. і на стадії постановки завдання та планування експерименту;

г) дослідження ведеться за певним планом в декілька послідовних етапів, після кожного змінюється стратегія і методи експерименту і навіть критерій оптимальності;

г) методи використовуються при неповному знанні механізмів явищ.

3.2. Регресійна аналіза, яка базується на тому що результати експерименту є незалежні **випадкові** величини з однорідними дисперсіями:

а) випадкова величина є заданою, якщо відома її функція розподілу. Математичний апарат максимально ефективний, якщо розподіл є нормальним Гаусса. У тому випадку, коли величина не має нормального розподілу, то перетворенням величини $y \rightarrow y^2, 1/y, \ln y, \exp(y) \dots$ можна досягти нормального розподілу;

б) випадкова величина бажано, щоби мала розподіл з однорідними дисперсіями: для підвищення надійності результатів. Якщо величина не має однорідної дисперсії, то цього можна досягти перетворенням величини або збільшенням кількості повторних дослідів;

в) підвищення точності вимірювань: необхідно забезпечити такі умови, щоби похибка вимірювань факторів була набагато менша за похибку визначення функції відгуку (функції цілі, параметра оптимізації).

3.3. Концепція рандомізації: свідомо створюють ситуацію, щоби зробити випадковими ті систематично діючі фактори, які важко контролювати або стабілізувати. Тоді ці фактори можна розглядати як випадкові величини, що дозволяє їх враховувати статистично.

3.4. Концепція послідовного експерименту – все дослідження складається з окремих послідовних етапів (серій дослідів), при цьому схема всього експерименту попередньо не планується. Після кожного етапу за результатами приймається рішення про напрямок подальшої роботи та вибір методів.

3.5. Концепція оптимального використання факторного простору: ефективність активного експерименту збільшується зі збільшенням кількості факторів і точності оцінок коефіцієнтів регресії.

3.6. Концепція статистичних оцінок: ступінь різниці між знайденим рішенням та результатами експерименту. Попередньо дослідник домовляється із замовником, що вважати за «добре» рішення. В біології «добре» рішення вважається таким, якщо статистична перевірка показала, що йому можна довіряти з 95%-вою або 99%-вою ймовірністю (5% або 1% рівнем значущості).

3.7. Концепція компактності інформації: отримана інформація у вигляді математичної моделі і т.і. зручна для зберігання, публікацій і порівняння.

4. Вибір функції відгуку (функції цілі, критерію оптимізації).

4.1. Вимоги до критерію оптимізації (функції цілі): критерій повинен бути:

- а) ефективний;
- б) універсальний, щоби всеохоплююче характеризував якість об'єкту дослідження;
- в) однозначний, тобто із достатньою повнотою кількісно характеризував якість об'єкту дослідження так щоби певному набору значень факторів повинно відповідати тільки одне значення критерію оптимізації (і, навпаки, одному значенню критерію оптимізації може відповідати кілька наборів значень факторів);
- г) такий, що можна було б його оцінити з максимальною статистичною ефективністю;
- г) простий;
- д) зручний;
- е) бажано, щоб мав фізичний смисл;
- є) був би зрозумілий досліднику.

4.2. Зменшення кількості функцій цілі (критеріїв оптимізації) та факторів за теорією графів.

а. При вирішенні завдань, пов'язаних з кількома функціями відгука (функціями цілі, критеріями оптимізації), зменшують їх число і аналізу процесів та пошук оптимуму ведуть за одним критерієм, а на решту накладають обмеження.

б. Знайдемо лінійні та нелінійні зв'язки між $Y \sim X$ та всередині цих матриць $Y_1 \sim Y_2, \dots; X_1 \sim X_2, \dots$ методами кореляційного та регресійного аналізів. Результати розрахунків вибірових коефіцієнтів кореляції, функції відгуку y_i та y_j , вхідних параметрів (факторів) x_k та x_m зведені в табл. 1 (загальний вигляд) та табл. 2 і табл. 3 (конкретний приклад).

Таблиця 1

Матриця коефіцієнтів кореляції між значеннями функцій цілі $y_i \sim y_j$
(загальний вигляд)

$y_i \backslash y_j$	y_1	y_2		y_i		y_n	$\sum_{i=1}^n r_{ij}$	Ранг y_i
y_1	1	r_{12}		r_{1i}		r_{1n}	$\sum_{i=1}^n r_{1i}$	R_1
y_2	r_{21}	1		r_{2i}		r_{2n}	$\sum_{i=1}^n r_{2i}$	R_2
.....								
.....								
.....								
y_i	r_{i1}	r_{i2}		1		r_{in}	$\sum_{i=1}^n r_{ii}$	R_i
.....								
.....								
.....								
y_n	r_{n1}	r_{n2}		r_{ni}		1	$\sum_{i=1}^n r_{ni}$	R_n

в. **Визначення «лідерів» і «автсайдерів» за коефіцієнтом кореляції** (лінійний вплив). Розраховують вибіровий коефіцієнт кореляції r_{ii} , який дає оцінку генеральному коефіцієнту кореляції ρ_{ii} .

При визначенні найбільш показної функції відгуку y_i та найбільш показного вхідного фактора x_k за коефіцієнтами кореляції використовують теорію графів, розглядаючи матриці суміжності графів (табл. 2 і 3), у яких двом

суміжним вершинам (рис. 2) приписані значення, що дорівнюють величинам відповідних коефіцієнтів кореляції (табл. 2 і 3).

За певною процедурою при виборі найбільш показних y_i та x_k , наприклад, із груп $y_1, \dots, y_7$ та $x_1, \dots, x_4$ дають оцінку сумарної сили лінійного впливу

$$\sum_{i,j=1}^{n=7} |r_{ij}| \text{ та } \sum_{k,m=1}^n |r_{km}| \text{ кожного } y_i \text{ та } x_k \text{ з відповідної групи } y \text{ (або } x) \text{ на решту } y_j \text{ та } x_m$$

за теорією графів (табл. 2, 3). У табл. 2 і 3: $|r_{ij}| = |r_{ji}|$, $|r_{km}| = |r_{mk}|$. Ці результати дозволяють виявити мажорантні ряди за зростаючою сумарною силою зв'язку (сума елементів матриць табл. 2 і 3) та виявити «лідерів» і «автсайдерів» за коефіцієнтами кореляції:

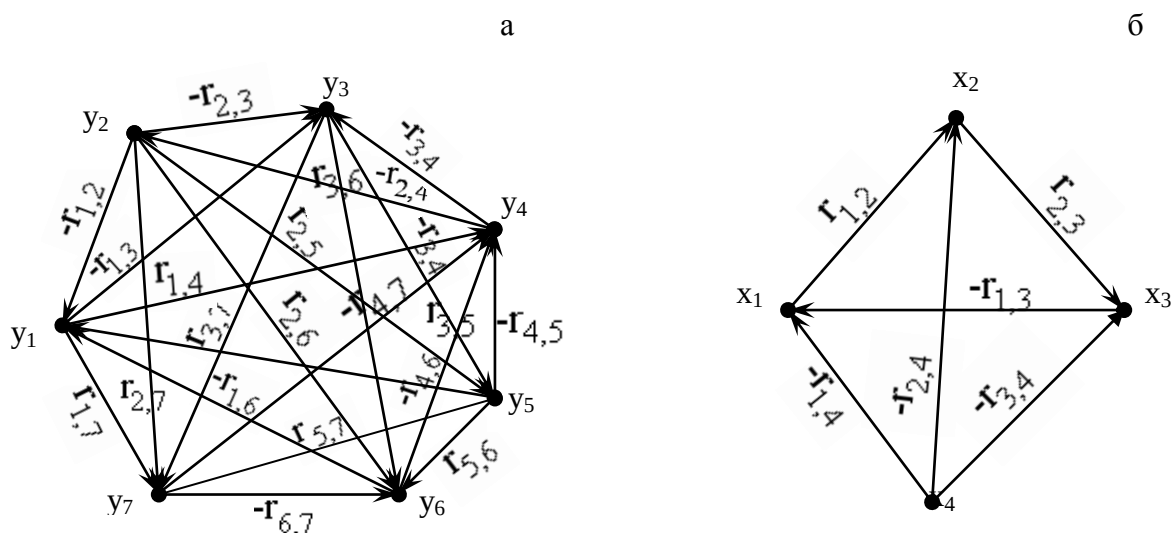


Рис. 2. Граф кореляційних зв'язків між $y_i \sim y_j$ (а) та $x_k \sim x_m$ (б).

Таблиця 2

Матриця коефіцієнтів кореляції між значеннями функції відгуку $y_i \sim y_j$.

$y_i \backslash y_j$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	$\sum_{j,i=1}^{n=7} r_{ij} $	Ранг y_i
y_1	1	-0,2401	0,0578	0,3203	-0,0518	-0,1735	0,0716	1,9151	6
y_2	-0,2401	1	0,5157	-0,5837	0,1473	0,3799	0,2976	3,1643	1
y_3	0,0578	0,5157	1	-0,2706	0,1617	0,2466	0,6194	2,8718	3
y_4	0,3203	-0,5837	-0,2706	1	-0,3174	-0,3014	-0,1075	2,9009	2
y_5	-0,0518	0,1473	0,1617	-0,3174	1	0,1162	0,1004	1,8948	7
y_6	-0,1735	0,3799	0,2466	-0,3014	0,1162	1	-0,1471	2,3647	4
y_7	0,0716	0,2976	0,6194	-0,1075	0,1004	-0,1471	1	2,3436	5

- за функцією відгуку

$$y_5 \leq y_1 < y_7 \leq y_6 < y_3 \leq y_4 < y_2; \quad (3)$$

- за вхідними факторами

$$x_1 < x_4 < x_2 < x_3. \quad (4)$$

Таким чином, за коефіцієнтами кореляції (лінійний вплив) найбільш показною функцією відгуку $y_i \in y_2$, менш показними – y_4 і y_3 , далі – y_6 та y_7 і «автсайдерами» мажорантного ряду є y_1 і y_5 . А найбільш показним «лідером» вхідних факторів $x_k \in x_3$, далі – x_2 , x_4 , «автсайдером» мажорантного ряду є x_1 .

Таблиця 3

Матриця коефіцієнтів кореляції між значеннями вхідних факторів $x_k \sim x_m$.

$x_k \backslash x_m$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\sum_{k,m=1}^{n=4} r_{km} $	Ранг x_k
x_1	1	0,0756	-0,0270	-0,0207	1,1233	4
x_2	0,0756	1	0,1473	-0,0387	1,2616	2
x_3	-0,0270	0,1473	1	-0,1428	1,3171	1
x_4	-0,0207	-0,0387	-0,1428	1	1,2022	3

4.3. Узагальнена функція цілі (узагальнена функція бажаності).

Якщо всі функції цілі y_i , що характеризують об'єкт дослідження, важливі, то утворюють узагальнену функцію цілі (узагальнену функцію бажаності):

$$D = \sqrt[n]{d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n}, \quad (5)$$

де D – середнє геометричне частинних бажаностей окремих критеріїв d_i :

$$0 \leq d_i \leq 1, \quad (6)$$

$$\text{тоді й} \quad 0 \leq D \leq 1. \quad (7)$$

Частинні бажаності d_i пов'язані із кодованими (безрозмірними) величинами частинних критеріїв y_i' таким чином:

$$d_i = \exp \left[- \exp(- y_i') \right]. \quad (8)$$

Останні розраховуються за апроксимаційними (емпіричними) рівняннями:

$$y_i' = b_{0i} + b_{1i} y_i; \quad (9)$$

$$y_j' = b_{0j} + b_{1j} y_j + b_{11j} y_i^2; \quad (10)$$

$$y'_m = b_{0m} + b_{1m} y_m + b_{11m} y_m^{-2}; \quad (11)$$

$$y'_a = b_{0a} + b_{1a} \ln y_a; \quad (12)$$

.....

Графіки шкал частинних бажаностей під час однобічного та двобічного обмеження приведені на рис. 3.

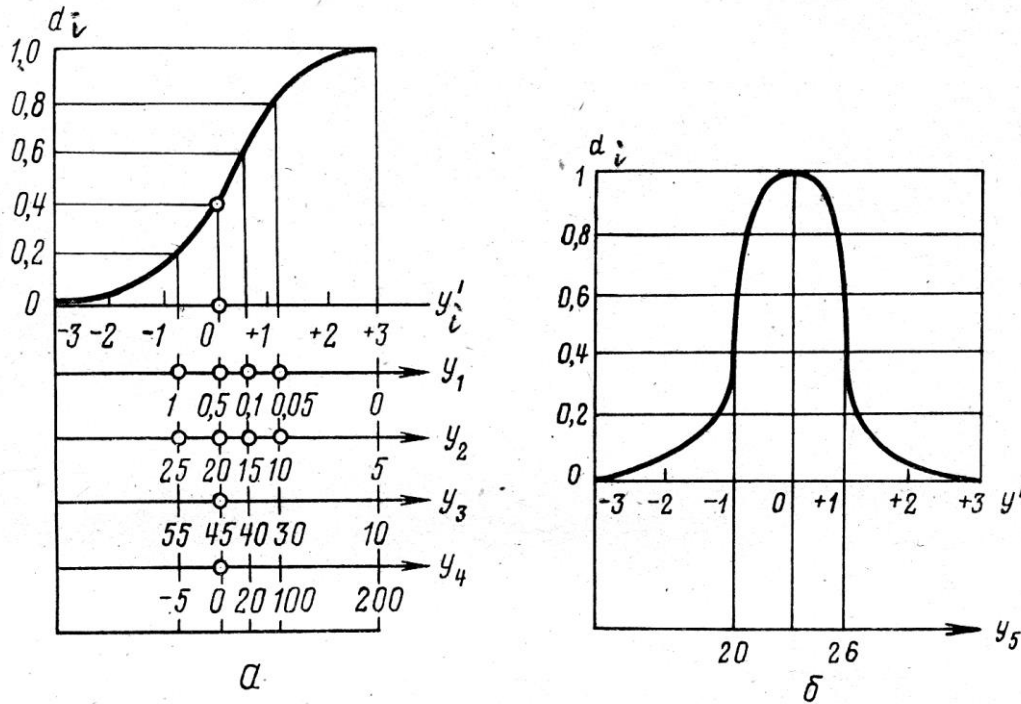


Рис. 3. Графіки шкал частинних бажаностей під час однобічного (а) та двобічного (б) обмеження.

4.4. Вибір факторів та їх рівнів варіювання.

4.4.1. Вимоги до факторів:

- а) вони повинні впливати на функції цілі;
- б) повинні бути керованими та однозначними;
- в) могли бути виміряні засобами з достатньо високою, гарантованою точністю;
- г) бути сумісними один з одним;
- г) щоби не були пов'язані один з одним лінійними кореляційними зв'язками;
- д) бажано, щоб вони оцінювалися кількісно (якісна оцінка теж можлива).

4.4.2. Вибір ділянки визначення факторів.

Необхідно правильно вибрати центр експерименту (нульову точку), який як можна ближче був би до ділянки оптимізації або щоби центр експерименту відповідав найкращому значенню критерію оптимізації за попередніми даними.

Вибір інтервалу варіювання j -того фактора $\varepsilon_j > 2$ (квадратичної помилки фіксування даного фактора).

Чим більший інтервал варіювання (більші розміри факторного простору), тим більша **нелінійність моделі**, менша її **адекватність** та **ефективність** пошуку оптимуму. Із збільшенням кількості рівнів варіювання підвищується **чутливість** експерименту, але разом з тим збільшується кількість дослідів.

При кодуванні факторів здійснюють лінійне перетворення координат факторного простору з перенесенням начала координат в нульову точку:

$$x_{ji} = \frac{C_{ji} - C_{j0}}{\varepsilon_j}, \quad (13)$$

де x_{ji} – кодоване значення j -того фактора на i -рівні;

C_{ji} – натуральне значення j -того фактора на i -рівні;

C_{j0} – натуральне значення j -того фактора на нульовому рівні;

ε_j – інтервал варіювання j -того фактора.

Якщо N – кількість дослідів, p – кількість рівнів, k – кількість факторів, а n – кількість повторних дослідів, то

$$N = p^k \cdot n. \quad (14)$$

Рівні можуть набувати таких значень:

$$\dots; -3,333; -2,828; -2,378; -2,0; -1,682; -1,414; -1,0; -0,5; 0; +0,5; +1,0; +1,414; +1,682; +2,0; +2,378; +2,828; +3,333; \dots \quad (15)$$

I. Плани першого порядку Бокса

1.1. Повний факторний експеримент (ПФЕ). Лінійна модель

1.1.1. Лінійна емпірична модель за планами Бокса:

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j x_j = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_j x_j + \dots + b_k x_k \quad (16)$$

де b_0, b_j – коефіцієнт моделі (16).

1.1.2. Лінійна теоретична модель:

$$Y = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j X_j = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_j X_j + \dots + \beta_k X_k \quad (17)$$

1.1.3. Статистичні оцінки:

$$\left. \begin{array}{l} y \rightarrow Y \\ b_0 \rightarrow \beta_0 \\ b_j \rightarrow \beta_j \end{array} \right\} \quad (18)$$

1.1.4. Завдання математичного планування зводиться:

а) знаходження коефіцієнтів моделі (16) b_0, b_j ;

б) розрахунок дисперсії відновлення (помилки всього експерименту)

$S^2_{\text{відн.}}$;

в) перевірка значущості коефіцієнтів моделі (16) на рівні помилки експерименту;

г) розрахунок дисперсії адекватності $S^2_{\text{ад.}}$;

д) перевірка адекватності моделі на рівні помилки експерименту.

1.2. Побудова плану повного факторного експерименту для знаходження лінійної моделі.

а. Нехай $p=1$ у кожній точці плану, а $k=2$, тоді

$N=2^2 \cdot 1=4$ дослідів достатньо, щоб отримати лінійну модель:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2, \quad (19)$$

Якщо $p=2$ у кожній точці плану, тоді $N=2^2 \cdot 2=8$.

Для $k=3, p=1$: $N=2^3 \cdot 1=8$ дослідів, щоб отримати лінійну модель:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3. \quad (20)$$

Якщо $p=3$ у кожній точці плану, тоді $N=2^3 \cdot 3=24$.

Таблиця 4

План ПФЕ Бокса для $k=2$

Матриця планування				Матриця результатів експерименту
i	x_0	x_1	x_2	y_i
1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	-1	+1	y_2
3	+1	+1	-1	y_3
4	+1	-1	-1	y_4

б. Планування ведеться на 2-х рівнях: верхній (+1) та нижній (-1). Для розрахунку дисперсії відновлення досліди можна повторити в нульовій точці (центрі плану) або у кожній точці плану.

в. факторний простір при $k=2$ (а), при $k=3$ (б) має вигляд (рис. 4).

г. Тоді план 1-го порядку буде мати вигляд для $k=2$ (табл. 4).

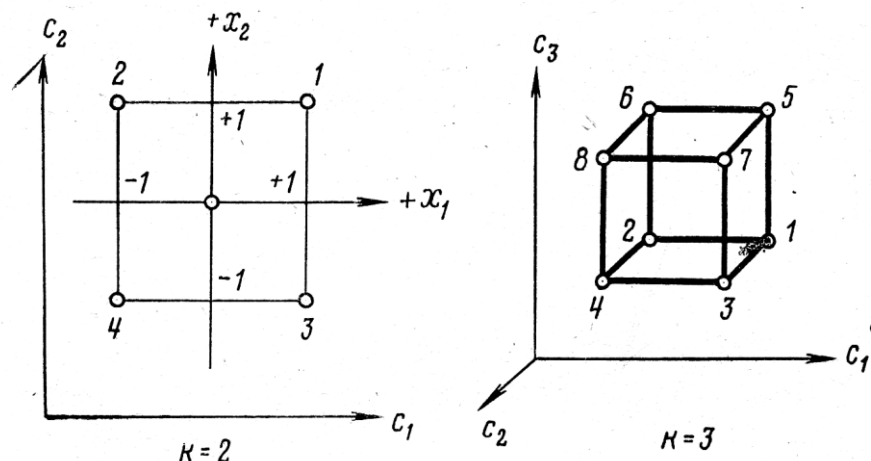


Рис. 4. Розташування точок плану 1-го порядку у факторному просторі при $k=2$ (а) та $k=3$ (б).

г. План 1-го порядку (ПФЕ) для $k=3$ буде мати вигляд (табл. 5).

Таблиця 5

План повного факторного експерименту для $k=3$

Матриця планування					Матриця результатів експерименту
i	x_0	x_1	x_2	x_3	y_i
1	+1	+1	-1	-1	y_1
2	+1	-1	-1	-1	y_2
3	+1	+1	+1	-1	y_3
4	+1	-1	+1	-1	y_4
5	+1	+1	-1	+1	y_5
6	+1	-1	-1	+1	y_6
7	+1	+1	+1	+1	y_7
8	+1	-1	+1	+1	y_8

У табл. 4 і 5 x_0 – матриця фіктивної змінної, яка використовується для розрахунку коефіцієнта рівняння b_0 , а матриці x_1 , x_2 (а для $k=3$ і x_3) – для розрахунку коефіцієнтів b_1 , b_2 (а для $k=3$ і b_3).

д. Самостійно складіть план 1-го порядку для $k=4$ і $k=5$.

1.3. Критерії оптимальності лінійних планів Бокса:

а) умова **симетричності** плану відносно центру експерименту:

$$\sum_{i=1}^N x_{ji} = 0, \quad (21)$$

$j=1, 2, \dots, j, \dots, k; i=1, 2, \dots, i, \dots, N.$

б) умова **нормування** плану:

$$\sum_{i=1}^N x_{ji}^2 = N, \quad (22)$$

$j=1, 2, \dots, j, \dots, k; i=1, 2, \dots, i, \dots, N.$

в) умова **ортогональності** плану:

$$\sum_{i=1}^N x_{ji} x_{ui} = 0, \quad (23)$$

$j=1, 2, \dots, j, \dots, k; i=1, 2, \dots, i, \dots, N.$

При виконанні умови (21), (22) коефіцієнти математичної моделі оцінюються з мінімальною дисперсією – кожен коефіцієнт моделі оцінюється за результатами всіх N -дослідів [або $(N \cdot n)$ -дослідів, якщо n раз дослід повторюється в кожній точці плану] з дисперсією, що в N -разів менша за дисперсію відновлення:

$$S_{\{b_j\}}^2 = N S_{\{y\}}^2 = N S_{\text{відн.}}^2 \quad (24)$$

1.4. Процедура реалізації лінійного плану Бокса:

а) за матрицею планування (4) складають робочу матрицю (матрицю реалізації) (табл. 6) для $k=2$;

б) за матрицею планування (5) складають робочу матрицю (матрицю реалізації дослідів) (табл. 7) для $k=3$;

в) дослід (в т.ч. і повторні) нумерують і проводять рандомізацію, тобто надають порядку реалізації дослідів випадкового характеру за таблицею випадкових чисел;

Таблиця 6

Для $k=2$ (повторні досліді в нульовій ділянці плану)

i	Робоча матриця				Матриця результатів експерименту
	C_1	C_2	$t, ^\circ\text{C}$	$c_1, \%$	y_i
1	C_{12}	C_{22}	140	30	y_1
2	C_{11}	C_{22}	60	30	y_2
3	C_{12}	C_{21}	140	10	y_3
4	C_{11}	C_{21}	60	10	y_4
Повторні досліді в нульовій точці					
5	C_{10}	C_{20}	100	20	y_{05}
6	C_{10}	C_{20}	100	20	y_{06}
7	C_{10}	C_{20}	100	20	y_{07}

Таблиця 7

Для $k=3$ (повторні досліді у кожній точці плану)

i	Робоча матриця						Матриця результатів експерименту		
	C_1	C_2	C_3	$t, ^\circ\text{C}$	$c_1, \%$	$c_2, \%$	y_{i1}	y_{i2}	$\bar{y}_i$
1	C_{12}	C_{21}	C_{31}	140	10	2	y_{11}	y_{12}	$\bar{y}_1$
2	C_{11}	C_{21}	C_{31}	60	10	2	y_{21}	y_{22}	$\bar{y}_2$
3	C_{12}	C_{22}	C_{31}	140	30	2	y_{31}	y_{32}	$\bar{y}_3$
4	C_{11}	C_{22}	C_{31}	60	30	2	y_{41}	y_{42}	$\bar{y}_4$
5	C_{12}	C_{21}	C_{32}	140	10	4	y_{51}	y_{52}	$\bar{y}_5$
6	C_{11}	C_{21}	C_{32}	60	10	4	y_{61}	y_{62}	$\bar{y}_6$
7	C_{12}	C_{22}	C_{32}	140	30	4	y_{71}	y_{72}	$\bar{y}_7$
8	C_{11}	C_{22}	C_{32}	60	30	4	y_{81}	y_{82}	$\bar{y}_8$

У табл. 6 і 7: t – температура розчину; c_1 – концентрація активної речовини; c_2 – концентрація добавки.

г) результатами реалізації дослідів заповнюють робочу матрицю (табл. 6, 7) та матрицю планування (4, 5) в колонці «матриця результатів експерименту»;

г) у разі наявності повторних дослідів в окремих точках плану (одній або кількох точках плану) або окремих нульових точках, або у всіх точках плану, розраховують дисперсію кожного досліді і доводять (або, принаймні, аргіорі приймають) н.з.р. результатів у кожній точці плану і виявляють статистичну рівність цих дисперсій за критерієм Кохрана, Фішера або Бартлета.

1.5. Розрахунки коефіцієнтів моделі (16):

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ji} y_i}{N}, \quad (25)$$

так для $k=2$ отримують рівняння моделі: $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$ (26)

Наприклад:
$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N x_{0i} y_i}{N} = \frac{x_{01} y_1 + x_{02} y_2 + x_{03} y_3 + x_{04} y_4}{4}. \quad (27)$$

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^N x_{1i} y_i}{N} = \frac{x_{11} y_1 + x_{12} y_2 + x_{13} y_3 + x_{14} y_4}{4}, \quad (28)$$

$$b_2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_{2i} y_i}{N} = \frac{x_{21} y_1 + x_{22} y_2 + x_{23} y_3 + x_{24} y_4}{4}, \quad (29)$$

для $k=3$: $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N x_{0i} y_i}{N}, \quad (30)$$

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^N x_{1i} y_i}{N}, \quad (31)$$

$$b_2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_{2i} y_i}{N}, \quad (32)$$

$$b_3 = \frac{\sum_{i=1}^N x_{3i} y_i}{N}. \quad (33)$$

1.6. Напівлінійна модель.

У планах ПФЕ кожний стовпець (граф) матриць $[x_{ji}]$ та $[y_i]$ використовують для розрахунку коефіцієнта моделі (16). Тоді, за кількістю дослідів N планів ПФЕ, можна отримати напівлінійну-нелінійну модель такого вигляду:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 \quad (34)$$

План ПФЕ для k=2 для отримання напівлінійної моделі (34)

i	x ₀	x ₁	x ₂	x ₁ x ₂	y _i
1	+1	+1	+1	+1	y ₁
2	+1	-1	+1	-1	y ₂
3	+1	+1	-1	-1	y ₃
4	+1	-1	-1	+1	y ₄

У табл. 8 стовпець (граф) [x₁x₂] використовується для розрахунку коефіцієнта взаємодії двох факторів:

$$b_{ju} = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ji} x_{ui} y_i}{N}, \quad (35)$$

тоді отримуємо нелінійне (напівлінійне) рівняння моделі (16) за планом (табл. 8) для:

$$\bullet \quad k=2: y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2, \quad (36)$$

$$\text{де } b_{12} = \frac{x_{11} x_{21} y_1 + x_{12} x_{22} y_2 + x_{13} x_{23} y_3 + x_{14} x_{24} y_4}{4}; \quad (37)$$

$$\bullet \quad k=3: y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3, \quad (38)$$

за планом (табл. 9).

Таблиця 9

План ПФЕ для k=3 для отримання напівлінійної моделі (38)

i	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₁ x ₂	x ₁ x ₃	x ₂ x ₃	x ₁ x ₂ x ₃	y _i
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y ₁
2	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	y ₂
3	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	y ₃
4	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	y ₄
5	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	y ₅
6	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	y ₆
7	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	y ₇
8	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	y ₈

Як видно з табл. 9, кожний стовпець-матриця різна, тобто можливо розрахувати аж 8 коефіцієнтів моделі (38).

Для рівняння (38):

$$b_{123} = \frac{x_{j1} x_{u1} x_{m1} y_i}{N}, \quad (39)$$

при цьому оцінки коефіцієнтів (38):

$$\left. \begin{array}{lll} b_0 \rightarrow \beta_0 & b_3 \rightarrow \beta_3 & b_{23} \rightarrow \beta_{23} \\ b_1 \rightarrow \beta_1 & b_{12} \rightarrow \beta_{12} & b_{123} \rightarrow \beta_{123} \\ b_2 \rightarrow \beta_2 & b_{13} \rightarrow \beta_{13} & \end{array} \right\} \quad (40)$$

1.7. Дробовий факторний експеримент (ДФЕ).

Кількість дослідів для $k \geq 3$ можна зменшити, ввівши означення змішаних ефектів.

Так для $k=3$ за планом ПФЕ (табл. 5) кількість дослідів дорівнює при $n=1$:

$$N = p^k \cdot n = 2^3 \cdot 1 = 8 \quad (41)$$

Перехід до напіврепліки ($1/2$) від ПФЕ приведе до плану (табл. 10) і кількості дослідів при $n=1$:

$$N = p^{k-q} \cdot n = 2^{3-1} \cdot 1 = 4 \quad (42)$$

де $q=1$ – кількість лінійних факторів, змішаних з ефектами взаємодії.

Тобто замість $N=8$ дослідів (або $N=16$ при $n=2$) використано $N=4$ дослідів (або $N=8$ при $n=2$).

Таблиця 10

Напіврепліка ($1/2$) від плану ПФЕ для $k=3$
з генеруючим співвідношенням $x_3 = x_1 x_2$

i	x_0	x_1	x_2	$x_3 = x_1 x_2$	y_i
1	+1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	-1	+1	-1	y_2
3	+1	+1	-1	-1	y_3
4	+1	-1	-1	+1	y_4

Після реалізації плану ДФЕ (табл. 10) отримаємо модель:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \quad (43)$$

План напіврепліки ($1/2$) від ПФЕ для $k=3$ характеризується параметрами:

- генеруючим співвідношенням

$$x_3 = x_1 x_2 \quad (44)$$

- визначальним контрастом

$$x_3^2 = x_1 x_2 x_3; \quad 1 = x_1 x_2 x_3, \text{ або } J = x_1 x_2 x_3. \quad (45)$$

А напіврепліка ($1/2$) (табл. 11) від ПФЕ для $k=3$ характеризується:

- генеруючим співвідношенням

$$x_3 = -x_1x_2 \quad (46)$$

- визначальним контрастом

$$x_3^2 = -x_1x_2x_3; 1 = -x_1x_2x_3, \text{ або } J = -x_1x_2x_3 \quad (47)$$

Таблиця 11

Напіврепліка ($\frac{1}{2}$) від плану ПФЕ для $k=3$
з генеруючим співвідношенням $x_3 = -x_1x_2$

i	x_0	x_1	x_2	$x_3 = -x_1x_2$	y_i
1	+1	+1	+1	-1	y_1
2	+1	-1	+1	+1	y_2
3	+1	+1	-1	+1	y_3
4	+1	-1	-1	-1	y_4

Для виявлення змішаних ефектів необхідно виконати операцію множення на визначальному контрасті плану – ДФЕ (табл. 10):

$$\left. \begin{aligned} 1 &= x_1x_2x_3 \\ x_1 &= x_1^2x_2x_3 \Rightarrow x_1 = x_2x_3 \\ x_2 &= x_1x_2^2x_3 \Rightarrow x_2 = x_1x_3 \\ x_3 &= x_1x_2x_3^2 \Rightarrow x_3 = x_1x_2 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Тоді, статистичні оцінки генеральних коефіцієнтів вибірковими коефіцієнтами будуть такі:

$$\left. \begin{aligned} b_0 &\rightarrow \beta_0 \\ b_1 &\rightarrow \beta_1 + \beta_{23} \\ b_2 &\rightarrow \beta_2 + \beta_{13} \\ b_3 &\rightarrow \beta_3 + \beta_{12} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Для $k=4$ можливо створення напіврепліки ($\frac{1}{2}$) від ПФЕ:

ПФЕ ($n=1$) $N = p^k \cdot n = 2^4 \cdot 1 = 16$ із змішаним коефіцієнтом $q=1$:

ДФЕ ($n=1$) ($\frac{1}{2}$ репліка) $N = p^{k-q} \cdot n = 2^{4-1} \cdot 1 = 8$ (табл. 12).

Напіврепліка ($\frac{1}{2}$) (табл. 12) характеризується параметрами:

- генеруюче співвідношення

$$x_4 = x_1x_2x_3 \quad (50)$$

- визначальний контраст

$$x_4^2 = x_1x_2x_3x_4 \Rightarrow 1 = x_1x_2x_3x_4 \quad (51)$$

Дробовий факторний експеримент [напіврепліка ($1/2$)] від повного факторного експерименту ($k=4$) з $q=1$ змішаним ефектом (з генеруючим співвідношенням $x_4=x_1x_2x_3$)

i	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_4=x_1x_2x_3$	y_i
1	+1	+1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	-1	+1	+1	-1	y_2
3	+1	+1	-1	+1	-1	y_3
4	+1	-1	-1	+1	+1	y_4
5	+1	+1	+1	-1	-1	y_5
6	+1	-1	+1	-1	+1	y_6
7	+1	+1	-1	-1	+1	y_7
8	+1	-1	-1	-1	-1	y_8

- статистичні оцінки:

$$\begin{array}{ll}
 & b_0 \rightarrow \beta_0 \\
 x_1 = x_2x_3x_4 & b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{234} \\
 x_2 = x_1x_3x_4 & b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{134} \\
 x_3 = x_1x_2x_4 & b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{124} \\
 x_4 = x_1x_2x_3 & b_4 \rightarrow \beta_4 + \beta_{123}
 \end{array} \quad (52)$$

Дробова репліка високого ступеня дрібності ($1/16$ репліки від ПФЕ з $k=8$) зі $q=4$ лінійними ефектами, змішаними з ефектами взаємодії (табл. 13), має ($n=1$) таку кількість дослідів:

$$\text{ПФЕ } N = p^k \cdot n = 2^8 \cdot 1 = 256 \quad (53)$$

$$\text{ДФЕ (1/16 репліки) } N = p^{k-q} \cdot n = 2^{8-4} \cdot 1 = 16 \quad (54)$$

У цьому випадку:

- частинні генеруючі співвідношення:

$$\begin{array}{l}
 x_5 = x_1x_2x_3x_4 \\
 x_6 = x_1x_2x_3 \\
 x_7 = x_1x_2x_4 \\
 x_8 = x_1x_3x_4
 \end{array} \quad (55)$$

- частинні визначальні контрасти:

$$\begin{array}{l}
 1 = x_1x_2x_3x_4x_5 \\
 1 = x_1x_2x_3x_6 \\
 1 = x_1x_2x_4x_7 \\
 1 = x_1x_3x_4x_8
 \end{array} \quad (56)$$

За операцією множення двох, трьох та чотирьох співвідношень (56)

отримаємо узагальнений визначальний контраст:

$$\begin{aligned}
 1 &= x_1x_2x_3x_4x_5 = x_1x_2x_3x_6 = x_1x_2x_4x_7 = x_1x_3x_4x_8 = x_4x_5x_6 = x_3x_5x_7 = x_2x_5x_8 = \\
 &= x_3x_4x_6x_7 = x_2x_4x_6x_8 = x_2x_3x_7x_8 = x_1x_2x_5x_6x_7 = x_1x_3x_5x_6x_8 = x_1x_6x_7x_8 = \\
 &= x_1x_4x_5x_7x_8 = x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8
 \end{aligned}
 \quad (57)$$

Оцінки за (57):

$$\begin{aligned}
 b_0 &\rightarrow \beta_0 \\
 b_1 &\rightarrow \beta_1 + \beta_{2345} + \beta_{236} + \beta_{247} + \beta_{348} + \beta_{1456} + \beta_{1357} + \beta_{1258} + \beta_{13467} + \beta_{12468} + \\
 &+ \beta_{12378} + \beta_{2567} + \beta_{3568} + \beta_{678} + \beta_{4578} + \beta_{12345678} \\
 b_2 &\rightarrow \beta_2 + \beta_{1345} + \dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \quad (58)$$

Таблиця 13

1/16 репліка від ПФЕ (k=8; q=4; n=1)

i	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	y _i
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y ₁
2	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	y ₂
3	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	y ₃
4	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	y ₄
5	+1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	y ₅
6	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	y ₆
7	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	y ₇
8	+1	-1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	y ₈
9	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	y ₉
10	+1	-1	-1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	y ₁₀
11	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	y ₁₁
12	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	y ₁₂
13	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	y ₁₃
14	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	y ₁₄
15	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	y ₁₅
16	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	y ₁₆

1.8. Процедура обробки експериментальних даних

1.8.1. Визначення статистичної значущості коефіцієнтів математичної моделі (16):

а) за допомогою довірчого інтервалу:

$$\bullet \text{ якщо } |b_j| \geq \Delta b_j, \quad (59)$$

то коефіцієнт значущий порівняно з помилкою експерименту;

$$\bullet \text{ якщо } |b_j| < \Delta b_j, \quad (60)$$

то коефіцієнт незначущий і його можна викинути з рівняння.

Довірча ймовірність того, що генеральний коефіцієнт моделі попаде у довірчий інтервал $b_j \pm \Delta b_j$ становить:

$$p(b_j - \Delta b_j < \beta_j < b_j + \Delta b_j) = 1 - \alpha, \quad (61)$$

де довірчий інтервал розраховують за:

$$\Delta b_j = \frac{S_{\{y\}} t_T \{\alpha; f\}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N n_i}} \quad (62)$$

де $\sum_{i=1}^N n_i = Nn$, якщо $n_1=n_2=\dots=n_i=\dots=n_N=n=\text{const}$;

$\sum_{i=1}^N n_i = N$, якщо $n_i=1=\text{const}$;

$S_{\{y\}}$ – середнє квадратичне значення помилки всього експерименту:

$$S_{\{y\}} = \sqrt{S_{\{y\}}^2}$$

α - рівень значущості: $\alpha=1-p$;

f – число ступенів вільностей;

t_T – табличне значення критерію Стюдента;

n_i – число повторних дослідів в i -точці плану.

б) за критерієм Стюдента, розраховуючи

$$|t_{jp}| = \frac{|b_j|}{S_{\{b_j\}}}. \quad (63)$$

Якщо $|t_{jp}| \geq t_T \{\alpha; f\}$, то коефіцієнт значущий,

а якщо $|t_{jp}| < t_T \{\alpha; f\}$ - незначущий, (64)

де $s_{\{b_j\}}$ - середнє квадратичне відхилення при визначенні j -коефіцієнта.

Дисперсія помилки у визначенні коефіцієнта моделі:

$$S_{\{b_j\}}^2 = \frac{S_{\{y\}}^2}{Nn} \quad (65)$$

під час рівномірного дубляжу дослідів $n_i=n=\text{const}$;

$$S_{\{b_j\}}^2 = \frac{S_{\{y\}}^2}{\sum_{i=1}^N n_i} \quad (66)$$

під час нерівномірного дубляжу дослідів $n_i = \text{var}$;

$$\text{та } S_{\{b_j\}}^2 = \frac{S_{\{y\}}^2}{N}, \quad (67)$$

якщо $n_i = n = 1$;

$S_{\{y\}}^2$ - дисперсія відновлення (помилки всього експерименту);

$$S_{\{b_j\}} = + \sqrt{S_{\{b_j\}}^2} \quad (68)$$

Довірча ймовірність того, що генеральний коефіцієнт моделі попаде в довірчий інтервал $(b_j \pm \Delta b_j)$ становить:

$$P(b_j - S_{\{b_j\}} t_T < \beta_j < b_j + S_{\{b_j\}} t_T) = 1 - \alpha, \quad (69)$$

Якщо N (або Nn) $\geq 10-20$, то можна прийняти, що $t_T\{\alpha; f\} \approx 2$, а $\Delta b_j = 2 S_{\{b_j\}}$.

1.8.2. Розрахунок дисперсії адекватності.

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{SS_{\text{ад}}}{f_{\text{ад}}} \quad (70)$$

1. Число рівнів вільностей:

а) без повторних дослідів $n_0 = 1$ $f_{\text{ад}} = N - \lambda$, (71)

де λ - число коефіцієнтів моделі, включаючи і b_0 ;

б) повторні досліди в нульовій точці (центр експерименту чи певна точка плану)

$$f_{\text{ад}} = N - \lambda - (n_0 - 1), \quad (72)$$

2. Дисперсія адекватності:

а) $n = 1$ (без повторних дослідів):

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{SS_{\text{ад}}}{f_{\text{ад}}} = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{N - \lambda}, \quad (73)$$

де y_i – результат експерименту в i -точці;

$\hat{y}_i$ - результат розрахунку y за моделлю в i -й точці.

б) Дублювання за всіма точками плану експерименту (окрім нульової точки):

- $n_i = \text{const} = n$ (рівномірне дублювання):

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}{N - \lambda} \quad (74)$$

де $\bar{y}_i$ - середнє значення в i -й точці плану $\bar{y}_i = \frac{\sum_{u=1}^n y_{iu}}{n}$.

- $n_i \neq \text{const} = \text{var}$ (нерівномірне дублювання):

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^n (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}{N - \lambda} \quad (75)$$

в) повторні дослідження лише в нульовій або іншій точці плану:

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 - \sum_{i_0=1}^{n_0} (y_{0i} - \bar{y}_0)^2}{N - \lambda - (n_0 - 1)} \quad (76)$$

y_{0i} - результат в i -й нульовій точці;

$\bar{y}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n_0} y_{0i}}{n_0}$ - середня за нульовими точками;

n_0 – кількість повторних дослідів у нульовій точці плану.

г) Дублювання за всіма точками плану, включаючи і нульову точку:

- $n_i = \text{const} = n$:

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N n (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}{N - \frac{(k+2)(k+1)}{2} - (n_0 - 1)} \quad \text{- нелінійна модель} \quad (77)$$

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N n (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}{N - \lambda - (n_0 - 1)} \quad \text{- лінійна модель} \quad (78)$$

де $\bar{y}_i$ - середнє повторних дослідів в i -й точці плану;

k – кількість факторів.

- $n_i \neq \text{const} = \text{var}$:

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^{n_0} (y_{iu} - \hat{y}_i)^2}{N - \lambda - (n_0 - 1)}. \quad (79)$$

1.8.3. Розрахунок дисперсії відновлення:

1) Дублювання лише в нульовій або іншій точці плану:

$$S_{\varepsilon}^2 = S_{\{y\}}^2 = \frac{\sum_{i_0=1}^{n_0} (y_{i_0} - \bar{y}_0)^2}{n_0 - 1} = \frac{SS_0}{f_0}, \quad f_0 = n_0 - 1 \quad (80)$$

2) Дублювання за всіма точками плану:

- $n_i = \text{const} = n$:

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^n (y_{iu} - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (n_i - 1)} = \frac{SS_{\{y\}}}{N(n - 1)} = \frac{SS_{\{y\}}}{f_{\{y\}}} \quad (81)$$

- $n_i \neq \text{const} = \text{var}$:

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (f_i S_i^2)}{\sum_{i=1}^N f_i} \quad (82)$$

де $f_i = n_i - 1$

$$S_i^2 = \frac{\sum_{u=1}^{n_i} (y_{iu} - \bar{y}_i)^2}{n_i - 1} \quad (83)$$

3) $n_i = 1$

$$S_{\{y\}}^2 = S_{\{\bar{y}\}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N - 1}, \quad f = N - 1 \quad (84)$$

$$n_i \neq 1 = \text{const} \quad S_{\{\bar{y}\}}^2 = \frac{S_{\{y\}}^2}{n} \quad (85)$$

1.9. Перевірка адекватності моделі

1. Висувають нульову гіпотезу: H_0 : вибрана модель адекватна.

2. Перевірку H_0 -адекватності моделі – здійснюють за теоретичним (табличним) F_T критерієм Фішера. З цією метою розраховують статистику:

$$F_p = \frac{S_{ад}^2}{S_{\{y\}}^2} = \frac{SS_{ад} / f_{ад}}{SS_{\{y\}} / f_{\{y\}}}, \quad (86)$$

Де дисперсія відновлення $S_{\{y\}}^2$ приймається за дисперсію помилки S_{ε}^2 (для $h=1$ приймають $s_{\{y\}}^2 = s_{\{\bar{y}\}}^2$ - дисперсія середніх).

При порівнянні статистики (91) та табличного значення критерію Фішера F_T можливі такі висновки відносно H_0

а) Якщо $F_p \leq F_T \{\alpha; f_{ад}; f_{\{y\}}\}$, то (87)

H_0 приймається: тобто стверджується, що з рівнем значущості α (ймовірності ризику прийняти невірне рівняння) вибрана модель адекватна (статистично відповідає отриманим експериментальним даним). У (87) α -рівень значущості прийняття рішення $\alpha=1-p$ – ймовірність правильності прийнятого рішення про адекватність моделі; $f_{ад}$ – число ступенів вільностей при перевірці моделі на адекватність (знаменник) у виразах (70)-(79) при розрахунку дисперсії адекватності); $f_{\{y\}}$ – число ступенів вільностей у виразах (80)-(85) при розрахунку дисперсії відновлення.

Ступінь адекватності моделі (для лінійної моделі – ступінь її лінійності):

$$\xi_2(F) = \frac{F_p}{F_T} \geq 1, \quad (88)$$

при цьому залишки ступеню неадекватності (при виборі лінійної моделі – ступінь її нелінійності):

$$\xi_2(F) = \frac{F_p}{F_T} < 1, \quad (89)$$

б) Якщо $F_p > F_T \{\alpha; f_{ад}; f_{\{y\}}\}$, (90)

то H_0 відкидається: стверджується з рівнем значущості α (ймовірності ризику прийняти невірне рівняння), що вибрана модель адекватна (статистично не відповідає отриманим експериментальним даним) зі ступенем неадекватності (для лінійної моделі ступінь її нелінійності):

$$\xi_2(F) = \frac{F_p}{F_T} > 1, \quad (91)$$

при цьому залишки ступеня адекватности (при виборі лінійної моделі – ступінь її лінійности):

$$\xi_2(F) = \frac{F_p}{F_T} \leq 1, \quad (92)$$

При цьому приймають рішення перейти до планування другого чи більш високого порядку та отримати модель другого або більш високого порядку.

1.10. Прийняття рішення після реалізації плану Бокса та створення лінійної моделі

1.10.1. Інтерпретація (аналіза) математичної моделі полягає у переведенні абстрактної математичної моделі на мову експериментатора:

А) Лінійна модель адекватна

Інтерпретація:

1) за абсолютною величиною лінійних коефіцієнтів $|b_j|$ судять про силу внеску j -фактора на значення функції цілі.

2) за $|b_j|$ здійснюють ранжування факторів за впливом на y :

$$y = 12 + 5x_1 - 7x_2 - 2x_3$$

$$x_2 > x_1 > x_3.$$

3) знак b_j :

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ якщо } b_j > 0, \text{ то } \begin{cases} x_j \uparrow \Rightarrow y \uparrow \\ x_j \downarrow \Rightarrow y \downarrow \end{cases} \\ & \bullet \text{ якщо } b_j < 0, \text{ то } \begin{cases} x_j \uparrow \Rightarrow y \downarrow \\ x_j \downarrow \Rightarrow y \uparrow \end{cases} \end{aligned} \quad (93)$$

$$(94)$$

4) при пошуку оптимума ($\hat{e}_{\text{стр}} y$) $y \rightarrow \max (+ b_j) > 0$: одночасне збільшення $x_j \uparrow \Rightarrow y \uparrow$;

при пошуку оптимума $y \rightarrow \min (+ b_j) < 0$: одночасне зменшення всіх $x_j \uparrow \Rightarrow y \uparrow$;

5) у разі врахування ефектів взаємодії (напівлінійна модель)

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2$$

• Якщо ефект $\varepsilon(x_i x_j)$ значимий $(b_{ij}) + b_{ij} > 0$, то одночасне збільшення (або зменшення) двох факторів x_i та $x_j \Rightarrow y \uparrow$ і, навпаки.

• Якщо ефект $\varepsilon(x_i x_j)$ значимий $(b_{ij}) + b_{ij} < 0$, то одночасне збільшення (або зменшення) двох факторів x_i та $x_j \Rightarrow y \downarrow$.

• Якщо ефект $\varepsilon(x_i x_j)$ значимий $(b_{ij}) + b_{ij} > 0$, то комбінації різних знаків:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i > 0 \\ x_j < 0 \end{array} \right\} \text{ або } \left\{ \begin{array}{l} x_i < 0 \\ x_j > 0 \end{array} \right\} \text{ або } \left\{ \begin{array}{l} b_i > 0, b_j < 0 \\ b_i < 0, b_j > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y \downarrow \quad (95)$$

• 6) Якщо $\varepsilon(x_i x_j)$ значимий $(b_{ij}) + b_{ij} < 0$, то комбінації різних знаків:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i > 0, x_j < 0 \\ x_i < 0, x_j > 0 \end{array} \right\} \text{ або } \left\{ \begin{array}{l} x_i < 0, x_j > 0 \\ x_i > 0, x_j < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y \downarrow \quad (96)$$

Прийняття рішення:

1) всі коефіцієнти моделі b_j значущі, центр (нульова точка) або одна із точок плану близькі до оптимуму, то рух до оптимуму за кроковою процедурою **не проводять**, а знаходять $\hat{e}_{\text{хтр}}$ екстремальну точку (max чи min) звичайним математичним методом: беруть перші похідні за $x_1, x_2, \dots, x_k$ і прирівнюють їх до нуля та вирішують систему рівнянь:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x_3} = 0 \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\} \quad (97)$$

2) Якщо точка оптимуму знаходиться далеко від центру експерименту або однієї з точок плану, то здійснюють рух до оптимуму за градієнтним або безградієнтним методами із зупинками для «гайдар-огляду».

Оптимізація:

Після досягнення оптимуму ділянки здійснюють побудову нелінійного плану, знаходять нелінійну модел b , перші похідні прирівнюють до нуля, вирішують систему рівнянь і знаходять точку оптимуму.

Б) Лінійна модель неадекватна

(ступінь неадекватності оцінюють за $\xi_2(F) = \frac{F_p}{F_T} > 1$).

Процедура прийняття рішень:

1. Інтерпретація результатів за лінійною неадекватною моделлю носить приблизний характер.
2. Переходять від лінійної до напівлінійної моделі (враховують коефіцієнти від взаємодій факторів).
3. Змінюють інтервалу варіювання ε_j (зменшення ε_j).
4. Переносять центр плану:
 - а) на зовсім нове місце (рис. 5а);
 - б) використовують точки старого плану (рис. 5б).
5. Добудовують до плану 1-го порядку частину плану, щоби отримати рототабельний план 2-го порядку або будують зовсім новий план 2-го порядку.
6. Пошук оптимуму градієнтним або безградієнтним методами (неадекватна модель вкаже лише напрямок руху) кроковою процедурою із зупинками та «гайдар-оглядом» (досягаючи оптимальної ділянки $\rightarrow$ план 2-го порядку $\rightarrow$ оптимізація через 1-ші похідні).

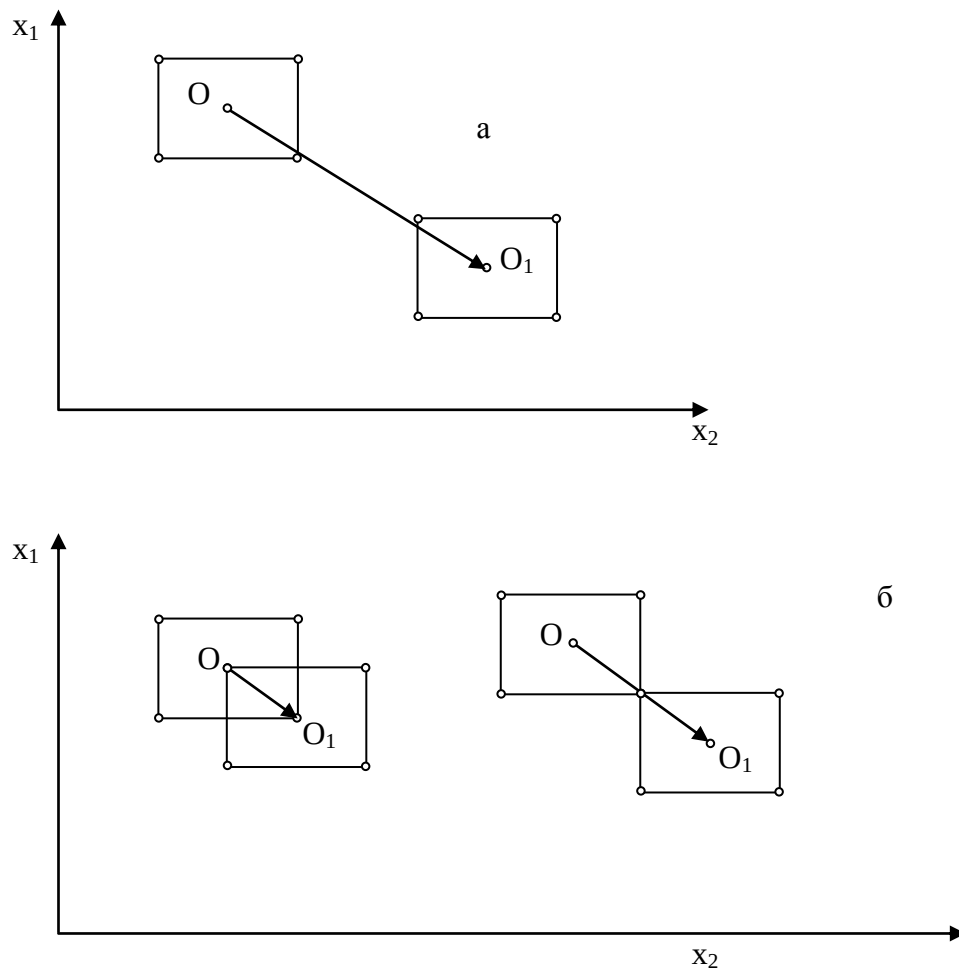


Рис. 5. Побудова нових планів 1-го порядку після завершення аналізу:

а – переніс центру старого плану в нову точку; б – добудова нових планів на точках старого плану.

Список використаних літературних джерел

1. Абезгауз Г.Г. Справочник по вероятностным расчетам. – М., 1970.
2. Адлер Ю.П. Введение в планирование эксперимента. – М.: Металлургия, 1969.
3. Адлер Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – 2-е изд., перераб. и допол. – М.: Наука, 1976. – 280 с.: ил., табл.–Библиогр. в конце гл.
4. Адлер Ю.П., Грановский Ю.В. Обзор прикладных работ по планированию эксперимента. – М.: Изд-во МГУ, 1967. – 96с.
5. Айала Ф., Кайгер Дж. Современная генетика: в 3-х томах/ Пер. с англ. А.Д. Базыкина. – Т.3. – М.: Мир, 1988. – 336с.
6. Айвазян А.С. Статистическое исследование зависимостей. – М.: Металлургия, 1966.
7. Активный эксперимент при рецептурно-технологическом моделировании/ В.А. Вознесенский, В.С. Калмуцкий, Л.А. Коган и др.// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.343-347.
8. Анализ структуры древесных ценозов/ А.И. Бузыкин, В.Л. Гавриков, О.П. Секретенко, Р.Г. Хлебопрос/ Под ред. Д.М. Киреева. – Новосибирск: Наука, 1985. – 95с.
9. Анисимов В.В., Лебедев Е.А. Стохастические сети обслуживания. Марковские модели: Учеб. для вузов. – К.: Либідь, 1992. – 208с.
10. Ахназарова С.Л. Оптимизация эксперимента в химии и химической технологии / С.Л. Ахназарова, В.В. Кафаров. – М.: Высш. шк., 1978. – 320 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 302 – 303 (53 наименов.). – Приложения: с. 304 – 317 (14 табл.).
11. Балантер Б.И., Ханин М.А., Чернавский Д.С. Введение в математическое моделирование патологических процессов. – М., 1980.
12. Баранкевич М.М. Методи і моделі випадкових процесів. – Львів, 1986. – 71с.
13. Баталин Г.И. Сборник примеров и задач по физической химии: Учеб. пособие. Введение: с.7-39 (Обработка результатов наблюдений...). – К.:

Изд-во КДУ, 1960. – 548 с.: ил. 133 рис. – Табл.51. – Прилож.: с.471-539 (15 табл.). – Ответы: с.540-546.

14. Батунер Л.М., Позин М.Е. Математические методы в химической технике. – Л.: Химия, 1968. – 824с.
15. Бейли Н. Математика в биологии и медицине/ Пер. с англ. – М.: Мир, 1970.
16. Бейли Н. Статистические методы в биологии / Норман Бейли; пер. с англ. В.П. Смильги; под ред., предисловии В.В. Налимова. – М.: Мир, 1963. – 272 с. Перевод за изд.: Statistical Methods in Biology by Norman T. J. Bailey, M.A., D.S.C. Reader in Biometry, University of Oxford. – The English Universities Press Ltd., 1959. – ил., табл. – Библиогр.: с. 7 (5 наим.), с. 222 (9 наим.). – Руковод. по применению статист. формул: с. 223 – 259. – Прилож.: с. 260 – 267 (5 табл.).
17. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1980. – 336с.
18. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976.
19. Бендат Дж.С. Измерение и анализ случайных процессов / Дж.С. Бендат, А.Г. Пирсол; пер. с англ. Г.В.Матушевского, В.Е.Привальского; под ред. И.Н.Коваленко. – М.: Мир, 1971. – 408 с. – Перевод за изд.: Measurement and analysis of random data / Julius S. Bendat, Allan G. Piersol. – John Wiley and Sons, Inc. – New York-London-Sydney, 1967.: ил., табл. – Предмет. указатель: с. 403-408. – Библиогр.: с. 400-402 (59 наименов.).
20. Березина Л.Ю. Графы и их применение: Пособие для учителей / Л.Ю. Березина. – М.: Просвещение, 1979. – 144 с.: ил. – Упраж. после гл. – Ответы и указ.: с. 135 – 141. – Библиогр.: с. 132- 134 (73 назв.). – Упраж. после гл.
21. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа/ Под ред. И.Г. Арамановича. – М.: Физматиздат, 1963. – 664с.
22. Бешелев С.Д., Гурвич Ф.Г. Математико-статистические методы экспертных оценок. – М.: Статистика, 1974.
23. Биометрические аспекты изучения целостности организма/ Под ред. Б.С. Шорникова. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 152с.

24. Биометрический анализ в биологии = Biometrical analysis in biology: [собрание науч. работ / отв. ред. Г.Н. Зайцев]. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. – 160 с.: ил., табл. – Библиогр. в конце ст.
25. Биометрия/ Н.В. Глотов, Л.А. Животовский, Н.В. Хованов, Н.Н. Хромов-Борисов. – Л., 1982.
26. Большев Л.Н. Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. – М.: Наука, 1968.
27. Бондар А.Г., Статюха Г.А. Планирование эксперимента в химической технологии. – К.: Вища шк., 1976. – 220с.
28. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986. – 431с.
29. Бородюк В.П. Проверка однородности статистических данных в регрессионном анализе// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С. 7-12.
30. Браунли К.А. Статистические исследования в производстве. – М.: Иностр. лит., 1949.
31. Бродский В.З. Введение в факторное планирование эксперимента. – М.: Наука, 1976. – 225с.
32. Варковецкий М.М., Сазонов А.Л. Методы дисперсионного анализа в текстильных исследованиях. – М.: Легкая индустрия, 1977. – 136с.
33. Василевич В.И. Статистические методы в геоботанике. – Л.: Наука, 1969. – 232с.
34. Введение в методы байесовского статистического вывода/ Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1987. – 335с.
35. Веденепин Г.В. Общая методика экспериментальных исследований и обработка опытных данных. – М., 1973.
36. Венецкий И.Г. Теория вероятностей и математическая статистика / И.Г. Венецкий, Г.С. Кильдишев. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: Статистика, 1975. – 264 с.: ил., табл. – Приложения: с. 255-264 (9 табл.).
37. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука.
38. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1988. – 480с.

39. Веселая Г.Н., Егорова Н.В. О математических моделях технологических процессов, полученных по данным пассивных наблюдений// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.24-28.
40. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник/ В.П. Дубовик, І.І.Юрик, І.П. Волкодав та ін./ За ред. В.П. Дубовика і І.І.Юрика. – К.: А.С.К., 2001. – 480с.
41. Войтенко В.П. Вибірчі технології у дзеркалі математики. – К.: Ін-т відкритої політики, 1999. – 13с.
42. Волков П.Н. Планирование эксперимента. – М.: МАДИ, 1972.
43. Волощенко А.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч.-метод. посібник для самост. вивчення дисц. [для студ. економ. спеціал. вищ. навч. заклад.] / А.Б. Волощенко, І.А. Джалладова; [Мін-во освіти і науки України; гриф: лист № 14 / 18.2-613 від 22.03.2002 р.]. – К.: Київ. Нац. економ. ун-т, 2003. – 256 с.: іл., табл. – Приклади розв. завдань і вправи для самост. розв'язання в кінці розд. – Блочно-модул. контроль: с. 183 – 203 (9 варіантів). – Відповіді: с. 204 – 216. - – Бібліогр.: с. 217 (18 назв). – Додатки: с. 218 – 254 (8 табл.). – ISBN 966 – 574 – 459– 3.
44. Воробьев Ф.П., Голобородько Н.К., Мануйлова А.М. Математическое планирование эксперимента в биохимии и медицине. – Х.: Вища шк., 1977. – 144с.
45. Гаек Я., Шидак З. Теория ранговых критериев. – М.: Наука, 1971.
46. Гиляров А.М. Популяционная экология. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 192с.
47. Гирко В.Л. Спектральная теория случайных матриц. – М.: Наука, 1988. – 375с.
48. Гладышев Е.Г. О стохастической аппроксимации// Теория вероятностей и ее применение. - №2. – 1965.
49. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 447с.
50. Гнеденко Б.В. Математические методы в теории надежности. – М., 1965.
51. Горский В.Г., Адлер Ю.П. Планирование промышленных экспериментов (модели статики). – М.: Metallurgia, 1974. – 264с.

52. Горский В.Г., Адлер Ю.П., Талалай А.М. Планирование промышленных экспериментов (модели динамики). – М.: Металлургия, 1974. – 112с.
53. Горский В.Г., Бродский В.З. О построении рототабельных планов второго порядка на базе симплексов// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.79-88.
54. Грабарник П.Я., Комарова А.С. Статистический анализ горизонтальной структуры древостоя// Моделирование биогеоценотических процессов. – М.: Наука, 1967. – С.119-135.
55. Гришин В.К. Статистические методы анализа и планирования экспериментов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. – 128с.
56. Гублер Е.В., Генкин А.А. Применение непараметрических критериев статистики в медико-биологических исследованиях. – Л., 1973.
57. Далецкий Ю.Л., Белопольская Я.И. Стохастические управления и дифференциальная геометрия. – К.: Выща шк., 1989. – 295с.
58. Демьянов Ю.Э., Литвин Ф.Ф. Применение математических методов и ЭВМ в биологии. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 135с.
59. Деркач М.П. Курс варіаційної статистики. – К.: Вища школа, 1977. – 207с.
60. Дисперсия// БСЭ. – Т.8. - М.: Сов. энциклопедия, 1972. – 592с. – С. 306.
61. Дідух Я.П. Популяційна екологія. – К.: Фітосоціоцентр, 1998. – 192с.
62. Доерфель К. Статистика в аналитической химии. – М.: Мир, 1969.
63. Дорогов В.И., Чистяков В.П. Вероятные модели превращения частиц. – М.: Наука, 1988. – 110с.
64. Доспехов Б.А. Планирование полевого опыта и статистическая обработка его данных. – М., 1972.
65. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. – М.: Статистика, 1973.
66. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001. – 648с.
67. Дэйвисон М. Многомерное шкалирование: Методы наглядного представления данных/ Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1988. – 254с.

68. Дэниел К. Применение статистики в промышленном эксперименте / Кутберт Дэниел; пер. с англ. под ред. Э.К. Лецкого. – М.: Мир, 1979. – 301 с. – Перевод за изд.: Applications of statistics to industrial experimentation / Cuthbert Daniel. – John Wiley and Sons. – New York-London-Sydney-Toronto, 1976.: ил., табл. – Библиогр.: с. 289 – 292 (92 наим.). – Предмет. указатель: с. 293 – 294. – Приложения в конце гл.
69. Егоров Н.С. Основы учения об антибиотиках. – М.: Высш. шк., 1986. – 448с.
70. Езекиэл М., Фокс К. Методы анализа корреляций и регрессий. – М.: Статистика, 1966. – 470с.
71. Жалдак М.И., Квитко А.Н. Теория вероятностей с элементами информатики: Практикум/ Под общ. ред. М.И. Ядренко. – К.: Вища шк., 1989. – 261с.
72. Жлуктенко В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посібник [для студ. економ. вищ. навч. заклад.]: У 2-х ч. – Ч. II. Математична статистика / В.І. Жлуктенко, С.І Наконечний, С.С. Савіна; [Мін-во освіти і науки України; гриф: лист № 14 / 18.2-183 від 27.02.2001 р.]. – К.: Київ. нац. економ. ун-т, 2001. – 336 с.: іл., табл. – Теор. запит. та завдання до теми в кінці теми. – Лаб. роб. після тем 14, 15. – Додатки: с. 242 – 246, 292 – 331. – Бібліогр.: с. 246 (4 назви).– ISBN 966–574–265 – 5.
73. Жоров Ю.М. Моделирование физико-химических процессов нефтепереработки и нефтехимии. – М.: Химия, 1978. – 376с.
74. Журнал «Заводская лаборатория». Математические методы исследования. – М.: Металлургия, 1963-1985.
75. Завадский Ю.В. Математические таблицы для вероятностных расчетов. – М.: МАДИ, 1962.
76. Завадский Ю.В. Методика статистической обработки экспериментальных данных. – М.: ВИНТИ, 1973. – 98с.
77. Завадский Ю.В. Моделирование случайных процессов. – М.: ВИНТИ, 1974. – 100с.

78. Завадский Ю.В. Основные сведения по математической статистике. – М., 1971.
79. Загускин В.Л. Численные методы решения плохо обусловленных задач. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1976.
80. Зажигаев Л.С. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента / Л.С. Зажигаев, А.А. Кишьян, Ю.И. Романиков. – М.: Атомиздат, 1978. – 232 с.: ил., табл. – Приложение: с. 144-229 (16 табл.). – Библиогр.: с. 230-231.
81. Зайдель А.Н. Элементарные оценки ошибок измерений. – М., 1968.
82. Зайцев Г.Н. Методика биометрических расчетов. Математическая статистика в экспериментальной ботанике. – М., 1973.
83. Зак Ш. Теория статистических выводов. – М.: Мир, 1975. – 776с.
84. Згуровський М. Технологічні передбачення як інструмент прийняття стратегічних рішень/ Дзеркало тижня. - №39(363). – 3 жовтня 2001. – С.14.
85. Злобин Ю.А. Принципы и методы изучения ценологических популяций растений. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1989. – 148с.
86. Золотарев В.М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986. – 416с.
87. Иванов А.Б. Поверхности второго порядка// БСЭ. – Т.20. – М.: Сов. энциклопедия, 1975. – 608с. – С. 72-73.
88. Иванов А.З., Круг Г.К. Оптимизация сложного технологического процесса методом эволюционного планирования эксперимента// Труды Москов. энергет. ин-та, 1963. – Вып.51.
89. Иванов А.З., Круг Г.К., Чирков И.М. Экспериментально-статистические методы получения математического описания и оптимизации сложных технологических процессов// Руководящие технические материалы. – М.: НИИТЭХЧМ, 1964. – Вып.2.
90. Изучение экстракционного разделения циркония и гафния с помощью метода симплекс-планирования/ Н.С. Смирнова, Ю.В. Грановский, Л.Н. Комисарова и др.// Теоретические основы химической технологии. – №4.– 1968.

91. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974. – 296с.
92. Іванюта І.Д. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики: навч. посібник [для студ. економ. спеціал. вищ. навч. заклад.] / І.Д. Іванюта, В.І. Рибалка, І.А. Рудоміно-Дусятська; [Мін-во освіти і науки України; гриф: лист № 14 / 18.2-271 від 11.02.2003 р.]. – К.: Слово, 2003. – 271 с.: іл., табл. – Завдання до самостійн. роботи: с. 235 – 261 (15 завд.). – Додатки: с. 262 – 267 (6 табл.). – Бібліогр.: с. 268 (6 назв). – ISBN 966 – 8407 – 01 – 6.
93. К вопросу о математическом планировании химического эксперимента/ Ю.В. Грановский, Л.Н. Комисарова, Н.С. Смирнова, В.И. Спицын// Докл. АН СССР. – 1967. – Т.176. - №3.
94. Кассандрова О.Н. Обработка результатов наблюдений: Учеб. пособие [для студ. высш. учеб. завед.] / О.Н. Кассандрова, В.В. Лебедев. – М.: Наука, 1970. – 104 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 103 – 104 (28 наимен.). – Приложения: с. 91 – 102 (6 табл.).
95. Кафаров В.В. Методы кибернетики в химии и химической технологии. – М.: Химия, 1976.
96. Кельниц Ю.В. Теория ошибок измерений. – М.: Недра, 1967.
97. Кемени Дж.Дж., Снелл Дж.Л., Кнепп А.У. Счетные цепи Маркова/ Пер. с англ. – М.: Наука, 1987. – 416с.
98. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи/ Пер. с англ. под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Наука, 1973. – 900с.
99. Коваленко И.И., Кеденко Б.В. Теория вероятностей. – К.: Вища шк., 1990. – 328с.
100. Коваленко И.И., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1982. – 320с.
101. Козлов М.В. Элементы теории вероятностей в примерах и задачах. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 343с.
102. Козлов М.В., Прохоров А.В. Введение в математическую статистику. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 262с.

103. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – 4-е изд.; пер. с англ. И.Г. Арамановича, А.М. Березмана, И.А. Вайнштейна и др.; под общ. ред. И.Г. Арамановича. – М.: Наука, 1978. – 832 с. – Перевод за изд.: *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review*. – Second, Enlargend and Revised Edition / Granino A. Korn, Ph. D., Theresa M. Korn, M.S. – McGraw-Hill Book Company: New York-San Francisco-Toronto-London-Sydney, 1968. – ил., табл. – Библиогр.: с. 796 – 800 (183 наим.). – Указ. важн. обозн.: с. 801 – 803. – Предмет. указ.: с. 804 – 831. – Перечень табл. по гл.: с. 20 – 22.
104. Коробчук І.В., Коробчук Т.І. Курс теорії ймовірностей та математичної статистики. – Луцьк: Луцьк. держ. техн. ун-т, 2001. – Ч.І. – 148с. – Ч.ІІ – 80с.
105. Коробчук І.В., Коробчук Т.І. Лекції з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. – Луцьк: Луцьк. держ. техн. ун-т, 2001. – 143с.
106. Котов В.Н. Применение теории измерений в биологических исследованиях. – К.: Наукова думка, 1985. – 100с.
107. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 630с.
108. Крышев И.И., Сазыкина Т.Г. Математическое моделирование миграции радионуклидов в водных экосистемах. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 152с.
109. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. – М.: Высш. шк., 1970. – Т.1. – 589с. – Т.2. – 422с.
110. Кузишин О.В. Критерії оцінки розподілу мікрровиступів на поверхні твердого тіла / О.В. Кузишин, О.Г. Сіренко, Л.Я. Мідак, Г.О. Сіренко // Фізика і хімія твердого тіла. – 2008. – Т. 9. – № 2. – С.407-414: іл. 1, табл. 2. – Бібліогр.: с. 412 (52 назви).
111. Куршакова Ю.С. Корреляционный и регрессионный анализ в практическом применении. Теория отбора в популяциях растений. – Новосибирск, 1976.
112. Лаврик В.І. Методи математичного моделювання в екології. – К.: Фітосоціоцентр, 1998. – 132с.

113. Лакин Г.Ф. Биометрия: Учеб. пособие [для биол. спец. вузов] / Георгий Филиппович Лакин. – 4-е изд., пераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1990. – 352 с.: ил., табл. – Прилож.: с. 319 – 345 (26 мат. табл.). - Библиогр.: с. 346 – 347 (58 наим.). – Предмет. указ.: с. 348 – 350.
114. Леман Э. Проверка статистических гипотез. – М.: Наука, 1964.
115. Лещинський О.Л. Практикум з економетрії: Навч. посібник/ О.Л. Лещинський, В.В. Рязанцева. – К: Видавничий Дім «Персонал», 2009. – 256с. – Бібліогр.: с.251-252.
116. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. – М.: Физматгиз, 1962. – 352с.
117. Лукомский Я.И. Теория корреляции и ее применение к анализу производства. – М.: Госстатиздат, 1961.
118. Лысенков А.Н. Математические методы планирования многофакторных медико-биологических экспериментов. – М., 1974.
119. Лысенков А.Н. О некоторых планах второго порядка и их использовании при исследовании многофакторных объектов// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С. 97-111.
120. Любищев А.А. Дисперсионный анализ в биологии. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 200с.
121. Максимов Г.К., Сеницын А.Н. Статистическое моделирование многомерных систем в медицине. – Л., 1983.
122. Малюта М.Б., Заиграев А.Ю. Современные задачи оптимального планирования регрессионных экспериментов. – К.: Вища шк., 1989. – 64с.
123. Маркова Е.В. Латинские квадраты в планировании эксперимента// Заводская лаборатория. – 1968, №1.
124. Маркова Е.В. О применении комбинаторного анализа в планировании эксперимента// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.125-133.
125. Маркова Е.В. Руководство по применению латинских планов при планировании эксперимента с качественными факторами. – Челябинск: УралНИИстройпроект, 1971. – 156с.

126. Маркова Е.В., Лисенков А.Н. Планирование эксперимента в условиях неоднородностей. – М.: Наука, 1973. – 220с.
127. Маркова Е.В., Рохваргер А.Е. Математическое планирование химического эксперимента. – М.: Знание, 1971. – 32с.
128. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 310с.
129. Математические методы в биологии// Труды респуб. конф. – К.: Наукова думка, 1983. – 287с.
130. Математические модели экосистемы: экология и демографические последствия ядерной войны/ Под ред. А.А. Дородницына. – М.: Наука, 1986. – 176с.
131. Математическое моделирование и планирование эксперимента/ Под ред. Г.Н. Богачова. – Л.: Химия, 1971. – 189с.
132. Математичні методи в хімії і хімічній технології/ Ю.К. Руданський, Є.М. Мокрий, З.Г. Піх та ін. – Львів: Світ, 1993. – 208с.
133. Менчер Э.М. О новой методике движения по гиперплоскости методом эволюционного планирования// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.138-144.
134. Меркурьева Е.К. Биометрия в селекции и генетике сельскохозяйственных животных. – М., 1970.
135. Меркурьева Е.К., Шангин-Березовский Г.Н. Генетика с основами биометрии. – М., 1983.
136. Методологические проблемы современной биологии и медицины/ Под ред. Г.И. Царегородцева, В.П. Чекурина. – М.: Медицина, 1969. – 216с.
137. Методы идентификации математических моделей биологических систем. – К.: Вища шк., 1982. – 191с.
138. Методы математической биологии: в 8-ми книгах. Кн. 1. Общие методы анализа биологических систем/ Под ред. И.И. Любимова. – К.: Вища шк., 1980. – 240с.

139. Методы математической биологии: в 8-ми книгах. Кн. 2. Методы синтеза алгебраических и вероятностных моделей биологических систем. – К.: Вища шк., 1981. – 312с.
140. Методы математической биологии: в 8-ми книгах. Кн. 3. Методы синтеза динамических моделей биологических систем. – К.: Вища шк., 1981. – 328с.
141. Методы математической биологии: в 8-ми книгах. Кн. 5. Информационные методы синтеза моделей биологических систем. – К.: Вища шк., 1982. – 240с.
142. Методы Монте-Карло в статистической физике/ К. Биндер, Д. Сиперли, Ж.-П. Ансен и др./ Под ред. К. Биндера. – М.: Мир, 1982. - 400с.
143. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. – М.: Физматгиз, 1961.
144. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра. – М.: Физматгиз, 1962.
145. Мюллер П., Нойман П., Шторм Р. Таблицы по математической статистике / Пер. с нем. и предисловие В.М. Ивановой. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 272 с.: ил.
146. Налимов В.В. Логические основания планирования эксперимента / В.В. Налимов, Т.И. Голикова. – М.: Металлургия, 1976. – 128 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 126 – 128 (81 наим.).
147. Налимов В.В. Применение математической статистики при анализе вещества. – М.: Физматгиз, 1960. – 430с.
148. Налимов В.В. Статистические методы описания химических и металлургических процессов. – М: Металлургиздат, 1963. – 59с.
149. Налимов В.В. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов / В.В. Налимов, Н.А. Чернова. – М.: Наука, 1965. – 340 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 328 – 338 (204 наим.). – Предмет. указ.: с. 339 – 340. – Приложения: с. 309 – 327 (I. Элементы матричной алгебры. Симплексы. II. Планы дробных реплик).
150. Налимов В.В. Теория эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 207с.

151. Неділько С.А. Математичні методи в хімії: підручник [для студ. хім. спеціал. вищ. навч. закладів] / Сергій Неділько; [Мін-во освіти і науки України; гриф: лист № 1 / 11-1536 від 13.04.2004 р.]. – К.: Либідь, 2005. – 256 с.: іл. – Завдання для самостійн. роботи та бібліогр. в кінці розд. – ISBN 966 – 06 – 03843.
152. Нейман Ю. Вводный курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1968.
153. Нелинейная корреляция и регрессия / С.Н. Воловельская, А.И. Жилин, С.А. Кулиш, В.Б. Сивый. – К.: Техніка, 1971. – 130 с.
154. Нельсон Э. Радикально-элементарная теория вероятностей/ Пер. с англ. А.А. Рубана. – Новосибирск, 1995. – 111с.
155. Основы научных исследований/ В.И. Крутов, И.М. Грушко, В.В. Попов и др./ Под ред. В.И. Крутова, В.В. Попова. – М.: Высш. шк., 1989. – 400с.
156. Оценка и сравнение некоторых двухфакторных планов в планировании эксперимента/ Ю.В. Грановский, Н.С. Смирнова, Л.Н. Комисарова, В.И. Спицын// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.112-116.
157. Палеев Н.Р., Кельман И.М. Экстраполяция// БСЭ. – М.: Сов. энциклопедия, 1978. – 632с. – С. 18.
158. Перспективы медицинской генетики/ Под ред. И.П. Бочкова. – М.: Медицина, 1982. – 400с.
159. Петунин Ю.И. Приложение теории случайных процессов в биологии и медицине. – К.: Наукова думка, 1981. – 320с.
160. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – Т.1. – М.: Наука, 1976. – Т.1. – 456с; Т.2. – 576с.
161. Питербарг В.И. Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. – М.: МГУ, 1988. – 174с.
162. Питмен Э. Основы теории статистических выводов/ Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 105с.
163. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / К. Хартман, Э. Лецкий, В. Шефер и др. / пер. с нем. Г.А. Фоминой,

Н.С. Лецкого; под ред. Э.К. Лецкого. – М.: Мир, 1977. – 552 с. Перевод за изд.: Statistische Versuchsplanung und–auswertung in der Stoffwirtschaft / von einem Autorenkollektiv Herausgeber: Klaus Hartmann, Eduard Lezki, Wolfgang Schäfer. – VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1974.: ил., табл. – Библиогр. в конце гл. – Мат. приложения: с. 516 – 540. – Предмет. указатель: с. 541 – 547.

164. Планирование эксперимента при получении отверженных лаковых покрытий на основе хлорсульфированного полиэтилена/ Г.Я. Лозовик, Е.В. Маркова, А.А. Донцов, И.Я. Клинов// Лакокрасочные материалы и их применение. - №6.– 1967.
165. Планирование эксперимента. Сборник первого совещания по планированию. – М.: Наука, 1966.
166. Плохинский Н.А. Биометрия. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970.
167. Поверхности вращения// БСЭ. – Т.20. – М.: Сов. энциклопедия, 1975. – 608с. – С. 72.
168. Позняк Э.Г. Дифференциальная геометрия// БСЭ. – Т.8. - М.: Сов. энциклопедия, 1972. – 592с. – С. 330-332.
169. Позняк Э.Г. Поверхностей теория// БСЭ. – Т.20. – М.: Сов. энциклопедия, 1975. – 608с. – С. 71-72.
170. Прикладная статистика/ С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин/ Под ред. С.А. Айвазяна. – М.: Финансы и статистика, 1980. – 607с.
171. Приложение математических моделей к анализу эколого-экономических систем/ Под ред. И.А. Башалханова, В.А. Батурина. – Новосибирск: Наука, 1988. – 215с.
172. Применение латинских прямоугольников и кубов в планировании эксперимента при поиске новых ингибиторов коррозии/ А.Х. Альхамедан, Е.В. Маркова, В.И. Скрипниченко, М.Ф. Герасимова// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.186-191.
173. Применение математико-статистического метода при оптимизации процесса вулканизации эластомеров солями насыщенных кислот/ А.А.

- Донцов, Е.В. Маркова, В.Э. Михлин, Б.А. Догадкин// Каучук и резина, 1967. - №10.
174. Применение математической статистики при исследовании процесса формирования и вытягивания полипропиленового волокна/ Н.С. Иванов, Е.Н. Марина, Д.Ф. Фильберт, С.Я. Межирова, Ю.П.Адлер// Карбоцепные волокна. – М.: Химия, 1966.
175. Проблемы анализа биологических систем. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 128с.
176. Проблемы планирования эксперимента. Сборник статей. – М.: Наука, 1969.
177. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. Основные положения. Предельные теоремы. Случайные процессы.- М.: Наука, 1987. – 397с.
178. Пуанкарэ Жюль Анри// БСЭ. – Т.21. – М.: Сов. энциклопедия, 1975. – 440 с. – С.211.
179. Райзер Г.Д. Комбинаторная математика. – М.: Мир, 1966.
180. Рего К.Г. Метрологическая обработка результатов технических измерений: Справочное пособие. – К.: Техніка, 1987. – 128 с.: ил. – Табл. 66. – Библиогр.: С.126 (12 назв.).
181. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высш. шк., 1966. – 608с.
182. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. – М.: Инлитиздат, 1963.
183. Рокицкий П.Ф. Биологическая статистика. – Минск, 1967.
184. Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. – М.: Наука, 1971.
185. Румшинский Л.З. Элементы теории вероятностей. – М.: Наука, 1976.
186. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций/ Под ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1970. – 656с.
187. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. –М.: Наука, 1968.
188. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1970. – 304с.

189. Свирежев Ю.М., Пасеков В.П. Основы математической генетики. – М.: Наука, 1982. – 512с.
190. Секей, Габор. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике/ Пер. с англ. В.В. Ульянова; под ред. В.В. Сазонова. – М.: Мир, 1990. – 240с.
191. Сепетлиев Д. Статистические методы в научных медицинских исследованиях. – М., 1968.
192. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера / Виталий Петрович Сигорский. – 2-е изд., стереотип. – К.: Техніка, 1977. – 768 с.: – ил., табл. – Библиогр. в конце гл. – Предмет. указ.: с. 752 – 764.
193. Сиренко Г.А. Основы научных исследований: Программа и методические указания для химиков-технологов. – Хмельницкий: Хмельн. технол. ин-т, 1979. – 34с.
194. Сиренко Г.А., Мандзюк И.А. Оптимизация состава эпоксидных композиций// Пластические массы. – 1977. - №8. – С.25-26.
195. Сіренко Г.О. Методи оцінок впливу факторів на функції відгуку та процедури відсіювання параметрів оптимізації при вирішенні багатопараметричних завдань у матеріалознавстві / Г.О. Сіренко, О.В. Кузишин, О.Г. Сіренко, Л.Я. Мідак, Л.М. Солтис // Фізика і хімія твердого тіла. – 2009. – Т. 10. – № 2. – С.423-439: іл. 2, табл. 10. – Бібліогр.: с. 437-438 (26 назв).
196. Сіренко Г.О., Мідак Л.Я. Про один із підходів до оцінки параметрів трибологічної системи з титановою складовою// Проблеми трибології. – 2002. - № 3, 4. – С. 36-46.
197. Сіренко О.Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 6. Статистичні характеристики стадій розвитку сосни кедрової європейської (*Pinus cembra* L.) / О.Г. Сіренко, О.В. Кузишин // Вісник Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. XII. – С. 176-188: іл. 3, табл. 7. – Бібліогр.: с. 187 (12 назв).

198. Сіренко О.Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 3. Статистичні характеристики. Кореляційний та регресійний аналізи / О.Г. Сіренко, О.В. Кузишин, Л.Я. Мідак // Вісник Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. XI. – С. 76-88: іл. 4, табл. 7. – Бібліогр.: с. 89 (15 назв).
199. Сіренко О.Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 4. Розподіл особин сосни кедрової європейської (*Pinus cembra* L.) та ялини звичайної (*Picea abies*) за нормальним законом Гаусса / О.Г. Сіренко, О.В. Кузишин, Л.Я. Мідак // Вісник Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. XI. – С. 90-98: іл. 1, табл. 1. – Бібліогр.: с. 97 (16 назв).
200. Сіренко О.Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 5. Статистичні характеристики. Дисперсійний аналіз: статистична рівність ряду математичних сподівань особин сосни кедрової європейської (*Pinus cembra* L.) та ялини звичайної (*Picea abies*) / О.Г. Сіренко, О.В. Кузишин // Вісник Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. XI. – С. 98-118: іл. 8, табл. 13. – Бібліогр.: с. 117 (12 назв).
201. Сіренко О.Г. Стан популяцій сосни кедрової європейської (*Pinus cembra* L.) в українських Карпатах: екологічна приуроченість деревостанів (загальний та кореляційний аналіз) / О.Г. Сіренко, О.В. Кузишин, Л.Я. Мідак // Вісник Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. XII. – С. 188-208: іл. 6, табл. 9. – Бібліогр.: с. 207 (32 назви).
202. Сіренко О.Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 1. Постановка завдання / О.Г. Сіренко, О.В. Кузишин // Вісник Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. X. – С. 88-95: іл. 4. – Бібліогр.: с. 94 (16 назв).
203. Сіренко О.Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 2. Статистичні характеристики. Дисперсійний аналіз (статистична рівність ряду генеральних дисперсій) / О.Г. Сіренко, О.В. Кузишин // Вісник Прикарп.

- ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. Х. – С. 95-113: іл. 1, табл. 6. – Бібліогр.: с. 112 (34 назви).
204. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів. – К.: Либідь, 1990. – 167с.
205. Смирнов Н.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений / Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барковский. – М.: Наука, 1969. – Табл. II.
206. Смуров А.В. Статистические методы в исследовании пространственного размещения организмов// Методы почвенно-зоологических исследований. – М.: Наука, 1975. – С.217-240.
207. Снедекор Д.У. Статистические методы в применении к исследованиям в сельском хозяйстве и биологии. – М., 1961.
208. Соболев И.М. Метод Монте-Карло. – М., 1972.
209. Соколов Д.К. Математическое моделирование в медицине. – М, 1974.
210. Солтис М.М., Закордонський В.П. Теоретичні основи процесів хімічної технології. – Львів: Видавн. центр Львів. нац. ун-ту імені Івана Франка, 2003. – 430с.: іл. (80 рис.). – 36 табл. – 1.3. Методи математичної статистики: С.24-46. – 6.6. Дослідження хіміко-технологічного процесу з використанням методів кореляційного та регресійного аналізу: С. 381-405. – Додатки. Статистичні табл.: С.406-410 (4 табл.). – Бібліогр.: С. 413-415 (40 назв). – Предмет. покажчик: С.416-423. – Умов. познач.: С.424-426. – ISBN 966-613-161-7.
211. Сопряженные гиперболы// БСЭ. – Т.24(І). – М.: Сов. энциклопедия, 1976. – 608с. – С. 190.
212. Спиридонов А.А. Планирование эксперимента: Учебное пособие / А.А. Спиридонов, Н.Г. Васильев. – Свердловск: Изд-во Урал. политехн. ин-та, 1975. – 150 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 147-148 (23 наименов.).
213. Спиридонов В.П., Лопаткин А.А. Математическая обработка физико-химических данных. – М.: МГУ, 1971.

214. Справочник по прикладной статистике/ Под ред. Э.Ллойда, У. Ледермана/
Пер. с англ. под ред. Ю.М. Тюрина. – М.: Финансы и статистика, 1980. – Т.1.
– 510с.
215. Стент Г., Кэлиндер Р. Молекулярная генетика/ Пер. с англ. Ю.Н. Зографа,
Т.С. Ильиной, В.Г. Никифорова. – М.: Мир, 1981. – 648с.
216. Степнов М.Н. Статистическая обработка результатов механических
испытаний / Михаил Никитович Степнов. – М.: Машиностроение, 1972. –
232 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 229-230 (36 назв.).
217. Стюарт Иэн. Тайны катастрофы/ Пер. с фр. – М.: Мир, 1987. – 76с.
218. Судьина Е.Г. Вероятность в биологии. – К.: Наук. думка, 1985. -96с.
219. Сытник В.Ф. Основы научных исследований . – К.: Вища шк., 1978. – 184с.
220. Таблицы планов эксперимента для факторных и полиномиальных
моделей/ В.З. Бродский, Л.И. Бродский, Т.И. Голикова и др. – М.:
Металлургия, 1982. – 752с.
221. Теория вероятностей и математическая статистика: Респ. межвед. науч. сб.
– К.: Вища шк., 1987. – Вып. 36. – 136с.; 1987. – Вып. 37. – 133с.; 1988. –
Вып.38. – 131с.
222. Теория подобия и размерностей. Моделирование/ П.М. Алабужев, В.Б.
Геронимус, П.М. Минкевич, Б.А. Шеховцов. – М.: Высш. шк., 1968. – 208с.
223. Теорія ймовірностей та математична статистика. – К.: ТВ і МС, 194. – Вип.
50. – 143с.; 1994. – Вип.51. – 130с.
224. Терентьев П.В., Ростова Н.С. Практикум по биометрии. – Л., 1977.
225. Тихомиров В.Б. Планирование и анализ эксперимента / Владислав
Борисович Тихомиров. – М.: Легкая индустрия, 1974. – 264 с.: ил., табл. –
Приложение: с. 255-257 (4 табл.). – Библиогр.: с. 258-261 (99 наименов.).
226. Ткаченко Н.А. Математические методы и АСУ в бытовом обслуживании. –
К.: Техніка, 1980. – 112с.
227. Уайлд Д. Дж. Методы поиска экстремума. Серия: Теоретические основы
технической кибернетики / Дуглас Дж. Уайлд; пер. с англ.
А.Н. Кабалецкого, Е.П. Маслова, В.Д. Спиридонова; под ред.
А.А. Фельдбаума. – М.: Наука, 1967. – 268 с. Перевод за изд.: Optimum

- seeking methods / Douglass J. Wilde. – Department of chemical Engineering Stanford University. – Prentice-Hall, Inc. – Englewood Cliffs, N.J., 1964.: ил., табл. – Упражнения в конце гл. – Библиогр.: в подстроч. примеч. – Предмет. указатель: с. 265 – 267.
228. Уилсон Р. Введение в теорию графов / Р.Дж. Уилсон; пер. с англ. И.Г. Никитиной; под ред. Г.П. Гаврилова. – М.: Мир, 1977. – 208 с. – Перевод за изд.: Introduction to Graph Theory / Robin J. Wilson. – Oliver and Boyd Edinburg, 1972.: ил. – Упр. после параграф. – Предмет. указатель: с. 202 – 205. – Приложение (табл.): с. 200. – Библиогр.: с. 201 (16 назв.).
229. Урбах В.Ю. Статистический анализ в биологических и медицинских исследованиях. – М., 1975.
230. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента (планирование регрессионных экспериментов): монография / Валерий Вадимович Федоров. – М.: Наука, 1971. – 312 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 309 – 312 (79 наим.).
231. Федорова Г.В. Практикум з біогеохімії для екологів: Навчальний посібник. – К.: КНТ, 2007. – 288 с.: іл. (34 рис.). – Табл. 32. – Ч.І. Розділ 2. Сучасні методи аналізу в біогеохімії: с. 31-87. – Запитання для контролю знань: після гл. – Додатки: с. 263-266. – Бібліогр.: с.267-270 (55 назв.). – Предмет. покажчик: с.271-281. – ISBN 966-373-054-4.
232. Филаретов Г.Ф. К вопросу о построении нелинейной регрессионной модели по данным пассивного эксперимента// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.12-19.
233. Финни Д. Введение в теорию планирования экспериментов. – М.: Мир, 1970.
234. Флейс Дж. Статистические методы для изучения таблиц, долей и пропорций/ Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 319с.
235. Фогель Ф., Мотульски А. Генетика человека. В 3-х томах. – Ч.1. История, хромосомы человека, формальная генетика/ Пер. с англ. Т.Ю. Переслени, С.В. Агеева, К.Н. Гринберга. – М.: Мир, 1989. – 312с.

236. Фогель Ф., Мотульски А. Генетика человека. В 3-х томах. – Ч.2. Действие генов, мутации, популяционная генетика/ Пер. с англ. А.Г. Имашевой, С.Л. Мехедова, Е.Я. Тетушкина. – М.: Мир, 1990. – 378с.
237. Фогель Ф., Мотульски А. Генетика человека. В 3-х томах. – Ч.3. Эволюция человека, генетика поведения, практические аспекты/ Пер. с англ. С.В. Агеева, Е.Я. Тетушкина, А.Н. Чепковой. – М.: Мир, 1990. – 366с.
238. Фоменко А.Т. Статистическая хронология. – М.: Знание, 1990. – 46с.
239. Фомин С.В., Беркинблит М.Б. Математические проблемы в биологии. – М.: Наука, 1973.
240. Хайруллин Р.Х. Математические методы в генетике. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1988. – 186с.
241. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. – М.: Иностранная литература, 1956.
242. Хан Г., Шапиро С. Статистические методы в инженерных задачах. – М., 1969.
243. Хеттманспергер Т. Статистические выводы, основанные на рангах/ Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1987. – 334с.
244. Хикс Ч. Основные принципы планирования эксперимента / Пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – 406 с.
245. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами/ Пер. с англ. В.Д. Скаржинского/ Под ред. В.Г. Горского. – М.: Мир, 1973. – 957с.
246. Холл М. Комбинаторный анализ. – М.: Инлитиздат, 1963.
247. Хомяков П.П., Адлер Ю.П., Налимов В.В. Выявление факторов, влияющих на скорость хлорирования титановых шлаков в расплаве// Заводская лаборатория. – 1963. – Т.29, №1.
248. Худсон Д. Статистика для физиков. – М.: Мир, 1970.
249. Цыпкин Я.З. О восстановлении характеристики функционального преобразования по случайно наблюдаемым точкам// Автоматика и телемеханика. – 1965. - №11.

250. Чернышев М.К., Гаджиев М.Ю. Математическое моделирование иерархических систем с приложениями к биологии и экономике. – М.: Наука, 1983. – 192с.
251. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1987. – 240с.
252. Шакалис В.В. Моделирование технологических процессов. – М.: Машиностроение, 1973. – 136с.
253. Шведков Е.Л. Элементарная математическая статистика в экспериментальных задачах материаловедения. – К.: Наукова думка, 1975. – 110с.
254. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента. – М.Наука, 1972.
255. Шеффе Г. Дисперсионный анализ/ Пер. с англ. – М.: Физматгиз1963. – 628с.
256. Шкільняк С.С. Математична логіка. Основи теорії алгоритмів: Навч. посібник/ С.С. Шкільняк. – К.: Видавничий Дім «Персонал», 2009. – 280с. – Бібліогр. в кінці частин.
257. Экстремум// БСЭ. – М.: Сов. энциклопедия, 1978. – 632с. – С. 19.
258. Эллиот Р. Стохастический анализ и его приложения/ Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 351с.
259. Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений. – М.: Мир, 1968.
260. Box G.E.P., Behnken D.W. Simplexsum Designs: A Class of Second Order Rotatable Designs Derivable from Those of First Order// Annals of Mathematical Statistics. – 1960. – V.31. – N4.
261. Box G.E.P., Behnken D.W. Some New Three Level Designs for the Study of Quantitative Variables// Technometrics. – 1960. – V.2, N4.
262. Connor W.S., Young S. Fractional Factorial Designs for Experiments with Factors of two and three Levels// National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series. – 1961. – 58.
263. Davies O.Z., Hay W.A. The construction and uses of fractional factorial designs in industrial research// Biometrics. – 1950,– N6.
264. Federer W.T. Experimental Design. – N.Y.: Macmillan Comp., 1955.

265. Fisher R.A. The Design of Experiments. – Edinburg-London: Oliver and Boy, 1960.
266. Fisher R.A. Yates F. Statistical tables for biological, agricultural and medical research. – Edinburg-London: Oliver and Boy, 1957.
267. Hartley H.O. Smallest Composite Designs for Quadratic Response Surface// Biometrics. – 1959. – V.15, N1.
268. Robbins H., Monro S. A stochastic approximation method. – Ann. Math. Statist, 1951. – Vol.25, N1.
269. Spendley W., Hext G.R., Himsworth F.R. Sequential Application of Simplex Designs in Optimization and Evolutionary Operation// Technometrics. – 1962. – V.4, N4.